E-KİTAP

.pdf

ePUB

ANILARINA SAYGI SERİSİ

ELEKTROMAGNETİK ALAN TEORİSİ

1

Statik Elektrik Alanı

Prof. Ahmet AKHUNLAR

İTÜ Elektrik Fakültesi - Emekli Öğretim Üyesi

Tıpkı Basım

Basım : İTÜ Elektrik Fakültesi

İstanbul, 1965

TMMOB

Elektrik Mühendisleri Odası

1954

ISBN: 978-605-01-0755-5

EMO YAYIN NO: EK/2015/607

Hüseyin Yeşil
Elektrik
5-6. Sın.
HÜSEYİN YEŞİL
ARMAĞANIDIR

T. C.
İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANESİ
SAYI : 615

ELEKTROMAGNETİK ALAN TEORİSİ

I

Statik Elektrik Alanı

Yazan :
Prof. Ahmet Akhunlar

İ. T. Ü. Elektrik Fakültesi

Matbaa Teknisyenleri Basımevi
Divanyolu, Biçkiyurdu sokak 12
İSTANBUL — 1965

ANIYA SAYGI SERİSİ

Ahmet AKHUNLAR

1916 tarihinde İzmir' de doğmuştur. 1936' da Yüksek Mühendis Mektebine girmiş, 1937 yılında Maarif Vekaleti hesabına Almanya' ya gönderilmiştir. 1943 ' de Dresden Yüksek Mühendis Mektebi Kuvvetli Akım Kolundan mezun olmuştur. Aynı okulda bir süre asistanlık yapan Akhunlar, 1945 yılında yurda dönerek İTÜ Elektrik Fakültesi Teorik Elektrik Kürsüsüne asistan olmuştur. 1949' da yeterlik tezini vermiş, 1952' de ise Doçent ünvanını kazanmış ve Elektroteknik Kürsüsüne Doçent olarak atanmıştır.

1958 yılında Profesörlüğe yükseltilerek Elektroteknik ve Elektrik Ölçmesi Kürsüsündeki açık kadroya atanan Akhunlar Teknik Üniversiteye bağlı Teknik Okulda, Elektrik, Makina ve Maden Fakültelerinde çeşitli dersler vermiş, muhtelif zamanlarda araştırma ve inceleme aracıyla yurt dışına gitmiştir. Yabancı dilde ve Türkçe yazılmış 10' un üstünde makalesi,20' in üzerinde tercüme ve özet yazısı, ikisi tercüme 10' un üstünde, kitabı olan Prof.Akhunlar 1962-1964 yılları arasında Fakültede Dekanlık görevini yapmış, 1984 yılında yaş haddinden emekliye ayrılmıştır.

Bekar olan Prof. Ahmet Akhunlar 1991 yılında vefat etmiştir.

ÖNSÖZ

Bu kitap İ. T. Ü. Elektrik Fakültesinde okutulan «Elektroteknik» dersinin alan teorisi bölümünün programını esas tutarak hazırlanmıştır. Kitabın ilk önce yayınlanan statik elektrik alanı bölümünde sınır değeri problemlerinin çözüm metodlarına geniş bir yer ayrılmış bulunmaktadır. Her bahiste konuların daha iyi anlaşılmasını sağlamak maksadiyle örnekler verilmiştir. Kitapta rasyonalize MKSC—birim sistemi kullanılmıştır.

Kitabın bundan sonra yayınlanmasına çalışılacak olan bölümleri stasyoner elektrik alanı, stasyoner magnetik alan ve zamanla değişen alanlar konularını ihtiva edecektir.

Kitabın, öğrencilere ve araştırıcı elemanlara faydalı olmasını diler ve bundan sonra yapılacak baskıların daha mükemmel hale gelmesi için yapılacak ikazlara şimdiden teşekkür ederim.

Ahmet Akhunlar

İÇİNDEKİLER

Sahife

A. Statik Elektrik Alanı 1
I. Temel denklemler 1
1. Statik alanın konservatif özelliği ve potansiyel 1
2. Eşpotansiyel yüzeyler ve alan çizgileri 3
3. Deplasman akısı ve Gauss teoremi 3
4. Potansiyel denklemi 4
5. Statik alanda sınır şartları 5
II. Yük dağılışı yardımiyle statik alanın hesabı 7
6. Potansiyel ve alan integralleri 7
III. İletkenler 30
7. Sınır şartları 30
8. Elektriksel ekranlama 32
9. İletken sistemleri 33
10. İmaj metodu 40
IV. Dielektrikler 106
11. Dielektriğin polarizasyonu 106
12. Polarizasyon yoğunlukları 109
V. Statik elektrik alanındaki enerji ve kuvvetler 128
13. Noktasal yük dağılışının potansiyel enerjisi 128
14. Sürekli yük dağılışının potansiyel enerjisi ve enerji yoğunluğu 132
15. İletken sisteminin potansiyel enerjisi 136
16. Thomson teoremi 140
17. Statik alan kuvvetleri 142
18. Hacimsel kuvvetler ve Maxwell gerilme tansörü 147
VI. Sınır değeri problemleri 163
19. Sınır değeri problemleri ve nevileri 163
20. Koordinat sistemleri 165
21. Ortogonal fonksiyon sislemleri 178
VII. Değişkenlere ayırma metodu 190
22. Genel bilgi 190

23. Poisson denkleminin integrasyonu 191
24. Kartezyen koordinatlarda analitik çözüm... 193
25. Dairesel silindirik koordinatlarda analitik çözüm 207
26. Eliptik silindirik koordinatlarda analitik çözüm..... 242
27. Parabolik silindirik koordinatlarda analitik çözüm..... 246
28. Küresel koordinatlarda analitik çözüm 246
29. Sferoidal koordinatlarda analitik çözüm 265
30. Paraboloidal koordinatlarda analitik çözüm 278
31. Elipsoidal koordinatlarda analitik çözüm..... 281
32. Toroidal koordinatlarda analitik çözüm..... 294
VIII. Enversiyon (evirtim) metodu..... 297
33. Üç boyutlu enversiyon... 297
34. İki boyutlu enversiyon..... 310
IX. Konform tasvir metodu 311
35. Konform tasvirin esası..... 311
36. Kompleks potansiyel, kompleks alan şiddeti, akı ve kapasite.. 313
37. Potansiyel problemlerinin transformasyonu 315
38. Basit tasvir fonksiyonları ve tatbikatı 317
39. Unicursal eğriler 337
40. Schwarz—Christoffel tasviri 338
41. Schwarz—Christoffel tasvirinin tatbikatı..... 344
42. Poisson integrali 381
X. Diğer çözüm metodları 388
43. Green fonksiyonları metodu 388
44. İntegral denklemleri 402
45. Varyasyon hesabı 410
46. Diferens denklemleri 421
47. Grafik metod 436
48. Statik alanın deneyle bulunması 440

A. STATİK ELEKTRİK ALANI

I. TEMEL DENKLEMLER

1. Statik alanın konservatif özelliği ve potansiyel.

Elektrik alanı, alan şiddeti ($\vec{E}$) ve deplasman ($\vec{D}$) vektörleri yardımiyle belirtilir. Statik alanın kaynağı statik yük dağılışıdır. Alan içine sokulan, boyut ve değerce alanı bozmayacak kadar küçük olduğu farzedilen q yüküne

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{1}$$

kuvveti tesir eder. Alan şiddeti vektörü yön ve değerce pozitif birim yüke tesir eden kuvvete idantiktir. Alan şiddetinin MKSC—birimi V/m dir.

İzotrop, yani özellikleri her yönde ayni olan, bir ortamda deplasmanla alan şiddeti arasında

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{2}$$

bağıntısı vardır. Deplasmanın MKSC—birimi C/m² dir. ε, ortamın mutlak dielektrik sabitini gösterir ve birimi F/m' dir. Her hangi bir ortam için $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ yazılır. ε_0, boşluğun dielektrik sabitin gösterir ve rasyonalize sistemde $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m dir. ε_r, izafî dielektrik sabitini gösterir ve birimsiz bir sayıdır.

Statik alan içinde her hangi bir kapalı eğri için

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = O \tag{3}$$

olur, şek. 1. Enerjinin korunması prensibinin bir sonucu olan bu bağıntı statik alanın konservatif olduğunu belirtir. Stokes integral teoremi yardımiyle bu ifade

Şek. 1

$$\text{rot}\, \vec{E} = O \tag{4}$$

diferansiyel şekline sokulabilir. Statik alanın rotasyoneli sıfırdır.

Statik alanın konservatif özelliğine dayanarak

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{5}$$

yazmak ve böylece alan vektörünü bir φ skaler fonksiyonundan türetmek kabil olur. φ ye potansiyel fonksiyonu adı verilir. İfadedeki negatif işareti alan vektörünün potansiyelin azaldığı yönde bulunduğu belirtir. Potansiyelin MKSC—birimi V dur.

Gradyanın özelliğine dayanarak (3) yardımiyle

$$\vec{E} \cdot \vec{ds} = -d\varphi \tag{6}$$

yazılabilir. $\vec{E}$ vektör fonksiyonu bilindiği vakit bu diferansiyel denklemi integre ederek potansiyel fonksiyonu bulunur. İntegrasyon sabiti potansiyel için seçilecek sıfır noktası (referans noktası) yardımiyle tayin edilir. Sıfır noktası R ile gösterilirse her hangi bir P noktasının potansiyeli

$$\varphi_P = -\int_R^P \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{7}$$

integrali ile hesaplanır. $R \to \infty$ seçilirse mutlak potansiyel elde edilir.

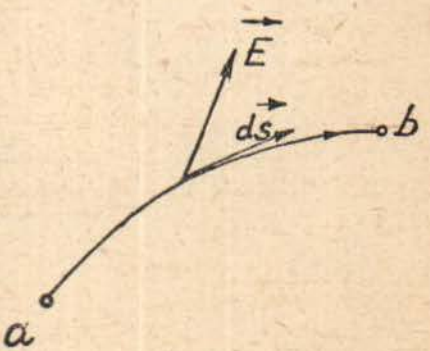
Elektrik alanında a ve b gibi her hangi iki nokta arasındaki gerilim

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{8}$$

eğrisel integrali yardımiyle bulunur, şek. 2. Gerilimin MKSC—birimi de potansiyel gibi V' dur. Statik alanda

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \tag{9}$$

olacağından gerilim, eğrisel integrali hesaplamak için seçilen yola bağlı değildir. Ancak gerilimin işareti integrasyon yönüne bağlıdır.



Şek. 2

Potansiyel skaler bir büyüklük olduğundan alan hesapları için çok elverişlidir. Zira potansiyelle yapı-

lan bütün işlemler cebrik karakterde olacağı gibi üç vektör bileşeni yerine bir tek büyüklükle hesap yapılır. Potansiyel fonksiyonu bulunduktan sonra alan vektörü bir türev işlemi ile elde edilir.

2. Eşpotanisyel yüzeyler ve alan çizgileri.

Elektrik alanı içinde φ=sab. yüzeylerine eşpotanisyel yüzey ve bu yüzeylerin bir simetri düzlemindeki izlerine eşpotansiyel çizgi denilir. Eşpotansiyel yüzey üzerinde alınan $\vec{ds}$ uzunluk elemanı için $\vec{E} \cdot \vec{ds}=0$ olacağından alan vektörü bu yüzeylere ortogonal olur. Denge noktası denilen $\vec{E}=0$ noktalarında bu özellik ortadan kalkar. Alan vektörü gibi alan çizgileri de eşpotansiyel yüzeylere ortogonal olurlar.

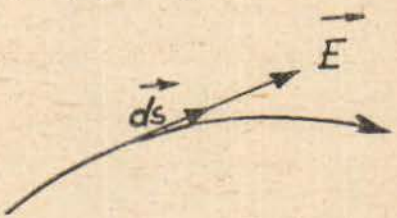
Vektör alanlarını göstermek için faydalanılan alan çizgileri (kuvvet çizgileri) her noktada alan vektörünün teğet olduğu eğrilerdir. Çizgilerin denklemi

$$\vec{E} X \vec{ds}=0 \qquad (10)$$

şeklindedir, şek. 3. Buradan her hangi bir (u, v, w) ortogonal koordinat sisteminde

$$\frac{h_u\,du}{E_u}=\frac{h_v\,dv}{E_v}=\frac{h_w\,dw}{E_w} \qquad (11)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. (h_u, h_v, h_w), metrik katsayıları göstermektedir.



Şek. 3

Statik alanda alan çizgileri kapalı olamaz. Zira kapalı bir alan çizgisi için eğrisel integralin sıfır olamıyacağı kolayca görülebilir.

Alan içinde kapalı bir eğriye dayanan alan çizgileri bir alan tübü meydana hetirirlar.

3. Deplasman akısı ve Gauss teoremi.

Deplasman vektörünün akısı

$$\psi=\int_F \vec{D} \cdot \vec{dF} \qquad (12)$$

yüzey integrali yardımiyle hesaplanır. Deplasman akısının MKSC—birimi C dur, yani yük birimine eşitiir.

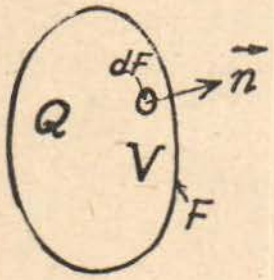
Statik alanda elektrik yüklerini çevreleyen bir kapalı yüzey için

$$\oint_F \vec{D} \cdot \vec{dF} = Q \tag{13}$$

bağıntısı cari olur. Gauss teoreminin integral şekli olan bu bağıntı, kapalı yüzey boyunca hesaplanan akının yüzey içinde kalan yüklerin cebrik toplamına (Q) eşit olduğunu ifade eder. Yüzey için pozitif normal yönü dışarı döğrudur, şek. 4. Homogen ortamda $\varepsilon =$ sab. olacağından teorem

$$\oint_F \vec{E} \cdot \vec{dF} = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{14}$$

şeklinde yazılabir. Yüzey içindeki yük dağılışı her hangi bir şekilde olabilir (noktasal, hacimsel, yüzeysel, çizgisel). Sürekli hacimsel yük dağılışında yük yoğunluğunu ρ (C/m^3) ile göstererek V hacmindeki yük için



Şek. 4

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

yazılabileceğinden diverjans teoremi yardımiyle

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \tag{15}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $\rho = 0$ olan noktalar için bu denklem $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ şeklini alacaktır.

Gauss teoremi simetrik tertiplerin alanını hesaplamak için elverişlidir.

4. Potansiyel denklemi.

İzotrop bir dielektrik içinde (15) denklemi

$$\varepsilon \Delta \varphi + \operatorname{grad} \varepsilon \,.\, \operatorname{grad} \varphi = -\rho$$

şeklinde yazılabilir. Homogen ortam için bu denklem

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{16}$$

şekline girer ve Poisson denklemi adını alır. $\rho = 0$ olan noktalar için Poisson denklemi

$$\Delta \varphi = 0 \tag{17}$$

şeklini alır. Bu denkleme de Laplace denklemi denilir. Laplace denkleminin çözümlerine harmonik fonksiyon adı verilir. Statik alanın esas problemi, sınır şartlarına uyan harmonik fonksiyonu yani potansiyel fonksiyonunu araştırmaktır. Potansiyel denklemi lineer olduğundan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gibi çözümlerin birleştirilmesiyle elde edilen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots . \tag{18}$$

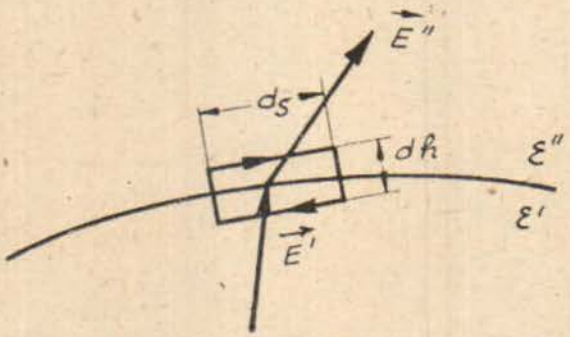
fonksiyonu da harmonik bir fonksiyon olur ($c =$ sab.)

5. Statik alanda sınır şartları.

(3) bağıntısını şek. 5 de görülen ve iki dielektriği ayıran sınır yüseyine normal olan dikdörtgene tatbik ederek $dh \to 0$ için $E''_t ds - E'_t ds = 0$ ve buradan

$$E_t' = E_t'' \tag{19}$$

bulunur. Alan şiddetinin teğetsel bileşenleri sınır yüzeyinde süreklidir.



Şek. 5

Gauss teoremini şek. 6 da görülen ve sınır yüzeyine normal olan silindire tatbik ederek $dh \to 0$ için $D''_n \, dF - D_n' \, dF = 0$ ve buradan

$$D'_n = D''_n \tag{20}$$

bulunur. Deplasmanın normal bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir. Şayet sınır yüzeyinde yoğunluğu σ olan bir yüzey dağılışının bulunduğu farzedilirse normal bileşenler için sınır şartı

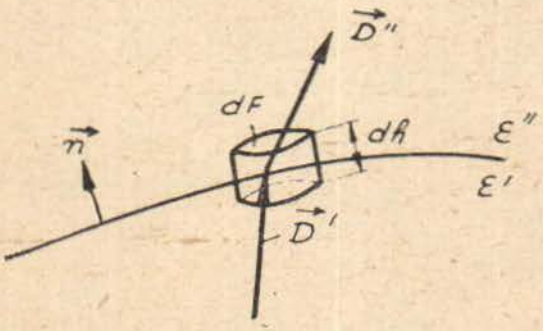
$$D''_n - D'_n = \sigma \tag{21}$$

şekline girer.

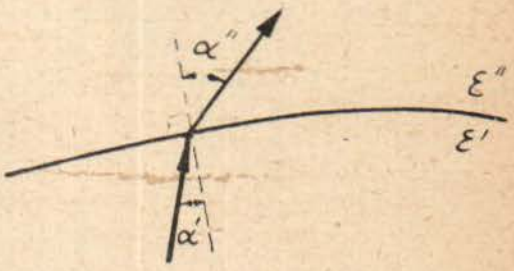
Yukarıdaki sınır şartları yardımiyle alan çizgilerinin kırılma kanununu gösteren

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon''_r} \tag{22}$$

ifadesi elde edilir, şek. 7.



Şek. 6



Şek. 7

Sınır şartları potansiyel cinsinden ifade edilirse

$$\varphi' = \varphi'' \quad , \tag{23}$$

$$\varepsilon' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \varepsilon'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \quad (\sigma = 0) \tag{24}$$

bulunur. Potansiyel sınır yüzeyinde süreklidir.

II. YÜK DAĞILIŞI YARDIMİYLE STATİK ALANIN HESABI

6. Potansiyel ve alan integralleri.

Noktasal yükün alan şiddeti

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r \tag{25}$$

dir, şek. 8. $\vec{E}\,.\,\vec{ds} = E_r\,dr$ olduğundan potansiyel için

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + k$$

bulunur. Sıfır noktasını sonsuzda seçerek

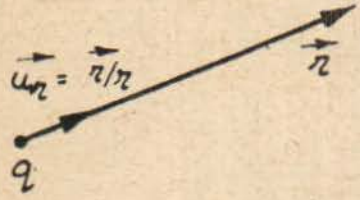
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{26}$$

elde edilir. Buna Coulomb veya Newton potansiyeli de denilir. Noktasal yük, boyutları alanın hesaplandığı noktaya olan uzaklık yanında çok küçük kalan yük anlamındadır. Eşpotansiyel yüzeyler ortak merkezli r = sab. küreleridir.

Noktasal yük sisteminin potansiyeli

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{q_i}{r_i} \tag{27}$$

cebrik toplamı yardımiyle bulunur.



Şek. 8

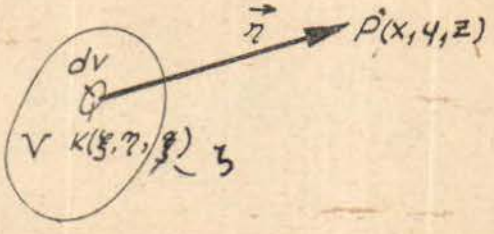
Yük dağılışı sürekli olduğu takdirde dV hacim elemanındaki $dQ = \rho\,dV$ yüküne noktasal yük gözüyle bakılabileceğinden bu elemanın $P(x,y,z)$ noktasında meydana getireceği potansiyel için

$$d\varphi = \frac{\rho\, dV}{4\pi\varepsilon r}$$

yazılabilir. Bunu V hacmi üzerinden integre ederek

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\dot{V}} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{28}$$

şeklindeki potansiyel integrali bulunur. Bu ifadede (ξ, η, ζ), integrasyon bölgesinin koordinatlarını gösterir, şek. 9. dV ve r



Şek. 9

$$dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta\ ,\quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

dir.

Yoğunluk fonksiyonları σ (C/m^2) ve λ (C/m) olan yüzeysel ve çizgisel dağılışlar için benzer yoldan giderek

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\dot{F}} \frac{\sigma\, dF}{r}\ , \tag{29}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\dot{C}} \frac{\lambda\, ds}{r} \tag{30}$$

integralleri elde edilir.

Hacimsel yük dağılışında $\rho\, dV$ elemanı P noktasında

$$\vec{dE} = \frac{\rho\, dV}{4\pi\varepsilon r^3}\, \vec{r}$$

alanını meydana getireceğinden integre ederek

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\xi,\eta,\xi)\, dV}{r^3} \vec{r} \qquad (31)$$

şeklindeki alan integrali elde edilir. Yüzeysel ve çizgisel dağılışlar için de benzer integraller bulunur.

Yük dağılışı bilindiği takdirde yukarıdaki bağıntılardan faydalanarak alanı hesaplamak kabil olur. Vektörel karakterdc olan alan integrallerinin hesabı potansiyel integrallerinden zordur.

Üniform yüklü sonsuz uzun çizgisel kaynağın alanı

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho} \vec{u_\rho} \qquad (32)$$

dir. $\vec{E} \cdot \vec{ds} = E_\rho\, d\rho$ olduğundan potansiyel için

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\,\rho + k$$

bulunur. Potansiyel için sıfır noktası sonsuzda seçilemez. $\rho = 1$ için $\varphi = 0$ seçerek

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\,\rho \qquad (33)$$

yazılabilir. Çizgisel kaynağın potansiyeline logaritmik potansiyel adı verilir. Eşpotansiyel yüzeyler ortak eksenli ρ=sab. silindirleridir. Alan z—eksenik boyunca değişmediğinden iki boyutludur.

Hacimsel yük dağılışı iki boyutlu ise yani yük yoğunluğu meselâ z— koordinatına bağlı değilse bu takdirde her hangi bir z=sab. düzlemindeki dF yüzey elemanına, yoğunluğu $d\lambda = \rho\, dF$ olan bir çizgisel kaynak gözüyle bakılabileceğinden logaritmik potansiyel için

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_F \rho(\xi,\eta)\, ln\, r\, dF \qquad (34)$$

integrali elde edilir $(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,)$.

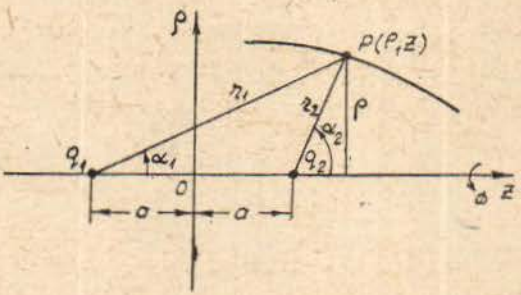
İki boyutlu yüzeylel dağılışta ise z = sab. düzlemindeki C kapalı eğrisi üstünde alınan ds uzunluk elemanına yoğunluğu, $d\lambda = \sigma\, ds$ olan çizgisel kaynak gözüyle bakılabileceğinden

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_C \sigma(\xi,\eta)\ ln\ r\ ds \qquad (35)$$

bulunur.

Örnekler :

1— İki noktasal yükün alanı incelenecektir, şek. 10.



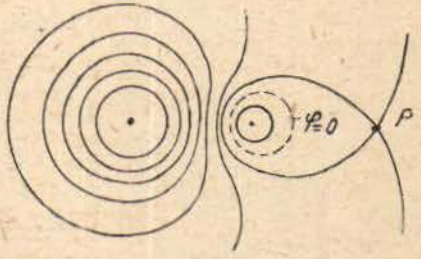
Şek. 10

Alan z— eksenine göre eksenel simetriktir. Her hangi bir meridyen düzlemindeki potansiyel

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

dir. Şek. 11 de $q_1 = -4q_2$ için eşpotansiyel çizgiler görülmektedir.

