

BİR REEL SİNÜSÜN GENLİK VE FAZ KESTİRİMİ İÇİN KRİTİK FAZ DEĞERLERİ

Erdoğan DİLAVEROĞLU

Elektronik Mühendisliği Bölümü
Uludağ Üniversitesi
16059 Görükle, Bursa
e-mail: dilaver@uludag.edu.tr

Bildiri Konusu: Elektronik-Haberleşme Tekniği ve Sistemleri

ÖZET

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için genlik ve faz kestirimi konusu ele alınmıştır. Model parametreleri için tasarlanmış kestiricilerin değışintileri için bir alt sınır olan Cramér-Rao sınırlarının sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu bilinmektedir. Bu makalede genlik ve faz parametrelerine ilişkin Cramér-Rao sınırlarının en büyük ve en küçük değerlerine karşılık düşen kritik faz değerleri pratik bakımdan önem arz eden bir örnekleme durumu için çıkarılmıştır. Bu kritik faz değerleri yansız kestiriciler veren pratik sistemlerin başarımını test etmede en iyi ve en kötü senaryoları oluşturmak için kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler: Sinüzoidal model, genlik ve faz kestirimi, Cramér-Rao hata sınırı, alçak frekanslı sinüs.

1. GİRİŞ

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan veri modeli birden fazla sinyalden oluşmuş veri modellerin bir prototipidir ve sinyallerin parametreleri (frekans, genlik ve fazları) için tasarlanmış kestiricilerin başarımını test etmede yaygın olarak kullanılmaktadır.

Cramér-Rao (CR) sınırı, bir takım zayıf koşulların sağlanması halinde, bir yansız kestiricinin değışintisi için bir alt sınır vermektedir [1]. Dolayısıyla, CR sınırı kullanılan kestiriciden bağımsız olarak veri modelleri için elde edilebilecek en yüksek başarıyı vermektedir. Sınırın model parametrelerine bağılılığı ile ilgilendirilmektedir.

CR sınırı modele ait Fisher bilgi matrisinin evriği alınmak suretiyle bulunur. Bu matrisin birden fazla sinyal içeren modeller için karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı CR sınırları çözümsel yerine sayısal yoldan hesap edilmektedir [2]. Dolayısıyla, sınırların model parametrelerine olan bağılılıkları sayısal yoldan incelenmektedir.

Reel sinüsün frekansının periodogram kestiricisi kullanılarak kestirilebilecek en düşük (eşik) frekans değerinden (Fourier limiti) daha küçük olduğu durumlarda, sınırların sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, faz değışirken, sınırların alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin ve bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerinin tespit edilmesi önem kazanmaktadır.

Yazarın son zamanlarda yayımlanan bir dizi makalesinde [3-5] burada ele alınan veri modelinin (ve bu modelin kompleks değerli karşılığının) frekans, genlik ve faz parametrelerine ilişkin CR sınırları için matrisel olmayan çözümsel ifadeler çıkarılmıştır. Çözümsel sınır ifadeleri başarım limitlerinin kuramsal olarak incelenmesine olanak verdiğiinden önem arz ederler. Söz konusu ifadeler sınırların sinüsün fazına olan bağılılığını basit bir biçimde ortaya koymaktadır. Dolayısıyla, bu ifadeler en büyük ve en küçük sınır değerlerini ve kritik faz değerlerini tartışmada kullanılabilir.

Bu makalede ele alınan modelin frekans kestiricilerine ilişkin CR sınırının çözümsel ifadesi Kaynak 3'de çıkarılmıştır. Aynı kaynaktan, en büyük ve en küçük frekans sınırları ve karşılık düşen kritik faz değerleri, örnekleme anlarının gelişigüzel seçildiği genel örnekleme durumu için, çözümsel yoldan elde edilmiştir.

