

Doku Anomalisi İçeren Beyin MR İmgeleri Üzerinde Mumford-Shah Tabanlı Bölütleme

Mumford-Shah Based Segmentation of Brain MR Images With Tissue Abnormalities

Alper Çevik¹, B. Murat Eyüboğlu²

¹ Biyomedikal Mühendisliği, Doktora Programı Öğrencisi
Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ)
alper.cevik@metu.edu.tr

² Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü ve Biyomedikal Mühendisliği Lisansüstü Programı,
Öğretim Üyesi
Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ)
bme@eee.metu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada imge bölütleme problemi Mumford-Shah enerji enazlama problemi şeklinde ifade edilmiş, problemin çözümü için getirilen öneriler incelenmiş ve seçilen çözüm yöntemi uygulanıp, algoritma, doku anomalileri içeren örnek beyin manyetik rezonans (MR) imgeleri üzerinde değerlendirilmiştir. Uygulamalarda kullanılan örnek imgeler, beyin tümörüne bağlı ödem oluşumu ve multiple sclerosis (MS) lezyonları bulunduran imgeler arasından seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar her iki durum için de sayısal ve görsel olarak sunulmuş, sonuçlar niteliksel ve niceliksel anlamda değerlendirilmiştir.

Abstract

In this study, image segmentation problem is expressed in terms of Mumford-Shah energy minimization problem, several solution proposals for the problem are investigated, chosen method of solution is implemented, and the algorithm is evaluated using brain magnetic resonance (MR) images which contain tissue abnormalities. Sample images used in the experiments are chosen among the ones which contain oedema formation due to brain tumor, and multiple sclerosis (MS) lesions. Gathered results are presented in both visual and numerical forms for both cases, results are evaluated qualitatively and quantitatively.

1. Giriş

Beyin tümörleri veya MS lezyonları nedeniyle oluşmuş doku anomalileri içeren beyin MR imgelerinin analizi, radyoloji ve nöroloji uzmanlarına tanı, tedavi planı ve uygulanan tedavinin doğrulanması aşamalarında yol gösterici olduğundan büyük önem taşımaktadır. Söz konusu analizden, tümör, tümöre bağlı oluşan ödem ve lezyonların arakesit alanı, yüzey alanı, hacmi gibi niceliksel değerlerin hesaplanması amacıyla yararlanılmaktadır. Bu değerlerin hesaplanmasındaki doğruluk

oranları ve işlem süreleri, doğrudan, kullanılan imge bölütleme algoritmasına bağlıdır.

İki boyutlu (2B) ve üç boyutlu (3B) tıbbi imge verisi üzerinde bölütleme işleminin manuel olarak uygulanması, elde edilen sonuçlarda yüksek standart sapmaya, dolayısıyla güvenilirliği düşük veri elde edilmesine yol açabilmektedir. Eşikleme (*thresholding*) veya bölge büyütme (*region growing*) gibi klasik algoritmaların kullanımı ise kullanıcı girdilerine olan bağımlılıkları nedeniyle kullanım zorluğu ve tutarlılığı düşük sonuçlar doğurmaktadır.

Bu çalışma kapsamında, sözü edilen klasik bölütleme algoritmalarına alternatif olarak, Mumford-Shah tabanlı bölütleme problemi [1] incelenmiş, literatürde kendisine yer bulmuş bir çözüm metodu örnek tıbbi imgeler üzerinde uygulanmış ve alınan sonuçlar bilimsel olarak değerlendirilmiştir.

Önerilen yöntem, metodolojik farklılıklar bulundurmamakla birlikte, daha önce pozitron emisyon tomografisi imgelerinin geriçatımı (PET reconstruction) [2], kan hücrelerinin bölütlenmesi [3], beyin MR imgelerinin gürültüden arındırılması ve bölütlenmesi (beyin ak madde - boz madde ayırımı) [4] ve damar imgelerinin bölütlenmesi ve skeletizasyonu [4, 5] amacıyla kullanılmıştır.

