Üç Fazlı Sistemlerde Simetrili Bileşenlerin Matrisel incelenmesi

Yazan:
Şerafettin MEMtŞ
Elk. Y. Müh.

Genel olarak simetrili bileşenler metodu her dengesiz sistemde kullanılan ve çok karışık problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir metoddur.

Simetrili bileşenlerde, matris hesabının uygulanması ile problemin çözümünde ilerleme daha sistematik olmakta ve neticeye daha çabuk ulaşılmaktadır.

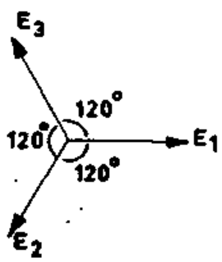
Bu metodu uygulamadan evvel üç fazlı sisteme kısaca göz atalım.

Üç **fazlı** sistem:

1. Üç fazlı dengeli sistem.
   a) Üç fazlı dengeli doğru sistem.
   b) Üç fazlı dengeli ters sistem.
2. Üç fazlı dengesiz sistem.
   a) Üç fazlı dengesiz doğru sistem.
   b) Üç fazlı dengesiz ters sistem.

olarak sınıflandırılabilir.

la. Üç fazlı dengeli doğru sistem vektörel olarak şekil 1 deki gibidir.



Şekil: 1

a = $e^{j\,120°}$ operatörünü kullanarak

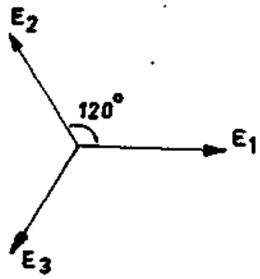
$E_1 = E_1$,

$E_2 =$ .sfi E_1,

$E_3 = a\, E_1$,

olarak ifade edilirler. Burada E_1, E_2 ve E_3 vektörleri üç fazlı sistemde faz-nötr gerilimlerini gösterir. Vektör olarak genlikleri eşit ve aralarında 120° lik açı teşkil ederler. (Elektriki) Vektörlerin birbirini takip sırası saat ibrelerinin dönüş yönündedir.

lb. Üç fazlı dengeli ters sistem de şekil 2 deki gibidir.



Şekil: 2

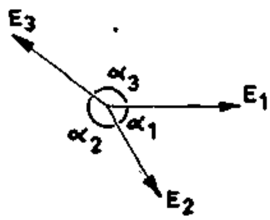
Er = E1,

E_2 = a E1,

$E_a = a?\, E_{1f}$

Şeklinde ifade edilirler. Gene burada da Ej, E_3, E_s vektörlerinin genlikleri eşit ve aralarında 120° lik açı teşkil ederler. Bu defa vektörler birbirlerine saat ibreleri dönüş yönünün aksi istikametinde takip ederler.

2. Üç fazlı dengesiz sistem de şekil 3 deki gibidir.



Sakil: 3

Burada vektörler herhangi bir genlik ve faz farklarını haizdirler. Burada a operatörü kullanılarak diğerleri ,biri cinsinden ifade edilemezler.

Bu sistem aşağıdaki gibi üç bileşen sistemi ile yazılabilir.

$$E_1 = E_{10} + E_{1d} + E_{1i}$$
$$E_2 = E_{20} + E_{2d} + E_{2i}$$
$$E_3 = E_{30} + E_{3d} + E_{3i}$$

Burada o indisi sıfır bileşeni, d indisi doğru bileşeni, i indisi de ters bileşeni ifade eder.

E2 ve E_3 ün simetrik bileşenleri, E1 in simetrik bileşenleri cinsinden yazılabilir.

$E_{10}=E_0$, $E_{1d}=E_d$ ve $E_{1i}=E_i$ diyelim yukandaki bağıntı aşağıdaki şekli alır.

$$E_1 = E_0 + E_d + E_i$$
$$E_2 = E_0 + a^2 E_d + a E_i$$
$$E_3 = E_0 + a E_d + a^2 E_i$$

Bu ifade matrisel olarak yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_d \\ E_i \end{bmatrix} \quad (1)$$ olur.

