

Kısmi Türevsel Denklemlerle Gri Ölçekli İmge Düzenleme

Grayscale Image Regularization with Partial Differential Equations

Bekir Dizdaroğlu

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon
bekir@ktu.edu.tr

Özet

Bu bildiri, kısmi türevsel denklemleri kullanan gri ölçekli imge düzenleme yaklaşımları genel olarak incelenmiştir. Düzenleme ince imge detaylarını ve kenarları koruyarak giriş imgesinden düzgün bir imge elde etmek olarak düşünülebilir. Amaç, kenar içeren yüksek değişimleri korurken, gürültüye bağlı olarak düşük imge değişimlerini bastırmaktır. Bu enerji işlevselli enküçüklenerek veya doğrudan kısmi türevsel denklemler tasarlanarak yapılabilir. Deneysel sonuçlar yöntemlerin gürültü azaltmayı sağladığını göstermektedir.

Abstract

In this paper, grayscale image regularization approaches using partial differential equations are generally reviewed. The regularization can be considered as obtaining a smooth image from input image, while preserving edges and fine image details. The aim is to suppress low image variations due to noise, while preserving high ones representing edge. This can be done by minimizing energy functionals or soundly designing partial differential equations. Experimental results show that the methods provide noise reduction.

1. Giriş

Kısmi türevsel denklemlerin imge ve video işleme alanında kullanımı, özellikle 1980 yılından itibaren oldukça artmıştır. Doğrusal olmayan denklemler, günümüzde imge iç boyama, bölütleme, çakıştırma, onarma ve düzenleme gibi birçok işlemlere uygulanmakta ve bu tür tekniklerle görsel olarak kabul edilebilir sonuçların elde edilmesi sağlanabilmektedir [1-11].

Kısmi türevsel denklemlerle imge düzenleme işlemi, örneğin imgedeki gürültünün azaltılması, doğrusal olmayan bir süzgeç davranışı gibi düşünülebilir; gerçekleştirilen yöntemle imge bilgisi yavaş bir şekilde basitleştirilir ve böylece imgedeki değişimler de en aza indirgenmiş olur [1].

Bu çalışmada, kısmi türevsel denklemler kullanılarak gri ölçekli imge düzenleme için geliştirilen teknikler genel olarak incelenmiştir.

2. Genel İnceleme

Bilgisayarlı görsel ve imge işleme alanlarında düzenleme yaklaşımları son zamanlarda oldukça hızlı bir gelişme

göstermiştir. Çalışmalar, aslında imgenin özneliklerinin korunarak imge verisinin basitleştirilmesi üzerine yoğunlaşmıştır.

Yönbağımsız düzenleme, imge verisini düzeltmekte ve sadeleştirmektedir. Bu yaklaşım için birçok matematiksel formüller geliştirilmiştir. Tikhonov tarafından önerilen onarma tekniğinde, imge aslında klasik bir doğrusal süzgeçten geçirilmektedir [6].

$I_{gürültü}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ düzenlenecek gürültülü gri ölçekli imgeyi gösterebilir. n gürültüsü, düşük genlikli ve yüksek frekans değişimlerine sahip olsun ve özgün imge verisine eklendiği varsayalım:

$$I_{gürültü} = I_{özgün} + n \quad (1)$$

$I_{gürültü}$ imgesini düzenlemek için kullanılan en genel yaklaşım, $\|\nabla I\|$ gradyan normu kestirimiyle imgenin değişimini en aza indirmektir. İşlevsel enküçükleme için aşağıdaki enerji denklemi verilebilir:

$$\min_{I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}} E_{Tikhonov}(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2 d\Omega \quad (2)$$

İmgedeki bir noktanın gradyan bilgisi,

$$\nabla I = (I_x, I_y)^T = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right)^T \quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilir ve bu vektör, o noktadaki en büyük uzamsal değişimin yönünü verir. Burada I_x ve I_y sırasıyla x ve y yönündeki birinci türevlerdir ve Taylor formülüne bağlı olarak merkezi farklar yöntemine göre aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$I_x = (I(x+1, y) - I(x-1, y))/2 \quad (4)$$

$$I_y = (I(x, y+1) - I(x, y-1))/2 \quad (5)$$

Yukarıda verilen $E_{Tikhonov}(I)$ ifadesi Euler-Lagrange denklemleri yöntemi kullanılarak enküçüklenebilir:

$$\frac{\partial E}{\partial I} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial I_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial I_y} = 0 \quad (6)$$