Modelin genlik ve faz kestiricilerine ilişkin CR sınırlarının çözümsel ifadeleri Kaynak 4'de çıkarılmıştır. Genlik ve faz sınırlarına ait kritik faz değerlerinin genel örnekleme durumu için çözümsel yoldan bulunması kolay gözükmemektedir. Sınır ifadeleri örnekleme anlarının başlangıç anına ($t=0$ anı) göre simetrik olarak seçilmesi halinde oldukça basitleşmektedir. Kaynak 4'de kritik faz değerleri *simetrik örnekleme durumu için çözümsel olarak elde edilmiştir.*

Simetrik örnekleme pratikte yaygın olarak kullanılmamaktadır. Bu makalede genlik ve faz sınırlarına ait kritik faz değerleri pratikte yaygın bir biçimde kullanılan ve örnekleme anlarının başlangıç anından sonra seçildiği bir örnekleme durumu için sayısal yoldan hesaplanmıştır.

Makale şu biçimde düzenlenmiştir: İkinci bölümde veri modeli tanımlanmıştır. Bu model için CR genlik ve faz sınırlarının çözümsel ifadeleri üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü bölümde sınırlara ait kritik faz değerleri çıkarılmıştır. Çalışmanın sonuçları beşinci bölümde verilmiştir.

2. VERİ MODELİ

Bu makalede bir reel sinüs ve reel beyaz Gauss gürültüsünden oluşan aşağıdaki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır:

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + e(t), \quad t = n, n+1, \dots, n+N-1. \quad (1)$$

Burada α parametresi sinüsün genliğini, ω frekansını, φ fazını göstermektedir. $e(t)$ ortalaması sıfır ve değişimsiz σ^2 olan beyaz Gauss gürültüyü temsil etmektedir. N toplam örnek sayısını ve n örnekleme indisinin ilk değerini göstermektedir.

Model parametreleri α , ω , φ ve σ^2 eldeki N adet örnek değeri $y(n), y(n+1), \dots, y(n+N-1)$ kullanılarak kestirilecektir.

Örnek sayısı N tek ve ilk örnekleme indisi $n = -(N-1)/2$ için örnekleme anları $t=0$ başlangıç anına göre simetrik olmaktadır. Yukarıda da bahsedildiği gibi simetrik örnekleme durumunda sınır ifadeleri sadeleşmekte ve kritik faz değerleri çözümsel yoldan bulunabilmekte ise de biz bu makalede pratikte daha yaygın olan $n=1$ durumunu ele alacağız.

3. GENLİK VE FAZ SINIRLARI

CR teoremine göre, $\hat{\alpha}$, α genliğinin ve $\hat{\varphi}$, φ fazının bir yansız kestiricisi olmak üzere bu kestiricilerin değişimsizliği aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq B_\alpha \quad \text{ve} \quad \text{var}(\hat{\varphi}) \geq B_\varphi.$$

Buradaki B_α ve B_φ büyüklükleri (1) modeline ait Fisher bilgi matrisinin evriğinin, sırasıyla, α ve φ parametrelerine karşılık gelen köşegenel elemanlarıdır.

CR genlik ve faz sınırları B_α ve B_φ için çözümsel ifadeler Kaynak 4'de çıkarılmıştır. Bütünlük açısından bu ifadeler aşağıda tekrar edilmiştir. B_α ve B_φ sınırları sayfanın alt kısmında gösterilen (2) ve (3) ifadeleriyle verilmektedir. Bu ifadelerde SGO sinyalgürültü oranını göstermektedir. $SGO = \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}$. N_i , N'_i ve D_i katsayıları φ fazına bağlı değildir ve $r=0,1$ ve 2 için