Bu ifadede :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = E \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} = C_s \quad \begin{bmatrix} E_0 \\ E_d \\ E_i \end{bmatrix} = E_s$$

olarak sembolize edilirse, aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$E = C_s \, . \, E_s \qquad (1a)$$

Ters bağıntı ise:

$$E_s = C_s^{-1} \cdot E \qquad \text{olur.}$$

Burada:

$$C_s^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Ters bağıntıda matrisel olarak değerleri yerlerine koyarak (2a) ifadesi bulunur:

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_d \\ E_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2\,a)$$

C_s matrisine simetrik bileşenler transformasyon matrisi denir ve:

$$C_s^{-1} . \, C_s = 1 \qquad \text{olur.}$$

C_s matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle meydana gelen CS transpoze matris orijinal matrise eşit olur.

$C_S = C_B$ dir.

Diğer taraftan C_s matrisinin her elemanının kompleks konjugesiyle değiştirilerek meydana getirilen C_K matrisi:

$C_s = 3\, C_s^{-1}$ olur.

I_1, I_2, I_3 hat akımlarını göstersin. Akımlar İçin de benzer olarak aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_d \\ I_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

Bu ifadede :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = I \quad \begin{bmatrix} I_0 \\ I_d \\ I_i \end{bmatrix} = I_s \quad \text{diyelim.}$$

Matrisel

$I = C_s \, . \, I_s$ olur. (3a)

Ters ifade ise;

$I_s = C_s^{-1} . \, I$ olur. (4)

Bu ifadede matrisel olarak değerleri yerlerine koyarak (4a) bağıntısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_d \\ I_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4\,a)$$

Sistem dengeli ise gerilim vektörlerinin matrisel ifadesi aşağıdaki gibidir. (Doğru sistem):

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ a^2 E_1 \\ a E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \\ E_1 \end{bmatrix}$$

olur.

Bu ifadeyi (2 a) bağıntısında yerine koyalım.

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_d \\ E_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \\ E_1 \end{bmatrix}$$

Gerekli işlem yapılarak:

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_d \\ E_i \end{bmatrix} = \frac{E_1}{3} \begin{bmatrix} 1+a^2+a \\ 1+a^3+a^3 \\ 1+a^4+a^2 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

$a^3 = 1$ ve $1 + a + a^2 = 0$ bağıntıları gözönünde tutularak.

$$\begin{bmatrix} Eo \\ E, \\ E, \end{bmatrix} = \frac{E,}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Buradan :

$E_o = 0$
$E_d = E»$
$E, = 0$ değerleri bulunur.

Dengeli sistemde akımlar içinde benzer olarak:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I» \\ la \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ a'I_1 \\ a l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{2} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ it \end{bmatrix}$$

yazılır.

Bu ifade (4 â) bağıntısında yerine konularak :

$$\begin{bmatrix} Io \\ id \\ I. \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a? \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

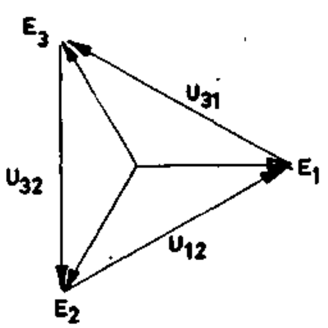
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Gerekli işlemler yapılarak:

$$\begin{bmatrix} I_o \\ I_d \\ I_i \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1+a^a+a \\ 1+a'+a^3 \\ 1+a'+a^5 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan $I_o = 0$, *I»* = I₁, I₁ = O bulunur.

Faz arası gerilimleri ile faz nötr gerilimleri arasındaki münasebet U₁=. *Un,* U,₁ faz gerilimleri olsun:



Ştkİl:«

Faz arası gerilimleri ile faz nötr gerilimleri arasındaki münasebeti yazacak olursak.

- **U.j = E, — Ej**
  Us3 = Eî——E3
  Ū31 = E3 •— E₁

Matrisel olarak bu ifade aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} U_1, \\ Usa \\ U,, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & O \\ O & 1 & -1 \\ -1 & o & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E, \\ E, \end{bmatrix} \quad (5)$$

Bu if adedede:

$$\begin{bmatrix} U_{1s} \\ U\text{-}3 \\ U_{a1} \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 & -1 & o \\ o & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} E_1 \\ E, \\ E, \end{bmatrix}$$

= E

olarak sembolize edilirse ifade :

U = P.E (5.a)

Faz arası gerilimlerin toplamı şekil 4'den görüldüğü gibi sıfırdır.