Burada,

$$F = \|\nabla I\|^2 = \left(\sqrt{I_x^2 + I_y^2} \right)^2 \quad (7)$$

şeklinde alınmıştır. Kısmi türevsel denklemlerin direkt ve zor olan çözümlerinden kaçınmak için, klasik özyineli yöntem olan gradyan (bayır) inişi metodu kullanılabilir. Denklem 6, işlevsel $E_{Tikhonov}(I)$ 'nin gradyanını gibi düşünülebilir. Başlangıç fonksiyonu olarak $I_{(t=0)} = I_{gürültülü}$ alınır ve $E(I)$ fonksiyonunun yerel enküçükleme olan I_{min} değerini bulmak için bu gradyanın karşıt yönü hesaba katılır:

$$\begin{cases} I_{(t=0)} = I_{gürültülü} \\ \frac{\partial I}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial I_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial I_x}\right) \end{cases} \quad (8)$$

Denklem çözümlendiğinde,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_{xx} + I_{yy} = \Delta I \quad (9)$$

elde edilir. Burada Δ , Laplace işlecidir ve I_{xx} ve I_{yy} ise aşağıdaki gibi alınabilir:

$$I_{xx} = I(x+1, y) + I(x-1, y) - 2I(x, y) \quad (10)$$

$$I_{yy} = I(x, y+1) + I(x, y-1) - 2I(x, y) \quad (11)$$

Düzenleştirme terimi bilinen ısı denklemidir. Bu tür kısmi türevsel denkleme yayılım denklemi de denir. Yön bağımsız düzenleştirme alçak geçiren bir süzgeç gibi davranış gösterir, başka bir ifadeyle imgedeki yüksek frekans bileşenlerini bastırır. Fakat imgedeki kenar içeren bölgeler de gürültü gibi yüksek frekans işaretleri içerdiğinden, yön bağımsız yöntemle hızlı bir şekilde bulanıklaştırılır. Bu yüzden doğrusal olmayan ve yön bağımlı düzenleştirme yöntemlerine ihtiyaç duyulmuştur.

Yön bağımsız düzenleştirmeye bağlı doğrusal yöntemlerin sınırlamalarını ortadan kaldırmak için, Perona ve Malik ısı denkleminin doğrusal olmayan uzantısını geliştirmiştir [7]. Aslında ısı denklemi ıraksay biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \text{div}(\nabla I) = \text{trace}(\mathbf{H}) = I_{xx} + I_{yy} \quad (12)$$

Burada \mathbf{H} , I 'nin Hessian matrisidir:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Matriste $I_{xy} = I_{yx}$ olarak alınabilir.

Denklemdaki ıraksay ifadesinde $[0,1]$ değerleriyle sınırlı $c(\|\nabla I\|)$ fonksiyonu da kullanılarak düzenleştirme işleminin daha doğruluklu yapılmasına olanak sağlanmıştır:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) \quad (14)$$

Burada $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kenarlarda (yüksek gradyanlarda) yayılımı durdurmak için azalan, oldukça düzgün bölgelerde (düşük gradyanlarda) yön bağımsız düzenleştirme için 1 değerine yakın bir işlev davranışı gösterir:

$$c(\|\nabla I\|) = \exp\left(-\frac{\|\nabla I\|}{K^2}\right) \quad (15)$$

K , homojen bölgeler ile kenar bölgelerindeki farklılığa bağlı olarak seçilen sabit bir gradyan eşliğidir. Kısmi türevsel denklemin yayılım davranışını tam olarak anlayabilmek için, bu ifadeyi aşağıdaki gibi de yazabiliriz [8]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_{\xi} I_{\xi\xi} + c_{\eta} I_{\eta\eta} \quad (16)$$