2. Mumford-Shah Tabanlı Bölütleme

Mumford ve Shah [1] imge bölütleme işlemini bir maliyet enazlama problemi şeklinde ifade etmiştir. Maliyet fonksiyoneli şu şekilde ifade edilmektedir:

$$E = \beta \iint_R (u - z)^2 + \alpha \iint_{R-B} |\nabla u|^2 + \iint_R l(B). \quad (1)$$

Denklem (1)'de u ve z sırasıyla bölütlenmiş ve orijinal imgeleri ifade etmektedir. Problem çözümünün nihai amacı, fonksiyoneli enazlayan u fonksiyonuna ulaşmaktır. İlk terim girdi ve çıktı arasındaki fark için bir ölçüt oluşturmakta; dolayısıyla çarpıldığı β sabiti, veri sadakat (*data fidelity*) katsayısı olarak adlandırılmaktadır. Benzer şekilde, $\iint_{R-B} |\nabla u|^2$ terimi, bölütlenmiş altkümelerin üzerindeki

tamdeğişimi (*total variation*) ifade etmekte ve başındaki α sabiti düzenleme (*regularization*) katsayısı olarak adlandırılmaktadır. Fonksiyonelin son terimi ise bölütlenmiş imge üzerindeki sınırların toplam uzunluğunu ifade etmektedir.

İmge fonksiyonunun tanımlı olduğu alan R ile bölütler arasındaki sınırları oluşturan alan ise B ile gösterilmiştir. Denklem (1)'de verilen enerji fonksiyonelinin enazlanması sağlayan u fonksiyonu, Mumford ve Shah'a göre ideal şekilde bölütlenmiş imgeyi vermektedir.

2.1. Bölütleme Problemi İçin Önerilen Çözümler

Mumford-Shah enerji fonksiyonelinin enazlanması için çok sayıda yöntem önerilmiştir [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Referanslarda verilen yöntemler arasında; benzetimli tavlama (*simulated annealing*) yöntemi, çizge kesit (*graph cut*) algoritması, seviye kümesi (*level set*) yöntemi, dışbükey gevşeme (*convex relaxation*) yaklaşımları ve sonlu farklar ayrıklaştırması (*finite difference discretization*) sayılabilir.

Sıralanan yöntemler, pratikte kullanılan yöntemler olmasına karşın pek çok dezavantaja yol açmaktadır. Söz konusu dezavantajlara örnek olarak; yerel minimumlara yakınsama, ucu açık sınır oluşumuna imkân vermeme ve herhangi bir çözüm kistasına ulaşmak için gereken yineleme sayılarının fazlalığı sıralanabilir.

2.2. Ambrosio-Tortorelli Yaklaşımı

Ambrosio ve Tortorelli [12] Mumford-Shah enerji enazlama problemine, bölütlenmiş imge üzerinde ucu açık sınırların oluşumuna olanak veren, bu sayede enerji fonksiyonelinin doğasına görece olarak daha fazla uygunluk gösteren bir yaklaşım yöntemi önermiştir. Yöntem, fonksiyonelin son terimi olan, sınırlar toplamını (2)'de tanımlanan faz alanı enerji terimiyle değiştirmeyi önermektedir:

$$L_{v,\rho} = \iint_R \left\{ \rho |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4\rho} \right\} dx. \quad (2)$$

Faz alanı enerji teriminin ifadesinde kullanılan $2B$ v fonksiyonu, belirtik olarak yazılmasa da örtülü olarak:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \iint \left\{ \rho |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{\rho} \right\} = l(B), \quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Denklem (1)'deki $\iint_R l(B)$ terimi, burada önerilen faz alanı enerji terimi ile değiştirilip maliyet fonksiyoneli yeniden düzenlendiğinde, enazlanması hedeflenen yeni bir enerji fonksiyoneli elde edilmektedir:

$$E_{AT} = \iint \left[\beta (u - z)^2 + \alpha |\nabla u|^2 (1 - v)^2 + \frac{1}{2} \left\{ \rho |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{\rho} \right\} \right] dx. \quad (4)$$

Her 3 denklemde de görünen ρ sabiti, özetle sınırları ifade eden v fonksiyonunun aldığı değerler üzerinde bir düzlük (*smoothness*) ölçütü oluşturmaktadır ve sınır karmaşıklık faktörü (*edge complexity factor*) olarak adlandırılır.

