

SOĞUK PLAZMA İÇİNDE DÜZLEMSEL DALGALARIN BİR EMPEDANS YARIM DÜZLEMDEN KIRINIMI

Şule YENER¹

A. Hamit SERBEST²

Çukurova Üniversitesi, Müh-Mimarlık Fakültesi, Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü,
01330, Balcalı, ADANA

¹e-posta: syener@mail.cu.edu.tr

²e-posta: serbest@mail.cu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada soğuk plazma içindeki bir empedans yarım-düzlemden düzlemsel dalgaların kırınım problemi incelenmiştir. Kanonik yapıdaki bu sınır-değer problemi Fourier dönüşümü ile formüle edilmiş ve çıkan matris Wiener-Höpf denklemi Daniele-Khrapkov yöntemiyle faktörize edilerek çözüm kapalı biçimde elde edilmiştir. Ancak, işletme frekansının ω_c 'ye (cyclotron frekansı) göre çok büyük, ω_p (plazma frekansı) ile ise aynı mertebede alınmasıyla, veya dc manyetik alan vektörünün sıfır kabul edilmesiyle, denklemde basitleştirme yapılmış ve çözüm açık biçimde bulunmuştur. Alan integrallerinin asimptotik hesaplanması yüksek frekans kırınım katsayılarını verir.

Anahtar Kelimeler : Soğuk plazma, iyonosfer, empedans yarım-düzlem, Wiener-Höpf yöntemi, semer noktası yöntemi.

1. GİRİŞ

Atmosferin üst katman olan iyonosferde gaz parçacıkları iyonlaşarak serbest elektronlar ile pozitif iyonları içeren plazmayı oluşturmurlar. Serbest elektronların varlığı, iyonosferin yüksek-frekans dalgalarını yansıtmasını ve böylece kısa dalga radyo haberleşmesinin mümkün olmasını sağlar.

Elektromanyetik dalgalar plazma içinde bir dielektrik ortam içinde yayıldıkları şekilde yayılırlar. İyonosferde elektron ve iyonlar elektromanyetik dalganın alanlarına ek olarak bir de yer kürenin manyetik alanından da etkilenirler. Bu da, yüklü parçacıkların dairesel veya spiral yollarda hareket etmesine sebep olur. Böylece, Maxwell denklemleri, hareket denklemleriyle birleştirilerek bütün fiziksel etkileri içeren yeni dielektrik sabitinin bulunduğu yeni Maxwell denklemleri elde edilir. Yer kürenin DC manyetik alanının varlığı, plazmanın anizotrop olmasına neden olur. İyonosferdeki elektron gazının ısısı sonludur fakat elektronların hareketi elektron gazının basınç değişimlerinden de etkilenir. Anizotrop plazmanın karakteristiğini inceleyen magnetiyonik teori, genellikle küçük olan sonlu ısı ve basınç değişimlerinin etkisini ihmal eder ve böylece 'soğuk plazma'dan söz edilir. Soğuk plazma için dielektrik sabiti tensörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [1]

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Burada,

$$\epsilon_1 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (2)$$

$$\epsilon_2 = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right]^{-1} \quad (3)$$

$$\epsilon_3 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \quad (4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Plazma frekansının ifadesi $\omega_p = (N_e e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$ biçimindedir. N_e birim hacimdeki serbest elektronların sayısı, e ve m sırasıyla elektronun yükü ve kütlesidir. Dairesel dönme (cyclotron) frekansı ise DC manyetik alana dik düzlemde dairesel hareket yapan elektronun frekansdır ve $\omega_c = |e| \mu_0 H_{dc} / m$ ile ifade edilir. Burada, H_{dc} DC manyetik alan vektörünün büyüklüğü, ϵ_0 ve μ_0 sırasıyla boşluğun dielektrik sabiti ve manyetik geçirgenliğidir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Empedans yarım-düzlem, $y = 0$ ve $x \in (-\infty, 0)$ düzlemine yerleştirilmiştir. Gelen alan ifadesi

$$H^i = e_x \exp[-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)] \quad (5)$$

şeklinde verilmiştir. Manyetik alanının büyüklüğü 1 A/m olup ϕ_0 , x -eksenine göre geliş açısıdır. Zamana bağlılık $\exp(-i\omega t)$ olarak alınmıştır.