Burada $c_{\xi} = c(\|\nabla I\|)$ ve $c_{\eta} = c'(\|\nabla I\|)\|\nabla I\| + c(\|\nabla I\|)$ olarak alınır. $I_{\xi\xi}$ ve $I_{\eta\eta}$ birbirine dik yönlerdeki I 'nin ikinci türevlerini göstermektedir ve 1 boyutlu yönlü Laplacian olarak göz önüne alınabilir:

$$I_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} = \xi^T \mathbf{H} \xi \quad (17)$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} = \eta^T \mathbf{H} \eta \quad (18)$$

η ve ξ vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} = \frac{1}{\|\nabla I\|} (I_x, I_y)^T \quad (19)$$

$$\xi = \eta^\perp = \frac{1}{\|\nabla I\|} (I_y, -I_x)^T \quad (20)$$

Bu durumda Denklem 17 ve 18 tekrar düzenlenirse,

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} (I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + (-I_x)^2 I_{yy}) \quad (21)$$

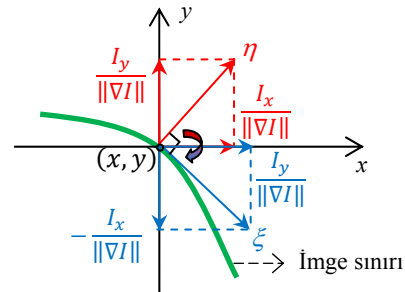
$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} (I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}) \quad (22)$$

elde edilir. Burada

$$I_{xy} = \frac{1}{4} (I(x+1, y+1) + I(x-1, y-1)) + \frac{1}{4} (-I(x-1, y+1) - I(x+1, y-1)) \quad (23)$$

olarak alınabilir.

Denklem 16, iki ortak paylaşımlı ve yönlü 1 boyutlu ısı akışları olarak yorumlanabilir ve c_{ξ} ağırlığı ile en küçük uzamsal değişimin yönünü veren ξ vektörü ve c_{η} ağırlığı ile en büyük uzamsal değişimin yönünü veren η vektörü yönünde imgeyi düzenlemektedir (Şekil 1). Bu durumda, $(\eta, \xi, c_{\eta}, c_{\xi})$, yöntemin yerel yayılım geometrisini tanımlar denilebilir. Eğer $c_{\xi} \geq c_{\eta}$ ise, sonuçta yön bağımlı düzenleştirme yapılmış olur, başka bir ifadeyle imgedeki kenar bilgileri korunur. Fakat yöntem bazen ters yayımla sonuçlanmakta, gürültü yok edilmenin aksine imgeye daha fazla yaydırılabilmektedir.



Şekil 1: $\mathbf{p} = (x, y)$ noktasındaki η ve ξ vektörleri.

İmge düzenleştirmesi, imgenin genel değişimlerini ayarlayan enerji fonksiyonları en küçüklerek de yapılabilir.

Amaç, imgedeki kenar bilgilerini içeren büyük değişimler korunurken, gürültüden dolayı oluşan küçük imge değişimlerinin bastırılmasıdır. Buna durumda, gri ölçekli gürültülü $I_{gürültülü}$ imgesi $\emptyset - işlevsellersi$ en küçüklenecek düzleştirilebilir [5]:

$$\min_{I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}} E(I) = \int_{\Omega} \emptyset(\|\nabla I\|) d\Omega \quad (24)$$

Burada $\emptyset: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye artan bir işlevdir, düzenleme yönünü belirler ve yüksek gradyan bilgilerini bastırır. Enküçükleme, Euler-Langrange denklemleri yöntemi kullanılarak yapılabilir:

$$\begin{cases} I_{(t=0)} = I_{gürültülü} \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \nabla I \right) \end{cases} \quad (25)$$

Tablo 1: Farklı \emptyset işlevleri

İşlev	$\emptyset(s)$
Tikhonov	s^2
Perona-Malik	$1 - \exp(-s^2/K^2)$
Toplam Değişim	s

Perona-Malik akışında olduğu gibi, $\emptyset - işlevsellersi$ yerel yayılım davranışı denklemin geometrik gelişiminden analiz edilebilir:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_{\xi} I_{\xi\xi} + c_{\eta} I_{\eta\eta} \quad (26)$$

Burada $c_{\xi} = \frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}$ ve $c_{\eta} = \emptyset''(\|\nabla I\|)$ olarak alınır.