P noktasında $\vec{E}=0$ olduğundan bu nokta bir denge noktasıdır. Bu noktanın kararsız bir denge noktası olduğu kolayca görülebilir. Zira P noktasına getirilin yüke bir kuvvet tesir etmezse de yük bir az bu noktadan ayrılırsa uzaklaştırıcı kuvvetlerin tesiri altında kalır. Denge noktasında eşpotansiyel yüzey kengi kendini kestiği gibi bu noktada alan çizgileri eşpotansiyel yüzeye normal değildir.



Şek. 11

Sıfır potansiyelindeki noktalar bir küre yüzeyi üzerinde bulunurlar Genel olarak sıfır potansiyelindeki eşpotansiyel yüzeyin denklemi

$$\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q_2}{q_1} = k$$

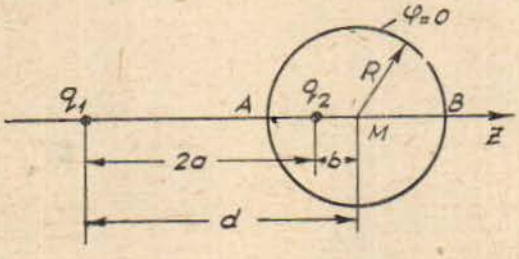
şeklindedir. $k<0$ için denklemin geometrik anlamı yoktur ve sonsuzdaki noktalar hariç bu çeşit noktalar mevcut değildir. Eşit ve zıt işaretli iki yük için $k=1$ olur ve sıfır potansiyelindeki yüzey $z=0$ simetri düzlemine intibak eder. Zira bu düzlemin her noktasında $r_1=r_2$ dir. $k>0$ için sıfır potansiyelindeki noktalar, geometrideki Apollonius teoremine göre, küçük yükü çevreleyen bir küre üzerinde bulunurlar. Şek. 11 de $k=1/4$ dür. Kürenin yarıçapı R ile, M merkezinin yüklerden uzaklıkları d ve b ile gösterilirse şek. 12 de görülen A ve B noktaları için yazılan

$$\frac{R-b}{d-R} = \frac{R+b}{d+R} = k$$

denklemleri yardımiyle $R^2=bd$ ve $k^2=b/d$ bulunur, $d=2a+b$ olduğunu gözönüne alarak kürenin yarıçapı ve b uzaklığı için

$$R=2a\,\frac{k}{1-k^2}\,, \qquad b=2a\,\frac{k^2}{1-k^2}$$

elde edilir.



Şek. 12

Potansiyel ifadesinde $r_1=\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}$, $r_2=\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}$ koyarak P noktasındaki alan bileşenleri için

$$E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1^3}+\frac{q_2}{r_2^3}\right),$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1}{r_1^3}(z+a)+\frac{q_2}{r_2^3}(z-a)\right]$$

bulunur. Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi

$$\frac{q_1}{r_1^3}\, d\left(\frac{z+a}{\rho}\right) + \frac{q_2}{r_2^3}\, d\left(\frac{z-a}{\rho}\right) = 0$$

şeklinde olacağından integre ederek

$$q_1 \frac{z+a}{r_1} + q_2 \frac{z-a}{r_2} = c$$

veya

$$q_1 \cos \alpha_1 + q_2 \cos \alpha_2 = c$$

bulunur. c'ye muhtelif değerler vererek alan çizgileri çizilir.

Alan çizgilerinin denklemini Gauss teoreminden faydalanarak da bulmak kabildir. Şek. 10 da P noktasından geçen alan çizgisi görülmek tedir. Simetriden dolayı bu çizgiyi z—ekseni etrafında döndürerek elde edilecek olan yüzeyden hiç bir alan çizgisi geçmez. Bu yüzey bir alan tübüdür. Gauss teoremi içinde yükler bulunmayan bir alan tübüne tatbik edilirse tüb boyunca $\psi = \text{sab.}$ olacağı görülür. Böylece şek. 10 da ρ yarıçaplı dairesel kesitden geçen deplasmanakısı sabit kalacaktır. Diğer taraftan q yükünün bir F yüzeyinden geçen akısı $\psi = q\,\Omega/4\pi$ şeklinde bulunabileceğinden ($\Omega = q$ yükünden yüzeyi gören uzay açı), şek. 10 daki kesitden geçen akı için

$$\psi = \frac{1}{4\pi}(q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2) = \frac{1}{2} q_1 (1 - \cos \alpha_1) + \frac{1}{2} q_2 (1 - \cos \alpha_2) = \text{sab.}$$

yazılabilir. Bu ifadedeki sabitleri bir tarafa toplayarak alan çizgilerinin denklemi elde edilir. Genel olarak hepsi ayni doğru üstünde bulunan n noktasal yük için alan çizgilerinin denklemi

$$\sum_i q_i \cos \alpha_i = \text{sab.}$$

şeklinde olacaktır.

Noktasal yükün F yüzeyinden geçirdiği akıyı veren $\psi = \frac{q}{4\pi}\,\Omega$ ifadesini şöylece çıkarabiliriz. q yükü F üstündeki dF elemanından

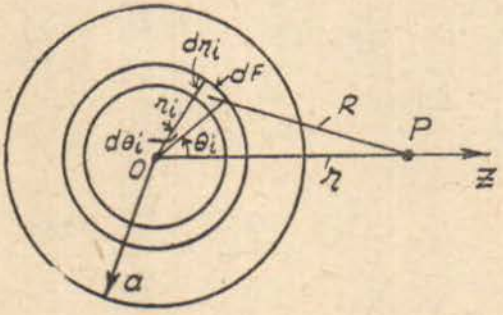
$$d\psi = \vec{D} \cdot \vec{dF} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{u_r} \cdot \vec{dF}}{r^2} = \frac{q}{4\pi} \frac{\cos\theta\, dF}{r^2}$$

akısını geçirir. θ, $\vec{u_r}$ birim vektörü ile $\vec{n}$ birim normali arasındaki açıdır. Diğer taraftan $d\Omega = \cos\theta\, dF/r^2$, yükün bulunduğu noktadan dF elemanını gören uzay açıyı gösterdiğinden

$$d\psi = \frac{q}{4\pi} d\Omega$$

yazabiliriz. Bunu integre ederek yukarıdaki ifade elde edilir. Normalin girdiği yüze negatif yüz ve çıktığı yüze de pozitif yüz denilir. $\vec{r} = r\,\vec{u_r}$ vektörünün yönü q yükünden dF ye doğrudur. $\theta < \pi/2$ için $d\Omega > 0$ ve $\theta > \pi/2$ için $d\Omega < 0$ olur. $\vec{r}$ nin yönü değişirse uzay açıların da işareti değişir. Yukarıdaki ifade yardımiyle Gauss teoremi de çıkarılabilir. q yükü kapalı yüzey içinde ise $\Omega = 4\pi$ olacağından $\psi = q$ ve dışında ise $\Omega = 0$ olacağından $\psi = 0$ bulunur.

2 — Yoğunluğu merkezden olan uzaklıkla değişen küresel yük dağılışının potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 13.



Şek. 13

İntegrasyon bölgesindeki koordinatları i endisi ile belirtirsek $\rho = \rho(r_i)$ olur, Küreyi, dr_i kalınlığındaki tabakalara ayıralım. Yüzey ve hacim elemanları $dF = a^2 \sin\theta_i d\theta_i d\phi_i$ ve $dV = dr_i dF$ dir. P noktasındaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \rho(r_i)\, dr_i \oint_F \frac{dF}{R}$$

yazılabilir. $R^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\theta_i$ nin diferansiyeli alınırsa $RdR = rr_i \sin\theta_i$

bulunacağından yüzey integral

$$\oint \frac{dF}{R} = \frac{2\pi r_i}{r} \int_{R_1}^{R_2} dR$$

şekline girer. Küre dışında $R_1 = r - r_i$, $R_2 = r + r_i$ olacağından

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_0^a \rho(r_i)\, 4\pi r_i^2\, dr_i$$

bulunur. İntegral, kürenin toplam yükünü vereceğinden

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

yazılabilir. Küre, dışarıdaki noktalar için bütün yükü merkezinde toplanmış gibi davranmaktadır. Küre içinde $r \leqslant r_i$ olan noktalar için integral sınırları yukarıdaki gibi ve $r \leqq r_i$ olan noktalar için $R_1 = r_i - r$, $R_2 = r_i + r$ olacağından

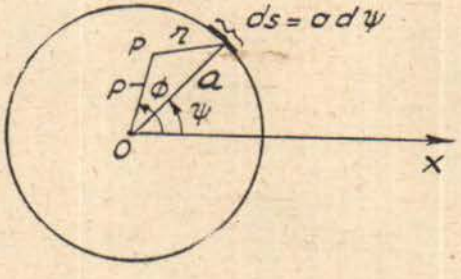
$$\varphi_i = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int_0^r \rho(r_i) r_i^2 dr_i + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^a \rho(r_i)\, r_i dr_i$$

bulunur. Üniform dağılış için $\rho = \rho_0 =$ sab. koyarak

$$\varphi_i = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3}\right)$$

elde edilir ($Q = 4\pi a^3 \rho_0/3$) . φ_0 yukarıda verilmiştir.

3— Üniform ve sonsuz uzun yüzeysel silindirik yük dağılışının potansiyeli bulunacaktır. Şek. 14.



Şek. 14

Logaritmik potansiyel

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} ln\left(\frac{1}{r}\right) a\, d\psi$$

dir. $\rho < a$ için $ln\,(1/r)$

$$ln\left(\frac{1}{r}\right) = ln\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{\rho}{a}\cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cos 2(\psi - \phi) + \ldots$$

serisine açılabileceğinden

$$\int_0^{2\pi} \cos n\,(\phi - \psi)\, d\psi = 0 \quad (n = 1,2,\ldots.)$$

olduğunu gözönüne alarak silindirin içindeki noktalar için

$$\varphi_i = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\, a = \text{sab.}$$

bulunur. $\lambda = 2\pi a\sigma$, silindirin birim uzunluğundaki yüktür.

$\rho > a$ için

$$ln\left(\frac{1}{r}\right) = ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a}{\rho}\cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \cos 2(\psi - \phi) + \ldots.$$

yazılabileceğinden silindirin dışındaki noktalar için

$$\varphi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\, \rho$$

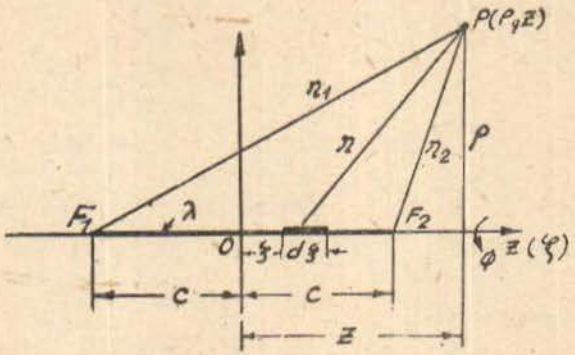
elde edilir. Silindir, dışarıdaki noktalar için eksenine getirilen λ yoğunluğundaki çizgisel kaynak gibi davranmaktadır.

Silindirin içinde alan sıfırdır ve dışında ise $E_{0\rho} = -d\varphi_0/d\rho = \lambda/2\pi\rho\xi$ olur.

4 — Üniform yüklü ve 2c uzunluğundaki çizgisel kaynağın alanı incelenecektir, şek. 15.

Alan z—eksenine göre eksenel simetriktir. İntegrasyon koordinatını ζ ile göstererek P noktasındaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{-c}^{c} \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\, ln\, \frac{z+c+r_1}{z-c+r_2}$$



Şek. 15

bulunur. $r_1^2-r_2^2=4\,cz$ olduğunu gözönüne almak ve $r_1+r_2=2a$ koymak suretiyle

$$\varphi=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\,ln\frac{a+c}{a-c}$$

yazılabilir. ϕ = sab. meridyen düzlemindeki eşpotansiyel çizgilerin denklemi

$$\frac{a+c}{a-c}=k$$

dir ($ln\,k=4\pi\varepsilon\phi/\lambda$). Eşpotansiyel çizgiler, odakları doğrunun uçlarında bulunan ve yarı eksenleri

$$a=c\frac{k+1}{k-1}\,,\quad b=\sqrt{a^2-c^2}$$

olan ortak odaklı elipslerdir. Elipsleri z—ekseni etrafında döndürecek elipsoid biçimindeki eşpotansiyel yüzeyler elde edilir. $k\to\infty$ için $a=c$ ve $b=0$ olacağından elipsoidler $2c$ uzunluğundaki doğruya dejenere olurlar. Çok uzaklarda ($a\gg c$) $a\approx b$ olacağından elipsoidler kürelere yaklaşırlar. Çok uzaklardaki noktaların potansiyeli yaklaşık olarak $\varphi\approx Q/4\pi\varepsilon a$ şeklinde olur. Burada $Q=2c\lambda$, doğrunun toplam yükünü göstermektedir. Bu sınır halinde a pratik olarak orijinden uzaklığı gösterir. Çok uzaklardaki potansiyel bir Coulomb potansiyeldir.

P noktasındaki alan bileşenleri

$$E_\rho=-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\rho}\left(\frac{c-z}{r_2}+\frac{c+z}{r_1}\right),$$

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

dir. $c\to\infty$ için $E_z=0$ ve $E_\rho=\lambda/2\pi\varepsilon\rho$ olur (sonsuz uzun üniform çizgisel yükün alanı).

Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi $dr_1=dr_2$ dir. İntegre ederek $r_1-r_2=c$ bulunur. Böylece alan çizgilerinin, odakları doğrunun uçlarında bulunan ortak odaklı hiperboller olduğu anlaşılır.

Sonsuz uzun çizgisel yükün potansiyeli yukarıdaki ifadeden çıkarılamaz. Zira $c \to \infty$ için $\varphi \to \infty$ olur. Bununla beraber bu ifadeye uygun bir sabit değer ilâve ederek φ nin limitde sınırlı kalması sağlanabilir. Potansiyeller için referans noktasının seçimi serbest olduğundan her hangi bir sabitin potansiyel ifadesine ilâvesinde hiç bir mahzur yoktur. Meselâ $z = 0$, $\rho = 1$ noktasının negatif potansiyelini ilâve ederek

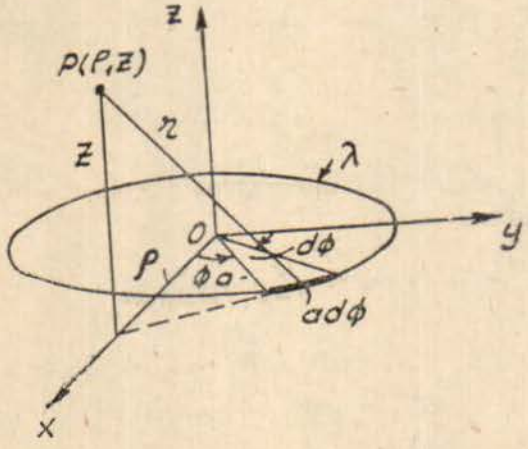
$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\left[ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z+c)^2}+z+c}{\sqrt{(1+c)^2}+c} + ln\frac{\sqrt{1+c^2}-c}{\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}+z-c}\right]$$

yazabiliriz. Bu ifadede $c \to \infty$ için birinci terim sıfır olur ve ikinci terim ise pay ve paydayı binom serisine açarak

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\,\rho$$

değerini alır.

5— Üniform yüklü dairesel halkanın alan hesaplanacaktir. Şek. 16.



Şek. 16

Halkanın toplam yükü $Q = 2\pi a\lambda$ dır. Potansiyel z— eksenine göre eksenel simetriktir. Bu sebeple her hangi bir ϕ = sab. düzlemindeki alanı incelemek kâfidir. $\phi = 0$ düzleminde P noktasındaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\phi}{\sqrt{z^2+a^2+\rho^2-2a\rho\cos\phi}}$$

yazılabilir. $\phi = \pi - 2\beta$ şeklinde yeni bir değişken ithal ederek ($d\phi = -2d\beta$)

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi^2 \varepsilon \sqrt{z^2+(a+\rho)^2}} K(k)$$

bulunur. Burada

$$k^2 = \frac{4\,a\rho}{z^2+(a+\rho)^2}$$

kısaltmasını ve

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\beta}}$$

ise birinci nevi komple eliptik integrali göstermektir. Eliptik integral, k modülü yardımiyle, cetvellerden faydalanarak bulunur.

$z-$ ekseni boyunca $\rho = 0$, $k = 0$, $K(0) = \pi/2$ olacağından

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

elde edilir. Bu sonuç, direkt integrasyonla kolayca bulunabilir. Eksen boyunca alan şiddeti

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

olur, $z = a/\sqrt{2}$ için alan şiddeti maksimum bir değer alır.

6 — Üniform yüklü ve sonsuz uzun paralel iki çizgisel kaynağın alanı incelenecektir, şek. 17.

Çizgisel kaynaklar $P(x, y)$ noktasında

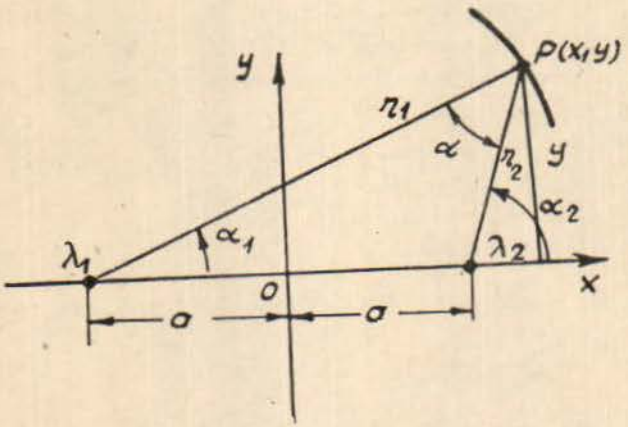
$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} (\lambda_1 \ln r_1 + \lambda_2 \ln r_2) + k$$

potansiyelini meydana getirirler. Eşit ve zıt işaretli yükler için $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ koyarak

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + k$$

yazılabilir. k sabiti, çok uzaklarda ve $x=0$ düzlemindeki noktaların potansiyelini gösterir. $k=0$ seçerek

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln \frac{r_2}{r_1}$$



Şek. 17

yazılır. Eşpotansiyel çizgilerin denklemi $r_2/r_1=k$ ($lnk=2\pi\varepsilon\varphi/\lambda$) dir. Böylece merkezleri x—ekseni üstünde bulunan daireler elde edilir. Eşpotansiyel yüzeyler dairesel silindirlerdir.

P noktasındaki alan bileşenleri için

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2}\right),$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}\right)$$

ifadeleri bulunur. Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dv}{1+v^2}$$

şeklindedir. u ve v

$$u = \frac{y}{x-a}, \quad v = \frac{y}{x+a}$$

kısaltmalarını göstermektedir. İntegre ederek $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = c$ veya $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha = c$ bulunur. α, P noktasındaki açıyı gösterdiğinden, c sabitine muhtelif değerler vererek merkezleri y—ekseni üstünde bulunan daire yayları elde edilir.

Şimdi alan çizgilerinin denklemini $\psi = \text{sab}$ yardımiyle bulalım. Şek. 17 de kâğıt düzlemine dik ve izleri $2a$, r_1, r_2 olan üç düzlem düşünelim. λ_1 çizgisel yükünün $2a$ ve r_1 düzlemleri arasından birim uzunluk boyunca geçireceği akı

$$\psi_1 = \int_0^{\alpha_1} D_\rho \rho \, d\phi = \frac{\alpha_1}{2\pi} \lambda_1$$

dır. λ_2 çizgisel yükü de $2a$ ve r_2 düzlemleri arasından birim uzunluk boyunca

$$\psi_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi} \lambda_2$$

akısını geçirecektir. Böylece şek. 17 de y yüksekliğindeki dikdörtgenden birim uzunluk boyunca geçecek olan akı için

$$\psi = \frac{1}{2\pi} (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = \text{sab.}$$

yazılabilir. $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ koyarak ve sabitleri bir tarafa toplayarak alan çizgileri için yukarıdaki denklem elde edilir. Genel olarak hepsi ayni düzlemde bulunan paralel çizgisel yüklerin alan çizgileri için

$$\sum_i \lambda_i \alpha_i = \text{sab.}$$

denklemi elde edilir.

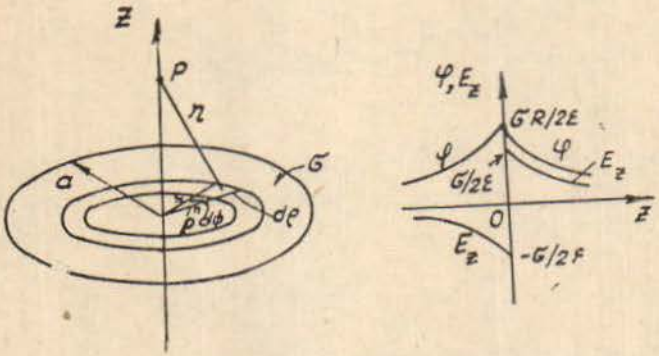
7 — Üniform yüklü dairesel diskin eksenindeki alan incelenecektir, şek. 18.

Disk P noktasında

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \int_0^a \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)$$

potansiyelini meydana getirir. Çok uzak noktalar için

$$\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon\,|z|}$$



Şek. 18

yazılabilir. $Q=\pi a^2\sigma$, diskin toplam yüküdür. Böyleee çok uzaklardaki potansiyelin Coulomb potansiyeline idantik olacağı anlaşılır.

P deki alan şiddeti

$$E_z=-\frac{d\varphi}{dz}=-\frac{\sigma z}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}-\frac{1}{|z|}\right)$$

dir. Potansiyel fonksiyonu her iki taraftan diske yaklaşılınca $\sigma a/2\varepsilon$ değerini alır. Yani sınır yüzeyinde potansiyel süreklidir. Buna karşılık alan şiddeti $z>0$ için pozitif ve $z<0$ için negatif değerler aldığından ($\sigma>0$ için) pozitifi veya negatif taraftan $z=0$ noktasına yaklaşıldığına göre $E_z(0+)=\sigma/2\varepsilon$ ve $E_z(0-)=-\sigma/2\varepsilon$ değerlerine yaklaşır. Böylece potansiyelin normal bileşeninin diskten geçerken σ/ε kadar bir atlatma yaptığı anlaşılır.

E_z ifadesinde $a\to\infty$ yaparak

$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\,\frac{z}{|z|}=\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

bulunur. Bu ifadede $z>0$ için + işareti ve $z<0$ için − işareti alınır. İfade sonsuz düzlemin alanını verir. $E_z=$ sab. olduğundan sonsuz düzlemin alanı üniformdur. $E_z=-d\varphi/dz$ yi integre ederek potansiyel için

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} |z| + k$$

ifadesi bulunur. Referans noktası sonsuzda seçilemez. $z=0$ için $\varphi=0$ seçerek

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} |z|$$

elde edilir.

Disk için bulunan potansiyel ifadesinde $a\to\infty$ yapılırsa $\varphi\to\infty$ olur. Sonsuz düzlemin potansiye ini bulmak için $z=1$ noktasındaki negatif potansiyeli ilâve ederek

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{1+a^2} + 1 - |z|\right)$$

bulunur. Bu ifadede $a\to\infty$ limitine geçilirse

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(1 - |z|\right)$$

elde edilir.

Gerek diskin alanı ve gerekse daha önce incelediğimiz silindirik dağılışın alanı bir basit tabaka dağılışının alanıdır. Basit tabakadan geçerken potansiyel sürekli olmakla beraber normal türev σ/ε kadar bir atlama yapmaktadır.