Plazma için Maxwell denklemleri kullanılarak, elektrik alan vektörü bileşenlerinin H_x cinsinden ifadeleri

$$E_x = \frac{i\epsilon_1}{\omega\epsilon_0(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\epsilon_2}{\omega\epsilon_0(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (6)$$

ve

$$E_y = \frac{\epsilon_2}{\omega\epsilon_0(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{i\epsilon_1}{\omega\epsilon_0(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (7)$$

olarak bulunur. Yine, H_z için

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} \right) H_z = 0 \quad (8)$$

yazılır. Bu eşitlikte $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 [(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) / \epsilon_1]$ olmak üzere, H_z 'nin Helmholtz denklemini sağladığı görülür.

Toplam alan, her yerde ($y \leq 0$) gelen ve saçılan alan ifadelerinin toplamı şeklindedir:

$$E^t(H^t) = E^i(H^i) + E(H) \quad (9)$$

Her iki yüzeyinde de aynı Z bağıl empedansı bulunan yarım-düzlem üzerinde Leontovich sınır koşulu yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z^i(x, y)}{\partial y} - i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\partial H_z^i(x, y)}{\partial x} \\ = \pm i \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z H_z^i(x, y), y = \pm 0 \end{aligned} \quad (10)$$

bulunur.

Değişkenlerine ayırma yöntemiyle saçılan alan ifadesi

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_L A(\alpha) e^{-i\alpha x + i\Gamma(\alpha)y} d\alpha, & y > 0 \\ \int_L B(\alpha) e^{-i\alpha x - i\Gamma(\alpha)y} d\alpha, & y < 0 \end{cases} \quad (11)$$

yazılır. Burada $u(x, y)$, $H_z(x, y)$ 'yi göstermektedir.

$\Gamma(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ fonksiyonu kesilmiş kompleks α -düzleminde tanımlı olup $\Gamma(\alpha) = +k$ ve $\alpha \rightarrow \pm\infty$ için $\Gamma(\alpha) = i|\alpha|$ 'dir.

L integrasyon çizgisi regülerlik bandında, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k \cos \phi_0)$, reel eksenle paralel bir düz çizgidir. $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ fonksiyonları ilgili bölgelerdeki sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla hesaplanırlar.

Süreklilik ve sınır koşullarına ters Fourier dönüşümü uygulanır ve $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ elimine edilerek bulunan eşitliklerin toplamı ve farkı sonucunda

$$\begin{aligned} \left[\Gamma(\alpha) + i \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z \right] L_1(\alpha) + \left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \alpha \right] L_2(\alpha) \\ = \hat{U}_1(\alpha) + \hat{F}_1(\alpha), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \alpha \right] L_1(\alpha) + \left[1 + \frac{k^2}{\omega \mu_0 \Gamma(\alpha)} Z_0 Z \right] L_2(\alpha) \\ = \hat{U}_2(\alpha) + \hat{F}_2(\alpha). \end{aligned} \quad (13)$$

yazılır. Burada

$$\hat{U}_1(\alpha) = U_1(\alpha) + U_2(\alpha) \quad (14)$$

$$\hat{U}_2(\alpha) = U_1(\alpha) - U_2(\alpha) \quad (15)$$

$$\hat{F}_1(\alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha) \quad (16)$$

$$\hat{F}_2(\alpha) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha) \quad (17)$$

olarak tanımlanmıştır. $F_{1,2}(\alpha)$ ise kaynak fonksiyonlarının katkısı olup

$$F_1(\alpha) = \frac{\left[ik \sin \phi_0 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} k \cos \phi_0 - i \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z \right]}{2\pi i (\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (18)$$

ve

$$F_2(\alpha) = \frac{\left[ik \sin \phi_0 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} k \cos \phi_0 + i \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z \right]}{2\pi i (\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (19)$$

yazılır.