Düzenleme işlemi, $\frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}$ ağırlığı ile uzamsal olarak en az değişimin yönünü veren ξ vektörü yönünde ve $\emptyset''(\|\nabla I\|)$ ağırlığı ile uzamsal olarak en büyük değişimin yönünü veren η normalize edilmiş gradyan vektörü yönünde yapılmaktadır. Bu alternatif gösterim düşünüldüğünde, düzenleme işlemleri c_{ξ} ve c_{η} tarafından sağlandığı görülebilir:

- **Ters olmayan yayılım:** Ters yayımdan kaçınmak için c_{ξ} ve c_{η} katsayıları her zaman pozitif olmak zorundadır. Bu \emptyset işlevinin $\|\nabla I\|$ 'de artan ve dışbükey olması gerektirir:

$$\emptyset'(\|\nabla I\|) \geq 0 \text{ ve } \emptyset''(\|\nabla I\|) \geq 0$$

- **Kenarlarda yön bağımlı yayılım:** Kenarlarda (yüksek gradyan noktalarında) bulanıklaştırmadan kaçınmak için η gradyan vektörünün yönünün yerine, ξ eşit gri değerli çizgiler vektörü yönünde imge düzleştirilmelidir:

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow +\infty} c_{\eta} = 0 \text{ ve } \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow +\infty} \frac{c_{\eta}}{c_{\xi}} = 0$$

- **Düzgün bölgelerde yön bağımsız yayılım:** Diğer taraftan, gürültülü homojen bölgelerde imge yapısının evreyumlu yönleri, η ve ξ ile tayin edilemez. İstenen düzenleme o bölgelerde yön bağımsız yapılmalıdır:

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} c_{\eta} = \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} c_{\xi} = \alpha > 0$$

Bu yaklaşımlarla, bazen iyi bir şekilde yayılım sağlanamamaktadır. $\frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}$ işlevinin yerine, $g(\|\nabla I\| * G_{\sigma})$

işlevi kullanılarak daha fazla uygun imge özelliklerini iraksaydaki ifadeye eklenerek imge düzenleme performansı artırılabilir [5]. Bu yöntemlerle, düzenleme işleminin genel içeriğini kaybetsek bile, kısmi türevsel denklemlerin tasarımı için daha fazla kolaylık sağlanır:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(g(\|\nabla I\| * G_{\sigma}) \nabla I) \quad (27)$$

Burada $G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$, değişintisi σ olan 2 boyutlu bir Gauss süzgeçidir. Böylece düzenleme işlemiyle türetilen yerel imge yapılarının hesaplanmasında daha fazla komşuluk bilgisi ile ilişkili olarak daha doğruluklu yerel yayılım geometrisine izin verilmiş olmaktadır.

İraksay-tabanlı denklemlerle ilgili başlıca bir çalışma Weickert [9] tarafından yapılmıştır. İmge pikseli bazı fiziksel kanunlara bağlı olarak kimyasal bir yoğunluk gibi düşünülmüştür ve buna göre genel bir denklem geliştirilmiştir:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{D} \nabla I) \quad (28)$$

Burada $\mathbf{D}: \Omega \rightarrow \mathbb{P}(2)$ yayılım tensörlerinin alanıdır, simetrik ve yarı pozitif tanımlı 2x2 matristir, gradyan akışını tanımlar ve işlemin yerel yayılım davranışını kontrol eder. Dikkat edilirse $\emptyset - işlevsellersi$ denklemi, bu denklemin özel bir halidir:

$$\mathbf{D} = \frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \mathbb{I}_d \quad (29)$$

Burada \mathbb{I}_d birim matristir. $\mathbf{p} = (x, y)$ her imge noktası için \mathbf{D} yayılım tensörleri, düzleştirilmiş yapı tensörü \mathbf{G}_{σ} 'nin spektral elemanlarının bir işlevi olarak \mathbf{u} ve \mathbf{v} özvektörlerine ve λ_1, λ_2 özdeğerlerine bağlı olarak tasarlanmıştır:

$$\mathbf{G}_{\sigma} = (\nabla I \nabla I^T) * G_{\sigma} \quad (30)$$

$\eta_{\sigma}, \xi_{\sigma}, \mathbf{G}_{\sigma}$ nin özvektörleri ve μ_1, μ_2 özdeğerleri olsun.