$U_{1s} = U\text{-}3 = Ü31 = 0$

Faz arası gerilimlerin simetrik bileşeni matrisel olarak:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ Usa \\ U_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_o \\ Ü_d \\ U' \end{vmatrix} \quad (6)$$

Şeklinde yazılır. (Faz-nötr gerilimlerine benzer olarak)

Bu ifadeyi kısaca yazacak olursak:

$$\begin{vmatrix} U_{12} \\ U_{23} \\ Ü.1 \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} U_o \\ U_d \\ U, \end{vmatrix} = U_s \quad \text{diyelim.}$$

tfade kısa olarak:

$U = C_s \,.\, U_s$ olur. (6 a)

Ters bağıntı ise :

$$U, = Cs^{-1} \,.\, U \qquad (7)$$

Ters bağıntıyı açık olarak yazalım .

$$\begin{vmatrix} Uo \\ Ud \\ u. \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a? & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Uu \\ Usa \\ U31 \end{vmatrix} \quad (7\,a)$$

Faz arası gerilimlerinin simetrik bileşenleri ile faz arası gerilimleri arasındaki münasebet (7) bağıntısına göre:

$$Ue = Cs^{-1}.U \quad \text{İdi.}$$

(5 a) bağıntısından U = PJ3. idi.

Yukarıda yerine konursa :

$$U_s = C_s^{-1}.P.E$$

Bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdaki E yerine (1a) daki değeri yerine konularak:

$$U_s = C_s^{-1}.P.C_s.E \quad \text{olur.} \qquad (8)$$

Burada :

$$C_s^{-1}.P.C_s = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&a^2&a\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a^2&a\\1&a&a^2\end{vmatrix}$$

işlemler yapılarak :

$$C_s^{-1}.P.C_s = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1-a^2&0\\0&0&1-a\end{vmatrix}$$

Bu neticeyi (8) bağıntısında yerine koyarak:

$$\begin{vmatrix}U_0\\U_d\\U_i\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0\\0&1-a^2&0\\0&0&1-a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_0\\E_d\\E_i\end{vmatrix}$$

İfadesi bulunur.

Buradan aşağıdaki neticeler elde edilir.

$U_0 = 0$

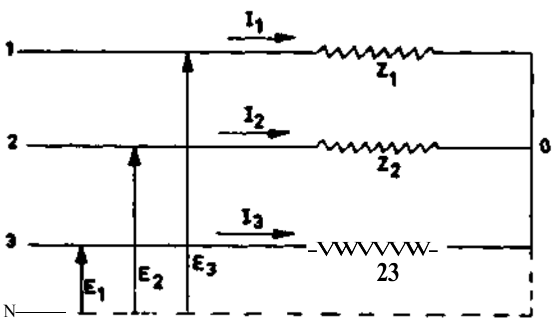
$$U_d = (1 - a^2)\, E_d = \sqrt{3}\, E_d \angle 30^\circ$$

$$U_i = (1 - a)\, E_i = \sqrt{3}\, E_i \angle -30^\circ$$

(8) bağıntısında P matrisi singüler bir matris olduğundan eşitlik tersine çevrilemez. Yani Es, Us cinsinden ifade edilemez.

Üç Fazlı Devrelerin Simetrili Bileşenlerle Matrisel Etüdü:

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi dengesiz bir potansiyel sisteminin, pasif empedanslı dengesiz ve yıldız bağlı bir yüke tatbik edildiğini düşünelim:



Şekil: *5*

Bu devre için kirşof gerilim kanunu yazalım:

$E_1 = Z_1.I_1$

$E_2 = Z_2.I_2$

$E_3 = Z_3.I_3$

Matris olarak ifade edersek:

$$\begin{vmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}Z_1&0&0\\0&Z_2&0\\0&0&Z_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{vmatrix}$$

Burada:

$$\begin{vmatrix}Z_1&0&0\\0&Z_2&0\\0&0&Z_3\end{vmatrix} = Z$$

Olarak gösterilerek, ifade kısaca:

$E = Z . I$ olur (9)

Yukarıdaki bağlantıda E yerine **(1a) daki** ifadesini, I yerinede (3a) daki ifadesini koyarsak :