$L_{1,2}(\alpha)$ ve $U_{1,2}(\alpha)$ spektral fonksiyonları, sırayla, kesilmiş kompleks α -düzleminin alt yarısında ($\text{Im} \alpha < \text{Im}(k \cos \phi_0)$) ve üst yarısında ($\text{Im} \alpha > \text{Im}(-k)$) regüler olan fonksiyonlardır. (12-13)'de verilen denklem sistemi 'matris Wiener-Hopf sistemi'ni oluşturur ve matris formda

$$G(\alpha) L(\alpha) = \hat{U}(\alpha) + \hat{F}(\alpha) \quad (20)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$G(\alpha) = \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha) + i \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z & i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\ -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \alpha & 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{k^2}{\omega \mu_0} Z_0 Z \end{bmatrix} \quad (21)$$

olup, $L(\alpha) = [L_1(\alpha), L_2(\alpha)]^T$, $\hat{U}(\alpha) = [\hat{U}_1(\alpha), \hat{U}_2(\alpha)]^T$ ve $\hat{F}(\alpha) = [\hat{F}_1(\alpha), \hat{F}_2(\alpha)]^T$ dir.

$G(\alpha)$ 'nın Daniele-Khrapkov [2] yöntemiyle faktörizasyonu matris Wiener-Hopf denkleminin formal çözümünü verir. $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ katsayıları, matris Wiener-Hopf denkleminin çözümünden çıkarılan $U(\alpha)$ ve $L(\alpha)$ fonksiyonlarını kullanarak hesaplanabilir.

3. YÜKSEK-FREKANS DURUMUNDAKİ ÇÖZÜM

Çalışma frekansı ω , cyclotron frekansı ω_c 'ye göre çok büyük alınırsa, $\varepsilon_1 = 1 - (\omega_p / \omega)^2$ ve $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ olur. ω 'nın, ω_p ile aynı mertebede olduğu varsayılmıştır. Bu yaklaşım, DC manyetik alan vektörünün sıfır alınmasıyla elde edilecek sonuçla aynıdır.

Böylece, aşağıdaki dekopple denklemler elde edilir :

$$[\Gamma(\alpha) / (\eta h(\alpha))] L_1(\alpha) = \hat{U}_1(\alpha) + \hat{F}_1(\alpha), \quad (22)$$

$$[1 / (\eta h(\alpha))] L_2(\alpha) = \hat{U}_2(\alpha) + \hat{F}_2(\alpha), \quad (23)$$

burada $\eta = 1 / (\sqrt{\varepsilon_1} Z)$ ve $h(\alpha) = \Gamma(\alpha) / [k + \eta \Gamma(\alpha)]$ yazılmıştır. $h(\alpha)$ 'nın faktörizasyonu $h_U(\alpha)h_L(\alpha)$ olarak yapılır (22-23) eşitlikleri

$$\frac{1}{\eta} \frac{\Gamma_L(\alpha)}{h_L(\alpha)} L_1(\alpha) = \frac{h_U(\alpha)}{\Gamma_U(\alpha)} \hat{U}_1(\alpha) + \frac{h_U(\alpha)}{\Gamma_U(\alpha)} \hat{F}_1(\alpha) \quad (24)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{1}{h_L(\alpha)} L_2(\alpha) = h_U(\alpha) \hat{U}_2(\alpha) + h_U(\alpha) \hat{F}_2(\alpha) \quad (25)$$

şeklinde yazılırlar. Burada $h_U(\alpha)$ ve $h_L(\alpha)$, sırasıyla, R_U ve R_L bölgelerinde regüler olan fonksiyonlardır. Diğer taraftan

$$f_1(\alpha) = \frac{h_U(\alpha)}{\Gamma_U(\alpha)} \hat{F}_1(\alpha), f_2(\alpha) = h_U(\alpha) \hat{F}_2(\alpha) \quad (26)$$

fonksiyonları f_{1UL} ve f_{2UL} fonksiyonlarının toplamı şeklinde faktörize edilmelidir. Bu ise

$$f_{1W} = \frac{k \sin \phi_0}{\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \left[\frac{h_U(\alpha)}{\Gamma_U(\alpha)} - \frac{h_U(k \cos \phi_0)}{\Gamma_U(k \cos \phi_0)} \right] \quad (27)$$

$$f_{2W} = -\frac{k \sqrt{\varepsilon_1} Z}{\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} [h_U(\alpha) - h_U(k \cos \phi_0)] \quad (28)$$