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{i=1}^N i^r \quad (4)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{i=1}^N i^r \cos(2\omega i) \quad (5)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{i=1}^N i^r \sin(2\omega i) \quad (6)$$

olmak üzere

$$N_1 = 2\Gamma_0\Gamma_2 + C_0C_2 + S_0S_2 - 2\Gamma_1^2 - C_1^2 - S_1^2$$

$$N_2 = -2\Gamma_0C_2 - 2\Gamma_2C_0 + 4\Gamma_1C_1$$

$$N_3 = 2\Gamma_0S_2 + 2\Gamma_2S_0 - 4\Gamma_1S_1$$

$$N_4 = C_0C_2 - S_0S_2 - C_1^2 + S_1^2$$

$$N_5 = -C_0S_2 - S_0C_2 + 2C_1S_1$$

$$N'_1 = 2\Gamma_0\Gamma_2 - C_0C_2 - S_0S_2 - C_1^2 - S_1^2$$

$$N'_2 = -2\Gamma_0C_2 + 2\Gamma_2C_0$$

$$N'_3 = 2\Gamma_0S_2 - 2\Gamma_2S_0$$

$$N'_4 = -C_0C_2 + S_0S_2 + C_1^2 - S_1^2$$

$$N'_5 = C_0S_2 + S_0C_2 - 2C_1S_1$$

$$D_1 = \Gamma_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) - \Gamma_0(\Gamma_1^2 + C_1^2 + S_1^2) + 2\Gamma_1(C_0C_1 + S_0S_1)$$

$$D_2 = -C_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) - C_0(\Gamma_1^2 + C_1^2 - S_1^2) + 2C_1(\Gamma_0\Gamma_1 - S_0S_1)$$

$$D_3 = S_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) + S_0(\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2) - 2S_1(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1).$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$B_\alpha = \frac{2\sigma^2}{N} \frac{N_1 + N_2 \cos 2\varphi + N_3 \sin 2\varphi + N_4 \cos 4\varphi + N_5 \sin 4\varphi}{2(D_1 + D_2 \cos 2\varphi + D_3 \sin 2\varphi)} \quad (2)$$

$$B_\varphi = \frac{1}{SGO \cdot N} \frac{N'_1 + N'_2 \cos 2\varphi + N'_3 \sin 2\varphi + N'_4 \cos 4\varphi + N'_5 \sin 4\varphi}{2(D_1 + D_2 \cos 2\varphi + D_3 \sin 2\varphi)} \quad (3)$$

N_1 , N_1' ve D_1 katsayıları sınıfsız ω frekansına ve N örnek sayısına bağlıdır; (4)-(6) ifadelerinden katsayıların N 'ye olan bağlılığının, özellikle büyük N değerleri için, zayıf olduğu görülmektedir.

4. KRİTİK FAZ DEĞERLERİ

(2) ve (3) ifadeleri CR genlik ve faz sınırlarını ϕ fazının basit birer fonksiyonu biçiminde verdiğinden oldukça kullanışlıdır.

Sınırların en büyük ve en küçük değerlerini aldığı kritik ϕ faz değerleri (2) ve (3) ifadelerinin ϕ 'ye göre türevi alınıp bu türevin sıfıra eşitlenmesi yoluyla bulunabilir. Burada ele aldığımız $n=1$ örnekleme durumu için söz konusu türevi sıfır yapan kökler en az altıncı dereceden bir polinomu sağlamaktadır. Dolayısıyla, kritik faz değerleri sayısal yoldan bulunmuştur.

Örnekler, sınıfsız frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde

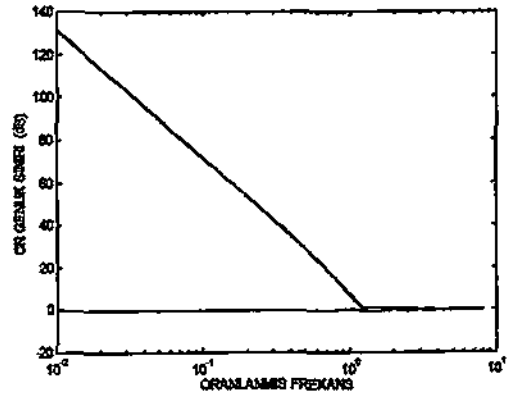
$$\omega < \frac{\pi}{N} \quad (7)$$

CR sınırlarının sınıfsız fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, kritik faz değerlerinin (7) bölgesi için tespit edilmesi önem kazanmaktadır.