$C_s . E_s = Z C_s I_s$

Es **yalnız bırakılırsa**

$E_s = C_s^{-1} Z C_s . I_s$ **olur. (10)**

C_s^{-1} Z . Cs ifadesini bulalım. Matrisel değerleri yerlerine konarak:

$$C_s^{-1}.Z.C_s = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&a^2&a\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}Z_1&0&0\\0&Z_2&0\\0&0&Z_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a^2&a\\1&a&a^2\end{vmatrix}$$

Gerekli işlemler yapılarak:

$$C_s^{-1}.Z.C_s = \begin{vmatrix}Z_0&Z_i&Z_d\\Z_d&Z_0&Z_i\\Z_i&Z_d&Z_0\end{vmatrix} \quad \text{elde edilir.}$$

Burada Z_0, Z_d, Z_i empedansların simetrili bileşenleridir.

$$Z_0 = \frac{1}{3}(Z_1+Z_2+Z_3)$$

$$Z_d = \frac{1}{3}(Z_1 + aZ_2 + a^2Z_3)$$

$$Z, = \frac{1}{3}(Z_1+a^2Z_2+aZ_3)$$

Bağıntılarından hesap edilirler.

(10) ifadesini açık olarak yazalım.

$$\begin{vmatrix} E_o \\ E_d \\ E_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_o & Z, & Z_d \\ Z_d & Z_o & Z, \\ Z, & Z_d & Z_o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I, \end{vmatrix} \qquad (10\,a)$$

Şimdide akımların simetrik bileşenlerini gerilimlerin simetrik bileşenleri cinsinden bulalım. Şekil (5) den:

$$I_1 = \frac{1}{Z_1} E_1 = Y_i . E_1$$

$$I, = \frac{1}{Z,} E_2 = Y_2 E_2$$

$$I_s = \frac{1}{Z,} E_a = Y_3 . E_3 \quad \text{yazılır.}$$

Matrisel olarak yazılırsa:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E, \\ E_3 \end{vmatrix} \quad \text{olur.}$$

Burada,

$$\begin{vmatrix} Y_i & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_a \end{vmatrix} = Y$$

olarak gösterilerek, ifade kısaca:

I = Y.E olur. (11)

(11) bağıntısında I yerine (3 a) daki ifadesini, E yerine (1a) daki ifadesini koyarsak:

$C_s . I_s = Y . C_s . E_s$ olur.

I_s'i yalnız bırakarak:

$I_s = C_a^{-1} . Y . C_s . E_s$ (12)

Bağıntısı elde edilir.

$C_9^{-1} . Y . C_a$ ifadesini bulalım. Matrisel değerleri yerlerine konarak:

$$C_s^{-1}.Y.C_s = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Y_o & Y, & Y_d \\ Y_d & Y_o & Y, \\ Y, & Y_d & Y_o \end{vmatrix}$$

Değeri bulunur. Burada YI, Y,, Yd admitansların simetrili bileşenleridir. Ve:

$$Y_o = \frac{1}{3}(Y_i+Y,+Y_s)$$

$$Y_i = \frac{1}{3}(Y_1+aY_s+a'Y,)$$

$$Y. = \frac{1}{3}(Y_1+a'Y_s+aY,)$$

Bağıntılardan hesap edilirler.

(12) ifadesi açık olarak:

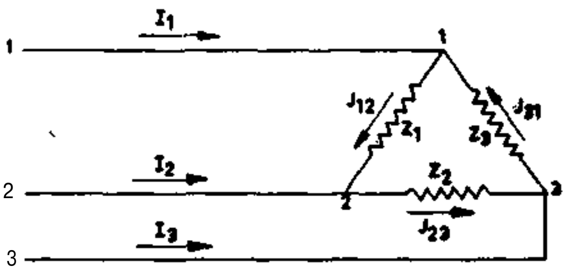
$$\begin{vmatrix} I_o \\ I_d \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_o & Y_i & Y \\ Y_d & Y_o & Y \\ Y_I & Y_d & Y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_o \\ E_d \\ E. \end{vmatrix} \qquad (12\,a)$$

Şeklinde yazılır.

Üç fazlı bir sistemde nötr teli yoksa hat akımlarının toplamı sıfırdır.

$$I_o = \frac{1}{3}(I_1 + I_3 + I_3) = 0$$

Üçgen Bağlı Dengesiz bir yük üzerine dengesiz bir gerilim uygulanması hali:



Şekil: 6

Kirchhoff gerilimler Kanunu her faz için yazalım:

$U_{13} = Z_1 . J_{1a}$

$U_{23} = Z_2 . J_{23}$

$U_{31} = Z_3 . J_{31}$

İfadeyi matrisel olarak yazalım:

$$\begin{vmatrix} U_{12} \\ U_{23} \\ U_{a1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_{13} \\ J_{23} \\ J_{a1} \end{vmatrix}$$

Matrisel ifade kısaca:

$U = Z . J$ (13)

Şeklinde yazılır.