Yüzeye pozitif veya negatif taraftan yaklaşıldığı vakit elde edilen değerleri + ve — endisleri ile işaretliyerek basit tabaka dağılışı için

$$\varphi_+ = \varphi_-, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_- = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Bu özellik genel olup yüzeyin şekline bağlı değildir. Normal türevin sınır yüzeyinde aldığı değeri s endisi ile işaretleyerek

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s - \frac{\sigma}{2\varepsilon}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s + \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

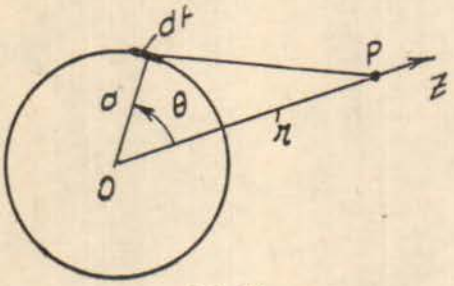
yazabiliriz. Sınır yüzeyindeki değer pozitif ve negatif taraftan yaklaşmalara tekabül eden değerlerin aritmetik ortalamasına eşittir.

İki boyutlu basit tabaka dağılışının logaritmik potansiyeli

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_C \sigma \ln r \, ds$$

dir. Daha önce dairesel silindir için bulunan ifadeleri incelersek potansiyelin sürekli olduğunu ve normal türevin ise pozitif normal yönünde yüzeyden geçerken σ/ε kadar atlama yaptığını görürüz.

8— Üniform küresel tabakanın alanı incelenecektir. Şek. 19.



Şek. 19

P deki potansiyel

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \int_F \frac{dF}{R}$$

dir. Bundan önce görüldüğü gibi bu ifade

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon a r} \int_{R_1}^{R_2} dR$$

şekline sokulabilir. $Q = 4\pi a^2 \sigma$, kürenin toplam yüküdür. Küre dışında $R_1 = r - a$, $R_2 = r + a$ olduğundan $\varphi_0 = Q/4\pi\varepsilon r$ bulunur. Kürenin dışındaki potansiyel merkeze getirilen Q yükünün Coulomb potansiyeline idantiktir. Küre içinde $R_1 = a - r$, $R_2 = a + r$ olacağından $\varphi_i = Q/4\pi\varepsilon a$ = sab. bulunur. Sınır yüzeyinde potansiyel süreklidir.

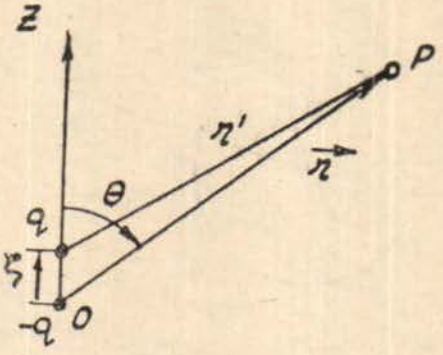
Alan şiddetleri için $E_{or} = Q/4\pi\varepsilon r^2$ ve $E_i = 0$ bulunur. $E_{or}(a) = \sigma/\varepsilon$ olduğundan normal bileşen küre yüzeyinde σ/ε kadar bir atlama yapar.

9— Dipolün alanı incelenecektir. Şek. 20.

Eşit ve zıt işaretli noktasal yükler P noktasında

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

potansiyelini meydana getireceklerdir. $1/r' = 1/\sqrt{r^2+\zeta^2-2r\zeta\cos\theta} = f(\zeta)$ ye ζ nın fonksiyonu gözüyle bakarak orijin civarında Taylor serisine açılırsa



Şek. 20

$$f(\zeta) = f(0) + \zeta\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r'}\right)\right]_{\zeta=0} + \frac{\zeta^2}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{r'}\right)\right]_{\zeta=0} + \dots$$

yazılabilir. Diğer taraftan kartezyen koordinatlarda $r' = \sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right), \left[\frac{\partial^n}{\partial\zeta^n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right]_{\zeta=0} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

dır. Böylece, $f(0) = 1/r$ olduğunu da gözönüne alarak

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) + \dots + \zeta^n\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) \pm \dots$$

elde edilir. Bunu potansiyel ifadesinde yerine koyduktan sonra $\zeta \to 0$ limitine geçilir ve bu sırada $p = q\zeta$ çarpımı sınırlı kalacak şekilde q yükünün büyüdüğü farzedilirse potansiyel için

$$\varphi = -\frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ koyup parsiyel türev hesaplanırsa

$$\varphi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

bulunur. Sisteme noktasal dipol ve p ye dipol momenti denilir. Dipol momentine $-q$ den q ye doğru yönelen $\vec{p}=q\vec{h}$ ($\zeta=h$ koyarak) vektörü gözüyle bakarak

$$\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\vec{p}\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

yazabiliriz. Burada gradyan, P noktasının koordinatlarına göre hesaplanmaktadır. Şayet dipol (ξ, η, ζ) noktasında bulunuyorsa ve potansiyelin hesaplandığı noktanın koordinatları (x,y,z) ise $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ olduğunu gözönüne alarak grad $(1/r) = -\operatorname{grad}_M(1/r)$ almalıdır. Gradyanlardaki P ve Mendisleri işlemin P noktasının veya dipolün koordinatlarına göre yapılacağını belirtmektedir.

Dipolün alanı $z-$ ekseni (dipol ekseni) etrafında silindirik simetriktir. Bu sebeple her hangi bir meridyen düzlemindeki alan bileşenleri

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3},\quad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}$$

olur. Eşpotansiyel çizgilerin denklemi $\cos\theta=kr^2$ dir ($k=4\pi\varepsilon\varphi$). Çizgileri eksen etrafında döndürerek eşpotansiyel yüzeyler elde edilir.

Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi $dr/r=2\,ctg\,\theta$ olduğundan integre ederek $r=c\sin^2\theta$ bulunur.

Üniform $\vec{E}_0$ alanı içinde dipole tesir eden bileşke kuvvet sıfır olmakla beraber q ve $-q$ yüklerine tesir eden $\vec{F}=q\vec{E}_0$ ve $-\vec{F}$ kuvvet çiftinin meydana getireceği

$$\vec{M}=\vec{p}X\vec{E}_0$$

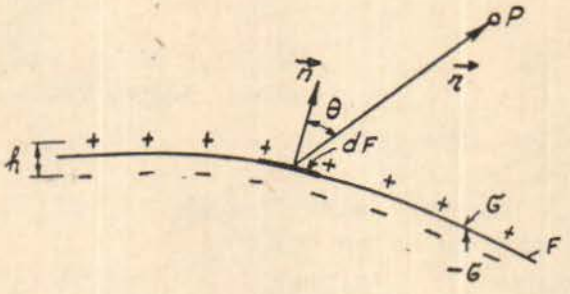
dönme momentinin tesiriyle dipol, ekseni alan yönüne gelecek şekilde döner.

10 — Çift tabaka dağılışının alanı incelenecektir, şek. 21.

Dipollerin bir F yüzeyine, eksenleri pozitif normal yönüyle intibak edecek şekilde yayılmasından bir çift tabaka dağılışı elde edilir. Çift tabakanın iki yüzünde, yoğunlukları σ ve $-\sigma$ olan yüzey dağılışları vardır ve yüzey birimindeki moment $\tau=\sigma h$ çarpımının $h\to 0$ ve $\sigma\to\infty$ için limiti olarak tarif edilir. Momenti τdF olan dF yüzey elemanı P noktasında

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\vec{\tau}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)dF=\frac{\tau\,dF}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\tau dF\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

potansiyelini meydana getirir ($\vec{\tau}=\tau\vec{n}$). Gradyan işlemi yüzey üstündeki noktanın koordinatlarına göre yapıldığından (dipolün koordinatları) po-



Şek. 21

zitif işaret alınmıştır. Bu ifadeyi F yüzeyi üzerinden integre ederek çift tabaka dağılışının potansiyeli için

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_F\tau\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dF=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_F\frac{\tau\cos\theta\,dF}{r^2}$$

bulunur. Bu ifadede $d\Omega=dF\cos\theta/r^2$ koyarak potansiyel için

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Omega\tau d\Omega$$

yazılabilir. $d\Omega$, P noktasından dF elemanını gören uzay açıdır. Şayet P den yüzeyin pozitif tarafı görünüyorsa $\cos\theta>0$, $d\Omega>0$ ve negatif tarafı görünüyorsa $\cos\theta<0$, $d\Omega<0$ dır. Üniform dağılış için τ=sab. olacağından

$$\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\Omega$$

elde edilir. F yüzeyi kapalı ise dışında $\Omega_+=0$ ve içinde $\Omega_-=-4\pi$ olacağından (normal yönü dışarı doğru) $\varphi_+=0$, $\varphi_-=-\tau/\varepsilon$ ve dolayısiyle

$$\varphi_+-\varphi_-=\frac{\tau}{\varepsilon}$$

bulunur. Potansiyel sürekli değildir ve çift tabakadan pozitif normal

yönünde geçerken τ/ε kadar bir atlama yapmaktadır. F yüzeyi kapalı değilse bunu bir kapalı yüzeye tamamlayarak ve F yüzeyinden geçerken tamamlamak için seçilen yüzeydeki dağılışın bir süreksizlik göstermiyeceği gözönüne alarak yine ayni sonuç elde edilir. $\tau \neq$ sab. için de ayni süreksizliğin meydana geleceğini, yüzey üstünde a yarıçapı, dağılışına üniform gözüyle bakılabilecek kadar küçük olan bir diski gözönüne alarak kolayca görebiliriz. M noktasını çevreleyen disk üstündeki üniform dağılışı τ_0 ile gösterelim. Bu nokta civarındaki potansiyel diskin φ' potansiyeli ile geri kalan yüzey bölgesindeki dağılışın φ'' potansiyelinin toplamına eşit olacaktır. φ'' potansiyeli diskte geçerken bir süreksizlik göstermez. Buna karşılık φ' potansiyeli diskten pozitif yönde geçerken τ_0/ε kadar bir atlama yapar. Sonuç olarak $\varphi=\varphi'+\varphi''$ potansiyeli diskten geçerken ayni atlamayı yapar. Limite geçerek $a\to 0$ için M noktasındaki τ elde edileceğinden yine ayni süreksizlik bağıntısı bulunur.

Gauss teoremini yüzeye normal olan silindire tatbik ederek $(E_n)_+=(E_n)_-$ ve potansiyel sinsinden

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_-$$

bulunur. Zira sınır yüzeyindeki toplam yük sıfırdır. Böylece normal türevin sürekli olduğu anlaşılır. Potansiyeldeki süreksizlikten dolayı E_t teğetsel bileşeni ve dolayısiyle $\partial\varphi/\partial t$ teğetsel türevi sürekli değildir.

Potansiyelin yüzey üstünde aldığı değeri φ_s ile göstererek

$$\varphi_+=\varphi_s+\frac{\tau}{2\varepsilon}\ ,\quad \varphi_-=\varphi_s-\frac{\tau}{2\varepsilon}$$

yazılabilir.

Örnek olmak üzere üniform olarak çift tabakalanmış ($\tau=$sab.) bir diskin eksenindeki potansiyeli bulalım, şek. 18. $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$, $\cos\theta=\rho/z$ ve $dF=\rho d\rho d\phi$ koyarak

$$\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\phi}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\frac{\tau z}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)=\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\operatorname{sign} z-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

bulunur. sign z, $z<0$ için -1 ve $z>0$ için $+1$ olan ve süreksiz fonksiyonları göstermek için faydalanılan fonksiyondur. $z=0$ noktasına pozitif taraftan ($z\to 0+$) veya negatif taraftan ($z\to 0-$) yaklaşıldığına gö-

re $\varphi(0+)=\tau/2\varepsilon$ ve $\varphi(0-)=-\tau/2\varepsilon$ değerleri elde edilir. Potansiyel, diskten geçerken τ/ε kadar atlama yapar. Alan şiddeti için

$$E_z=-\frac{d\varphi}{dz}=\frac{\tau}{2\varepsilon}\,\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

bulunur. $z\to 0$ için (her iki taraftan yaklaşma için) $E_z(0)=\tau/2\varepsilon a$ elde edilir. Böylece normal türevin sürekli olduğu görülür.

$a\to\infty$ için

$$\varphi=\frac{\tau}{2\varepsilon}\ \text{sign}\ z$$

elde edilir. Bu ise $z=0$ noktasında τ/ε kadar atlame yapan sabit bir fonksiyondur.

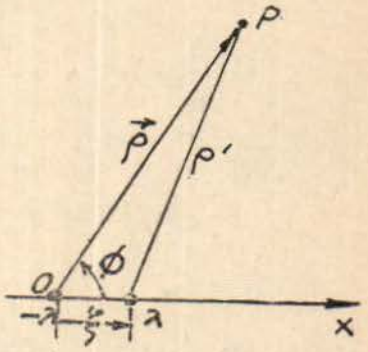
11— Çizgisel dipolün alanı ve silindirik çift tabaka dağılışının potansiyeli incelenecektir, şek. 22.

Şek. 22 de görülen λ ve $-\lambda$ paralel çizgisel yükleri P noktasında

$$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ ln\ \frac{\rho}{\rho'}$$

potansiyelini meydana getirirler.

$ln(1/\rho')=f(\xi)$ yi $\xi=0$ civarında Taylor serisine açtıktan sonra $\xi\to 0$ limitine geçilir ve $\lambda\xi=m$ çarpımı sınırlı kalacak şekilde λ nın büyüdüğü farzedilirse



Şek. 22

$$\varphi(x,y)=-\frac{m}{2\pi\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,(ln\rho)$$

bulunur. ρ uzaklığı

$$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$$

dir. Türev işlemi x koordinatına göre yapılırsa denklemin işareti değişir. Birbirine sonsuz küçük yakınlıkta iki paralel çizgisel kaynaktan meydana gelen bu sisteme çizgisel dipol adı verilir. Dipolün birim uzunluk için momenti m dir. m ye, $-\lambda$ dan λ ya doğru yönelen bir $\vec{m}$ vektörü gözüyle bakılabilir. Parsiyel türevi hesaplayarak

$$\varphi(\lambda,y)=\frac{m}{2\pi\varepsilon}\frac{x-\xi}{\rho}=\frac{m}{2\pi\varepsilon}\frac{\cos\phi}{\rho}$$

elde edilir. Eşpotansiyel çizgilerin denklemi $\cos\phi=k\rho$ $(k=2\pi\varepsilon\varphi/m)$ şeklinde olduğundan merkezleri $x-$ ekseni üstünde bulunan daireler elde edilir. Eşpotansiyel yüzeyler ise dairesel silindirlerdir. Alan şiddetinin bileşenleri

$$E_\rho=-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\frac{m\cos\phi}{2\pi\varepsilon\rho^2}\,,\quad E\phi=-\frac{\partial\varphi}{\rho\partial\phi}=\frac{m\sin\phi}{2\pi\varepsilon\rho^2}$$

dir. Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi $d\rho/\rho d\phi=c\ \mathrm{tg}\ \phi$ olduğundan integre ederek $\sin\phi=c\rho$ $(c=\text{sab.})$ bulunur. Bu denklem, merkezleri $y-$ ekseni üstünde bulunan daireleri gösterir.

Çizgisel dipollerin bir C eğrisi boyunca, eksenleri pozitif normal yönünde olmak üzere dağılışından elde edilen silindirik (iki boyutlu) çift tabaka dağılışının logaritmik potansiyeli için

$$\varphi=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_C\tau\frac{\partial}{\partial n}(\ln r)\,ds$$

yazılabilir. Normal türev dipolün bulunduğu noktaya tekabül ettiğinden negatif işaret alınmıştır. Normal türev için

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial n}=-\frac{\cos(r,n)}{r}$$

yazılabileceğinden potansiyel ifadesi

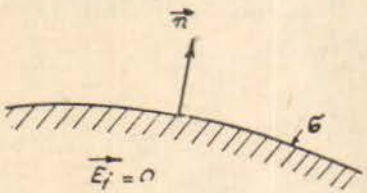
$$\varphi=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_C\frac{\tau\cos(r,n)}{r}\,ds$$

şekline girer.

III. İLETKENLER

7. Sınır şartları.

İletkenler statik alanda önemli bir rol oynarlar. Statik denge durumunda iletkenlerin içinde $\vec{E}_i = 0$, $\rho_i = 0$ ve $\varphi_i = \text{sab.}$ dir. İletkenin bütün yükü dış yüzeyinde bulunur, İletkenin dış yüzeyi bir eşpotansiyel yüzeydir. Dielektrik tarafındaki sınır şartları



Şek' 23

$$E_t = 0 \quad , \quad D_n = \varepsilon E_n = \sigma \tag{36}$$

veya potansiyel cinsinden

$$\varphi = \text{sab.} \quad , \quad \sigma = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{37}$$

şeklindedir, şek. 23. İletkenin yükü

$$Q = \oint_F \sigma \, dF = -\varepsilon \oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF \tag{38}$$

dir.

İzole ve nötr bir iletken statik alan içine sokulunca tesirle elektriklenerek yüzeyinde, içindeki alan sıfır olacak şekilde, bir yük dağılışı meydana gelir. (indüklenir). $\sigma \neq 0$ olmasına rahmen iletkenin toplam yükü sıfırdır. Sabit potansiyelde olan iletkenin yüzeyinde pozitif yükler bir tarafa ve negatif yükler öbür tarafa kaymıştır. Yükleri birbirinden ayıran nötr çizgi boyunca $\rho = 0$ dır.

İçi oyuk olan bir iletkenin tıpkı dolu bir iletken gibi davranacağını potansiyelin şu özelliğinden faydalanarak kolayca görebiliriz. Uzayda yüklerin bulunmadığı bir bölgede potansiyel maksimum veya minimum bir değer alamaz. Her hangi bir P noktasını kuşatan r yarıçaplı bir küre düşünelim. Potansiyelin bu küre üzerinden hesaplanan ortalama değeri

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_F \varphi \, dF = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

olacaktır. r ye göre türev alınırsa

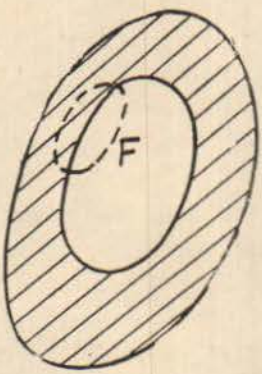
$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, dF$$

bulunur. Küre içindeki yük Q ile gösterilirse Gauss teoremine göre yüzey integrali $-Q$ ye eşit olur. $Q=0$ için $d\bar{\varphi}/dr = 0$ yani $\bar{\varphi} =$ sab. elde edilir. Böylece ortalama değerin P noktasındaki değere eşit olacağı ve sonuç olarak bu noktada ekstrem değer alamayacağı anlaşılır. P noktasında pozitif veya negatif bir yükün bulunması halinde ise potansiyel bu noktada maksimum veya minimum olacaktır.

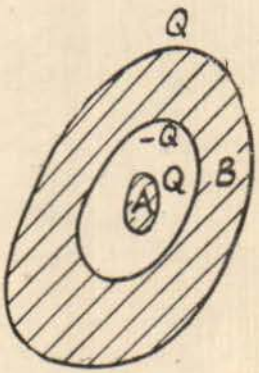
Potansiyelin ekstrem değer alamayacağını Laplace denklemi yardımiyle de gösterebiliriz. Potansiyel fonksiyonunun maksimum veya minimum bir değer alabilmesi için $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ parsiyel türevlerinin hepsinin negatif veya hepsinin pozitif olması gerekir ki bu da

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

şeklindeki Laplace denklemi ile bağdaşamaz. Ayni şey potansiyel fonksiyonunun türevleri için de söylenebilir.



Şek. 24



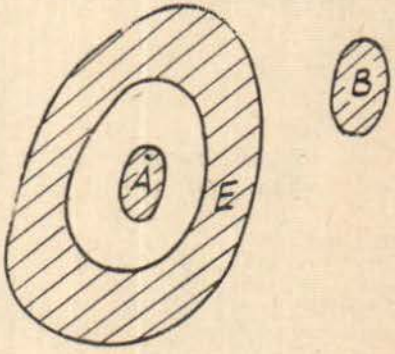
Şek. 25

Şek. 24 de görülen iletkenin içinde $\vec{E_i} = 0$ ve $\varphi_i =$ sab. dir. Oyukta yük bulunmadığından potansiyelin sabit kalması ve alanın sıfır olması gerekir. Oyukta nötr iletkenlerin bulunması halinde de durum aynidir. İletkenin iç yüzeyinde yük bulunmayacağını Gauss teoremini F yüzeyine tatbik ederek kolayca görebiliriz.

Şek. 25 deki sistemde içteki A iletkenine Q yükü konursa nötr olan dıştaki B iletkeninin iç yüzeyinde tesirle elektriklenme sonucu $-Q$ yükü ve dış yüzeyinde ise Q yükü belirir Bunu, Gauss teoremini tamamen B iletkeni içinde kalan bir kapalı yüzeye tatbik ederek görebiliriz. Olaya tam tesir adı verilir. Şayet dıştaki iletken topraklanacak yani sıfır potansiyeline getirilecek olursa dış yüzeydeki yük toprak tarafından kompanze edilerek yalnız iç yüzeydeki yük kalır. Bu durumda B iletkeni ile toprak bir bütün teşkil ederler. Tesirle elektriklenme olayı yüksek gerilim tesisleri için çok önemlidir.

8. Elektriksel ekranlama

Şek. 26 da görülen sistemde E iletkeninin izole ve nötr olduğunu farzederek şu iki statik denge durumunu inceleyelim:



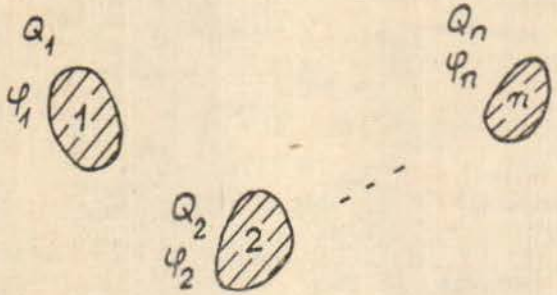
Şek. 26

Birinci dengede yalnız A iletkeni yüklenmiştir. Bu durumda hem oyuk içinde hem de C iletkeninin dışında bir alan meydana gelir. İkinci dengede ise yalnız B iletkenini yükleyelim. Bu defa E iletkeninin dışında bir alan meydana gelirse de oyuktaki alan sıfır olur. Bu iki denge durumu birleştirilirse hem A ve hem de B yüklü iken oyuktaki alanın valnız A tarafından meydana getirileceği ve buna karşılık E nin dışındaki alanın A ve B nin alanlarının bileşkesi olacağı anlaşılır. Böylece E nin tek yönlü olarak ekran rolünü oynadığı ve oyuk bölgesini dışarıya karşı ekranladığı görülür. Şayet E nin potansiyeli sabit tutulacak olursa ekranlama tesirinin iki yönlü olacağı ve sonuç olarak E nin uzayı elektriksel bakımdan bağımsız iki bölgeye ayıracağı kolayca gösterilebilir. E iletkeni sabit potansiyelde tutulduğu vakit oyukta bir alan meydana

getirilince dışarıdaki alan sıfır olacaktır. Zira E nin dışında yük bulunmadığından potansiyel sabit kalmak zorundadır. Pratikte ekran rolünü oynayan iletkeni topraklamak suretiyle potansiyeli sabit yani sıfırda tutulur. Keza ekran olarak ekseriya dolu iletkenler yerine tel kafesler kullanılır. Tel kafesler oldukça yaklaşık olarak ekran tesiri yaparlar. Elektriksel ekranla madan meselâ ölçü âletlerini dış tesirlere karşı korumak için faydalanılır.

9. İletken sistemleri.

Şek. 27 de n iletkenden meydana gelen bir iletken sistemi görülmektedir. Bu sistemde iletkenlerin yükleri ile potansiyelleri arasındaki bağıntıları arayalım.



Şek. 27

Yüzey yoğunluğu σ olan bir bir iletkenin meydana getireceği potansiyel

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oint_F \frac{\sigma dF}{r}$$

ve iletkenln toplam yükü

$$Q = \oint_F \sigma dF$$

ifadesi yardımiyle bulunur. Potansiyel integralinde r, iletken yüzeyindeki noktaların yine iletken yüzeyinde alınan sabit bir noktadan uzak-

lığı gösterirse bu ifade iletkenin potansiyelini verir. Yüzey yoğunluğunu bir k sabiti ile çarparak yeni bir denge durumu elde edilir. Bu durumda iletkenin yükü ve potansiyeli $Q'=kQ$ ve $\varphi'=k\varphi$ olur. Böylece Q yükü φ potansiyelini meydana getiriyorsa kQ yükünün $k\varphi$ potansiyelini meydana getireceği anlaşılır. Keza Q' yükü φ' potansiyelini ve Q'' yükü φ'' potansiyelini meydana getiriyorsa $Q'+Q''$ yükünün $\varphi'+\varphi''$ potansiyelini meydana getireceği kolayca görülebilir. Bu açıklamadan muhtelif denge durumları için süperpozisyon prensibinin cari olduğu anlaşılmaktadır. Hiç şüphesiz yükler ve potansiyeller için söylenen şeyler $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ ve $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ vektörleri için de cari olacaktır. Süperpozisyon prensibinin statik alanda cari olması $\varepsilon=$ sab. için alan denklemlerinin lineer olmasından ileri gelir.