Dikkat edilirse, buradan $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \xi_{\sigma} = \xi = \frac{\nabla I^{\perp}}{\|\nabla I\|}$ ve $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \eta_{\sigma} = \eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$ sonucu çıkarılabilir. Fakat, genelde $\xi_{\sigma} \neq (\xi * G_{\sigma})$ ve $\eta_{\sigma} \neq (\eta * G_{\sigma})$ dir. η_{σ} ve ξ_{σ}, ξ ve η vektörlerinin Gauss düzlestirmesi değil, bu vektörlerin düzleştirilmiş uyarlamalarıdır. \mathbf{D} yayılım tensörünün spektral elemanları aşağıdaki gibi seçilir:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \eta_{\sigma} \\ \mathbf{v} = \xi_{\sigma} \end{cases} \text{ ve} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \begin{cases} \alpha & \text{eğer } \mu_1 = \mu_2 \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{-C}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\right) & \text{değilse} \end{cases} \end{cases} \quad (31)$$

Burada $C > 0$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerli uygun eşiklerdir. Her imge noktası için \mathbf{D} yayılım tensörü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \lambda_2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (32)$$

Homojen bölgelerde $\mu_1 \cong \mu_2 \cong 0$ ve $\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong 0$ olur. Bu durumda, $\mathbf{D} = \alpha \mathbb{I}_d$ elde edilir. \mathbf{D} yayılım tensörü, bu bölgelerde yön bağımsız olarak tanımlanır. Burada tensör, α yarıçaplı bir daire olarak düşünülebilir.

İmge kenarları boyunca, $\mu_1 \gg \mu_2 \gg 0$ ve $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ olur. \mathbf{D} yayılım tensörü yön bağımlıdır ve imge eşit gri değerler çizgisinin ξ_{σ} düzleştirilmiş yönündedir. Burada

tenzör, $\mu_1 > \mu_2$ olmak üzere iki farklı yarıçaplı gergin bir elips olarak düşünülebilir.

Iraksay tabanlı denklemler yalnızca birinci türev işleçleriyle ifade edilirken, ikinci türev ifadeleri daha çok 1 boyutlu Laplace işleçlerine bağlıdır [5]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_1 I_{uu} + c_2 I_{vv} \quad (33)$$

Burada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $c_1, c_2 > 0$ ve $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ 'dir. I_{uu} ve I_{vv} , I 'nın \mathbf{u} ve \mathbf{v} yönlerindeki ikinci türevleridir ve aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$I_{uu} = \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} \text{ ve } I_{vv} = \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v} \quad (34)$$

Burada düzenleme işlemi, \mathbf{u} ve \mathbf{v} vektörleriyle yönlendirilmiş iki birbirine dik ve ağırlıklı 1 boyutlu yönlü ısı akışı olarak düşünülebilir [10]:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \xi \\ \mathbf{v} = \eta \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = g(\|\nabla I\| * G_\sigma) \end{cases} \quad (35)$$

Burada $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 0'a doğru azalan bir fonksiyondur (yüksek gradyanlarda yayımı önler), $c_1 = 1$ olduğundan çok yüksek gradyan bilgisi de içerirse, ξ kenarları boyunca gürültü azaltılmasına izin verir. Düşük gradyan bölgelerinde ise g , 1 değerine eğilimli olduğundan, o bölgelerde yön bağımsız düzenleme yapılır:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_{\xi\xi} + g(\|\nabla I\|) I_{\eta\eta} \quad (36)$$

Burada $\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} g(\|\nabla I\|) = 1$ olur. Fakat, ξ boyunca sabit yayılım keskin köşelerde oldukça düzenleme etkisi ortaya çıkaracaktır. Bu durumda, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $\mathbf{u} = \xi$ ve $\mathbf{v} = \eta$ alınrsa,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_{\xi\xi} \quad (37)$$

elde edilir. Bu denklem, ortalama kıvrım akışı olarak adlandırılır. Dikkat edilirse, $\emptyset - işlevselliği$ bağlı olarak,

