

Vektör Uzayı İzdüşüm Metodu Kullanılarak Sapınç Azaltılması

Damla Gürkan Kuntalp
Dokuz Eylül Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kaynaklar Kampüsü, Buca, İzmir
dgurkan@yahoo.com

Özet

Optik sistemler yüzeyleri üzerine düşen ışığın bir bölümünü bir nesnenin görüntüsünü oluşturmak amacıyla toplar ve yeniden şekillendirirler. Paraksiyel (ya da Gaussian) teori mercek tasarımı alanında kullanılan temel araçtır. Paraksiyel teori, paraksiyel bölgedeki ışınlar karşı gelen dalga önünün (wavefront) küresel olduğunu ve *mükemmel görüntünün* bu kürenin merkezinde oluşacağını söyler. Fakat paraksiyel teori malesef sadece iyi bir yaklaşımdır ve basit ışın izleme teknikleri ya da protip sistem üzerinde yapılacak ölçümler paraksiyel teori tanımıyla uyumlayan sonuçlar ortaya koyar. Gaussian optiğin öne sürdüğü ideal koşullardan sapmalar *sapınçlar* (*aberrations*) olarak adlandırılır. Bu bildiride önemli bir sapınım türü olan *alan eğikliği* sapınımının etkilerini azaltmak amacıyla iyileştirici bir optik eleman tasarımını ele alır. Tasarım *vektör-uzayı izdüşüm metodu* kullanılarak gerçekleştirilir. Önerilen metod umut verici sonuçlar vermekle birlikte sonuçta elde edilen ışık alanındaki zayıflama kaçınılmazdır.

Anahtar Kelimeler: Kırınım, sapınım düzeltimi, vektör-uzayı izdüşüm metodu.

1.Giriş :

Bu çalışmada, bir vektör-uzayı izdüşüm (VUI) metodu kullanılarak uzay-değişken (space-variant) sapınç düzeltim (aberration correction) uygulaması ele alınmıştır. Vektör-uzayı izdüşüm metodunda tasarım kısıtlamaları kısıt kümeleri olarak formüle edilir ve düzeltmeler bu kısıt kümeleri üstüne iteratif bir izdüşüm dizisi uygulanarak elde edilir. VUI metodunda iki temel versiyon mevcuttur: *ardışık izdüşüm algoritması* ve *paralel izdüşüm algoritması*. Ardışık izdüşüm algoritmasının avantajı, yakınsama halinde, çözümün her zaman bir ya da daha fazla kısıtlamayı sağlıyor olmasıdır. Gerçekten de, eğer bütün kısıt kümeleri konveks ise ve kesişimleri boş küme değilse ulaşılan çözüm *bütün* kısıtlamaları sağlar. Öte yandan paralel izdüşümün sağladığı ana avantaj kümelerin konveks ve kesişimlerinin boş küme olduğu durumlarda minimum-kare çözümüne ulaşılmasıdır. Ayrıca, ardışık izdüşüm, problemde kullanılan kısıt küme sayısına bağlı olmaksızın toplam-mesafe hata yakınsamasını (*summed distance error convergence*) garantiler. Vektör-uzayı izdüşüm metodu ve yukarıda kullanılan terimlerle yakınlığı olmayan okuyucular için detaylı açıklamalar [1] 'in ilk bölümlerinde ve [2] de mevcuttur.

2.Alan Eğikliği (Curvature of Field) Sapınç (AES):

Bu çalışmanın ana konusu AES'dir. Bu tip sapınçlarda nesne düzlemindeki kaynak noktalar, "Petzval yüzeyi" [3] diye adlandırılan ve görüntü düzlemiyle çakışmayan eğimli bir yüzey üzerine görüntülenir. Bu yüzden kırınım-sınırlı görüntüler Petzval yüzeyi üzerinde oluşabilirken, örneğin bir

kameranın arka düzleminde bulanık olarak görülecektir. Sapınımı düzeltmekde kullanılan klasik yöntemler genellikle ışın izleme (*ray tracing*) metodu kullanan optik tasarımları içerir [4]. AES' yi düzeltmenin bir başka yolu *alan düzleştirici* (*field flattener*) [5] olarak adlandırılan mercekler kullanmaktır. Bu bildiride AES' nin düzeltilmesi problemine ve buradan hareketle daha geniş kapsamlı uzay-değişken sapınçların düzeltilmesi problemine yeni bir yaklaşım sunulmaktadır.