Uzayda izole bir iletken için hesaplanan ve sabit kalan

$$C=\frac{Q}{\varphi} \tag{39}$$

oranına iletkenin kapasitesi denilir. Kapasitenin $MKSC$—birimi F dır ($1\mu F=10^{-6}F$). Meselâ yarıçapı a olan bir kürede $C=4\pi\varepsilon a$ olacaktır.

İletken sisteminde ilk önce yalnız k iletkeninin üstünde $+1$ yükünün bulunduğunu ve diğerlerinin nötr olduğunu farzedelim. Bu denge durumunda k nın potansiyelini p_{kk} ile ve her hangi bir i iletkeninin potansiyelini p_{ik} ile gösterelim. Şayet k nın yükü Q_k yapılırsa potansiyeli $\varphi_{kk}=p_{kk}Q_k$ olur. Bu esnada i nin potansiyeli $\varphi_{ik}=p_{ik}Q_k$ değerini alacaktır. Bözlece k sayısına 1 den n ye kadar değerler vererek husule gelen denge durumları süperpoze edilirse i nin potansiyeli

$$\varphi_i=p_{i1}Q_1+p_{i2}Q_2+\ldots+p_{in}Q_n$$

olur. Bu bağıntı bütün iletkenler için cari olacağından iletkenlerin potansiyelleri ile yükleri arasında

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1&=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2+\ldots+p_{1n}Q_n\ ,\\
\varphi_2&=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2+\ldots+p_{2n}Q_n\ ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n&=p_{n1}Q_1+p_{n2}Q_2+\ldots+p_{nn}Q_n
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

bağıntıları elde edilir. Bu suretle potansiyellerin yüklerin lineer fonksiyonları olduğu anlaşılır. p lere potansiyel katsayısı adı verilir. Bu kat-

sayıların birimi F^{-1} dir, yani kapasite biriminin tersidir. İletkenlerin yükleri k katına çıkarılınca potansiyelleri de k katına çıkacağından potansiyel katsayıları sabit kalır. Bu sebeple potansiyel katsayıları yalnız sistemin geometrik yapısına (boyut, şekil, uzaklık) ve ortamın cinsine (ε) bağlı olurlar. Bütün potansiyel katsayıları pozitiftir.

İletkenlerin yükleri bilindiği takdirde (40) denklemleri yardımiyle potansiyellerini hesaplamak kabil olur. Keza denklemleri yüklere göre çözerek potansiyeller bilindiği vakit yükleri bulmaya yarayan denklemler elde edilir.

Yukarıda görülenlerden yüklü iletkenler karşısında bulunan nötr iletkenlerin potansiyel kazanacakları anlaşılmaktadır.

$i \neq k$ için

$$p_{ik} = p_{ki} \tag{41}$$

olur. Bu özelliği Green karşıtlık teoremi yardımiyle görebiliriz. Teoremin ifadesi

$$\sum_i Q_i \varphi_i' = \sum_i Q_i' \varphi_i \tag{42}$$

şeklindedir. Bu bağıntıda Q_i , φ_i ve Q_i' , φ_i', sistemin iki statik denge durumu için iletkenlerin yüklerini ve potansiyellerini göstermektedir. Teoremi şöylece ispatlayabiliriz :
Birinci denge durumunda i iletkeninin potansiyeli

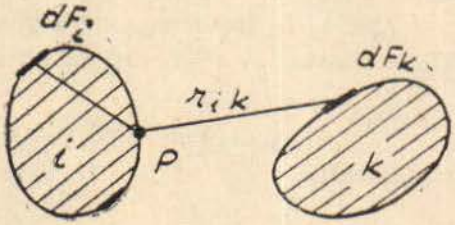
$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_k \oint_{F_k} \frac{\sigma_k dF_k}{r_{ik}}$$

dır, şek. 28. Bu ifadeyi ikinci denge durumundaki σ_i' yoğunluğu ile çarptıktan sonra F_i yüzeyi üzerinden integre edip i üzerinden toplam teşkil edilirse φ_i = sab. olduğunu da gözönüne alarak

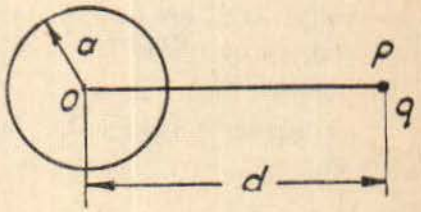
$$\sum_i \varphi_i \oint_{F_i} \sigma_i' dF_i = \sum_i \varphi_i Q_i' = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \sum_k \oint_{F_i} \oint_{F_k} \frac{\sigma_i' \sigma_k dF_i dF_k}{r_{ik}}$$

bulunur. Bu ifadenin sağ tarafı i ve k ya göre simetrik olduğundan φ_i

yerine φ_i' ve Q_i' yerine Q_i alırsak yine ayni sonucu buluruz. Böylece yukarıdaki teoremi elde ederiz. Green teoremini şu iki denge durumuna tatbik edelim : Birinci durumda yalnız $Q_k \neq 0$ ve ikinci dengede ise yalnıy $Q_i \neq 0$ dır. Bu denge durumlarında $\varphi_i = p_{ik} Q_k$ ve $\varphi_k = p_{ki} Q_i$ olacağından Creen teoremine göre $p_{ik} Q_k Q_i = p_{ki} Q_i Q_k$ yazarak



Şek. 28



Şek. 29

$p_{ik} = p_{ki}$ bulunur. Bu sebeple n iletkenli sistemde $n(n+1)/2$ potansiyel katsayısı vardır ve bunlardan n tanesi ayni endisli (p_{kk}) ve $n(n-1)/2$ tanesi de farklı endislidir (p_{ik}).

$p_{ik} = p_{ki}$ nin fiziksel anlamı şudur : Yalnız k iletkeni Q_k yükünü taşırken i iletkeninin alacağı potansiyel, yalnız i iletkeni ayni yükü taşırken k iletkeninin alacağı potansiyele eşit olur. Meselâ q noktasal yükünün karşısına getirilen nötr ve izole iletken kürenin potansiyelini bulalım. q yükü küre üstüne konunca P noktasında $\varphi = q/4\pi\varepsilon d$ potansiyelini meydana getireceğinden yük P noktasına getirilince küre bu potansiyeli alacaktır, şek. 29. Böylece kürenin, alana sokulmadan önce merkezinin bulunduğu noktada noktasal yükün meydana getirdiği potansiyeli aldığı anlaşılır.

Potansiyel katsayılarının diğer bir özelliği

$$p_{kk} \geqq p_{ik} \tag{43}$$

olmasıdır. Zira bütün deplasman akısı pozitif birim yük taşıyan k iletkeninden çıkıp diğer iletkenlere gittiğinden bu iletkenin potansiyeli diğerlerinin potansiyellerinden büyük olacaktır. Eşitlik, i iletkeni k nın içinde bulunduğu zaman meydana gelir. Zira i nin potansiyeli k nın potansiyeline eşit olmak zorundadır.

İletkenlerin potansiyelleri bilinirse (40) denklemlerini çözerek yükler bulunabilir. Bu suretle

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + \ldots + c_{1n}\varphi_n \\ Q_2 &= c_{22}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + \ldots + c_{2n}\varphi_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n &= c_{n1}\varphi_1 + c_{n2}\varphi_2 + \ldots + c_{nn}\varphi_n \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

denklem sistemi elde edilir. c_{kk} gibi ayni endisli katsayılara kapasite katsayısı ve c_{ik} gibi farklı endisli katsayılara ise tesir katsayısı adı verilir. Bu katsayıların birimi F dır, yani kapasite birimine eşittir. c_{kk} gibi bir katsayı, $\varphi_k = +1$ ve diğer iletkenler sıfır potansiyelinde (topraklanmış) iken Q_k vı ve c_{ik} gibi bir katsayı ise ayni denge durumunda Q_i yi gösterir. Böylece topraklanmış olan iletkenlerin yüklendikleri anlaşılmaktadır.

Tesir katsayıları için

$$c_{ik} = c_{ik} \quad (45)$$

olduğu kolayca görülebilir. Sistemde n kapasite katsayısı ve $n(n-1)/2$ tesir katsayısı vardır. Bu özellige göre yalnız k iletkeni φ_k potansiyelinde ve diğerleri topraklanmışken i iletkeninin kazanacağı yük, yalnız i iletkeni ayni potansiyelde ve diğerleri topraklanmışken k iletkeninin kazanacağı yüke eşit olur.

Bütün kapasite katsayıları pozitif ve bütün tesir katsayıları negatiftir. Zira bütün akı pozitif birim potansiyelindeki k iletkeninden çıkıp sıfır potansiyelindeki iletkenlere gittiğinden bu iletkenin c_{kk} yükü pozitif ve diğerlerinin c_{ik} yükleri negatif olacaktır.

Toplam yükü sıfır olan iletken sistemine komple adı verilir. Komple sistemde

$$\sum_i c_{ik} = 0 \quad (46)$$

olacaktır. Eğer sisten komple değilse bu toplam pozitif olur.

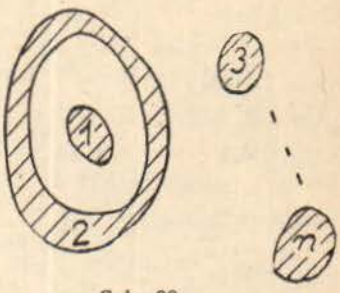
Şek. 30 da görülen sistemde 2 iletkeni topraklanırsa $\varphi_2 = 0$ olur. Bu durumda $Q_1 = 0$ için $\varphi_1 = 0$ olacağından

$$0 = c_{13}\varphi_3 + c_{14}\varphi_4 + \ldots + c_{1n}\varphi_n$$

denklemi elde edilir. Bu denklem potansiyellerin her değeri için doğru olacağından sistemde $c_{13} = c_{14} = \ldots = c_{1n} = 0$ olacağı anlaşılır. Şayet diğer iletkenler topraklanmışken yalnız 1 iletkeninin potansiyeli +1 yapılırsa $c_{11} = -c_{21}$ olacağı görülür. $\varphi_2 = 0$ için sistemin denklemleri

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 \quad ,$$
$$Q_2 = c_{22}\varphi_1 + c_{21}\varphi_3 + \ldots ,$$
$$Q_3 = c_{33}\varphi_3 + c_{34}\varphi_4 + \ldots ,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

şeklinde olur. Birinci denklem, oyuktaki elektriksel durumun dış şartlara bağlı olmadığını ve $Q_3, \ldots$ ifadeleri de 2 ilekeni dışındaki durumun iç şartlara bağlı olmadığını göstermektedir (ekran tesiri).



Şek. 30

Kapasite ve tesir katsayıları kapasite boyutunda olmakla beraber elektrik devrelerindeki kapasite kavramına uymak için (44) denklemlerini potansiyel farklarına göre düzenlemek elverişlidir. Böylece

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \ldots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n), \\ Q_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \ldots + C_{nn}\varphi_n \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadelerde $U_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$, i ve k iletkenleri arasındaki gerilimdir. Kapasite boyutunda olan C katsayılarına parsiyel (kısmî) kapasite denilir. Farklı endisli C_{ik} katsayıları, i ve k iletkenleri arasındaki parsiyel kapasiteyi ve C_{kk} katsayısı ise k iletkeni ile sıfır potansiyelindeki toprak arasındaki parsiyel kapasiteyi gösterir. Sonunculara toprak kapasitesi adı da verilir. C_{kk}, bütün iletkenler $+1$ potansiyelinde iken k nın yükünü ve C_{ik} ise $\varphi_k = +1$ ve diğerleri sıfır potansiyelinde iken i nin yükünü gösterir.

(44) ve (47) sistemlerini karşılaştırarak

$$c_{ii} = \sum_k C_{ik} \ , \ C_{ik} = -c_{ik} \ (i \neq k), \ C_{ii} = \sum_k c_{ik} \quad (48)$$

olacağı anlaşılır. Bütün parsiyel kapasiteler pozitiftir.

Parsiyel kapasiteler şematik olarak kondansatörler yardımiyle gösterilir.

Şek. 30 da tam tesir halinde olan 1 ve 2 iletkenleri bir kondansatör teşkil ederler. Bu kondansatörün kapasitesi içteki iletkenin c_{11} katsayısıdır. 1 iletkeni ile dıştaki iletkenler arasındaki tesir katsayıları sıfır olduğundan bu sistemde $Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2$ dir. $c_{11} = -c_{12}$ olduğunu gözönüne alarak $Q_1 = c_{11}(\varphi_1 - \varphi_2)$ yazılabilir ve buradan kondansatörün kapasitesi için

$$c_{11} = C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{49}$$

elde edilir.

Şek. 30 da yalnız 1 ve 2 iletkenlerinin bulunduğu farzedilirse

$$Q_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \quad Q_2 = -Q_1 + (c_{22} - C)\varphi_2 = -Q_1 + Q'$$

yazılabilir. $-Q_1$, 2 iletkeninin iç yüzeyindeki yükü ve Q' ise dış yüzeyindeki yükü gösterir. Şayet 2 iletkeni topraklanırsa ($\varphi_2 = 0$) $Q' = 0$ olacaktır.

Şayet iki iletken yekdiğerinin içinde bulunmamakla beraber tam tesir halinde iseler $Q_1 = -Q_2$ olacağından kapasite yine yukarıdaki ifade ile hesaplanır. Potansiyel denklemlerinde $Q_1 = -Q_2 = Q$ koyarak kapasite için

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

bulunur. Kapasite katsayıları cinsinden

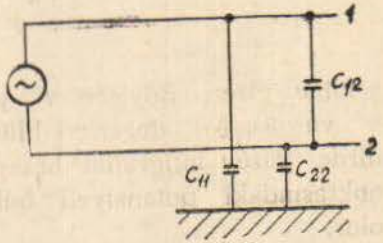
$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}$$

olur. Eğer iletkenlerden biri diğerinin bir düzleme göre simetriği ise $p_{11} = p_{22}$ ve $c_{11} = c_{22}$ olacağından

$$C = \frac{1}{2(p_{11} - p_{12})} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

bulunur.

Bir kondansatördeki gerilim $U = Q/C$ olduğundan, gerilimi yükseltmek için Q=sab. iken kapasiteyi küçültmek veya C=sab. iken yükü arttırmak düşünülebilir. Yüksek gerilimler elde etmek için faydalanılan Van de Graaff generatöründe bir kürenin üstündeki yükü arttırarak bu sonuç elde edilmektedir.



Şek. 31

Pratikte rastlanan diğer önemli bir kapasite kavramı da işletme veya servis kapasitesidir. Bir iletken sisteminin belli bir çalışma tarzı için eşdeğer kapasitesine işletme kapasitesi denilir. Meselâ şek. 31 de iki iletkenli hat, ürereç bakımından kapasitesi

$$C_s = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}+C_{22}}$$

olan bir kondansatör gibi rol oynayacağından C_s, sistemin işletme kapasitesini gösterir.

10. İmaj metodu.

Şek. 32 de görülen F yüzeyi içindeki yük dağılışı tarafından P noktasında meydana getirilen potansiyel

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{r}$$

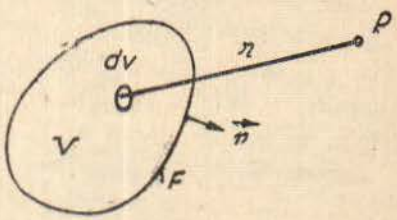
integrali yardımiyle hesaplanır. Vektör analizde görülen ikinci Green teoremine göre φ ve ϕ gibi iki skaler fonksiyon için

$$\int_V (\phi\Delta\varphi - \varphi\Delta\phi)\, dV = \oint_F \left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) dF$$

dir. Yüzeydeki pozitif normal yönü dışarı doğrudur. Bu denklemde $\phi = 1/r$ alınırsa $\Delta(1/r) = 0$ ve $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$ olduğunu gözönüne alarak potansiyel ifadesi

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\oint_F \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dF \qquad (50)$$

şekline girer. Böylece F yüzeyindeki φ ve $\partial\varphi/\partial n$ değerleri bilindiği takdirde yüzey intigralini hesaplayarak P noktasındaki potansiyeli bulmak kabil olur.



Şek. 32

Şayet F yüzeyi bir eşpotansiyel yüzeyle intibak ederse diverjans teoremine göre

$$\oint_F \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dF = \varphi\int_V \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dV = O$$

olacağından potansiyel ifadesi

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_F \frac{-\varepsilon\, \partial\varphi/\partial n}{r}\, dF \qquad (51)$$

şeklini alır. Bu ifadeye göre, her hangi bir eşpotansiyel yüzey içindeki yük dağılışının bu yüzey dışında meydana getireceği potansiyelin bu yüzeye intibak eden ve yoğunluğu

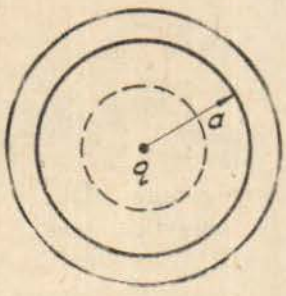
$$\sigma = -\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

olan bir basit tabaka dağılışının potansiyeline eşdeğer olacağı anlaşılır. Şayet eşpotansiyel yüzey bir iletkenle değiştirilecek olursa bu yoğunluk iletkenin dış yüzeyindeki yoğunluk olacaktır. Gauss teoremine göre iletkenin toplam yükü yüzey içindeki yüklerin cebrik toplamına eşit olur.

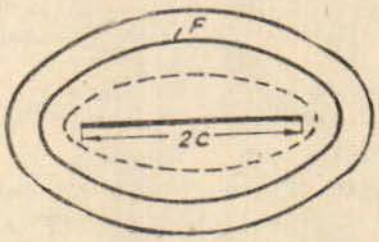
Eğer F yüzeyi bir eşpotansiyel yüzey değilse (50) ifadesindeki ikinci terim sıfır olmaz ve bu terim, normal yönündeki momenti $\tau = \varepsilon\varphi$ olan bir çift tabakanın potansiyeline eşdeğer olur. Böylece φ_P potansiyelinin, F yüzeyinde bulunan ve yoğunluğu σ olan basit tabaka ile momenti τ olan çift tabakanın potansiyellerinden meydana geleceği anlaşılır (Green eşdeğer tabakaları).

Yukarıdaki açıklamalarda P noktasının F yüzeyi dışında bulunduğu kabul edilmiştir. Şayet nokta bu yüzeyin içinde ise normal yönünü içeri doğru alarak ayni sonuçlar elde edilir.

Bu sonuçların önemli bir tatbikatı imaj teorisidir. İmaj metodunda bir sistemin alanını bulmak için bilinen bir alan şeklinden faydanılır. Metod, iletken veya dielektrik yüzeylerinin varlığında alanları incelemek için çok elverişlidir. Metodun esasını basit bir iki örnek üzerinde açıklayalım. Şek. 33 de q noktasal yükünün küresel eşpotansiyel yüzeyleri görülmektedir. Her hangi bir eşepotansiyel yüzey uzayı iki bölgeye



Şek. 33



Şek. 34

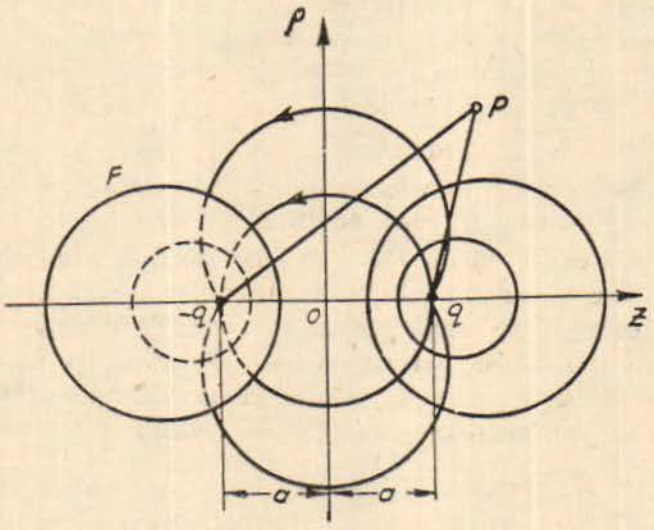
ayırır. Sayet q yükü kaldırılacak ve meşelâ a yarıçaplı kürenin yüzeyine yoğunluğu ($\varphi = q/4\pi\varepsilon r$)

$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{q}{4\pi a^2}$$

olan yük dağılışı getirilecek olursa küre dışındaki alan hiç bir değişikliğe uğramayacaktır. Tersine olarak q yükünü taşıyan kürenin dışındaki alan, merkeze getirildiği farzedilen q yükünün alanına eşdeğer olur. q yüküne, sonsuzda bulunduğu farzedilen $-q$ yükünün a yarıçaplı küreye nazaran elektriksel imajı denilir.

Şek. 34 de $2c$ uzunluğundaki üniform çizgisel yükün eşpotansiyel yüzeyleri görülmektedir. Sonsuzdaki yükün her hangi bir elipsoide nazaran imajı bu çizgisel yükten ibarettir. Elipsoid dışındaki alan çizgisel yükün alanına eşdeğerdir.

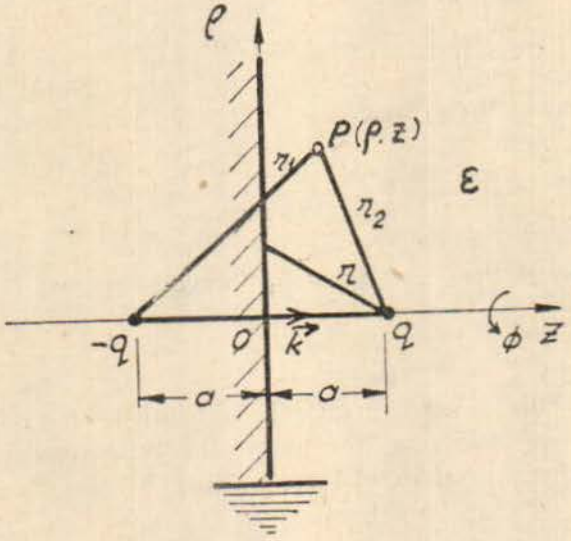
Şek. 35 de q ve $-q$ yüklerinin alanı görülmektedir. Meselâ $-q$



Şek. 35

yükünü çevreleyen F eşpotansiyeli uzayı iki bölgeye ayırır. $-q$ yükü kaldırılacak ve F yüzeyine $\sigma = -\varepsilon\,\partial\varphi/\partial n$ yoğunluğundaki yük dağılışı getirilecek olursa q yükünün bulunduğu bölgedeki alan şeklinde hiç bir değişiklik olmaz. Tersine olarak q yükü, eşpotansiyel yüzeye intibak eden bir iletken karşısında bulunacak olursa tesirle elektriklen-

me sonucu bu iletkenin yüzeyinde yoğunluğu σ olan bir yüzey dağılışı meydana gelir. Bu yük dağılışının eşpotansiyel yüzey dışındaki alan üzerine yapacağı tesiri bulmak için en elverişli yol bu dağılış yerine eşdeğer $-q$ yükünü almak olacaktır. $-q$ yükü, q yükünün F yüzeyine nazaran imajıdır. Eşpotansiyel yüzey olarak $z=0$ düzlemi alındığı takdirde hesaplar oldukça kolay olur. Böylece şek. 36 da görülen sonsuz iletken düzlemle q noktasal yükü arasındaki alan elde edilir. P noktasındaki potansiyel



Şek. 36

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}\right]$$

olur. Sonsuz düzlemdeki yük yoğunluğu ise

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{aq}{2\pi r^3}$$

olacaktır ($r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$). $\rho = 0$ için yoğunluk maksimum olur. Yüzeydeki alan şiddeti $E_z = \sigma/\varepsilon$ olarak bulunur. Alan düzleme doğru yönelir. İletken içinde potansiyel ve alan sıfırdır.