Enazlanacak enerji fonksiyonelinin denklem (4) ile verilen şekilde ifade edilmesi ile problem tek bir tümevsel alana indirgenmiş ve denklemin sağ tarafı "sınırların toplam uzunluğu" gibi önceden hesaplanamayacak bir terimden arındırılmıştır. Problem bu şekliyle birden fazla yöntemle çözülebilecek duruma getirilmiştir. Bu çalışma kapsamında, u

ve v fonksiyonlarının zamana göre değişimlerini ifade eden kısmi diferansiyel denklemlerin 0'a eşitlenerek, bu iki fonksiyonun alacağı değerlerin yinelemeli bir şema ile çözülmesi yöntemi kullanılmıştır.

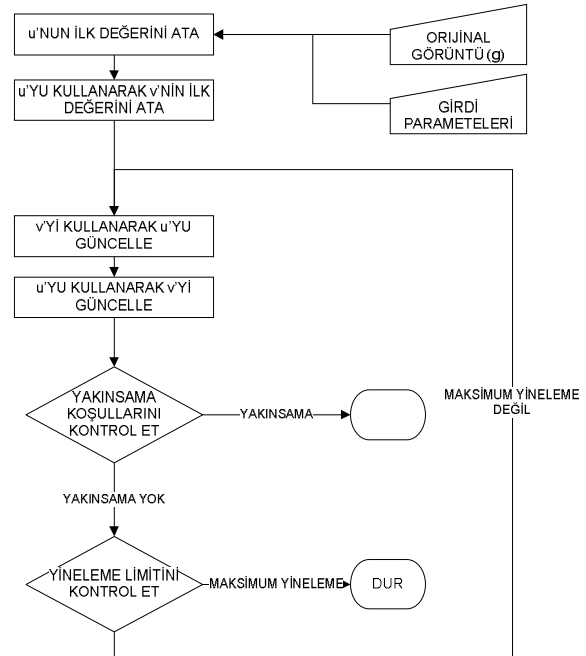
2.2.1. Uygulama

İmge bölütleme işleminin hedeflenen çıktısı olan u fonksiyonu ve yaklaşık olarak bölüt sınırlarını ifade eden v fonksiyonunun zamana göre değişimini gösteren kısmi diferansiyel denklemler (5) ve (6)'da verilmektedir. Bu denklemler *Euler-Lagrange Denklemleri* olarak da adlandırılır. Kısmi diferansiyel denklemlerin bu şekildeki ifadesine, değişimler hesabı (*Calculus of Variations*) kullanılarak ulaşılabılır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla((1-v)^2 \nabla u) - \frac{\beta}{\alpha} (u - z), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla(\nabla v) - \left(\frac{2\alpha\rho|\nabla u|^2 + 1}{\rho^2} \right) \left(v - \frac{2\alpha|\nabla u|^2}{(2\alpha|\nabla u|^2 + 1)} \right). \quad (6)$$

Örtülü olarak ifade edilen u ve v fonksiyonlarının zamana göre değişimlerini gösteren kısmi diferansiyel denklemler 0'a eşitlenip çözüldüğünde u ve v 'nin yakınsadığı değerler hesaplanabilmektedir. Bu sebeple, kısmi diferansiyel denklemlerin $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ve $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ için ayrıklaştırılması, yazılımsal çözüm için uygulanacak algoritma şemasını elde etmemizi sağlamaktadır. Buradan hareketle, $u_{i,j}^{k+1}$ ve $v_{i,j}^{k+1}$ için elde edilen zaman ve konumda ayrık ifadeler, [13]'te verilen referansın ek bölümünde sunulmaktadır.



Şekil 1 – Algoritma akış şeması

Şekil 1'de algoritmaya ait akış şeması verilmiştir. Başlangıç değerleri olarak,

$$u_0 = z, \quad (7)$$

ve

$$v_0 = \frac{2\alpha|\nabla u|^2}{(2\alpha|\nabla u|^2+1)} \quad (8)$$

verilmiş ve yinelemeli şema doyunluk kısıtlarından birisi sağlanana kadar uygulanmıştır.