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \xi \\ \mathbf{v} = \eta \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} c_1 = \frac{\emptyset'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \\ c_2 = \emptyset''(\|\nabla I\|) \end{cases} \quad (38)$$

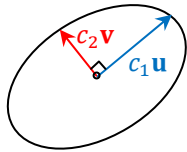
olur. Yönlü Laplace işleçleriyle yayılım tenzörleri arasında yakın bir ilişki vardır. Daha genel bir ifade ile aşağıdaki denklem de yazılabilir:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_1 I_{uu} + c_2 I_{vv} = \text{trace}(\mathbf{T}\mathbf{H}) \quad (39)$$

Burada,

$$\mathbf{T} = c_1 \mathbf{u}\mathbf{u}^T + c_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (40)$$

özvektörleri \mathbf{u} ve \mathbf{v} , özdeğerleri c_1 ve c_2 olan 2x2 simetrik bir matristir (Şekil 2).



Şekil 2: 2 boyutlu tenzör.

İmgedeki kenar bilgilerinin ve diğer özneliklerin etkili bir şekilde korunması için daha fazla komşu pikseller göz

önüne alınarak yön bağımlı bir imge düzenlenmesi yaklaşımı aşağıda verilen ifadeyle yapılabilir [11]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{2\mathcal{A}} \sum_{i=1}^8 (\cot \alpha_{pq}^i + \cot \beta_{pq}^i) (I^i(\mathbf{q}) - I(\mathbf{p})) \quad (41)$$

Burada \mathcal{A} , \mathbf{p} noktasındaki piksel ile etrafındaki 8 komşu piksele bağlı olarak hesaplanan vektörel üçgenlerin toplam alanıdır (Şekil 3):

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^8 \mathcal{A}_\alpha^i + \mathcal{A}_\beta^i \quad (42)$$

$\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ve $\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$ vektörleri üzerine kurulan üçgenlerin alanları sırasıyla,

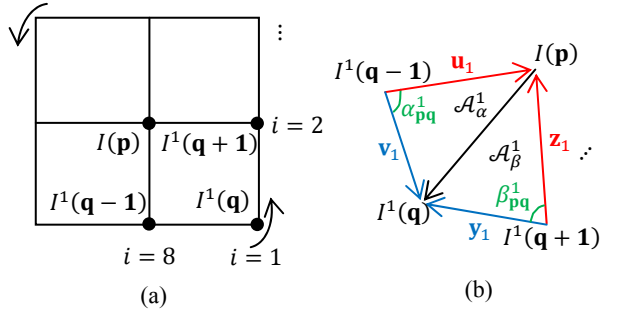
$$\mathcal{A}_\alpha^i = \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{u}_i\|^2 \|\mathbf{v}_i\|^2 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2} \quad \text{ve} \quad (43)$$

$$\mathcal{A}_\beta^i = \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{y}_i\|^2 \|\mathbf{z}_i\|^2 - (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{z}_i)^2}$$

ifadeleri ile hesaplanır. $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ve $\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$ vektörleri arasındaki $\cot \alpha_{pq}^i$ ve $\cot \beta_{pq}^i$ açıları ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\cot \alpha_{pq}^i = \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i}{\sqrt{\|\mathbf{u}_i\|^2 \|\mathbf{v}_i\|^2 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2}} \quad \text{ve} \quad (44)$$

$$\cot \beta_{pq}^i = \frac{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{z}_i}{\sqrt{\|\mathbf{y}_i\|^2 \|\mathbf{z}_i\|^2 - (\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{z}_i)^2}}$$



Şekil 3: Yön bağımlı gürültü azaltma yöntemi: a) Kaynak bölge ve b) vektörel üçgenler.