İletken yüzeyindeki yük

$$Q = \oint_F \sigma \, dF = \int_0^\infty \sigma \, 2\pi\rho \, d\rho = -q$$

dür (Gauss teoremi).

q yüküne tesir eden kuvvet $\vec{F} = q\vec{E}$ dir. İmaj yükü q yükünün bulunduğu verde

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon(2a)^2}\vec{k}$$

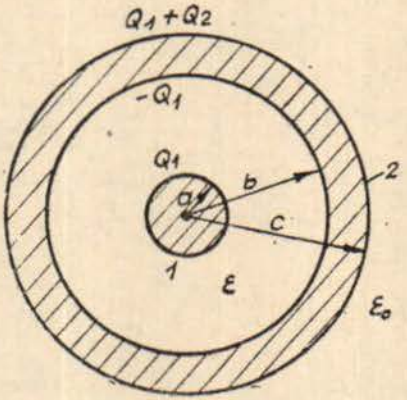
alanını meydana getireceğinden

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon a^2}\vec{k}$$

bulunur. q yükü düzlem tarafından bu kuvvetle çekilir.

Örnekler:

1— Şek. 37 deki ortak merkezli kürelerden içteki Q_1 yükünü ve dıştaki Q_2 yükünü taşıdığına göre kürelerin potansiyelleri ve sistemin kapasitesi bulunacaktır (küresel kondansatör).



Şek. 37

$r \geqq c$ için potansiyel

$$\varphi = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

olduğundan dıştaki kürenin potansiyeli için

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_2$$

bulunur. İçteki kürenin potansiyeli ise

$$\varphi_1 = \varphi_2 + U_{12} = \varphi_2 + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\right] Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_2$$

olur. Sistemin potansiyel katsayıları

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \quad , \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

dır. Potansiyellerle yükler arasındaki

$$\varphi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \quad ,$$

$$\varphi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

denklemleri yüklere göre çözülerek

$$Q_1 = \frac{p_{22}}{\Delta} \varphi_1 - \frac{p_{12}}{\Delta} \varphi_2 \quad ,$$

$$Q_2 = -\frac{p_{21}}{\Delta} \varphi_1 + \frac{p_{11}}{\Delta} \varphi_2$$

bulunur ($\Delta = p_{11} p_{22} - p^2_{12}$). Böylece kapasite ve tesir katsayıları için

$$c_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta} = \frac{4\pi\varepsilon\, ab}{b-a} = -c_{12} \quad ,$$

$$c_{22} = \frac{4\pi\varepsilon\, ab}{b-a} + 4\pi\varepsilon_0 c$$

elde edilir. Q_1 ve Q_2 için

$$Q_1 = c_{11}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Q_2 = -Q_1 + (c_{22} - c_{11})\varphi_2 = -Q_1 + C'\varphi_2 = -Q_1 + Q'$$

yazılabilir. $-Q_1$, dıştaki kürenin iç yüzeyindeki yükü ve Q' ise dış yüzeyindeki yükü gösterir. Sistemin kapasitesi

$$c_{11} = C = \frac{4\pi\varepsilon\, ab}{b-a}$$

dir. $C' = c_{22} - c_{11} = 4\pi\varepsilon_0 c$, dıştaki kürenin uzayda izole olarak tek başına kapasitesini göstermektedir. Şayet dıştaki küre topraklanırsa ($\varphi_2 = 0$) $Q' = 0$ olur.

İki küre arasındaki bölgede alan şiddeti

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{ab}{b-a}\,\frac{U_{12}}{r^2}$$

dir. $r = a$ için, yani içteki kürenin yüzeyinde, bu alan şiddeti maksimum olarak

$$E_{max} = \frac{b\,U_{12}}{a\,(a-b)}$$

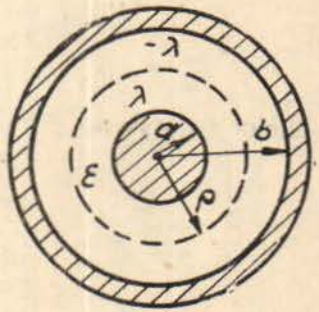
değerini alır. U_{12} = sab. ve b = sab. için $a = b/2$ olduğu vakit maksimum alan şiddeti minimum bir değer alacaktır.

2 — Şek. 38 deki ortak eksenli çok uzun silindirlerin alanı incelenecek ve sistemin kapasitesi bulunacaktır (silindirik kondansatör, tek damarlı kablo).

Silindirler arasında alan şiddeti $E\rho = \lambda/2\pi\varepsilon\rho$ dur. Silindirler arasındaki gerilim ise

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\, ln\, \frac{b}{a}$$

olur. Şayet dıştaki silindir topraklanmışsa bu ifade içteki silindirin potansiyelini gösterir.



Şek. 38

Uzunluk birimindeki kapasite $\overline{C}$ ile gösterilirse gerilim denkleminden

$$\overline{C} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{ln\,(b/a)}$$

bulunur.

Alan şiddeti için λ yı elimine ederek

$$E\rho = \frac{U}{\rho\, ln\,(b/a)}$$

yazılabilir. Alan şiddeti $\rho = a$ için, yani içteki silindirin yüzeyinde maksimum olur ve

$$E_{max} = \frac{U}{a\, ln\,(b/a)}$$

dır. Belli bir gerilim ve dış yarıçap için maksimum alan şiddeti $a = b/e$ ($e = 2{,}718...$) olduğu vakit minimum olur.

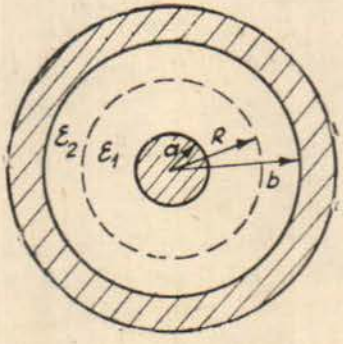
Şek. 39 da görülen iki dielektrikli sistemde $E_{1\rho} = \lambda/2\pi\varepsilon_1\rho$ ve $E_{2\rho} = \lambda/2\pi\varepsilon_2\rho$ olduğundan gerilim için

$$U = \int_a^R \vec{E}\,.\,\vec{ds} + \int_R^b \vec{E}\,.\,\vec{ds} = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\, ln\,\frac{R}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\, ln\,\frac{b}{R}\right)$$

bulunur. Buradan uzunluk birimindeki kapasite için

$$\overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\, ln\,\frac{R}{a} + \varepsilon_1\, ln\,\frac{b}{R}}$$

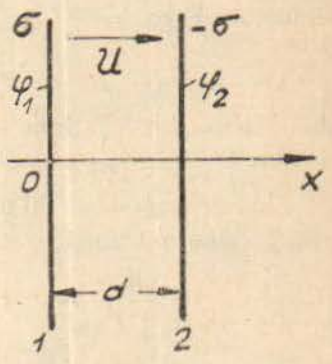
elde edilir.



Şek. 39

Dielektrik malzemesi belli bir alan şiddetine kadar izolasyon özelliği gösterirse de bu alan aşılınca delinerek iletken hale geçer ve bu özelliği kaybederler. Dielektriğin dayanabildiği en yüksek alan şiddetine delinme alan şiddeti denilir. Çeşitli faktörlere bağlı olan bu değer izolasyon maddeleri için çok önemlidir. Maksimum alan şiddeti elektriksel dayanıklılık bakımından önemli bir rol oynar.

Silindirik sistem için elde edilen sonuçlar teorik olarak sonsuz uzun silindirler için doğrudur. Sınırlı uzunluklar için kenar tesirlerini azaltmak gayesiyle koruma halkalarından faydalanılır. Bunun için de dıştaki silindir ayni potansiyelde tutulan üç parçaya bölünür. Esas kondansatör ortadaki kısımdır. Bu kısmın uzunluğu l ile gösterilirse kapasite $C=\bar{C}l$ olur. Kenarlardaki silindirler koruma halkalarıdır.



Şek. 40

3 — Paralel levhalı kondansatörün alanı incelenecek ve kapasitesi bulunacaktır, şek. 40.

Levhaların sonsuz olduğu farzedilirse düzlemsel simetriyi gözönüne alarak

$$\varphi = Ax + B$$

bulunur. 1 levhasındaki yoğunluk σ olduğundan

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = -\varepsilon A$$

yazarak $A = -\sigma/\varepsilon$ elde edilir. Böylece potansiyel fonksiyonu

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon}x + B$$

şekline girer. d uzaklığı levhaların boyutlarına nazaran çok küçük olduğu takdirde kenar tesirleri ihmal edilebilir. Levhalar arasındaki alan şiddeti $E_x = -d\varphi/dx = \sigma/\varepsilon =$ sab. olduğundan alan üniformdur. Sınır şartları $\varphi(0) = \varphi_1$ ve $\varphi(d) = \varphi_2$ dir. Böylece potansiyel için

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{x}{d}(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_1 - \frac{x}{d} U \quad , \quad E_x = \frac{U}{d}$$

yazılabilir.

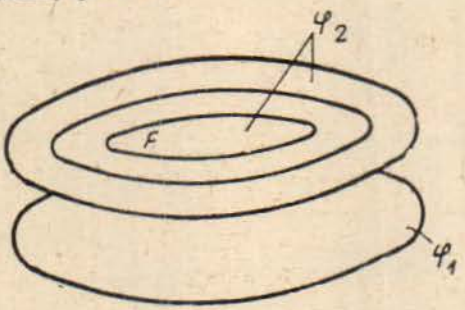
Levhalar arasındaki gerilim için

$$U = E_x d = \frac{\sigma}{\varepsilon} d = \frac{d}{\varepsilon F} Q$$

yazılabileceğinden kapasite için

$$C = \frac{\varepsilon F}{d}$$

ifadesi bulunur. Kenar tesirini azaltmak için burada da koruma halkalarından faydalanılabilir, şek. 41.



Şek. 41

Küresel kondansatörde $a \approx b$ olduğu takdirde

$$C \approx \frac{4\pi a^2 \varepsilon}{d} = \frac{\varepsilon F}{d}$$

yazılabilir ($d = b - a$). Kapasite, F yüzeyi içteki kürenin yüzeyine eşit olan paralel levhalı kondansatör gibi hesaplanabilir.

Silindirik kondansatörde ise $a \approx b$ için

$$C \approx \frac{2\pi a l \varepsilon}{d} = \frac{\varepsilon F}{d}$$

yazılabilir. Kapasite, F yüzeyi içteki silindirin yüzeyine eşit olan paralel levhalı kondansatör gibi bulunur.

Şek. 42 de görülen iki dielektrikli kondansatörde gerilim için

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

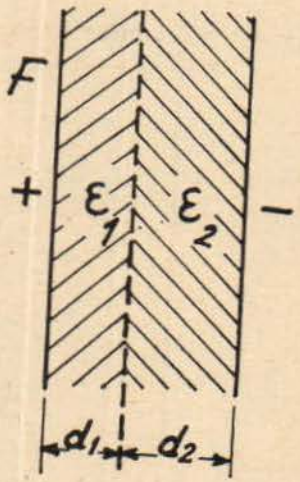
elde edilir. Diğer taraftan deplasmanın normal bileşeni iki dielektrik arasındaki sınır yüzeyinde sürekli olduğundan $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ dir. U gerilimi bilindiği takdirde bu iki denklem yardımiyle E_1 ve E_2 yi bulabiliriz. $E_1 = Q/\varepsilon_1 F$ olduğunu gözönüne alarak gerilim için

$$U = \frac{Q}{F}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

yazılabilir ve buradan kapasite için

$$C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 F}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

elde edilir. Kapasite formülü seri bağlı kondansatörlerin eşdeğerini hesaplayarak da bulunabilir.



Şek. 42

Genel olarak n dielektrikli kondansatörde

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 + \ldots + E_n d_n,$$

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \ldots = \varepsilon_n E_n$$

olur. Kapasite

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{F}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}\right)$$

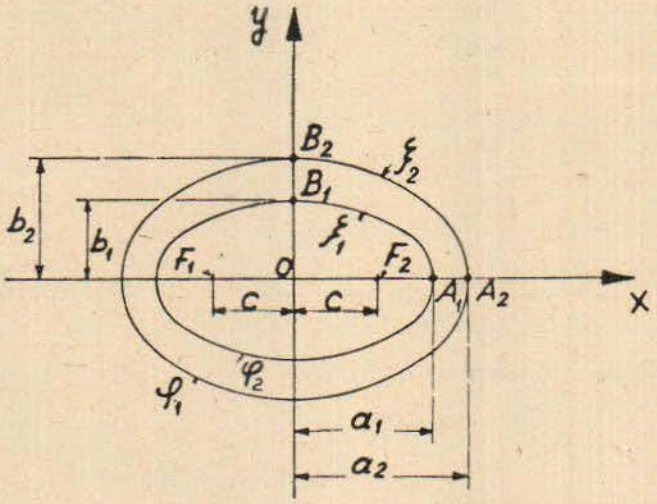
denklemi yardımiyle hesaplanır. Her hangi bir tabakadaki alan şiddeti

$$E_i = \frac{U}{\varepsilon_i\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}\right)}$$

formülü ile hesaplanabilir.

4— Çok uzun (teorik olarak sonsuz uzun) ortak odaklı iki eliptik silindirin alanı incelenecektir, şek. 43.

Sistem için uygun olan eliptik silindirik koordinatları kallanalım. Silindirlerin ξ ve η— koordinatları ile x,y kartezyen koordinatları arasında



Şek. 43

$$x = c\ \mathrm{Ch}\,\xi \cos\eta\ ,\quad y = c\ \mathrm{Sh}\,\xi \sin\eta$$

bağıntıları vardır. A_1, A_2 noktalarında $\eta = 0$ ve B_1, B_2 noktalarında ise $\eta = \pi/2$ olduğundan $a_1 = c\ \mathrm{Ch}\,\xi_1$, $a_2 = c\ \mathrm{Ch}\,\xi_2$, $b_1 = c\,\mathrm{Sh}\,\xi_1$, $b_2 = c\ \mathrm{Sh}\,\xi_2$ bulunur. $\mathrm{Ch}\,\xi + \mathrm{Sh}\,\xi = e^{\xi}$ bağıntısını gözönüne alarak ξ_1 ve ξ_2—koordinatları için

$$\xi_1 = \ln\frac{a_1 + b_1}{c}\ ,\quad \xi_2 = \ln\frac{a_2 + b_2}{c}$$

elde edilir. Simetriden dolayı potansiyel fonksiyonu yalnız ξ— koordinatına bağlı olacağından Laplace denklemi

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0$$

şeklindedir. İntegre ederek

$$\varphi(\xi) = A\xi + B$$

bulunur. Sınır şartları $\varphi(\xi_1) = \varphi_1$ ve $\varphi(\xi_2) = \varphi_2$ olduğundan

$$\varphi(\xi) = \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

bulunur. Alan şiddeti

$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

dir. Metrik katsayı için $h_\xi = c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta}$ koyarak

$$E_\xi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{Ch^2\xi - \cos^2\eta}}$$

elde edilir. Alanın yalnız ξ — bileşeni bulunmakla beraber bu bileşen hem ξ ve hem de η — koordinatlarına bağlıdır.

İçteki eliptik silindirin yüzey yoğunluğu

$$\sigma_1 = \varepsilon E_\xi(\xi_1, \eta) = \frac{\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)}{c(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{Ch^2\xi_1 - \cos^2\eta}}$$

dır. Yoğunluk η — koordinatının fonksiyonudur. Silindirin birim uzunluğundaki yük

$$\lambda_1 = \int_0^{2\pi} \sigma_1 h_\eta \, d\eta$$

integrali yardımiyle hesaplanır. $h_\xi = h_\eta$ olduğunu gözönüne alarak

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{2\pi\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln\dfrac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}}$$

bulunur. Birim uzunluk için kapasite

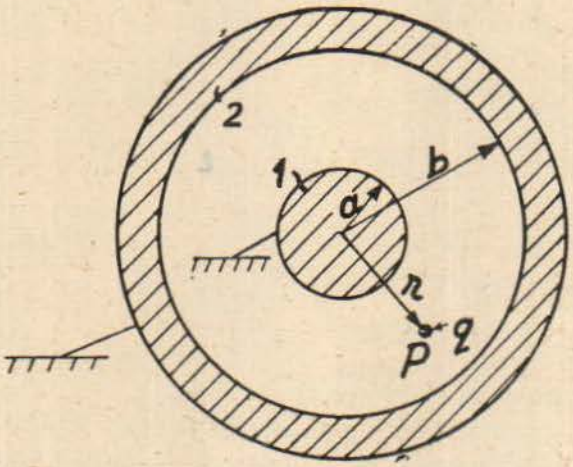
$$\overline{C} = \frac{\lambda_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}}$$

olacaktır. İçteki silindir $2c$ genişliğindeki şerit haline dejenere olursa $a_1 = c$, $b_1 = 0$ ve $\xi_1 = 0$ olacağından yoğunluk formülü

$$\sigma_1 = \pm\frac{\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)}{c\,\xi_2 \sin\eta}$$

şekline girer. Yoğunluk, şeridin her iki tarafında ayni işareti taşıyacağından $\eta = 0 - \pi$ arasında pozitif işareti ve $\eta = \pi - 2\pi$ arasında da negatif işareti almak lâzımdır. $\eta = 0$ ve $\eta = \pi$ için yoğunluk sonsuz olur.

5 — Şek. 44 de sıfır potansiyelinde tutulan küreler arasına q noksal yükü getiriliyor. Kürelerin yükleri bulunacaktır.



Şek. 44

Green teoremini şu iki denge durumuna tatbik edelim: Birinci denge durumunda yükler Q_1, Q_2, q ve potansiyeller 0, 0, φ_P ve ikinci denge durumunda yükler Q'_1, Q'_2, 0 ve potansiyeller φ_1', φ'_2, φ'_P olsun. Böylece

$$Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2 + q\varphi_P' = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan tam tesirden dolayı

$$Q_1 + Q_2 + q = 0$$

olacağından bu denklemleri çözerek

$$Q_1 = \frac{U'_{2P}}{U'_{12}}\, q\,, \quad Q_2 = -\frac{U'_{1P}}{U'_{12}}\, q$$

bulunur. Gerilimler için

$$U'_{12} = \frac{b-a}{4\pi\varepsilon ab}\, Q'_1\,, \quad U'_{P2} = \frac{b-r}{4\pi\varepsilon rb}\, Q'_1\,, \quad U'_{1P} = \frac{r-a}{4\pi\varepsilon ar}\, Q'_1$$

yazılabileceğinden

$$Q_1 = -\frac{a(b-r)}{r(b-a)}\,q\,,\quad Q_2 = -\frac{b(r-a)}{r(b-a)}\,q$$

elde edilir.

6 — Şek. 45 de sıfır potansiyelinde tutulan paralel ve sonsuz levhalar arasına q noktasal yükü getiriliyor. Levhaların yükleri bulunacaktır.

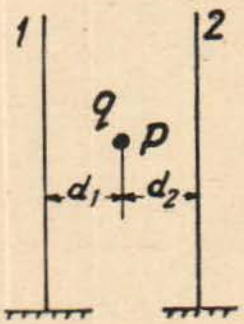
Bu sistemde

$$U'_{1P} = \frac{U'_{12}}{d_1+d_2}\,d_1\,,\quad U'_{P2} = \frac{U'_{12}}{d_1+d_2}\,d_2$$

olduğundan

$$Q_1 = -\frac{d_2}{d_1+d_2}\,q\,,\quad Q_2 = -\frac{d_1}{d_1+d_2}\,q$$

bulunur.



Şek. 45

7 — Sıfır potansiyelinde tutulan bir iletken q noktasal yükü karşısına getiriliyor. İletken yüzeyinde tesirle meydana gelecek olan yük bulunacaktır.

Green teoremi yardımiyle

$$Q = -\frac{\varphi'_P}{\varphi'}\,q$$

elde edilir. Meselâ şek. 29 daki sistemde $\varphi'_P = a\varphi'/d$ olduğundan

$$Q = -\frac{a}{d}\,q$$

bulunur.

8 — Rotasyon elipsoidinin alanı incelenecektir, şek. 46.

Elipsoidin dışındaki alan $2c$ uzunluğundaki çizgisel yükün alanına eşdeğerdir. Toplam yük Q ile gösterilirse çizgisel yükün yoğunluğu $\lambda = Q/2c$ olur. Bundan önce görüldüğü gibi elipsoidin potansiyeli

$$\varphi_s = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\,\ln\frac{a+c}{a-c}$$

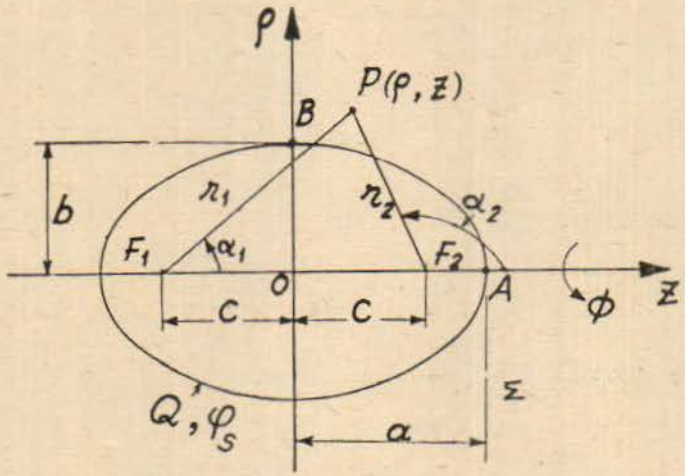
dir. Buradan kapasite için

$$C = \frac{8\pi\varepsilon c}{\ln\dfrac{a+c}{a-c}} = \frac{4\pi\varepsilon c}{\mathrm{Th}^{-1}(c/a)}$$

bulunur. a/b oranı çok büyük olduğu takdirde elipsoid yaklaşık olarak silindirik çubuk şeklini alır. Uzunluğu $2a=l$ ve yarıçapı $2b=d$ olan çubuğun kapasitesi yaklaşık olarak

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{2l}{d}}$$

formülü yardımiyle hesaplanabilir.



Şek. 46

P noktusındaki alan bileşenleri

$$E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c\rho}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\ ,$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

dir.

Elipsoidin alanını sferoidal koordinatlardan faydalanarak da bulabiliriz. Sferoidal ξ, η – koordinatları ile silindirik ρ, z – koordinatları arasındaki

$$\rho = c\ \mathrm{Sh}\ \xi \sin\eta\ ,\quad z = c\ \mathrm{Ch}\ \xi \cos\eta$$

bağıntılarını A ve B noktası için kullanarak $\xi_s =$ sab. elipsinin yarı eksenleri için $a = \mathrm{Ch}\ \xi_s$, $b = c\ \mathrm{Sh}\ \xi_s$ bulunur. Böylece elipsoidin potansiyeli için

$$\varphi_s = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c} \ln \frac{\mathrm{Ch}\,\xi_s + 1}{\mathrm{Ch}\,\xi_s - 1}$$

yazılabilir. Her hangi bir noktadaki potansiyel

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c} \ln \frac{\mathrm{Ch}\,\xi + 1}{\mathrm{Ch}\,\xi - 1}$$

olacağından Q yükünü elimine ederek

$$\varphi = \varphi_s \frac{\ln \dfrac{\mathrm{Ch}\,\xi + 1}{\mathrm{Ch}\,\xi - 1}}{\ln \dfrac{\mathrm{Ch}\,\xi_s + 1}{\mathrm{Ch}\,\xi_s - 1}}$$

ifadesi elde edilir. Alan şiddeti için

$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

ifadesinde $h_\xi = c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta}$ koyarak

$$E_\xi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c^2 \,\mathrm{Sh}\,\xi \sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta}}$$

bulunur. Elipsoidin yüzey yoğunluğu ise

$$\sigma = \varepsilon E_\xi(\xi_s, \eta) = \frac{Q}{4\pi c^2 \,\mathrm{Sh}\,\xi_s \sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi_s - \cos^2\eta}}$$

olacaktır. Yoğunluk $\eta = 0$ (A noktası) için maksimum ve $\eta = \pi/2$ (B noktası) için minimum olur. Böylece $\mathrm{Ch}\,\xi_s = a/c$ olduğunu gözönüne alarak

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{4\pi b^2}, \quad \sigma_{min} = \frac{Q}{4\pi a b}$$

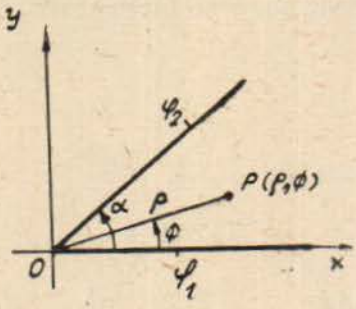
bulunur. σ_{max} ifadesini, Q yükünü elimine etmek ve $\beta = b/a$ koymak suretiyle

$$\sigma_{max} = \frac{\varepsilon\varphi_s}{b} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta \mathrm{Th}^{-1}\sqrt{1-\beta^2}}$$

şekline sokabiliriz. β oranı küçüldükçe σ_{max} ve dolayısiyle E_{max} çok yüksek değerler alır. A noktasındaki yüksek alan şiddeti, bu nokta civarındaki havanın iyonize olarak iletkenleşmesine ve sonuç olarak bir boşalmaya sebep olur. Yıldırımdan korunma tesisleri (paratoner) sivri uçların bu özelliğine dayanır. Genel olarak bir iletkenin yüzeyinde eğrilik yarıçapları küçük olan sivri yerlerdeki alan şiddetleri yassı yerlerden daha yüksek olur. Bu özelliği, ayni potansiyelde tutulan a ve b yarıçaplı iki iletken kürenin yüzey yoğunluklarını karşılaştırarak kolayca görebiliriz. Zira φ = sab. için $\sigma_a/\sigma_b = b/a$ dır.