3.AES'nin Matematiksel Tanımı:

Bu çalışmada L uzunluğunda tek boyutlu bir mercek açıklığı olduğu, pozitif bir görüntüleme merceğinin önünde z_1 uzaklığına yerleştirilmiş bir nesne düzlemi bulunduğu ve bu düzlem içinde u dikey koordinatında bir noktasal kaynak olduğu varsayılmıştır. Görüntü düzlemi merceğin arkasında z_2 uzaklığına yerleştirilmiştir. Dikey görüntü düzlemi koordinatı ξ olarak tanımlanmıştır. Görüntü düzlemi ışığının, görüntüleme işleminin son aşaması olduğu varsayılmıştır; bu nedenle görüntü düzlemindeki faz değişimleri aynen radyometrik sabitler gibi önemli değildir. Bu varsayımlar altında noktasal kaynak tepkisi (*point-source response*) $h(v, \xi)$ aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$h(v, \xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(jc x^2 v^2) \cdot \exp(-j2\pi x[\xi - v]) dx. \quad (1)$$

Yukarıdaki eşitlikte l , açıklığın nesne uzaklığı ile normalize edilmiş uzunluğudur ve dalgaboyu cinsinden ifade edilir; c , AES miktarıyla ilişkili bir

katsayıdır ($c=0$ sapınç olmadığını gösterir) ve $v=(-z_2/z_1)u$ noktasal kaynak tepkisini kırınım-sınırlı koşullar altında ötelemeden etkilenmez (shift-invariant) hale getirmek için gerekli standart koordinat dönüşümüdür. Denklem (1)'in çıkarımında $v=\xi$ etrafında eşdüzlemsel (isoplanatic) bir parça olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımın, yani saçınımın çıkış koordinatlarına olan bağımlılığının yansımış ve ölçeklenmiş giriş koordinatına olan bağımlılıkla değiştirilmesinin, ana nedeni hesaplamalarda kolaylık sağlamaktır. Bu şekilde VUI metodunda gereken iterasyonların hesaplanmasında hızlı Fourier dönüşümü (fast Fourier transform) kullanılmasına olanak sağlanır.

Şekil 1(a), saçınımın yokluğunda eşit güçte 9 adet nesne düzlemi noktasal kaynağını, Şekil 1(b) de bu görüntülerden birinin detayını gösterir. Kırınım-sınırlı noktasal kaynak görüntüsünden bekleneceği gibi yan loblar ana lobun tepe değerinden yaklaşık 13 dB aşağıdadır. Şekil 2 ve Şekil 3'de $c=10^{-4}$ (düşük AES) ve $c=7 \times 10^{-3}$ (yüksek AES) için AES'nin noktasal kaynak görüntüleri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

4. Vektör-Uzayı Paralel İzdüşüm Algoritması (VUIA) Kullanılarak AES Düzeltimi:

Saçınım düzeltimi elde etmek için, saçınım düzeltim levhası (*aberration correction plate*) (SDL) görüntü merceğine teğet olacak şekilde yerleştirilmiştir. Saçınım düzeltim levhasının bu şekilde konumlandırılması optimum olmayabilir ancak bu yer seçimi, analizi önemli ölçüde kolaylaştırır. Saçınım düzeltim levhası kullanıldığında 1 nolu denlemedeki kırınım integrali aşağıdaki şekle dönüşür:

$$h^{(c)}(v; \xi) = \int_{-1/2}^{1/2} t(x) \cdot \exp(jc x^2 v^2) \cdot \exp(-j2\pi x[\xi - v]) dx \quad (2)$$