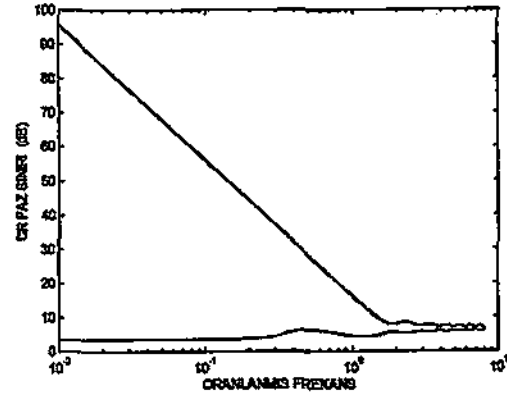
Örnek: CR genlik sınırının en büyük ve en küçük değerleri örnek sayısı $N=16$ için Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekilde dikey eksen $B_{\alpha} \cdot (1/2\sigma^2) \cdot N$ çarpımının değerini, yatay eksen ω frekansının Ω Fourier limiti ($\Omega = \pi/N$) cinsinden değerini (ω/Ω değerini) göstermektedir. Şekilden sınırın en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın $\omega/\Omega < 1$ bölgesinde oldukça fazla olduğu görülmektedir. Sınır bu bölgede sınıfsız fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olmaktadır. $\omega/\Omega > 1$ bölgesinde söz konusu fark azalmaktadır. Bu ikinci bölgede sınırın faza bağlılığı ihmal edilebilir.

Örnek sayısı $N=16$ için en büyük ve en küçük CR faz sınırları Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekilde dikey eksen $B_{\phi} \cdot (SGO) \cdot N$ değerini, yatay eksen ω/Ω değerini göstermektedir. Sınırın $\omega/\Omega < 1$ bölgesinde faza kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu görülmektedir.

Genlik ve faz kestirimine ait kritik faz değerleri, fazın önemli olduğu ve pratik açıdan kullanışlı