$\sigma_{max}/\sigma_{min}$ oranının a/b ye yani yarı eksenlerin oranına eşit olacağı kolayca görülebilir.

9 — Şek. 47 de görülen yarı sonsuz levhalar arasındaki alan incelenecektir. Levhaların birleştiği doğru boyunca sonsuz ince bir aralık vardır.



Şek. 47

Simetriden dolayı potansiyel yalnız ϕ açısına bağlı olacağından silindirik koordinatlarda Laplace denklemi

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\phi^2} = 0$$

şeklindedir. İntegre ederek

$$\varphi(\phi) = A\phi + B$$

bulunur. Sınır şartları $\varphi(0) = \varphi_1$ ve $\varphi(\alpha) = \varphi_2$ olduğundan

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha}\phi$$

ve alan şiddeti için

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha}\frac{1}{\rho}$$

elde edilir. Alan şiddeti yalnız ρ uzaklığına bağlıdır. Eşpotansiyel yüzeyler ϕ = sab. düzlemlerinden ve alan çizgileri ρ = sab. daire yaylarında ibarettir. Alan iki boyutludur. Bu problem ileride elipsoidal koordinatlardan faydalanarak çözülecektir (sınır değeri problemleri).

10 — Sıfır potansiyelindeki sonsuz iletken düzlemin karşısına paralel ve sonsuz üniform çizgisel yük getiriliyor. Sislemin alanı incelenecektir, şek. 48.

Çizgisel yükün sozsuz düzleme nazaran imajı — λ yüküdür. P(x,y) noktasındaki potansiyel

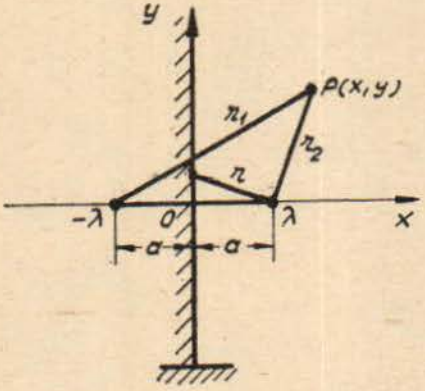
$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

şeklindedir. Buradan düzlemdeki yük yoğunluğu için

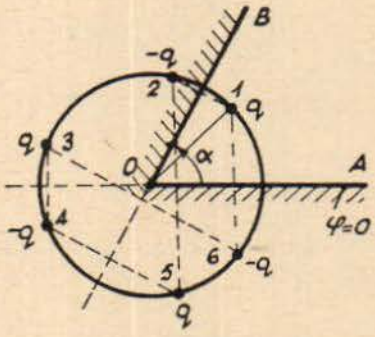
$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{a\lambda}{\pi r^2}$$

bulunur $(r = \sqrt{a^2+y^2})$. $y = 0$ için, yani orijinde yoğunluk maksimum olur. Alan şiddeti $E_x = \sigma/\varepsilon$ olacaktır.

11 — Yekdiğerini kesen sıfır potansiyelindeki yarı sonsuz düzlemlerin karşısına q noktasal yükü getiriliyor. Sistemin alanı incelenecektir, şek. 49.



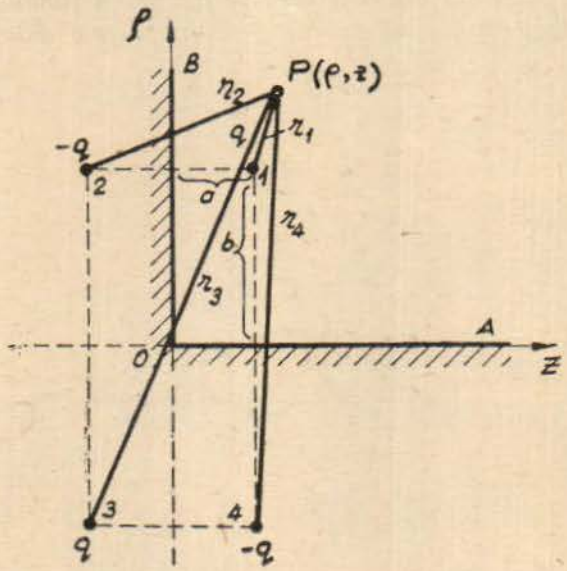
Şek. 48



Şek. 49

n bir tam sayı olmak üzere düzlemler arasındaki açı $\alpha = \pi/n$ olduğu takdirde problem $2n-1$ imaj alarak çözülebilir. Bütün imaj yükleri q yükünden geçen daire üstünde bulunurlar. Eğer n tam sayı değilse sonsuz sayıda imaj almak gerekir. Meselâ $\alpha = 60°$ için $n = 3$ dür ve 5 imaj alınır, şek. 49. Bu sistemde 1—6,5—2,3—4 yük çiftleri OA düzleminin ve 1—2,3—6,5—4 çiftleri ise OB düzleminin potansiyelinin sıfır olmasını sağlarlar.

Şek. 50 de $\alpha = 90°$ sistemi görülmektedir. İmaj sayısı 4 dür.



Şek. 50

P noktasındaki potansiyel

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)$$

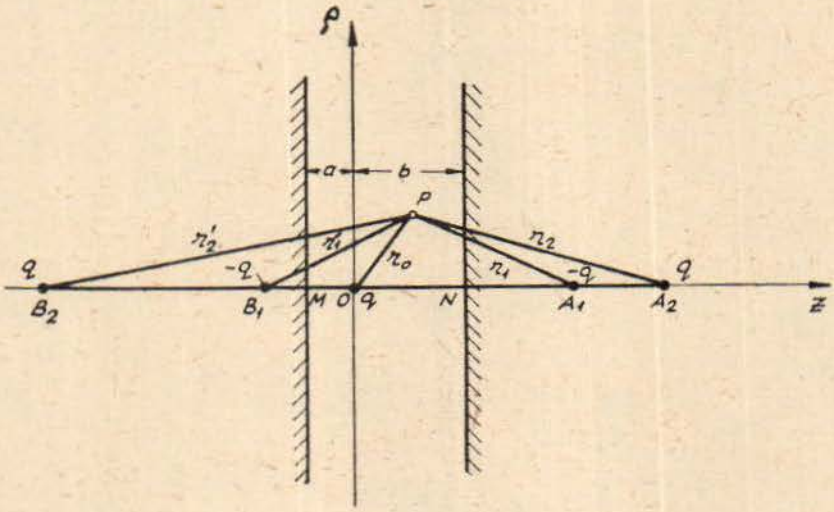
olacaktır. q yüküne tesir eden kuvvet imaj kuvvetlerinin bileşkesi olarak elde edilir. Noktasal yük yerine paralel çizgisel yük alındığı takdirde benzer hesaplar yapılır.

12 — Sıfır potansiyelindeki iki paralel sonsuz levha arasına q noktasal yükü getiriliyor, şek. 51. Sistemin alanı incelenecektir.

Orijinde bulunduğu farzedilen q yükünün 1 ve 2 düzlemlerine göre $-q$ imajları A_1 ve B_1 noktalarındadır. Bu yüklerin tekrar imajları alınırsa A_2 ve B_2 noktalarındaki q yükleri elde edilir. Böylece devam ederek sonsuz sayıda imaj yükü bulunur. P noktasındaki potansiyel

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{r_0} + \sum_{i=1}^{\infty} q_i\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r'_i}\right)\right]$$

olacaktır. i tekse $q_i = -q$ ve çiftse $q_i = q$ alınır. Düzlemlerdeki yük yoğunlukları her imaj çiftinin meydana getireceği yoğunlukları toplayarak bulunur. Düzlemlerin toplam yükü $-q$ olacağından, elde edilecek seri yakınsak olur.



Şek. 51

İmaj yükleri orijinde

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty} q_i\left(\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z'_i}\right)$$

potansiyelini meydana getirirler. $a = b = c$ için bu ifade

$$\varphi_0 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\, c} ln\, 2$$

şekline girer. Orijine noktasal yük yerine q yükünü taşıyan R yarıçaplı küçük bir küre getirilirse kürenin potansiyeli

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{\ln 2}{c}\right)$$

şeklinde bulunur. Birinci terim kürenin yalnız başına potansiyelini ve

ikinci terim ise topraklanmış levhaların tesirini gösterir. Sistemin kapasitesi $C = Q/\varphi$ olacaktır.

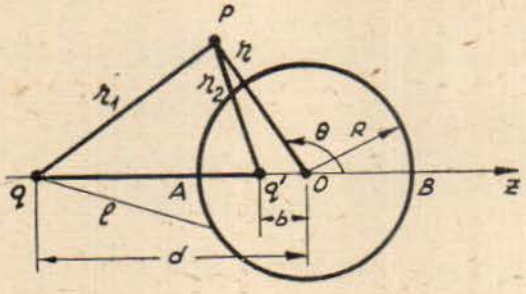
Maksimum yoğunluk M ve N noktalarında meydana gellr ve $\sigma_{max} = -q/2\pi r^2$ ifadesinde $r = c,\ 3c,\ 5c,\ldots$ koyarak

$$\sigma_{max} = -\frac{q}{2\pi c^2}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - + \ldots\right) \approx -\frac{0{,}92\,q}{2\pi c^2}$$

bulunur. Bu değer, bir düzlem için elde edilen değerin % 92 si kadardır.

Düzlemlere paralel çizgisel yükün alanı da benzer şekilde incelenir.

13 — Noktasal yükün iletken küreye tesiri incelenecektir, şek. 52.



Şek. 52

İlk önce kürenin topraklanmış olduğunu ve dolayısiyle sıfır potansiyelini tutulduğunu farzedelim. q yükünün küreye nazaran imajı 0 merkezinden $b = R^2/d$ uzaklığına getirilen $q' = -Rq/d$ yükü olacaktır. Zira bundan önce görüldüğü gibi q ve q' yükleri küreye sıfır potansiyelini verirler. P noktasındaki potansiyel

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2+2r\,d\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\dfrac{r^2d^2}{R^2}+2rd\cos\theta}}\right)$$

dir. Bu ifade $r = R$ için yani küre yüzeyinde sıfır değerini verir. Küre yüzeyinde $E_\theta = -\partial\varphi/r\partial\theta$ sıfır olur. Küre yüzeyindeki yoğunluk

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{q(d^2-R^2)}{4\pi R(R^2+d^2+2Rd\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{q(d^2-R^2)}{4\pi Rl^3}$$

olur. Yoğunluk $\theta=\pi$ için (A noktası) maksimum ve $\theta=0$ için (B noktası) minimum olur. Bu ekstrem yoğunluklar arasındaki oran

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \left(\frac{d+R}{d-R}\right)^3$$

dır. Yüzeydeki alan şiddeti $E_r=\sigma/\varepsilon$ olarak elde edilir.

Topraklanmış olan kürenin yüzeyindeki yük için

$$Q_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi = -\frac{Rq}{d} = q'$$

bulunur.

Küre ile q yükü arasında ortaya çıkacak olan kuvvet q ve q' yükleri arasındaki kuvvete eşdeğer olacağından $\vec{F} = q\vec{E}$ yardımiyle

$$\vec{F} = \frac{Rd\ q^2}{4\pi\varepsilon(d^2-R^2)^2}\vec{k}$$

bulunur. Küre bu kuvvetle q yükünü çeker.

Küre izole ve Q_k yükünü taşıyorsa bu takdirde merkezine $q''=Q_k-q'$ yükünü getirmek gerekir. Böylece q yükü ile Q_k yükünü taşıyan küre arasındaki ajanın q,q',q'' yükleri yardımiyle elde edileceği anlaşılır. Bu üç yük P noktasında

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{d}\frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\left(Q_k + \frac{R}{d}q\right)$$

potansiyelini meydana getirirler. Kürenin potansiyeli ise

$$\varphi_k = \frac{q''}{4\pi\varepsilon R} = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon d}$$

değerini alır. Birinci terim, kürenin yrlnız başına potansiyelini ve ikinci terim ise küre yokken merkezinin bulunduğu yerde q yükü tarafından meydana getirilen potansiyeli gösterir. Kürenin yüzey yoğunluğu

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2-R^2}{l^3}\right) + \frac{Q_k}{4\pi R^2}$$

dır. Küre ile noktasal yük arasındaki kuvvet üç noktasal yük yardımiyle kolayca bulunabilir.

Küre izole ve nötr olduğu takdirde $Q_k = 0$ koyarak $q'' = -q'$ bulunur. Kürenin merkezine bu yükü getirmek gerekir. Bu durumda potansiyel ve yoğunluk ifadeleri

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{d}\frac{1}{r_2} + \frac{R}{d}\frac{1}{r}\right),$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2-R^2}{l^3}\right)$$

şekline girerler. Kürenin potansiyeii ise $\varphi_k = q/4\pi\varepsilon d$ değerini alır. Küre yüzeyinin q yüküne bakan tarafında negatif yük ($q > 0$ ise) ve öbür tarafında pozitif yük toplanır. Nötr çizği boyunca $\sigma = 0$ dır ve bu çizgi pozitif ve negatif bölgeyi birbirinden ayırır. Nötr çizgi boyunca l uzaklığı

$$l_0^3 = d(d^2 - R^2)$$

şartını sağlar. Bu uzaklığa tekabül eden θ_0 açısı

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{2k}[1 + k^2 - (1-k^2)^{2/3}]$$

ifadesi yardımiyle hesaplanır ($k = R/d$).

Şayet küre φ_k potansiyelinde tutulursa sistemin alanı q ve q' yükleri ile merkeze getirilen $q'' = 4\pi\varepsilon\varphi_k R$ yükü yardımiyle elde edilir. q'' yükü P noktasında $\varphi_k R/r$ potansiyelini meydana getireceğinden

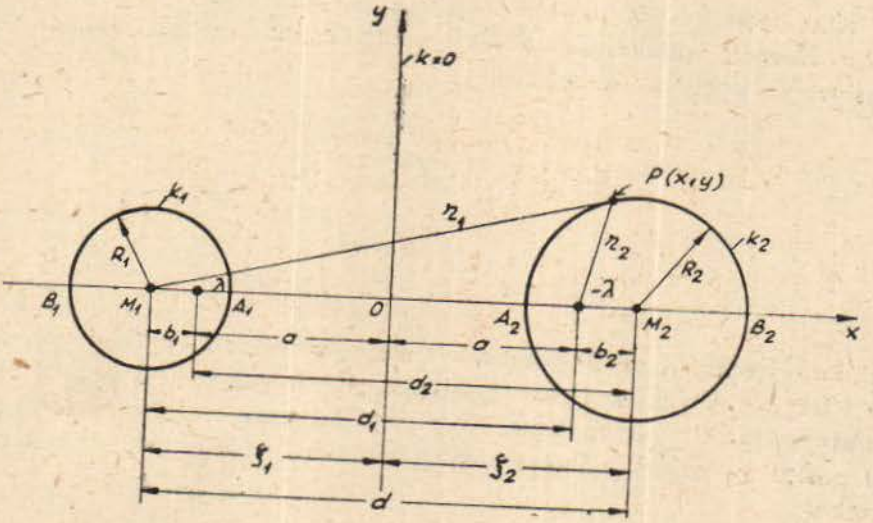
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{d}\frac{1}{r_2}\right) + \frac{R}{r}\varphi_k$$

elde edilir. Küre yüzeyindeki yoğunluk

$$\sigma = -\frac{q(d^2-R^2)}{4\pi R l^3} + \frac{\varepsilon\varphi_k}{R}$$

olur. Kürenin yükü ise $Q_k = q' + q''$ olacaktır.

14 — Çok uzun (teorik olarak sonsuz uzun) iki paralel silindir arasındaki alan incelenecektir, şek. 53.



Şek. 53

Daha önce görüldüğü gibi λ ve $-\lambda$ çizgisel yükleri P (x,y) noktasında

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

potansiyelini meydana getirirler. ($\lambda = 0$ düzleminin potansiyeli sıfır olarak alınmıştır). Eşpotansiyel çizgiler $r_2/r_1 = k =$ sab. daireleri ve eşpotansiyel yüzeyler ise dairesel silindirlerdir. Şek. 53 de görülen R_1 ve R_2 yarıçaplı eşpotansiyel çizgiler için A_1, B_1 ve A_2, B_2 noktaları yardımiyle yazılan

$$\frac{d_1 - R_1}{R_1 - b_1} = \frac{d_1 + R_1}{R_1 + b_1} = k_1 \quad , \quad \frac{R_2 - b_2}{d_2 - R_2} = \frac{R_2 + b_2}{d_2 + R_2} = k_2$$

denklemlerinden $R_1^2 = b_1 d_1$, $R_2^2 = b_2 d_2$ ve $k_1 = R_1/b_1$, $k_2 = b_2/R_2$ buluruz. İlk iki bağıntıda $b_1 = \xi_1 - a$, $d_1 = \xi_1 + a$, $b_2 = \xi_2 - a$, $d_2 = \xi_2 + a$ koyarak

$$\xi_1^2 - R_1^2 = \xi_2^2 - R_2^2 = a^2$$

veya

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\xi_1 + \xi_2 = d$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\xi_1 = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d} \quad , \quad \xi_2 = \frac{d^2 - R_1^2 + R_2^2}{2d}$$

bulunur. ξ_1 ve ξ_2 uzaklıkları bulunduktan sonra a, b_1, b_2

$$a = \sqrt{\xi_1^2 - R_1^2} \quad , \quad b_1 = \xi_1 - a \quad , \quad b_2 = \xi_2 - a$$

ifadeleri yardımiyle hesaplanır. Böylece yarıçapları ve eksenleri arasındaki uzaklık belli olan silindirler yerine alınabilecek olan çizisel yüklerin yerleri belli olur. Bu yüklere silindirlerin elektriksel ekseni adı verilir.

Silindirlerin potansiyelleri için

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_1}{R_1}\right), \quad \varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_2}{R_2}\right)$$

yazılabilir. Buradan silindirler arasındaki gerilim için

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_1}{R_1}\right) + \operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_2}{R_2}\right)\right]$$

bulunur. Birim uzunluk için kapasite

$$\overline{C} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_1}{R_1}\right) + \operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{\xi_2}{R_2}\right)}$$

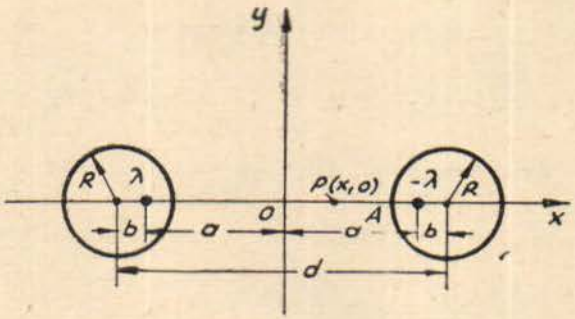
olacaktır. Silindirler eşit yarıçaplı olduğu takdirde $R_1 = R_2 = R$ koyarak $\xi_1 = \xi_2 = d/2$, $a = \sqrt{(d/2)^2 - R^2}$, $b_1 = b_2 = b = d/2 - a$ ve

$$U = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{d}{2R}\right), \quad \overline{C} = \frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{Ch}^{-1}\left(\frac{d}{2R}\right)}$$

elde edilir, şek. 54. $d \gg R$ için kapasite formülü

$$\overline{C} \approx \frac{\pi \varepsilon}{\ln\left(\frac{d}{R}\right)}$$

şeklinde yazılabilir.



Şek. 54

Kapasite için

$$\overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_1 R_2}{b_1 b_2}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{d_1 d_2}{R_1 R_2}}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $d = d_1 + b_2$ ile $d = d_2 + b_1$ çarpılırsa $R_1^2 = b_1 d_1$ ve $R_2^2 = b_2 d_2$ olduğunu gözönüne alarak

$$d_1 d_2 + b_1 b_2 = d^2 - R_1^2 - R_2^2$$

bulunur. Bu ifadeyi $R_1 R_2$ ye bölerek bulunan

$$\frac{d_1 d_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1 R_2}{d_1 d_2} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2} = 2A$$

ifadesinde

$$\frac{d_1 d_2}{R_1 R_2} = e^{2\pi\varepsilon/\overline{C}}$$

koyarak

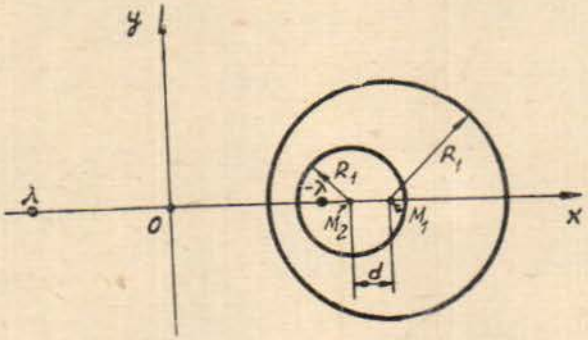
$$\overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon}{\mathrm{Ch}^{-1}\left(\frac{a^2 - R_1^2 - R_2^2}{2 R_1 R_2}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\mathrm{Ch}^{-1} A}$$

elde edilir. $R_1 = R_2 = R$ için

$$1 + \mathrm{Ch}\left(\frac{2\pi\varepsilon}{C}\right) = 2\,\mathrm{Ch}^2\left(\frac{2\pi\varepsilon}{C}\right) = \frac{d^2}{2R^2}$$

yardımiyle yukarıda bulunan ifade çıkarılır.

Silindirler şek. 55 de görüldüğü gibi içiçe ise



Şek. 55

$$A = -\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}$$

alınacağı kolayca gösterilebilir.

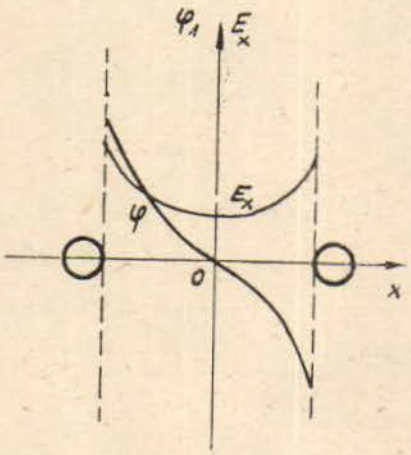
İki eşit paralel silindir sisteminde x— ekseni üstündeki $P(x,0)$ noktasındaki potansiyel

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a-x}{a+x}$$

olacağından alan şiddeti için

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)$$

bulunur. Şek. 56 da potansiyelin ve alan şiddetinin x uzaklığı ile nasıl değiştikleri görülmektedir. Alan şiddeti silindir yüzeylerinde maksimum



Şek. 56

olur. $x = d/2 - R$ koyarak (A noktası)

$$E_{max} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \frac{\sqrt{(d/2R)^2-1}}{d-2R}$$

bulunur. Diğer taraftan gerilim için

$$U = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{d}{2R} + \sqrt{\left(\frac{d}{2R}\right)^2-1}\right]$$

yazılabileceğinden

$$E_{max} = \frac{\sqrt{(d/2R)^2-1}}{(d-2R)\ln\left[\frac{d}{2R}+\sqrt{\left(\frac{d}{2R}\right)^2-1}\right]} U$$

ifadesi elde edilir. $d \gg R$ için bu ifade yaklaşık olarak

$$E_{max} \approx \frac{U}{2R \ln\left(\frac{d}{R}\right)}$$

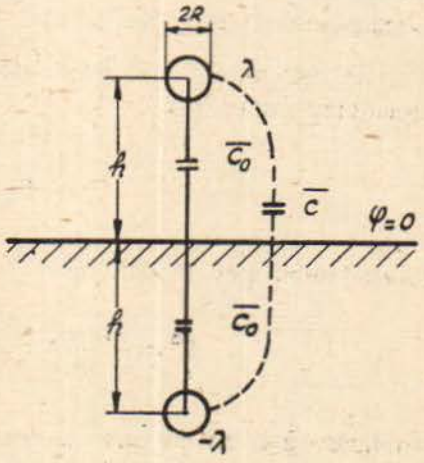
şekline girer.