Yukarıdaki eşitlikte $t(x)$, saçınım düzeltim levhasının kompleks transmittans fonksiyonudur ve $h^{(c)}(v; \xi)$ düzeltim levhası yerleştirilmişken oluşan noktasal kaynak tepkisidir. $t(x)$ 'i hesaplamak için VUIA kullanılmıştır ve algoritma aşağıdaki şekilde uygulanır:

$$t_{n+1} = \sum_{i=1}^N w_i P_i t_n \quad (3)$$

Bu eşitlikte N kısıtlama kümelerinin sayısı; P_i , C_i kısıtlama kümesine olan izdüşüm; t_n , SDL'nin n nolu iterasyondaki transmittans fonksiyonu; t_{n+1} yeni SDL transmittans fonksiyonu ve $\{w_i\}$,

$\sum_{i=1}^N w_i = 1$ eşitliğini sağlayan ağırlıklar dizisidir.

Kısıtlama kümelerinin etkisi hakkında önceden bir bilgi olmaması durumunda bütün i değerleri için $w_i = 1/N$ seçilebilir. P_i , $i=1,2,\dots,N$ izdüşümlerine karşılık gelen kısıtlama kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_i = \left\{ t(x) : \left| \int_{-1/2}^{1/2} t(\alpha) \exp(jc v^2 \alpha^2) \exp(-j2\pi \alpha[\xi - v]) d\alpha \right| \leq B(\xi - i\Delta\xi), \text{ with equality at } B(0) \right\} \quad (4)$$

Yukarıda, $B(\xi) = 0.05 \text{rect}(\xi/800) + 0.65 \text{rect}(\xi/10)$ ve 800 ve 10 sayıları dikdörtgen (*rect*) fonksiyonlarının piksel cinsinden genişliklerini verir. Seçilen bu $B(\xi)$ fonksiyonu kullanılan düzeneğe oluşacak kırınım-sınırlı görüntünün büyüklük üst sınırlarını tanımlar. C_i üstüne olan izdüşüm şu şekilde hesaplanır: i nolu noktasal kaynak tarafından üretilen kırınımsal alanın (*diffraction field*) büyüklüğü $B(\xi - i\Delta\xi)$ 'yi aşarsa alanın fazı sabit tutulur, fakat alanın büyüklüğü incelenen noktanın yerine bağlı olarak 0.05 ya da 0.70'e düşürülür. $\xi = i\Delta\xi$ durumunda, alan büyüklüğü, kırınım-sınırlı alan büyüklüğü olan 0.70 elde edilecek şekilde ayarlanır. Alan büyüklüğünü saçınımsız (yani kırınım-sınırlı) alanın boyutlarına uymaya zorlayarak, SDL'nin saçınım etkilerini yok etmek için gereken büyüklük ve fazı öğreneceği umulmaktadır.

5. Simülasyon Sonuçları:

Saçınım düzeltiminin verimliliği hangi ölçüler kullanılarak hesaplanabilir? AES'nin ana etkileri, Şekil 2 ve Şekil 3'den de gözleneceği gibi, görüntünün yayılması, yani bulanıklaşması, ve aynı zamanda görüntü büyüklüğünün azalmasıdır. AES'nin tanımından açıkça anlaşılacağı gibi bu etkiler optik eksenden uzaklaştıkça daha belirgin hale gelir. Bu nedenle, SDL'li ve SDL'siz görüntü tepelerinin bağıl boylarını ve bağıl genişliklerini veren çizimler SDL tasarımının değerlendirilmesinde önemli araçlardır. Simülasyon sonuçları bir kaç önemli noktanın varlığına işaret etmiştir: 1) Sınırlı sayıda eğitim noktasında kırınım-sınırlıya çok yakın görüntüler üretecek bir SDL kolaylıkla tasarlanabilir. Eğitim noktası ile kastedilen $\xi = (-z_2/z_1)u$ görüntü noktasıdır. Burada u , noktasal kaynağın konumunu gösterir. Bununla birlikte, eğitim noktalarının dışındaki noktalarda bulunan noktasal kaynaklara olan tepkiler genelde yetersizdir. Bu nedenle saçınım düzeltme sonuçlarını sadece eğitim noktalarında