Doygunluk kısıtlarının ilki, sabit olarak belirlenen en fazla yineleme sayısına ulaşılmasıdır. Bir diğer doyunluk kısıtı ise, bir önceki yinelemede ve son yinelemede elde edilen bölütlenmiş imgelerin farkının L_1 normunun, son yinelemede elde edilen bölütlenmiş imgenin L_1 normuna oranının, önceden belirlenmiş bir ϵ değerinden küçük olması olarak açıklanabilir. İkinci kısıt matematiksel olarak şöyle ifade edilebilir:

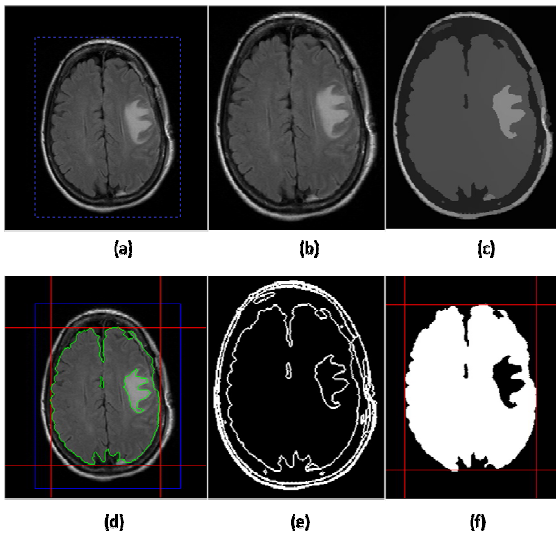
$$|u^{k+1} - u^k| < \epsilon |u^k|. \quad (9)$$

3. İmge Bölütleme Deneyleri

Bu çalışma kapsamında, 2. bölümde açıklanan imge bölütleme algoritması iki ayrı tıbbi imge üzerinde uygulanmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Birinci uygulamada beyin tümörüne bağlı ödem oluşumu bulandıran 2B beyin MR imgesi¹, ikinci uygulamada ise MS hastalığına bağlı lezyonların görüldüğü 2B bir beyin MR imgesi² kullanılmıştır.

3.1. Beyin Tümörüne Bağlı Ödem

Beyin tümörüne bağlı ödem oluşumu içeren örnek bir 2B beyin MR imgesi, Şekil 2 (a)'da gösterilmektedir. Şekil 2 (b)'de görüldüğü gibi, işlemin uygulanması amacıyla imge üzerindeki tüm anlamlı verinin kapsandığı bir ilgi alanı seçilmiştir.



Şekil 2: (a) Orijinal imge, (b) Seçilen ilgi alanı, (c) Bölütlenmiş imge (u), (d) Sınırlar ve seçili ilgi alanı, (e) Sınır haritası (v), (f) İkili imge gösterimi.

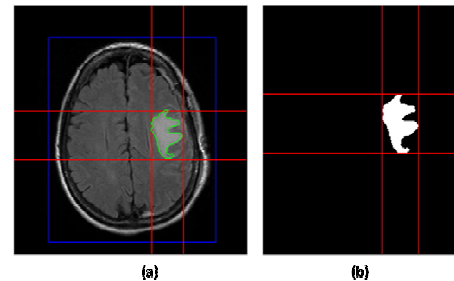
Bölütleme işlemi Tablo 1'de verilen girdi parametreleri ile uygulanmış, sonuç olarak Şekil 2 (c)'deki - gürültü ve doku (*noise & texture*) bileşenlerinden arındırılmış - imge elde edilmiştir. Tablo 1'de görüldüğü gibi, imgeyi oluşturan piksel değerlerinin standart sapma ve entropi değerleri orijinal imgeye göre düşüş göstermiştir. Tablo 1 ve Tablo 3'te verilen ortalama piksel değeri, standart sapma ve entropi değerleri, imge üzerindeki tüm piksel değerleri baz alınarak hesaplanmıştır. Norm değişim oranı olarak ifade edilen değer, her bir yinelemede hesaplanan karesi alınmış farkların toplamı (SSD - Sum of Squared Differences) değerinin bir önceki yinelemede hesaplanan değere oranını göstermektedir. Bu değer, yinelemelerin sonlandırılması için yakınsama ölçütü olarak kullanılmaktadır.