Faz akımlarını simetrili bileşenler cinsinden C_s transformasyon matrisi kullanarak kısaca yazacak olursak :

$J = C_s . J_s$ olur. (14)

(13) ifadesindeki U yerine (6 a) daki değerini ve J yerine de yukarıdaki değeri konursa:

$C_s . U_s = Z . C_s . J_s$ olur.

U_s yalnız bırakılarak :

$U_s = C_s^{-1} Z . C_s . J_s$ bulunur. (15)

$$C_s^{-1} Z . C_s = \begin{vmatrix} Z_o & Z_1 & Z_d \\ Z_d & Z_o & Z_1 \\ Z_1 & Z_d & Z_o \end{vmatrix}$$

olarak daha önce hesaplanmıştı. (15) ifadesi açık olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{vmatrix} U_o \\ U_d \\ U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_o & Z_1 & Z_d \\ Z_d & Z_o & Z_1 \\ Z_1 & Z_d & Z_o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_o \\ J_d \\ J_1 \end{vmatrix} \qquad (15\text{ a})$$

Faz arası gerilimlerin toplamı sıfır ettiğinden yukarıdaki ifadede :

$U_o = 0$ dır.

Faz akımlarının simetrili bileşelerinin faz arası gerilimlerin simetrili bileşenleri cinsinden bulunması daha önce yıldız sistemindekine benzer olarak hesaplanabilir. Burada hesaplanması lüzumsuz addedilmiştir.

Hat Akımlarının Simetrili Bileşenlerinin, faz akımları simetrili bileşenleri cinsinden tâyini :

Hat akımlarının faz akımları cinsinden ifadesi şekil 6 dan:

$I_1 = J_{12} - J_{31}$

$I_2 = J_{12} - J_{23}$

$I_3 = J_{23} - J_{31}$

Matrisel olarak:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_{12} \\ J_{23} \\ J_{31} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

İfade edilir. Burada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = P^t$$

(15 a) ifadesindeki P matrisinin transpozesidir.

(16) ifadesi kısaca:

$I = P^t . J$ (16 a)

Şeklinde yazılır. Bu ifadede I yerine (3 a) daki değerini J yerinede (14) ifadesindeki değerini yerlerine koyarak:

$C_s . I_s = P^t . C_s . J_s$

$I_s = C_s^{-1} . P^t . C_s . J_s$ (17)

Bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdaki $C_s^{-1} \times P^t \times C_s$'i hesap edelim:

$$C_s^{-1} P^t C_s = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

Gerekli işlemler yapılarak :

$$C_s^{-1} P^t . C_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix}$$

Olarak bulunur. Bu değeri (17) ifadesinde yerine koyarak bağıntı açık olarak :

$$\begin{vmatrix} I_o \\ I_d \\ I_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_o \\ J_d \\ J_i \end{vmatrix} \text{ olur.} \qquad (17\text{a})$$

Buradan da:

$I_o = 0$

$I_d = \sqrt{3}\, J_d \,\underline{|-30^\circ}$

$I_i = \sqrt{3}\, J_i \,\underline{|30^\circ}$

Değerleri bulunur.

Dengesiz Sistemlerde Gücün Matrisel ifadesi :

E_1, E_2, E_3 faz-nötr gerilimlerini I_1, I_2 ve I_3 de faz akımlarını göstersin. Matrisel olarak guç ifadesi (Zahiri güç) :

$$N = [E_1 \; E_2 \; E_3] \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}^x \qquad (18)$$

$$= E_1 I^x_1 + E_2 I^x_2 + E_3 I^x_3$$

Kısa ifade ile :

$N = E^t . I^x$ olur. (18 a)

Burada

$E^1 = [E, E, E_3]$

$$I» = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}^x$$

olur. E^1, E nin Transpozesi I^xde I nin kompleks konjugesidir.