Sıfır potansiyelindeki toprakla paralel silindir (tel) arasıadaki alan telin toprağa nazaran imajını alarak incelenir, şek. 57. Telle toprak arasındaki kapasite $\overline{C}_0$ ile gösterilirse $\overline{C} = \overline{C}_0/2$ olacağını gözönüne alarak

$$\overline{C}_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2-1}\right]}$$

bulunur. $h \gg R$ için kapasite formülü yaklaşık olarak

$$\overline{C}_0 \approx \frac{2\pi\varepsilon_0}{lu\left(\frac{2h}{R}\right)}$$



Şek. 57

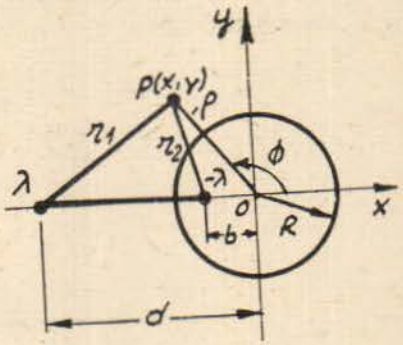
şekline girer.

15 — Üniform çizgisel yükün sıfır potansiyelindeki paralel silindire tesiri incelenecektir, şek. 58.

Çizgisel yükün silindire nazaran imajı silindirin ekseninden $b = R^2/d$ uzaklığında bulunan $-\lambda$ çizgisel yüküdür. Bu iki yük silindir yüzeyinde

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + \varphi_0$$

potansiyelini meydana getirirler. Silindir topraklandığına göre $\varphi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln \frac{R}{d}$ almak icap edecektir. Böylece her hangi bir P (x,y) noktasındaki potansiyel için



Şek. 58

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2 d}{r_1 R}$$

ve silindirin yüzeyindeki yük yoğunluğu için

$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = -\frac{\lambda}{2\pi R} \frac{1-k^2}{1+k^2+2k\cos\phi}$$

elde edilir. $(k = R/d)$ Yoğunluk $\phi = \pi$ için (A noktasında) maksimum ve $\phi = 0$ için (B noktasında) minimum olur ve

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2$$

dir. Alan şiddeti A noktasında maksimum olarak

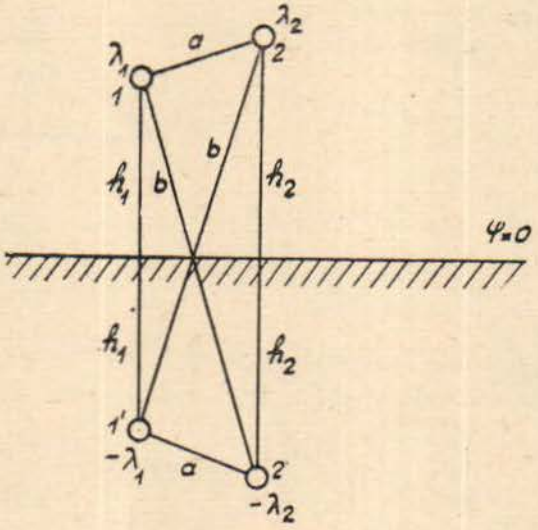
$$E_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R} \frac{1+k}{1-k}$$

değerini alır.

Şayet silindir izole ve nötr ise eksenine λ yükünü getirmek gerekecektir.

Bu yük silindir yüzeyinde sabit bir potansiyel meydana getirir. Silindirin yüzeyinde yoğunluk $\sigma+\lambda/2\pi R$ olacağından nötr çizgi boyunca $\cos\phi_0=-k$ olacağı kolayca gösterilebilir.

16 — Bir fazlı ve üç fazlı hatların parsiyel ve işletme kapasiteleri hesaplanacaktır, şek. 59.



Şek. 59

Toprağın tesiri iletkenlerin $-\lambda_1$ ve $-\lambda_2$ imajlarını alarak hesaba katılır. İletkenlerin yarıçapları asılma yüksekliklerine ve aralarındaki uzaklığa nazaran çok küçük olduğu takdirde (pratikteki durum) silindirlerin elektriksel eksenlerinin geometrik eksenleriyle intibak ettiği kabul edilebilir. Böylece iletkenlerin potansiyelleri için

$$\varphi_1=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R_1}+\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\,,$$

$$\varphi_2=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}+\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R_2}$$

elde edilir. Buradan potansiyel katsayılarını hesaplamaya yarayan

$$p_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R_1}\,,\quad p_{12}=p_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\,,\quad p_{22}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R_2}$$

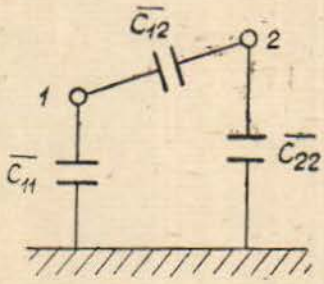
denklemleri bulunur. Potansiyel denklemlerini yüklere göre çözerek birim uzunluktaki kapasite ve tesir katsayıları için

$$\bar{c}_{11}=\frac{p_{22}}{p_{11}p_{22}-p_{12}^2}\ ,\quad \bar{c}_{12}=\bar{c}_{21}=-\frac{p_{12}}{p_{11}p_{22}-p_{12}^2}\ ,\quad \bar{c}_{22}=\frac{p_{11}}{p_{11}p_{22}-p_{12}^2}$$

bulunur. Sistemin parsiyel kapasiteleri ise (birim uzunluk için)

$$\bar{C}_{11}=\bar{c}_{11}+\bar{c}_{12}\ ,\quad \bar{C}_{12}=\bar{C}_{21}=-\bar{c}_{12}\ ,\quad \bar{C}_{22}=\bar{c}_{22}+\bar{c}_{12}$$

şeklinde hesaplanır. Şek. 60 da hattın eşdeğer şeması görülmektedir.



Şek. 60

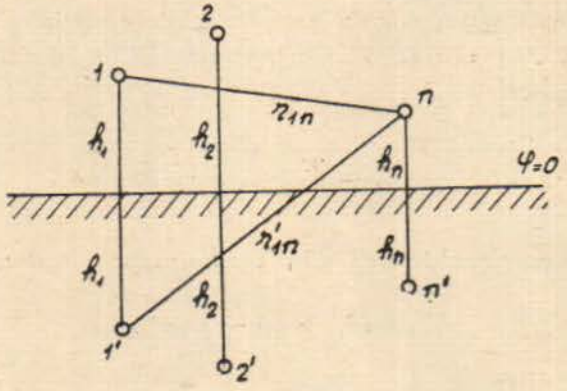
$R_1=R_2=R$ ve $h_1=h_2=h$ için $(b=\sqrt{a^2+4h^2})$

$$\bar{C}_{11}=\bar{C}_{22}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h}{R}\sqrt{1+\left(\frac{2h}{a}\right)^2}}\ ,$$

$$\bar{C}_{12}=2\pi\varepsilon_0\frac{\ln\sqrt{1+\left(\frac{2h}{a}\right)^2}}{\ln\frac{2h}{R}\sqrt{1+\left(\frac{2h}{a}\right)^2}\ln\frac{2h}{R}\left[\sqrt{1+\left(\frac{2h}{a}\right)^2}\right]^{-1}}$$

formülleri elde edilir. İletkenler düşey doğrultuda iseler, $a=h_2-h_1$, $b=h_1+h_2$ almalıdır.

Şek. 61 de görülen n iletkenli sistem için genel olarak



Şek. 61

$$\varphi_i = p_{i1}\lambda_1 + p_{i2}\lambda_2 + \ldots + p_{in}\lambda_n$$

olacaktır. $(i = 1, \ldots, n)$. p_{ii} ve p_{ik} katsayıları

$$p_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h_k}{R_k}, \quad p_{ik} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r'_{ik}}{r_{ik}}$$

formülleri yardımiyle hesaplanır. Üç fazlı hat için

$$p_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1}, \quad p_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r'_{12}}{r_{12}}, \quad p_{13} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r'_{13}}{r_{13}}$$

bulunur. Diğer potansiyel katsayıları benzer şekilde hesaplanır. Potansiyel katsayılarından kapasite ve tesir katsayıları ve

$$\bar{C}_{11} = \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} + \bar{c}_{13}, \quad \bar{C}_{22} = \bar{c}_{21} + \bar{c}_{22} + \bar{c}_{23}, \quad \bar{C}_{33} = \bar{c}_{31} + \bar{c}_{32} + \bar{c}_{33},$$

$$\bar{C}_{12} = -\bar{c}_{12}, \quad \bar{C}_{13} = -\bar{c}_{13}, \quad \bar{C}_{23} = -\bar{c}_{23}$$

denklemleri yardımiyle de parsiyel kapasiteler bulunur.

Şek. 57 deki bir iletkenli hat için $(n = 1)$

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{R}, \quad \bar{C} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}$$

elde edilir.

İki iletkenli hattın normal çalışma şekli bir telin gidiş ve diğer telin dönüş iletkeni olarak kullanılmasıdır. Birim uzunluk için sistemin işletme kapasitesi

$$\bar{C}_s = \bar{C}_{12} + \frac{\bar{C}_{11}\,\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22}}$$

formülü ile hesaplanabileceği gibi $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ koyarak bulunan

$$U_{12} = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})\,\lambda$$

ifadesinden

$$\bar{C}_s = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{21}}$$

elde edilir. $R_1=R_2=R$ ve $h_1=h_2=h$ için

$$\overline{C}_s=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{a}{R}\left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{2h}\right)^2}\right]^{-1}}$$

bulunur. Bu ifadeyi, yarıçapları R ve eksenleri arasındaki uzaklık a olan iki paralel silindirin kapasitesini $a\gg R$ için yaklaşık olarak hesaplamaya yarayan (havada)

$$\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{a}{R}}$$

ifadesiyle karşılaştırarak $\overline{C}_s$ ile $\overline{C}$ nin parantez içindeki faktör bakımından farkettikleri anlaşılır. Bu faktör toprağın tesirini hesaba katmaktadır. $h\gg a$ için işletme kapasitesi $\overline{C}$ gibi hesaplanabilir.

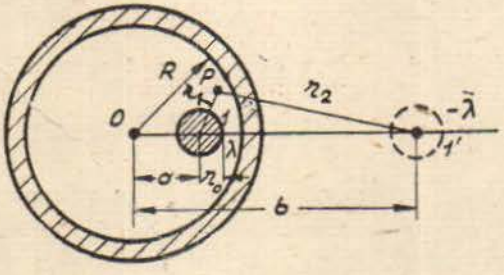
17 — İki damarlı ve üç damarlı kabloların işletme kapasiteleri bulunacaktır.

İlk önce şek. 62 de görülen bir damarlı kabloyu gözden geçirelim. Yoğunluğu λ olan damarın kablo zarfına nazaran imajı eksenden $b=R^2/a$ uzaklığında bulunan $-\lambda$ çizgisel yüküdür. Orijinal yükle imaj yükü P noktasında

$$\varphi_P=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}+\varphi_0$$

potansiyelini meydana getirirler. Zarfın potansiyeli ise

$$\varphi_s=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R}{a}+\varphi_0$$



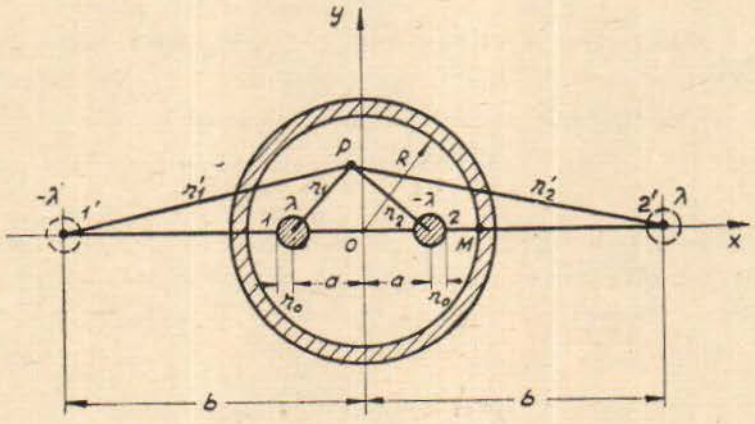
Şek. 62

olacaktır. Eğer $\varphi_s=0$ alınırsa (zarf topraklanmıştır) potansiyel fonksiyonu

$$\varphi_P=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2 a}{r_1 R}$$

şekline girer. Zarfın dışındaki alan sıfırdır.

Şek. 63 de görülen iki damarlı kabloda damarların yarıçapları zarfın R yarıçapından çok küçük olduğu takdirde imaj metodundan faydalanarak şu sonuçlar elde edilir. 1 ve 2 damarlarının kablo zarfına nazaran imajları orijinden $b=R^2/a$ uzaklığında bulunan $-\lambda$ ve λ çizgisel yükleridir. Orijinal yükler ve imaj yükleri P noktasında



Şek. 63

$$\varphi_P=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r'_1 r_2}{r_1 r'_2}+\varphi_0$$

potansiyelini meydana getirirler. M noktası yardımiyle zarfın potansiyeli için $\varphi_s=\varphi_0$ bulunur. Eğer zarf topraklanmışsa $\varphi_0=0$ olacağından

$$\varphi_P=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1' r_2}{r_1 r_2'}$$

yazılabflir.

Sistemin işletme kapasitesini bulmak için damarların potansiyelini bulmak lâzımdır. φ_1 hesaplanırken $r_1=r_0$ ve φ_2 hesaplanırken $r_2=r_0$ koymak ve diğer uzaklıkları da eksen uzaklığı şeklinde almak suretiyle damarlar arasındaki potansiyel farkı için

$$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\ln\frac{2a(b-a)}{r_0(b+a)}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\ln\frac{2a(R^2-a^2)}{r_0(R^2+a^2)}$$

bulunur. Sistemin uzunluk birimine düşen işletme kapasitesi

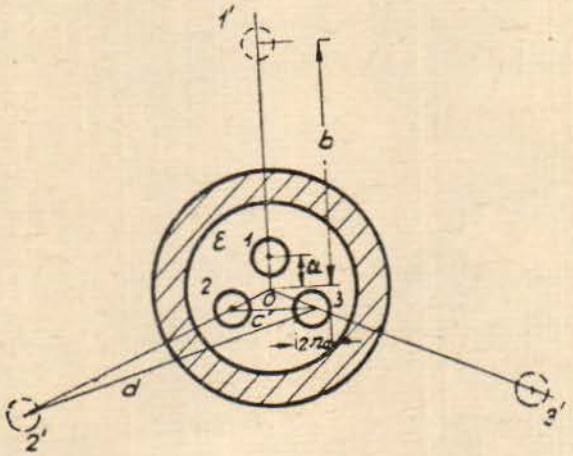
$$\bar{C}_s=\frac{\lambda}{U_{12}}=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2a\,(R^2-a^2)}{r_0\,(R^2+a^2)}}$$

dir.

Meselâ 1 damarının uzunluk birimine tesir eden kuvvet için

$$\vec{F}_1=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b+a}\right)\vec{i}$$

yazılabilir. 2 damarına tesir eden kuvvet $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$ olacaktır. Bu kuvvetin $2a=R\sqrt{\sqrt{5}-2}$ için sıfır olacağı kolayca görülebilir.



Şek. 64

Şek. 64 de görülen üç damarlı kabloda damarların zarfa nazaran imajları 0 noktasından itibaren $b=R^2/a$ uzaklığında bulunan $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$ çizgisel yükleridir. $c=a\sqrt{3}$, $d=\sqrt{a^2+b^2+ab}$ olduğunu gözönüne alarak meselâ 1 damarının potansiyeli için

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b-a}{r_0} + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + \frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}$$

ifadesi elde edilir. Simetriden dolayı potansiyel katsayıları

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b-a}{r_0} ,$$

$$p_{12} = p_{13} = p_{23} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}$$

olacaktır. $\bar{c}_{ik}$ katsayıları

$$\bar{c}_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{M_{ik}(p)}{\Delta(p)}$$

ifadesi yardımiyle hesaplanır. Bu ifadede $\Delta(p)$, katsayılar determinantını ve $M_{ik}(p)$ ise bu determinantda i yinci sıra ve k yıncı kolona ait minörü göstermektedir. $\bar{c}_{ik}$ katsayıları bulunduktan sonra parsiyel kapasiteler kolayca hesaplanınr. Simetriden dolayı $\bar{C}_{11} = \bar{C}_{22} = \bar{C}_{33} = \bar{C}$ ve $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{13} = \bar{C}_{23} = \bar{C}_0$ olacaktır. Bunu gözönüne alarak

$$\lambda_1 = \bar{C}_0\varphi_1 + \bar{C}(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{C}(\varphi_1 - \varphi_3) ,$$

$$\lambda_2 = \bar{C}_0\varphi_2 + \bar{C}(\varphi_2 - \varphi_1) + \bar{C}(\varphi_2 - \varphi_3) ,$$

$$\lambda_3 = \bar{C}_0\varphi_3 + \bar{C}(\varphi_3 - \varphi_1) + \bar{C}(\varphi_3 - \varphi_2)$$

yazılabileceğinden bu denklemleri φ_1 potansiyeline göre çözerek

$$\varphi_1 = \frac{\bar{C}}{\bar{C}_0(\bar{C}_0 + 3\bar{C})} \left[\left(1 + \frac{\bar{C}_0}{\bar{C}} \right) \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \right]$$

bulunur. Bu ifadeyi yukarıdaki ifade ile karşılaştırarak

$$\bar{C}_0 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b-a}{r_0} \frac{a^2+b^2+ab}{3a^2}} ,$$

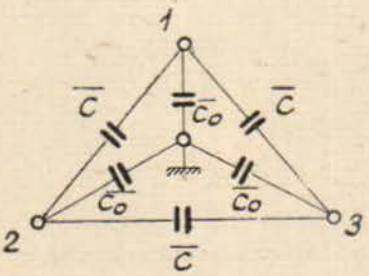
$$\overline{C} = 2\pi\varepsilon \frac{\ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}}{\ln \frac{b-a}{r_0} \frac{a^2+b^2+ab}{3a^2} \ln \frac{b-a}{r_0} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+ab}}}$$

elde edilir. Şek. 65 de kablonun eşdeğer şeması görülmektedir.

Kablonun simetrik çalışmasında $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ olacağından $\varphi_1 = (p_{11} - p_{12})\lambda_1$ yazarak işletme kapasitesi için

$$\overline{C}_* = \frac{1}{p_{11} - p_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b-a}{r_0} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+ab}}}$$

elde edilir.



Şek. 65

λ_1 için yazılan

$$\lambda_1 = \overline{C}_0\varphi_1 + \overline{C}(\varphi_1 - \varphi_2) + \overline{C}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

ifadesi $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ bağıntısını gözönüne alarak

$$\lambda_1 = (\overline{C}_0 + 3\overline{C})\varphi_1$$

şekline girer. Buradan

$$\overline{C}_* = \overline{C}_0 + 3\overline{C}$$

bulunur.

18 — İki küre sisteminin alanı incelenecektir.

İlk önce kürelerin yarıçaplarının aralarındaki uzaklığa nazaran çok küçük olduğunu kabul edelim, şek. 66. Bu durumda küreler yerine merkezlerindeki noktasal yükler alınabileceğinden her hangi bir P noktasındaki potansiyel

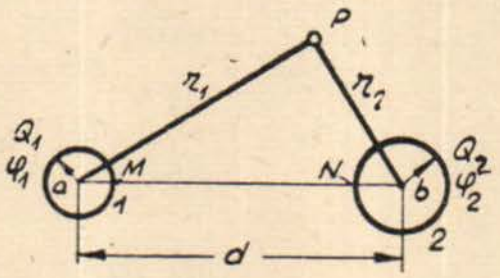
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

şeklinde bulunacaktır. Böylece kürelerin potansiyelleri için yaklaşık olarak

$$\varphi_1 \approx \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon a} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d},$$

$$\varphi_2 \approx \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon b}$$

yazılabilir. Sistemin potansiyel katsayıları için



Şek. 66

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon a} = \frac{1}{C_1}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon d}, \quad p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon b} = \frac{1}{C_2}$$

bulunur. C_1 ve C_2, izole kürelerin tek başına kapasitelerini göstermektedir. Kapasite ve tesir katsayıları için

$$c_{11} \approx C_1, \quad c_{12} = c_{21} \approx -\frac{C_1 C_2}{4\pi\varepsilon d}, \quad c_{22} \approx C_2$$

elde edilir.

$Q_1 = -Q_2 = Q$ için kondansatörün gerilimi

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})\,Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}\right)$$

olacağından kapasite için

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}} \approx \frac{4\pi\varepsilon a b}{a+b}$$

yazılabilir, Eşit küreler halinde ($a = b$) $C = 2\pi\varepsilon a$ olur. Bu değer, bir kürenin kapasitesinin yarısıdır.

n küçük kürenin alanı da benzer şekilde incelenir. Sistemin potansiyel katsayıları

$$p_{ii} = \frac{1}{4\pi\varepsilon R_i}, \quad p_{ik} = p_{ki} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r_{ik}}$$

formülleri yardımiyle hesaplanır. R_i, i yinci kürenin yarıçapını ve r_{ik} ise i ve k küreleri arasındaki uzaklığı göstermektedir. Yukarıda $R_1 = a$, $R_2 = b$, $r_{12} = d$ alınmıştır.

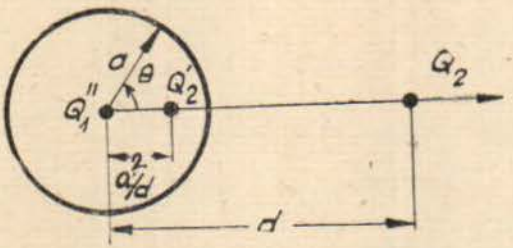
Kürelerin yüzey dağılışları şöylece bulunabilinir: Q_2 noktasal yükü, topraklandığı farzedilen 1 küresinde

$$Q'_2 = -\frac{a}{d} Q_2 = -k_1 Q_2$$

yükünü meydana getirir. 1 küresinin yüzey yoğunluğu

$$\sigma'_1 = -\frac{Q_2}{4\pi a} \frac{d^2 - a^2}{(d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} \approx -\frac{Q_2}{4\pi a^2} k_1(1 + 3k_1\cos\theta)$$

olacaktır, şek. 67. 1 küresi gerçekte topraklanmadığından ve Q_1 yükünü taşıdığından merkezine ikinci bir $Q''_1 = Q_1 - Q'_2 = Q_1 + k_1 Q_2$ yükü-



Şek. 67

nü getirmek gerekecektir. Bu yük kürenin yüzeyine $\sigma''_1 = Q''_1/4\pi a^2$ üniform yoğunluğu ile dağılacağından 1 küresinin toplam yüzey yoğunluğu

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma''_1 = \frac{Q_1}{4\pi a^2} - \frac{Q_2}{4\pi a^2} 3k_1^2\cos\theta$$

olacaktır. Benzer inceleme ile 2 küresi için

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi b^2} + \frac{Q_1}{4\pi b^2} 3 k_2^2 \cos\theta$$

elde edilir ($k_2 = b/d$). θ açısı her iki küre için $+z-$ ekseninden itibaren trigonometrik pozitif yönde alınmaktadır. $Q_1 = -Q_2 = Q$ ve $a = b = R$ için yoğunluk ifadeleri

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi a^2}(1 + 3k^2 \cos\theta), \quad \sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi a^2}(1 - 3k^2 \cos\theta)$$

şekline girerler ($k = R/d$). Yoğunluklar ve dolayısiyle alan şiddeti en yakın noktalarda (M ve N noklaları) maksimum olacaktır. Bu noktalardaki alan şiddeti için yaklaşık olarak $E = Q/4\pi\varepsilon a^2 = U_{12}/2a$ yazılabilir. Küreler arasındaki $d - 2a$ aralığına eşit uzaklıkta bulunan iki paralel levha arasında ayni gerilim altında meydana gelen üniform alan şiddeti E_0 ile gösterilirse

$$E_0 = \frac{U_{12}}{d-2a} = \frac{E}{(d/2a)-1}$$

yazılabileceğinden $d \gg a$ için üniform alanın daha zayıf olacağı anlaşılır. Böylece iki küre ile ayni gerilimde daha yüksek bir alanın elde edileceği görülmektedir.