Tablo 1: Beyin tümörüne bağlı ödem içeren imge için bölütleme parametreleri ve sonuç değerleri

GİRDİLER	DÜZENLEŞTİRME		
	KATSAYISI (β)	100	
	VERİ SADAKAT KATSAYISI (α)	10	
	SINIR KARMAŞIKLIK FAKTÖRÜ (ρ)	0.05	
ÇIKTILAR	YİNELEME SAYISI	20000	
		(b)	(c)
	NORM DEĞİŞİM ORANI	$1.2365e^{-003}$	$9.6946e^{-006}$
	ORTALAMA PİKSEL DEĞERİ	0.1952	0.1952
	STANDART SAPMA	0.1642	0.1563
	ENTROPİ	6.09	4.189
	TOPLAM ENERJİ	$2.263e^{005}$	$6.231e^{004}$

Buradan elde edilebilecek anlamsal çıkarım, imgede taşınan bilgi miktarının bölütleme işlemiyle birlikte azalması olarak ifade edilebilir. Bu durum bölütleme işleminin amacıyla uygunluk göstermektedir. Ek olarak imgenin taşıdığı toplam enerjinin yinelemelerle düştüğü gözlenmiştir.

Piksel değerlerinin aritmetik ortalaması yinelemeler boyunca sabit kalmaktadır. Algoritma uygulanırken Neumann Sınır Koşulu (*Neumann Boundary Condition*) [14] kullanıldığından, ortalama değerin (ortalama gri seviyenin) sabit kalması beklenen bir sonuçtur.



Şekil 3: (a) Orijinal imge üzerinde işaretlenmiş ödem alanı, (b) Ödem alanının ikili imge gösterimi.

Bölütleme işlemi gerçekleştirildikten sonra, imge üzerindeki ayrıksı hale getirilmiş bölgeler farklı işaretçilerle işaretlenebilir. Hedeflenen bölge imgeden çıkarılıp, ikili imge şeklinde gösterilebilir, tek başına ele alınıp analiz ve ölçümlere tabi tutulabilir. DICOM dosya formatında imgelerle çalışılıyorsa, dosyanın içerdiği üstveri kullanılarak, uzunluk,

¹ PHILIPS Medical Systems. PHILIPS DICOM Görüntü Sunucusu. [Çevrimiçi]. (Son erişim tarihi: 20/01/2011). [ftp://ftp.philips.com/pub/](http://ftp.philips.com/pub/)

² Prof. Dr. Kader Karlı Oğuz, Radyoloji Anabilim Dalı, Tıp Fakültesi, Hacettepe Üniversitesi

arakesit alanı, yüzey alanı, hacim gibi gerçek büyüklükler hesaplanabilir.

Şekil 3’de imgeden çıkarılmış ödem bölgesinin ikili gösterimi verilmektedir. Tablo 2’de sunulduğu gibi, DICOM üstverisinde bulunan üç veri alanı kullanılarak, ödem alanına ilişkin gerçek uzunluk ve alan bilgilerine erişilmiştir. Bunlara ek olarak, arakesit alanı ile MR imgesinin dilim kalınlığının çarpılmasıyla, dilim üzerindeki hacim bilgisi de otomatik olarak hesaplanmıştır.

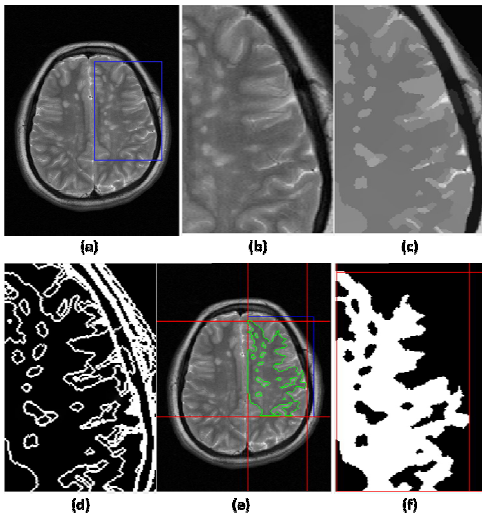
Tablo 2: Beyin tümörüne bağlı ödem bölgesi için yapılan hesaplamalar