göstermek ve değerlendirmek SDL'nin gerçekte olduğundan daha başarılı olarak yorumlanmasına neden olabilir. Görüntü düzleminde, belli noktalar yerine *aralıksız* bir bölgede iyi sonuçlar elde etmek için çok sayıda kısıtlama kümesi kullanmanın gerekli olduğunu gözlenmiştir (görüntü düzleminde ilgilenilen bölgedeki her piksel için bir kısıtlama kümesi kullanılmalıdır). 2) SDL' nin kompleks transmittansı önemli sayıda zayıflatma ögesi içerir. Bunun sonucu olarak görüntü düzlemindeki ışık 6 dB'ye varan oranlarda zayıflar. Bu nedenle iki durumu (saçınım düzeltilmiş ve düzeltilmemiş durumları) kıyaslamak için elde edilen ışık büyüklüklerini orijindeki tepe ışık büyüklüğüne bölerek çizmek daha uygundur. 3) Yüksek AES ve düşük AES için yapılan tasarımların sonuçları arasındaki temel fark şu şekilde özetlenebilir: VUPIA tasarımı düşük AES için saçınımı çok daha geniş bölgelerde kolaylıkla düzeltebilir. Ancak, geniş bir görüntü bölgesi için saçınım düzeltim işleminin zorluğu AES' nin büyüklüğü ile doğru orantılı olarak artar.

Noktasal kaynak görüntülerinin saçınım düzeltilmiş ve düzeltilmemiş durumdaki bağıl yüksekliklerini görüntü düzleminin aralıksız bir bölgesinde Şekil 4 düşük AES için, Şekil 5 yüksek AES için gösterir. Benzer şekilde, noktasal kaynak görüntülerinin genişlikleride saçınım düzeltilmiş ve saçınım düzeltilmemiş olarak, düşük AES için Şekil 6 da , yüksek AES için Şekil 7 de verilmiştir. Yüksek AES durumunda elde edilen iyi sonuçlar, görüntü düzleminde daha küçük bir bölgeyle sınırlıdır. Beklendiği gibi, her iki SDL'nin kompleks transmittansı ne büyüklük ne de faz olarak çok düzgün bir profil sergilemez. Yine de, tasarımın bir özelliği çok belirgindir: SDL, saçınımları mercecek açıklığını azaltarak düşürmeye çalışır; bu da iğne delikli (*pinhole*) kameraların çalışma prensibi düşünüldüğünde akılcı bir yaklaşımdır.

6. Sonuç:

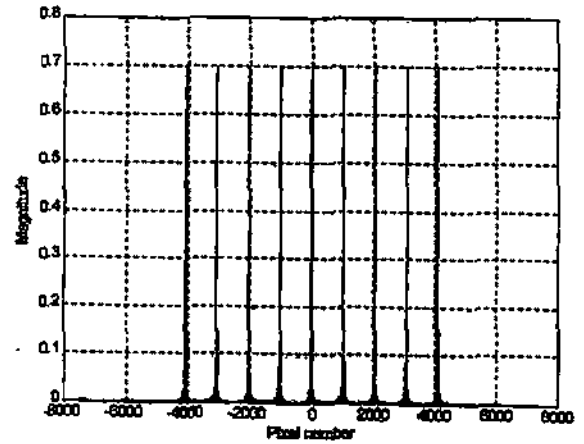
Uzay-değişken saçınım düzeltimi, mercecek açıklık düzlemine bir saçınım düzeltici levha yerleştirmek yoluyla denenmiştir. SDL iterativ bir metod olan vektör-uzay izdüşüm algoritması kullanılarak tasarlanmıştır. Görüntü düzleminde geniş alanlarda iyi sonuçlar elde etmek için çok sayıda kısıtlama kümesine ihtiyaç vardır. Bununla birlikte, önemli ölçüde saçınım düzeltimi elde edilmiştir. Araştırmaların bu aşamasında tasarımın ana problemi ışık miktarındaki kayıp olarak görülmektedir.