ve

$$f_{1L} = \frac{k \sin \phi_0}{\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \cdot \frac{h_U(k \cos \phi_0)}{\Gamma_U(k \cos \phi_0)}, \quad (29)$$

$$f_{2L} = -k \sqrt{\varepsilon_1} Z \frac{h_U(k \cos \phi_0)}{\pi(\alpha - k \cos \phi_0)}. \quad (30)$$

olur. Böylece (24-25) ve (26) eşitliklerinden

$$q_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{\Gamma_L(\alpha)}{h_L(\alpha)} L_1(\alpha) - f_{1L}(\alpha); \operatorname{Im} \alpha < \operatorname{Im}(k \cos \phi_0) \\ \frac{h_U(\alpha)}{\Gamma_U(\alpha)} \hat{U}_1(\alpha) + f_{1W}(\alpha); \operatorname{Im} \alpha > \operatorname{Im}(-k) \end{cases} \quad (31)$$

$$q_2(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{1}{h_L(\alpha)} L_2(\alpha) - f_{2L}(\alpha); \operatorname{Im} \alpha < \operatorname{Im}(k \cos \phi_0) \\ h_U(\alpha) \hat{U}_2(\alpha) + f_{2W}(\alpha); \operatorname{Im} \alpha > \operatorname{Im}(-k). \end{cases} \quad (32)$$

elde edilir. Burada, $q_1(\alpha)$ ve $q_2(\alpha)$ tam fonksiyonlardır. Bunlar, Liouville teoremi yardımıyla alan bileşenlerinin ayrıştıktaki davranışlarından hareketle spektral fonksiyonların $\alpha \rightarrow \infty$ için davranışlarından bulunur, bu problem için $q_1(\alpha)$ ve $q_2(\alpha)$ 'nın sıfır olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece Wiener-Hopf denklemlerinin çözümleri

$$L_1(\alpha) = -i \eta \frac{h_L(\alpha)}{\Gamma_L(\alpha)} f_{1L}(\alpha), \quad (33)$$

$$\hat{U}_1(\alpha) = -\frac{\Gamma_U(\alpha)}{h_U(\alpha)} f_{1W}(\alpha), \quad (34)$$

$$L_2(\alpha) = \eta h_L(\alpha) f_{2L}(\alpha), \quad (35)$$

$$\hat{U}_2(\alpha) = -\frac{1}{h_U(\alpha)} f_{2W}(\alpha), \quad (36)$$

olarak bulunur.

$A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ 'nın ifadeleri (11)'de yerine konursa, saçılan alanın integral ifadesi elde edilmiş olur ve yüksek frekans durumunda integrallerin asimptotik ifadeleri klasik semer-noktası yöntemiyle hesaplanır.

Kırınım alan,

$$u^d(r, \phi) \sim u^i(\theta) D(\phi_0, \phi) \frac{e^{i\alpha r}}{\sqrt{kr}}, \quad (37)$$

KGT (kırınımın geometrik teorisi) formuna uygun biçimde yazılarak, difraksiyon katsayısı ise,

$$D(\phi_0, \phi) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \eta \frac{h_L(-k \cos \phi) h_U(k \cos \phi_0)}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \cdot \left[\sqrt{1 - \cos \phi} \sqrt{1 - \cos \phi_0} + \frac{1}{\eta} \right], y \geq 0, \quad (38)$$

olarak bulunur. $h(\alpha)$ 'nın çarpan faktörleri Malinzhinetz fonksiyonu cinsinden ifade edilirler [3].

4.SONUÇLAR

Soğuk plazma içindeki empedans yarımdüzlemden kırınım problemi için elde edilen saçılan alan ifadeleri nispeten yalındır.

Monostatik durum için difraksiyon katsayısının gözleme açısına göre değişimini gösteren grafiklerde (Şekil-1) empedans olarak, (i0.1), (i0.5) ve (i1.0) imajiner değerleri alınmıştır. Grafiklerde görüldüğü üzere, empedansın veya ϵ_1 'in değerleri arttıkça, difraksiyon katsayısı zayıflamaktadır (Şekil-2). $\epsilon_1 = 1$ durumu ise, ortamın izotrop ve homojen olduğu durumuna karşılık düşer (Şekil-3).