ÜSTVERİ	PIKSEL X-BOYUTU	0.79861 mm
	PIKSEL Y-BOYUTU	0.79861 mm
	DİLİM KALINLIĞI	5 mm
HESAPLANAN DEĞERLER	X-EKSENİ BOYUNCA EN YÜKSEK UZUNLUK	40 piksel
		31.9444 mm
	Y-EKSENİ BOYUNCA EN YÜKSEK UZUNLUK	57 piksel
		45.5208 mm
	ARAKESİT ALANI	1154 piksel
		735.9978 mm ²
DİLİM ÜZERİNDEKİ HACİM	3679.9888 mm ³	

3.2. MS Lezyonları

MS hastalığına bağlı oluşan lezyonlar beyin MR imgesi üzerinde görülebilmektedir. Bu lezyonların toplam sayısı ve büyüklükleri üzerindeki değişim, hastalığın ve/veya tedavinin seyri konusunda bilgi sağlamaktadır.

MS lezyonları, Şekil 4 (c) ve (f)’de görüldüğü gibi, uygulanan bölütleme algoritması ile imge üzerinden otomatik olarak ayrıştırılabilmektedir.



Şekil 4: (a) Orijinal imge, (b) Seçilen ilgi alanı, (c) Bölütlenmiş imge (u), (d) Sınırlar ve seçili ilgi alanı, (e) Sınır haritası (v), (f) İkili imge gösterimi.

İşlemden kullanılan girdi parametreleri ve işlem sonucuna ilişkin değerler Tablo 3’te verilmektedir. İlk deneydeki gibi burada da standart sapma, entropi ve toplam enerji değerleri düşerken, ortalama değerin sabit kaldığı gözlenmiştir.

Tablo 3: MS lezyonları içeren imge için bölütleme parametreleri ve sonuç değerleri

GİRDİLER	DÜZENLEŞTİRME KATSAYISI (β)	100	
	VERİ SADAKAT KATSAYISI (α)	10	
	SINIR KARMAŞIKLIK FAKTÖRÜ (ρ)	0.05	
ÇIKTILAR	YİNELEME SAYISI	8641	
		(b)	(c)
	NORM DEĞİŞİM ORANI	8.855e ⁻⁰⁰⁴	9.4959e ⁻⁰⁰⁶
	ORTALAMA PİKSEL DEĞERİ	0.4296	0.4296
	STANDART SAPMA	0.1745	0.1589
	ENTROPİ	6.9666	5.5056
	TOPLAM ENERJİ	1.703e ⁰⁰⁵	3.746e ⁰⁰⁴

MS lezyonların içeren 2B beyin MR imgesi üzerinde uygulanan işlemin sonuçları, Şekil 4 ve Tablo 3 ile sunulmaktadır. Şekil 4 (f)’de görüldüğü gibi, MS lezyonları, ikili gösterim şeklinde ayrıştırılmış, morfolojik yöntemlerle imgeden çıkarılıp analiz amacıyla kullanılabilir duruma getirilmiştir.

4. Sonuçlar

Beyin MR imgelerini kullanarak doku anomalilerinin analiz edilmesindeki en önemli adımlardan birisi bölütlemedir. Bölütleme işleminin tam otomatikleştirilmesi, girdi parametrelerine bağımlılığı yüksek geleneksel bölütleme algoritmalarının kullanımına nazaran büyük avantajlar sağlamaktadır. Yapılan işlemlerin doğruluk payını arttırdığı gibi, geliştirilen uygulamaların teknik formasyona sahip olmayan uzmanlarca da rahatlıkla kullanılabilir olmasını sağlamaktadır.

Mumford-Shah kontrol parametrelerinin değiştirilmesi, geleneksel bölütleme yöntemlerinin aksine, bölge sınırlarının pozisyonlarını etkilememekte, sadece bölge sayısını ve sınırların toplam uzunluğunu etkilememektedir. Bu sayede işlem tutarlılığı yükselmektedir. Ayrıca işlemin imgeye ait ortalama gri seviyeyi koruyor olması, görsel analiz açısından kolaylık sağlamaktadır.