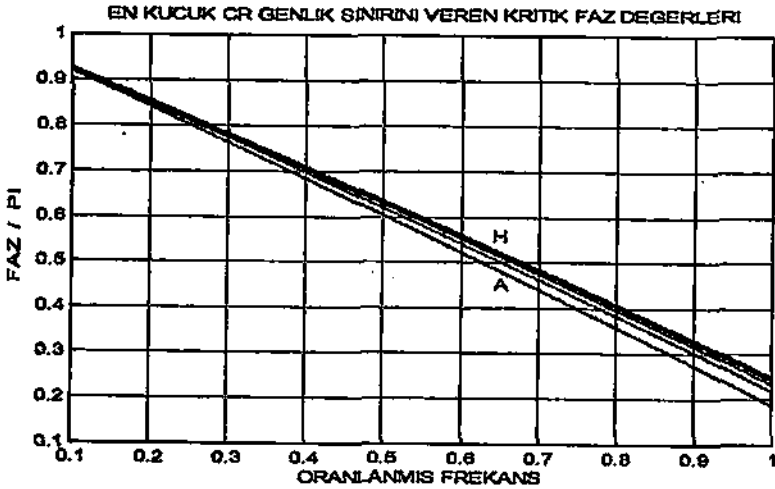
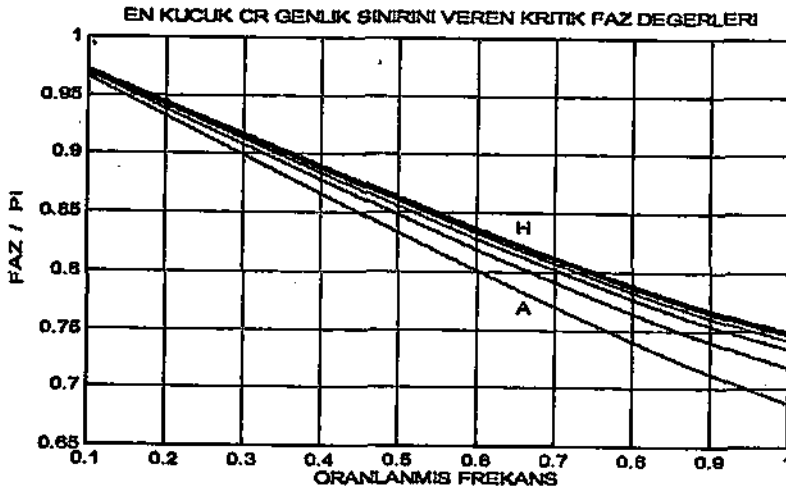
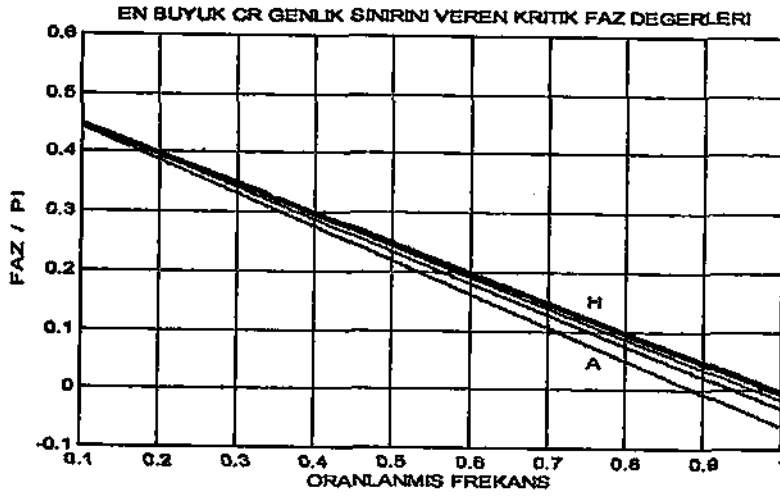
Şekil 1: Bir reel sınıfsız genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük CR sınırlarının sınıfsız frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=16$ ve ilk örnekleme indisi $n=1$ 'dir.



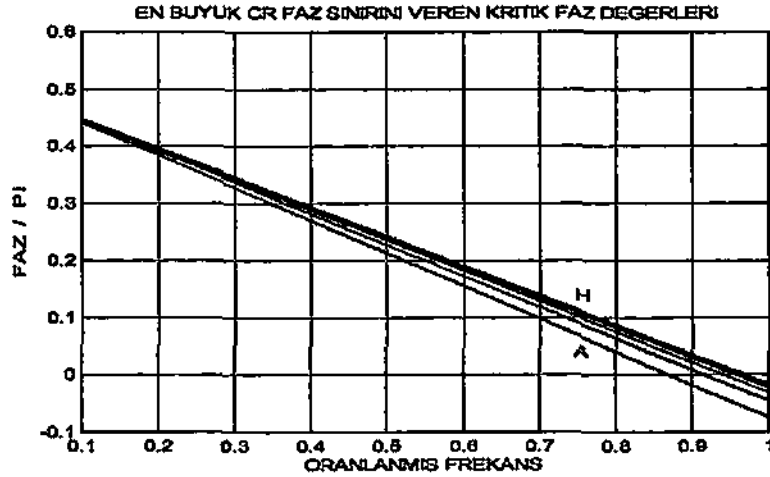
Şekil 2: Bir reel sınıfsız faz kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük CR sınırlarının sınıfsız frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=16$ ve ilk örnekleme indisi $n=1$ 'dir.

olduğuna inandığımız $0.1 < \omega/\Omega < 1$ bölgesi için çıkarılmıştır. Örnek sayısı N için 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ve 1024 değerleri seçilmiştir. Kritik faz değerleri ω/Ω ve N 'nin fonksiyonu olarak verilmiştir.