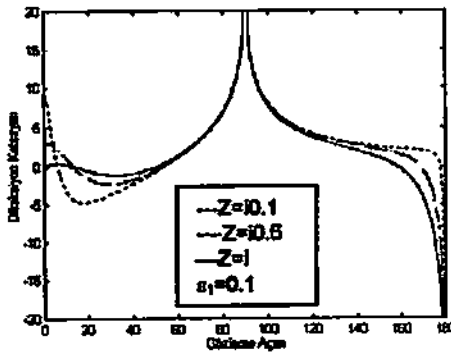
Soğuk plazma içindeki bir empedans yarımdüzlemden düzlemsel dalgaların kırınım problemi ilk kez bu çalışmada ele alınmıştır. Bu nedenle burada elde edilen sonuçları diğer mevcut sonuçlarla doğrulamak mümkün değildir. Fakat, difraksiyon katsayısı basit ortamdaki empedans yarımdüzleme indirgenebilir. $\epsilon_1 = 1$ yazılırsa $\eta = 1/Z$ olur ve

$$D(\phi_0, \phi) = \frac{e^{i\pi/4}}{Z\sqrt{2\pi}} \frac{\pm Z + \sqrt{1 - \cos\phi} \sqrt{1 - \cos\phi_0}}{\cos\phi + \cos\phi_0} \quad (39)$$

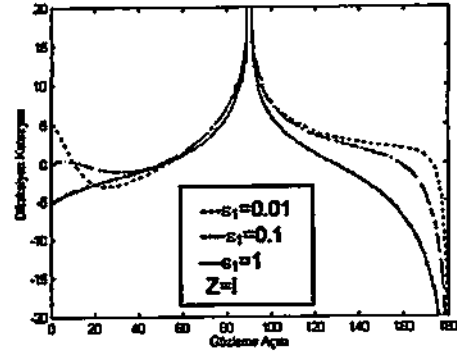
$$.h_U(k \cos\phi_0)h_U(k \cos\phi), y \leq 0$$

şeklinde yazılır. Bu ifade Büyükkaksoy ve Uzgören [4] tarafından verilen çözümle aynıdır. Problemin geometrisindeki farktan dolayı, (39)'da verilen ifadede $\phi \rightarrow \pi + \phi$ ve $\phi_0 \rightarrow \pi + \phi_0$ değişimini yapmak gerekmektedir.

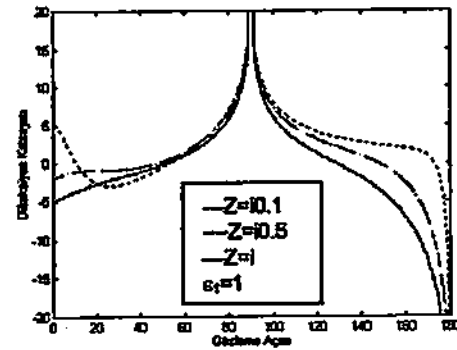
Burada problemin çözümü KGT formunda verilmiştir. Soğuk plazma iyonosfer için bir model oluşturduğundan, uçak, uydu gibi iyonosferdeki karmaşık yapıdaki saçıcıların difraksiyon mekanizmasını incelemek mümkün olabilir.



Şekil-1. $10\log_{10}|D(\phi, \phi_0)|$, $\epsilon_1=0.1$



Şekil-2. $10\log_{10}|D(\phi, \phi_0)|$, $Z=i$



Şekil-3. $10\log_{10}|D(\phi, \phi_0)|$, $\epsilon_1=1$

TEŞEKKÜR

Yazarlar TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu) bu çalışmayı desteklediğinden ötürü teşekkür eder.

KAYNAKLAR

- [1] FELSEN, L. B., and MARCUVITZ, N., 1973, Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall, New Jersey, 888.
- [2] DANIELE, V. 1984, On the Solution of Two Coupled Wiener-Hopf Equations, SIAM J. Appl. Math., 44 (4), 667-680.
- [3] VOLAKIS, J. L., and SENIOR, T. B. A., 1985, Simple Expressions for a Function Occuring in Diffraction Theory, IEEE Trans., AP-33, p. 678.
- [4] BÜYÜKKAKSOY A., UZGÖREN, G., 1999, Kırınım Problemleri, GYTE Yayınları, Gebze, 51-93.