Kaynakça:

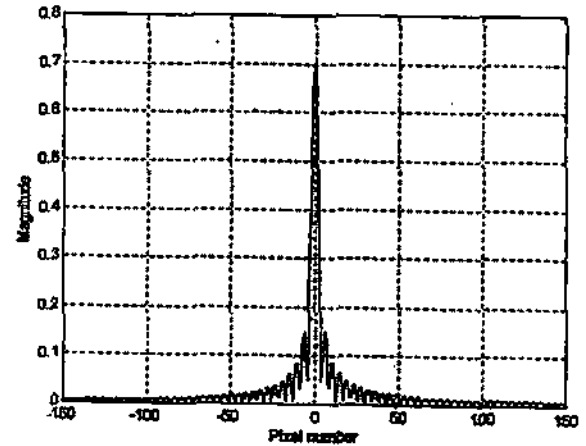
1. H. Stark ve Y. Yang, *Vector Space Projections*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1998.
2. H. Stark, Y. Yang ve D. Gürkan, "Factor affecting convergence in the design of diffractive

optics by iterative vector-space methods," *Journal of Optical Society of America A*, Vol. 16, No.1, January 1999, 149-159.

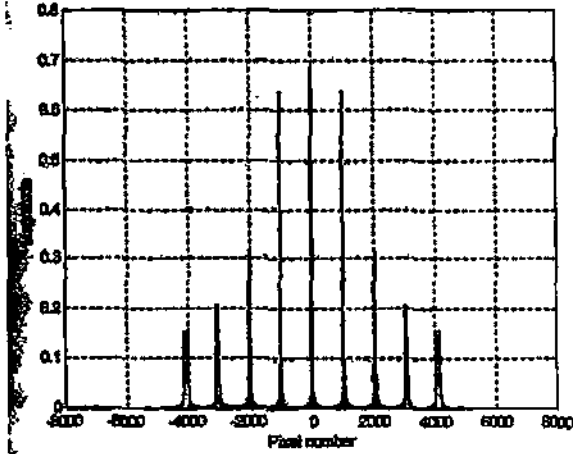
3. M. Born ve E. Wolf, *Principles of Optics*, 4th ed. sayfa 226, Pergamon Press, London, UK, 1970.
4. P. Mouroulis and J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, Oxford University Press, New York, NY, 1997.
5. J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, sayfa 543, John Wiley and Sons, New York, NY, 1978.



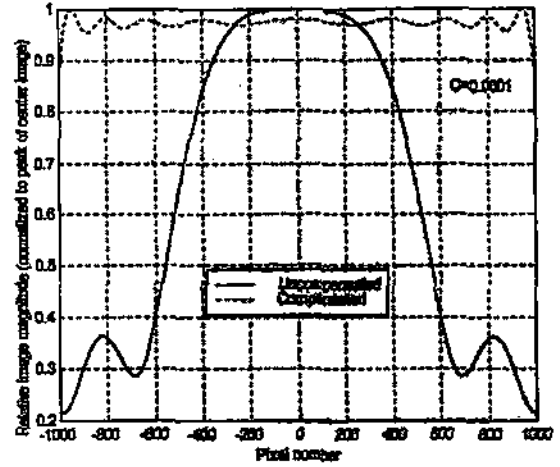
Şekil 1(a). Eşit güçte dokuz noktasal kaynağın kırınım-sınırlı görüntüsü



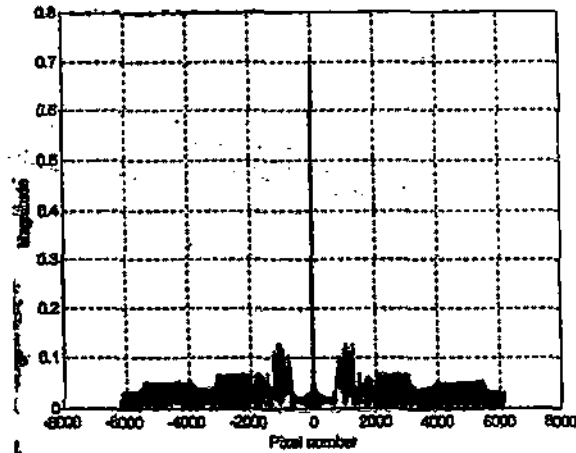
Şekil 1(b). Kırınım-sınırlı noktasal kaynak görüntülerinden birinin detayı.