Gücün simetrili bileşenler cinsinden değeri:

(18 a) denkleminde E yerine simetrili birleşenler cinsinden değerini, I yerinede gene simetrili bileşenler cinsinden değerini koyarak:

$N = (C_s Es)'. (C_8 Is)^1$ olur.

Matris teorisinde genel olarak:

$(C_s E_s)' = E'_s C'_s$

$(Csls)^* = C^* Is Is^1$

olduğu bilinmektedir. Bu neticeler güç ifadesinde yerlerine konarak :

N = E's.C's . CVPs olur. (19)

Diğer taraftan:

C's = Cs

olduğu daha önceden bilinmektedir.

Ca.Cs* nin değerini hesap edelim.

$$Cs.C's = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a^1 \\ 1 & a' & a? \end{vmatrix}$$

Gerekli işlemler yapılarak:

$$Cs.C^x{}_s = \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+a^2+a' & 1+a'+a^\wedge \\ 1+a+a^2 & 1+1+1 & 1+a+a^1 \\ 1+a+a^2 & 1+a'+a & 1+1+1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$Cs.Cs^1 = 3.1 = 3$ bulunur.

Bu netice a-'= a, a-*= a ve $1+a+a^2 = 0$ olduğu göz önünde tutularak bulunmuştur.

Bulunan Cs $C^x_s = 3$ değeri (19) denkleminde yerine konarak:

$N = E's.3 . Is^1 = 3.E's.I's$ (19 a)

Bağıntısı bulunur. İfadeyi açık olarak ya-: acak olursak:

$$N = 3 [E» E_a E.] \begin{vmatrix} I^x{}_0 \\ I_d{}^x \\ I_i{}^x \end{vmatrix} \quad (19\ b)$$

Yazılır. İşlemler yapılırsa:

$N = (E» I''o + E. I'_a + Eı İM$

olarak elde edilir.

Burada aktif güç:

$P = 3 Re (E_0 I\backslash + Ed Pd + E, I'$,

Reaktif güç:

$Q = 3$ İmaj. (E«, I*o + Ed ¥<, + E, I^1,)

U12, U_2a ve Usı faz arası gerilimleri ve Jı=, Jıa ve J_{31} de faz akımlannı göstersin. Bu halde matrisel olarak güç ifadesi (zahiri güç):

$$N = [U, = U_{=3}\ U_{31}] \begin{vmatrix} Jl3 \\ \\ Jaı \end{vmatrix}^x \quad (20)$$

olarak yazılır. İfade kısa olarak:

$N = U'.J^1$ dir. _ (20 a)

Burada:

u' = [$u_{1=}$ u,, u»ı]

$$J^* = \begin{vmatrix} J_1, \\ J_{23} \\ J_{31} \end{vmatrix}^x$$

Gösterirler (20a) denkleminde U ve J nin yerlerine simetrili bileşenler cinsinden değerleri konarak:

$N = (Cs.U_8)> (Cs-Js)^1$

Burada matrisel kaideye göre :

$(Cs.Us)^1 = U's.Cs^1$

$(CsJs)^1 = C's-Js'$

olduğu gözönünde tutularak ve $C'_s = C_s$ olduğu hatırlatılarak;

$N = U's.Cs.\ Cs.^x.J_s'$ (21)

olarak yazılır. Cs.C's = 3 olarak daha önce hesaplanmıştı. Buna göre:

$N = S.U'sJs^1$ (22)

bulunur. İfade açık olarak yazılırsa :

$$N = 3 [Uo\ Ud\ U_i] \begin{vmatrix} J^*d \\ J^1, \end{vmatrix}$$

Burada Uo + $U1_2$ + U_{a3} + U_{s1} = 0 olduğu biliniyordu.

$$N = 3 [0 \quad U_a \quad U.] \begin{vmatrix} J^x{}_0 \\ J^x{}_d \\ J^1, \end{vmatrix} \quad (22\ a)$$

İşlemler yapılırsa:

N = 3 (Ud -T* + U, J*.) oulr.

Aktif güç ifadesi:

P = 3 Re (Ud J'd + U, J*,)

Reaktif güç ifadesi:

Q = 3 İmaj (U_a J"d + Uı J*ı)

olarak ifade edilir.

Faydalanılan Eserler:

1 — Symmetrical Components (C. F. Wagner and R. O. Evans)

2 — General Networks Analysis (Vilbur R. lepage, Ph. D- Samuel Seely, PhD)