Mumford-Shah problemine Ambrosio ve Tortorelli’nin getirdiği çözümün ucu açık sınır oluşumuna olanak veriyor olması, yumuşak doku geçişleri bulunduran tıbbi imgeler üzerinde uygulanabilirliği artırmaktadır. Tüm bu nedenlerle Mumford-Shah tabanlı bölütleme algoritmasının örnek uygulamalarda başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

5. Teşekkür

Bu çalışma Alper Çevik'in "A Medical Image Processing and Analysis Framework (Tıbbi Görüntü İşleme ve Analiz Uygulama Çatısı)" başlıklı yüksek lisans tez çalışmasından kaynaklanmaktadır, B. Murat Eyüboğlu tez danışmanıdır.

Çalışmamıza özgün fikirleri ve sağladıkları kaynaklarla önemli katkılarda bulunan Hacettepe Üniversitesi, Tıp Fakültesi, Radyoloji Anabilim dalı öğretim üyeleri Prof. Dr. Ayşenur Cila ve Prof. Dr. Kader Karlı Oğuz'a teşekkürlerimizi sunarız.

6. Kaynakça

- [1] Mumford, D. and Shah, J., "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 42, no. 5, pp. 577--685, 1989.
- [2] Zhou, J., Shu, H., Xia, T., Luo, L., "PET Image Reconstruction Using Mumford-Shah Regularization Coupled with L¹Data Fitting," *Engineering in Medicine and Biology Society, 2005. IEEE-EMBS 2005. 27th Annual International Conference of the*, vol., no., pp.1905-1908, 17-18 Jan. 2006
- [3] Lin, P., Yan, X., Zheng, C., Yang, Y., "Medical image segmentation based on Mumford-Shah model," *Communications, Circuits and Systems, 2004. ICCAS 2004. 2004 International Conference on*, vol.2, no., pp. 942- 945 Vol.2, 27-29 June 2004
- [4] Du, X., Bui, T.D., "Image segmentation based on the Mumford-Shah model and its variations," *Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2008. ISBI 2008. 5th IEEE International Symposium on*, vol., no., pp.109-112, 14-17 May 2008
- [5] Lam, B.S.Y., Yan, H., "Blood Vessel Extraction Based on Mumford Shah Model and Skeletonization," *Machine Learning and Cybernetics, 2006 International Conference on*, vol., no., pp.4227-4232, 13-16 Aug. 2006
- [6] Geman, S. and Geman, D., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. PAMI-6, no. 6, pp. 721 -741, 1984.
- [7] Cremers, D., Tischhauser, F., Weickert, J. and Schnorr, C., "Diffusion snakes: introducing statistical shape knowledge into the Mumford-Shah functional," *J. OF COMPUTER VISION*, vol. 50, 2002.
- [8] Vese, L.A. and Chan, T.F., "A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model," *International Journal of Computer Vision*, vol. 50, pp. 271-293, 2002.
- [9] Grady, L. and Alvino, C., *Reformulating and Optimizing the Mumford-Shah Functional on a Graph - A Faster, Lower Energy Solution.*: Springer Berlin / Heidelberg, vol. 5302, pp. 248-261, 2008.
- [10] Pock, T., Chambolle, A., Cremers, D. and Bischof, H., "A convex relaxation approach for computing minimal partitions," in *Computer Vision and Pattern Recognition, 2009. CVPR 2009. IEEE Conference on*, pp. 810 -817, June 2009.
- [11] Chambolle, A., "Finite-differences discretizations of the mumford-shah functional," *M2AN*, vol. 33, no. 2, pp. 261-288, 1999.
- [12] Tortorelli, V.M. and Ambrosio, L., "Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 999-1036, p. 43, 1990.
- [13] Erdem, E., Sancar-Yilmaz, A. and Tari, S., "Mumford-Shah regularizer with spatial coherence," in *Proceedings of the 1st international conference on Scale space and variational methods in computer vision*, Berlin, Heidelberg, pp. 545--555, 2007.
- [14] Cheng, A. and Cheng D. T., "Heritage and early history of the boundary element method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 268–302. 2005.