Sonuç olarak, gri ölçekli imge düzenleme işlemi genel anlamda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{cases} I_{(t=0)} = I_{\text{gürültülü}} \\ I_{(t+1)} = I_{(t)} + dt \frac{\partial I_{(t)}}{\partial t} \end{cases} \quad (45)$$

3. Deneysel Çalışmalar

Test işlemleri için, Şekil 4.'de görüldüğü gibi, standart sapması $\sigma = 20$ olan beyaz Gauss gürültüsü eklenmiş 256x256 boyutundaki gri ölçekli Lena imgesi kullanılmıştır. İmge düzenlenmesinde bütün yöntemler için $dt = 3$ olarak alınmıştır.

Şekil 5.'de gürültüsü azaltılmış imgeler gösterilmiştir ve Tablo 2.'de yöntemlere ait ortalama kare hata (OKH) ve tepe

işaret gürültü oranı (TİGO) değerleri verilmiştir. Sonuçlardan da görülebileceği gibi, görsel olarak kabul edilebilir en iyi sonuç iraksay-tabanlı denklem (36) yöntemiyle elde edilmiştir.

Uygulamalar, *CImg Kütüphanesi* [12] kullanılarak Microsoft Visual C++ 2005 derleyicisinde ve Windows Vista işletim sistemi altında 2 GB RAM belleğe sahip 2.20 GHz işlemcili bir dizüstü bilgisayarda koşulmuştur.

4. Sonuçlar

Bu bildiriye, kısmi türevsel denklemlerle imge düzenlenmesi için geliştirilen yöntemler genel olarak incelenmiştir. İmgede gürültü azaltma yapılırken imgenin yapısının ve doku bilgisinin korunması istenir. Geliştirilen çoğu yöntemlerde bunu sağlamak için kullanılan parametrelerin iyi bir şekilde ayarlanması gerekmektedir.

5. Kaynaklar

- [1] D. Tschumperlé, "PDE's Based Regularization of Multivalued Images and Applications", *PhD Thesis*, The University of Nice Sophia Antipolis/France, 2002.
- [2] B. Dizdaroğlu and A. Gangal, "A Spatiotemporal Algorithm for Detection and Restoration of Defects in Old Color Films", *Lecturer Notes in Computer Sciences*, vol. 4678, pp. 509-520, 2007.
- [3] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles and C. Ballester, "Image Inpainting", *ACM SIGGRAPH*, International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, pp.417-424, 2000.
- [4] P. Perez Criminisi and K. Toyama, "Object Removal by Exemplar-based Inpainting", *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, pp.721-728, June 2003.
- [5] D. Tschumperlé and R. Deriche, "Vector-Valued Image Regularization with PDE's, A Common Framework for Different Applications", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 27, No.4, April 2005.
- [6] A.N. Tikhonov, "Regularization of incorrectly posed problems", *Soviet. Math. Dokl.*, 4:1624.1627, 1963.
- [7] P. Perona and J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629.639, July 1990.
- [8] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert, "Nonlinear operators in image restoration". In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp 325.331, Puerto Rico, June 1997.
- [9] J.Weickert, "Anisotropic Diffusion in Image Processing", Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [10] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert, "Image restoration via PDE's", In *First Annual Symposium on Enabling Technologies for Law Enforcement and Security -SPIE Conference 2942*, Investigative Image Processing., Boston, Massachusetts,USA, November 1996.
- [11] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. Barr, "Anisotropic Feature-Preserving Denoising of Height Fields and Bivariate Data", In *Graphics Interface'2000 Proceedings*, May 2000.
- [12] D. Tschumperlé, The CImg Library: <http://cimg.sourceforge.net>, The C++ Template Image Processing Library.



Şekil 4: Gri ölçekli Lena imgesi: a) Özgün ve b) gürültülü.



(a)

(b)

(c)

(d)



(e)

Şekil 5: Gürültüsü azaltılmış imgeler: a) Isı denklemi (12), b) Perona-Malik (14), c) ortalama kıvrım akışı (37), d) iraksay-tabanlı denklem (36) ve e) yön bağımlı (41) yöntemleri.

Tablo 2: Yöntemlerin Karşılaştırılması

Yöntem	OKH	TİGO (dB)
Isı denklemi	166,423	25,918
Perona-Malik	112,896	27,603
Ortalama kıvrım akışı	96,341	28,292
İraksay-tabanlı denklem	87,444	28,713
Yön bağımlı	170,283	25,819