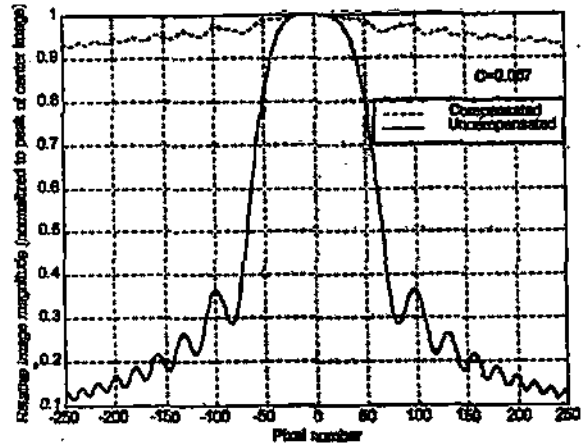
Şekil 2. Noktasal kaynakların düşük AES ($c=10^{-4}$) etkisi altındaki görüntüleri.



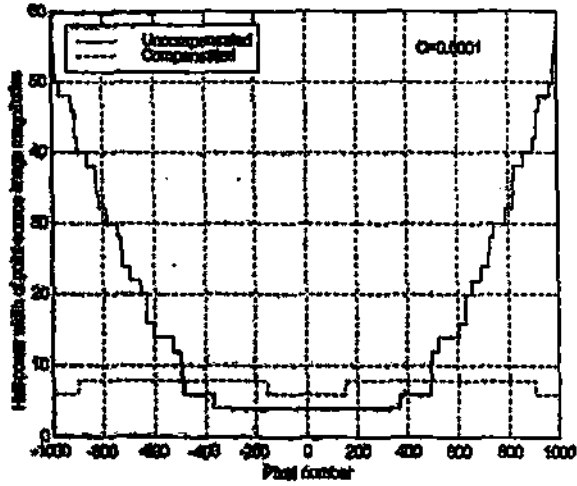
Şekil 4. Düşük AES ($c=10^{-4}$) için görüntü düzleminin aralıksız bir bölgesinde SDL kullanılan ve kullanılmayan durumlardaki bağıl görüntü büyüklüğü.



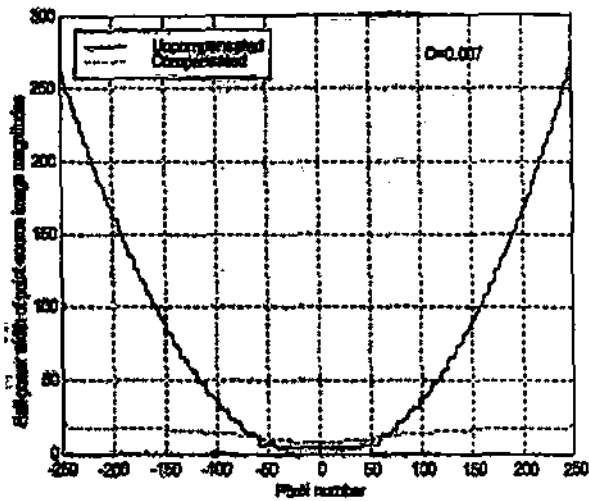
Şekil 3. Noktasal kaynakların yüksek AES ($c=7 \times 10^{-3}$) etkisi altındaki görüntüleri.



Şekil 5. Yüksek AES ($c=7 \times 10^{-3}$) için görüntü düzleminin aralıksız bir bölgesinde SDL kullanılan ve kullanılmayan durumlardaki bağıl görüntü büyüklüğü.



Şekil 6. Noktasal kaynak görüntülerinin düşük AES ($c=10^{-4}$) etkisi altında, SDL kullanılan ve kullanılmayan durumlardaki yarı-güç genişlikleri.



Şekil 7. Noktasal kaynak görüntülerinin yüksek AES ($c=7 \times 10^{-3}$) etkisi altında, SDL kullanılan ve kullanılmayan durumlardaki yarı-güç genişlikleri.