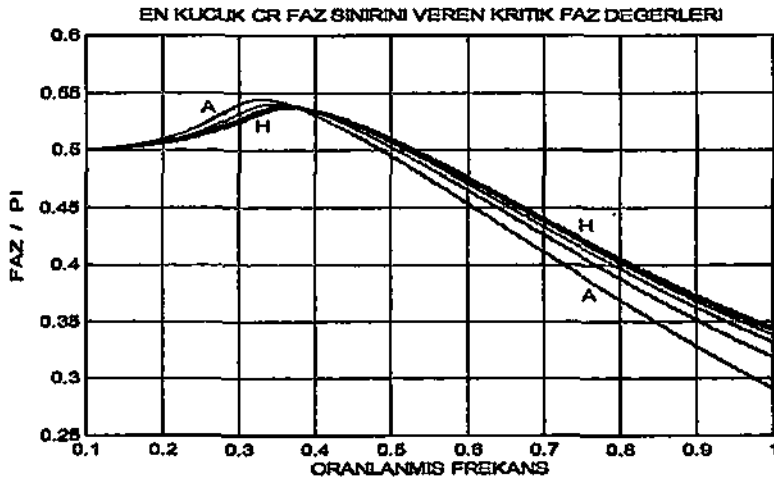
En büyük CR genlik sınırına karşılık düşen faz değeri Şekil 3(a)'da verilmiştir. Belirli bir ω ve belirli bir N değeri için en küçük CR genlik sınırına iki ayrı faz değeri karşılık düşmektedir. Bu global minimumlar Şekil 3(b) ve Şekil 3(c)'de verilmiştir. En büyük CR faz sınırını veren faz değeri Şekil 4(a)'da gösterilmiştir. En küçük CR faz sınırını veren faz değeri Şekil 4(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 3: Bir reel sinyalin genlik kestirimine ait kritik faz değerlerinin sinyalin frekansı ve örnek adeti N ile değişimi: (a) en büyük CR genlik sınırını veren faz değeri, (b) ve (c) en küçük CR genlik sınırını veren faz değerleri. N için 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ve 1024 değerleri alınmıştır. Şekillerde A harfi $N = 8$ durumuna ve H harfi $N = 1024$ durumuna tekabül etmektedir. İlk örnekleme indisi $n = 1$ 'dir.



(a)



(b)

Şekil 4: Bir reel sinüsün faz kestirimine ait kritik faz değerlerinin sinüsün frekansı ve örnek adeti N ile değişimi: (a) en büyük CR faz sınırını veren faz değeri, (b) en küçük CR faz sınırını veren faz değeri. N için 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ve 1024 değerleri alınmıştır. Şekillerde A harfi $N = 8$ durumuna ve H harfi $N = 1024$ durumuna tekabül etmektedir. İlk örnekleme indisi $n = 1$ 'dir.

5. SONUÇLAR

Bu makalede reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeline ait en büyük ve en küçük CR genlik ve faz sınırlarını veren kritik faz değerleri pratikte yaygın biçimde kullanılan bir örnekleme durumu için çıkarılmıştır. Bu kritik faz değerleri, yansız parametre kestiricilerinin başarımını test etmede en kötü ve en iyi senaryoları oluşturmak için kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] VAN TREES, H. L., *Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley & Sons Şirketi, New York, ABD, 1968.

[2] KAY, S. M., *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall Şirketi, New Jersey, ABD, 1988.

[3] DİLAVEROĞLU, E., "Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, No. 2, s. 463-474, 1998.

[4] DİLAVEROĞLU, E., "Bir reel sinüsün genlik ve faz kestiricileri için matrisel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri," 7. IEEE Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, s. 318-323, 17-19 Haziran 1999, Bilkent, Ankara.

[5] DİLAVEROĞLU, E., "İki yakın kompleks sinüsün genlik ve faz kestiricileri için matrisel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri," 8. IEEE Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, s. 545-550, 12-14 Haziran 2000, Belek, Antalya.