Kürelere tatbik edilen gerilim verildiği takdirde yükler

$$Q_1 = -Q_2 = Q = \frac{U_{12}}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

denklemi yardımiyle ve potansiyeller ise

$$\varphi_1 = (p_{11} - p_{12})Q, \quad \varphi_2 = (p_{12} - p_{22})Q$$

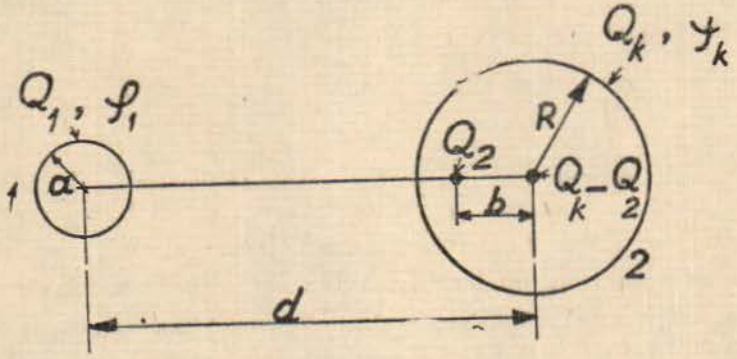
denklemleri yardımiyle hesaplanır. Meselâ 2 küresi topraklanırsa $\varphi_2 = 0$ ve $\varphi_1 = U_{12}$ olacağından Q_1 ve Q_2 yükleri

$$U_{12} = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2, \quad 0 = p_{12}Q_1 + p_{22}Q_2$$

denklemlerini çözerek bulunur.

İki küçük kürenin alanı hakkında verilen bu kısa bilgiden sonra şimdi küçük ve büyük küre problemini gözden geçirelim. Sistem şek. 68 de gö-

rülmektedir. Yarıçapı R olan büyük kürenin yerine merkezinden $b=R^2/d$ uzaklığına getirilen $Q_2=-RQ_1/d$ imajı konulabilir. Şayet büyük kürenin topraklandığı farzedilirse ($\varphi_k=0$) küçük kürenin potansiyeli



Şek. 68

$$\varphi_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{R}{d}\frac{1}{d-b}\right)$$

olur. Topraklanmış küre karşısındaki küçük kürenin kapasitesi için

$$C=\frac{4\pi\varepsilon a}{1-\frac{a}{d}\frac{R/d}{1-(R/d)^2}}$$

yazılabilir.

Genel olarak büyük küre izole durumda Q_k yükünü taşıyacaktır. Her hangi bir noktadaki potansiyel

$$\varphi=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{R}{d}\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(Q_k+\frac{R}{d}Q_1\right)\frac{1}{r}$$

olduğundan, $r_1=a$, $r_2=d-b$, $b=R^2/d$, $r=d$ koyarak, küçük kürenin potansiyeli için

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a}-\frac{R}{d}\left(\frac{d}{d^2-R^2}-\frac{1}{d}\right)\right]Q_1+\frac{Q_k}{4\pi\varepsilon d}$$

ifadesi elde edilir. Büyük kürenin potansiyeli ise

$$\varphi_k = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R}$$

olacaktır. φ_1 ve φ_k ifadeleri yardımiyle potansiyel katsayıları ve bunlardan da kapasite ve tesir katsayıları bulunur.

$Q_1 = -Q_k = Q$ için kondansatörün kapasitesi

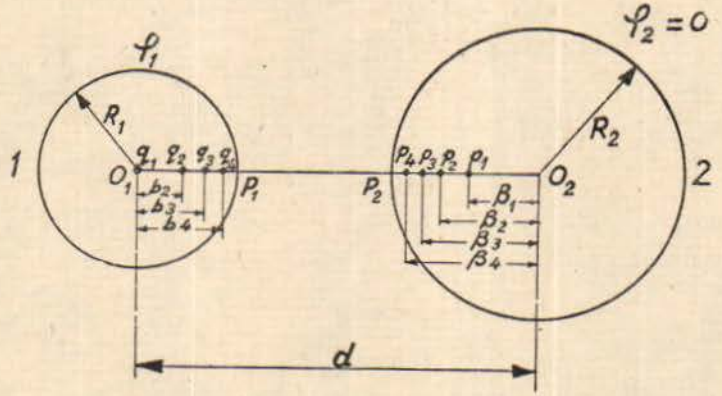
$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_k} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} + \frac{1}{R}\left[1 - \frac{(R/d)^4}{1-(R/d)^2}\right] - \frac{2}{d}}$$

olur. $R \ll d$ için ifade iki küçük kürenin kapasite ifadesine çevrilir.

Şayet kürelerin yarıçapları aralarındaki uzaklığa nazaran küçük değilse sistemin alanı ancak sonsuz sayıda imaj yardımiyle hesaplanabilir. Şek. 69 da iki büyük küre sistemi görülmektedir. Kürelerin φ_1 ve φ_2 potansiyelleri bilinen değerlerdir. Yükler için

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 = Q_{11} + Q_{12} \quad ,$$
$$Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 = Q_{21} + Q_{22}$$

yazılabilir. Q_{11} ve Q_{21}, 1 küresi φ_1 ve 2 küresi sıfır potansiyelinde iken 1 ve 2 kürelerinin yüklerini, Q_{12} ve Q_{22} ise 2 küresi φ_2 ve 1 küresi sıfır potansiyelinde iken kürelerin yüklerini göstermektedir. Sistemin alanı bu iki statik denge durumunu süperpoze ederek elde edilebilir.



Şek. 69

$\varphi_2 = 0$ iken 1 küresinin merkezine

$$q_1 = 4\pi\varepsilon R_1 \varphi_1$$

yükünü koyalım. Eğer bu küre uzayda tek başına bulunsaydı bir Coulomb alanı meydana getirecek ve kürenin dışındaki alan $\varphi = q/4\pi\varepsilon r$ potansiyel fonksiyonu yardımiyle bulunacaktı. q_1 yükünün getirilmesine rağmen 2 küresinin potansiyelini sıfırda tutabilmek için bu kürenin merkezinden

$$\beta_1 = \frac{R_2^2}{d} = n R_2 \quad (n = R_2/d)$$

uzaklığındaki noktaya

$$p_1 = -\frac{R_2}{d} q_1 = -n q_1$$

imajını getirmek gerekecektir. Fakat p_1 yükü 1 küresinin potansiyelini değiştireceğinden, bu kürenin potansiyelini φ_1 değerinde tutabilmek için merkezinden

$$b_2 = \frac{R_1^2}{d - \beta_1} = \frac{m}{1-n^2} R_1 \quad (m = R_1/d)$$

uzaklığında bulunan noktaya

$$q_2 = -\frac{R_1}{d-\beta_1} p_1 = \frac{mn}{1-n^2} q_1$$

imajını getirmek icap eder. Bu yükün tesirini kompanze etmek için 2 küresinin içine ve

$$\beta_2 = \frac{R_2^2}{d-b_2} = \frac{n(1-n^2)}{1-m^2-n^2} R_2$$

uzaklığına

$$p_2 = -\frac{R_2}{d-b_2} q_2 = -\frac{mn^2}{1-m^2-n^2} q_1$$

yükü getirilir. Bu yükün tesirini kompanze etmek için de 1 küresinin içine ve

$$b_3 = \frac{R_1^2}{d-\beta_2} = \frac{m\,(1-m^2-n^2)}{(1-n^2)^2-m^2} R_1$$

uzaklığına

$$q_3 = -\frac{R_1}{d-\beta_2} p_2 = \frac{m^2n^2}{(1-n^2)^2-m^2} q_1$$

yükü getirilir. Böylece devam ederek sonsuz imaj yükü elde edilir. Ancak imajlar gittikçe küçüleceklerinden hesapları bir kaç imaj aldıktan sonra keserek pratik bakımdan tatmin edici bir sonuca varılabilir.

$\varphi_1 = 0$ denge durumu için benzer hesaplar yapılır. Başlangıçta 2 küresinin merkezine

$$p_1' = 4\pi\varepsilon R_2 \varphi_2$$

yükü getirilir. İmajların değerleri ve yerleri

$$b_1' = m R_1 \,, \quad q_1' = -m p_1'$$

$$\beta_2' = \frac{n}{1-m^2} R_2 \,, \quad p_2' = \frac{mn}{1-m^2} p_1'$$

$$b_2' = \frac{m(1-m^2)}{1-m^2-n^2} R_1 \,, \quad q_2' = -\frac{m^2n}{1-m^2-n^2} p_1'$$

olacaktır.

Gauss teoremine gore kürelerin yükleri imaj yüklerinin toplamına eşlt olacaçğından birinci dengede ($\varphi_2 = 0$) 1 küresinin içindeki yükleri toplayarak Q_{11} yükü ve $\varphi_1 = 1$ için c_{11} katsayısı bulunur. Böylece

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon R_1 \left[1 + \frac{mn}{1-n^2} + \frac{m^2n^2}{(1-n^2)^2-m^2} + \cdots\right]$$

elde edilir. Birinci dengede 2 küresinin içindeki imaj yüklerini toplayarak Q_{21} yükü ve $\varphi_1 = 1$ için $c_{21} = c_{12}$ katsayısı bulunur :

$$c_{12} = -4\pi\varepsilon R_1 \left[n + \frac{mn^2}{1-m^2-n^2} + \dots \right].$$

İkinci denge durumunda ($\varphi_1 = 0$) 2 küresinin içindeki imajları toplayarak Q_{22} yükü ve $\varphi_2 = 1$ için c_{22} katsayısı bulunur :

$$c_{22} = 4\pi\varepsilon R_2 \left[1 + \frac{mn}{1-m^2} + \frac{m^2n^2}{(1-m^2-n^2} + \dots \right].$$

Sistemin alanı iki imaj serisindeki noktasal yüklerin Coulomb alanlarını süperpoze ederek bulunur. Yukarıda da belirtildiği gibi bunun için bütün imaj yüklerini almağa lüzum yoktur.

m ve n değerleri küçük olmadıkça hesapları yukarıdaki formüllerle yapmak elverişli değildir. Hiperbolik fonksiyonlardan kaydalanarak daha kullanışlı formüller elde edilebilir. Şimdi bu formülleri bulalım. 1 küresinin içindeki n yinci imajı q_n ile gösterelim. Bu kürenin başlangıç yükü $q_1 = 4\pi\varepsilon R_1\varphi_1$ olacaktır. q_n yükünün 2 küresindeki imajını p_n ile gösterelim. Bu imajların 0_1 ve 0_2 merkezlerinden uzaklıkları b_n ve β_n dir. Böylece

$$p_n = -\frac{R_2}{d-b_n} q_n \,, \quad \beta_n = \frac{R_2^2}{d-b_n} \,, \tag{a}$$

$$q_{n+1} = -\frac{R_1}{d-\beta_n} p_n = \frac{R_1R_2}{d(d-b_n)-R_2^2} q_n \,, \tag{b}$$

$$b_{n+1} = \frac{R_1^2}{d-\beta_n} = \frac{R_1^2(d-b_n)}{d(d-b_n)-R_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{q_{n+1}}{q_n} (d-b_n) \tag{c}$$

yazılabilir ($b_1 = 0$ dır). (b) ve (c) arasında $d-b_n$ yi yokederek

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1}d}{R_1^2} \frac{q_n}{q_{n+1}} - \frac{R_2}{R_1}$$

ve bu ifadede n yerine n−1 koyarak

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{b_nd}{R_1^2} \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{R_2}{R_1} \tag{d}$$

denklemi bulunur. Nihayet (b) ve (d) arasında b_n yi yokederek

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n-1}} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2} \frac{1}{q_n}$$

şeklindeki lineer diferens denklemi elde edilir. Ayni denklemin 2 küresinin içindeki p_n yükleri için de cari olacağı kolayca görülebilir. Diferens denkleminin çözümü

$$q_n = \frac{1}{A \operatorname{Ch} n\lambda + B \operatorname{Sh} n\lambda}$$

şeklindedir ve λ

$$\operatorname{Ch} \lambda = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2 R_1 R_2}$$

denklemi ile bulunur. A ve B sabitlerini bulmak için ilk iki imajdan faydalanarak

$$A \operatorname{Ch} \lambda + B \operatorname{Sh} \lambda = \frac{1}{q_1} ,$$

$$A \operatorname{Ch} 2\lambda + B \operatorname{Sh} 2\lambda = \frac{1}{q_1} \left(\frac{R_1}{R_2} + 2 \operatorname{Ch} \lambda \right)$$

denklemleri bulunur. Bu denklemleri çözerek

$$A = - \frac{1}{4\pi\varepsilon R_2 \varphi_1} , \quad B = \frac{R_2 + R_1 \operatorname{Ch} \lambda}{4\pi\varepsilon R_1 R_2 \varphi_1 \operatorname{Sh} \lambda}$$

elde edilir. Böylece q_n için

$$q_n = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2 \varphi_1 \operatorname{Sh} \lambda}{R_2 \operatorname{Sh} n\lambda + R_1 \operatorname{Sh} (n-1)\lambda}$$

ifadesi bulunur. 1 küresindeki yükleri toplayarak $\varphi_1 = 1$ için

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon R_1 R_2 \operatorname{Sh} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_2 \operatorname{Sh} n\lambda + R_1 \operatorname{Sh} (n-1)\lambda \right]^{-1}$$

elde edilir. c_{12} yi bulmak için p_n yükünün ifadesini bulmak lâzımdır. (a) ve (b) denklemleri arasında $d - b_n$ yi yokederek

$$-\frac{1}{p_n} = \frac{R_1}{d}\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{R_2}{d}\frac{1}{q_n}$$

yazılabilir. Bu ifadede q_{n+1} ve q_n yerine eşitlerini koyarak

$$p_n = -\frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2 \varphi_1 \operatorname{Sh}\lambda}{d \operatorname{Sh} n\lambda}$$

ve toplayarak $\varphi_1 = 1$ için

$$c_{21} = c_{12} = -\frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2 \operatorname{Sh}\lambda}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{Sh} n\lambda\right)^{-1}$$

elde edilir. Simetriyi gözönüne alarak c_{22} için

$$c_{22} = 4\pi\varepsilon R_1 R_2 \operatorname{Sh}\lambda \sum_{n=1}^{\infty}\left[R_1 \operatorname{Sh} n\lambda + R_2 \operatorname{Sh}(n-1)\lambda\right]^{-1}$$

bulunur.

Şayet küreler eşitse $\mu = \lambda/2$ koyarak formüller sadeleştirilebilir. Zira

$$\operatorname{Ch}\mu = \operatorname{Ch}\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{Ch}\lambda}{2}} = \frac{d}{2R}$$

dir ve $R_1 = R_2 = R$ koyarak

$$c_{11} = c_{22} = 4\pi\varepsilon R \operatorname{Sh}\mu \sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{Sh}(2n-1)\mu\right]^{-1},$$

$$c_{12} = -4\pi\varepsilon R \operatorname{Sh}\mu \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Sh} 2n\mu)^{-1}$$

ifadeleri elde edilir.

Şayet $R_2 \to \infty$ olursa 2 küresi sonsuz düzlem haline gelir. Bu durumda d uzaklığı da sonsuza giderse de $d - R_2 = h$ sabit kalır. Böylece şek. 70 de görülen sistem elde edilir. Bu sistemde $m \to 0$, $n \to 1$, $\operatorname{Ch}\lambda \to h/R$ ve

$$\frac{m}{1-n} = \frac{R}{h}$$

alınabileceğinden

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon R\left(1 + \frac{R}{2h} + \frac{R^2}{4h^2-R^2} + \dots\right) =$$

$$4\pi\varepsilon R \operatorname{Sh}\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Sh} n\lambda)^{-1}$$

elde edilir. $c_{12} = -c_{11}$ olacağı da kolayca gösterilebilir.

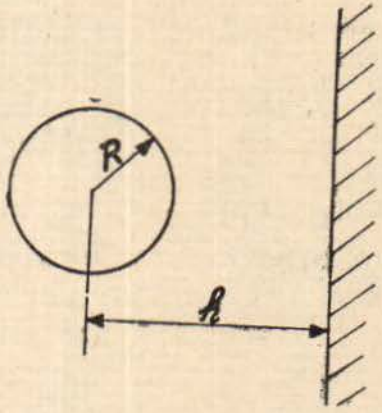
Şek. 71 de görüldüğü gibi kürelerden biri diğerinin içinde bulunduğu takdirde de hesaplar benzer şekilde yapılır. Bu durumda p imajları 2 küresinin dışında bulunurlar. $\varphi_2 = 0$ dengesi için imaj yüklerinin değerleri ve yerleri

$$q_1 = 4\pi\varepsilon R_1\varphi_1 \quad , \quad b_1 = 0$$

$$p_1 = -nq_1 \quad , \quad \beta_1 = nR_2$$

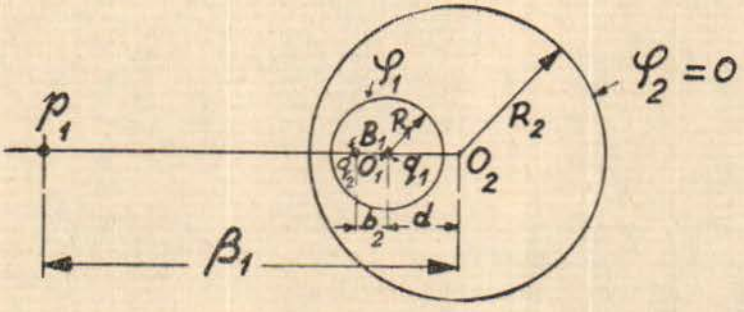
$$q_2 = -\frac{mn}{1-n^2}q_1 \quad , \quad b_2 = -\frac{m}{1-n^2}R_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$



Şek. 70

olur. Böylece



Şek. 71

$$c_{11}=4\pi\varepsilon R_1\left[1-\frac{mn}{1-n^2}+\frac{m^2n^2}{(1-n^2)^2-m^2}-+\ldots\right]=$$

$$4\pi\varepsilon R_1R_2\ \mathrm{Sh}\ \lambda\sum_{n=1}^{\infty}[R_2\ \mathrm{Sh}\ n\lambda-R_1\ \mathrm{Sh}\ (n-1)\lambda]^{-1}$$

bulunur. $c_{12}=-c_{11}$ dir. Kürelerin yükleri için

$$Q_1=c_{11}(\varphi_1-\varphi_2)\ ,$$

$$Q_2=-c_{11}\varphi_1+c_{22}\varphi_2=-Q_1+(c_{22}-c_{11})\varphi_2=-Q_1+Q'$$

yazılabilir. Dıştaki kürenin iç yüzeyinde $-Q_1$ yükü (tam tesir) ve dış yüzeyinde ise Q' yükü bulunur. Dıştaki küre topraklandığı takdirde $Q'=0$ olur. c_{22} katsayısı sistem için önemli değildir.

İki küre sisteminde kürelerin yükleri ve meydana gelen alanın şiddeti potansiyel değerlerine bağlıdır. Şayet $\varphi_1=U$ ve $\varphi_2=0$ ise $Q_1=c_{11}U$, $Q_2=c_{21}U$ olacaktır. Buna karşılık $\varphi_2=0$ ve $\varphi_1=U$ iken $Q_1=c_{12}U$ ve $Q_2=c_{22}U$ olmaktadır. Eğer $\varphi_1=-\varphi_2=U/2$ alınırsa

$$Q_1=(c_{11}-c_{12})\frac{U}{2}\ ,\quad Q_2=(c_{11}-c_{22})\frac{U}{2}$$

olur. Küreler eşit olduğu takdirde $c_{11}=c_{22}$ olacağından $Q_1=-Q_2=Q$ sonucu bulunur. Yani küreler eşit ve zıt işaretli olarak yüklenirler. Sistemin kapasitesi $C=Q/U$ şeklinde bulunur.

Eşit küreler için $m=n=R/d=0{,}2$ alarak hesaplar yapılırsa, yalnız iki terimi gözönüne alarak

$$Q_{11}=1{,}04q_1\ ,\quad Q_{12}=-0{,}2p_1\ ,\quad Q_{21}=-0{,}2q_1\ ,\quad Q_{22}=1{,}04p_1$$

bulunur. Kürelerin yükleri ise

$$Q_1=1{,}04q_1-0{,}2p_1\ ,\quad Q_2=-0{,}2q_1+1{,}04p_1$$

olur. $q_1=4\pi\varepsilon R\,\varphi_1$ ve $p_1=4\pi\varepsilon\,R\,\varphi_2$ dir. Şayet $\varphi_1=-\varphi_2=U/2$ alınırsa $p_1=-q_1$ ve $Q_1=-Q_2=Q=1{,}24q_1=2{,}48\,\pi\varepsilon\,RU$ bulunur. Sistemin kapasitesi $C=Q/U=2{,}48\,\pi\varepsilon\,R$ olacaktır. Halbuki küreler arasındaki uzaklık yarıçaplara nazaran çok büyük olduğu vakit ($d\gg R$) kapasite $C=2\pi\varepsilon\,R$ değerini almaktadır. Böylece küreler yaklaşınca kapasitenin arttığı anlaşılır.

Şimdi $R/d = 0{,}2$ oranı için maksimum alan şiddetini bulalım. Alan şiddeti kürelerin en yakın noktalarında, yani P_1 ve P_2 de, maksimum değerler alır, şek. 68. İki denge durumundaki noktasal yüklerin meydana getirecekleri alanlar bu noktalarda hep $P_1 P_2$ doğrultusunda olacaklarından bileşke alan şiddeti kolayca hesaplanabilir. $\varphi_1 = 0$ denge durumunda, hesapları $n = 2$ ye kadar yaparak, $\varphi_2 = -\varphi_2 = U/2$ için

$$q_1 = 2\pi\varepsilon RU \;,\quad q_2 = 0{,}0417 q_1 \;,\quad b_1 = 0 \;,\quad b_2 = 0{,}2083R$$

$$p_1 = -0{,}2 q_1 \;,\quad p_2 = -0{,}0087 q_1 \;,\quad \beta_1 = 0{,}2R \;,\quad \beta_2 = 0{,}2087R$$

bulunur. $\varphi_1 = 0$ denge durumu için

$$p'_1 = -2\pi\varepsilon RU = -q_1 \;,\quad p'_2 = -0{,}0417 q_1 \;,\quad \beta'_1 = 0 \;,\quad \beta'_2 = 0{,}2083R$$

$$q'_1 = 0{,}2 q_1 \;,\quad q'_2 = 0{,}0087 q_1 \;,\quad b'_1 = 0{,}2R \;,\quad b'_2 = 0{,}2087R$$

elde edilir. q lerin hepsi pozitif ve p lerin hepsi de negatif olduğundan alan şiddetleri hep sağa doğru yönelecektir. 1 küresinin içindeki noktasal yükler meselâ P_1 noktasında

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{0{,}2}{(0{,}8R)^2} + \frac{0{,}0417}{(0{,}7917R)^2} + \frac{0{,}0087}{(0{,}7913R)^2}\right]$$

alanını ve 2 küresinin içindeki yükler ise ayni noktada

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{(0{,}8d)^2} + \frac{0{,}2}{(0{,}76d)^2} + \frac{0{,}0417}{(0{,}7582d)^2} + \frac{0{,}0087}{(0.7582d)^2}\right]$$

alanını meydana getirirler. Bu iki alan şiddetini toplayarak maksimum alan şiddeti için

$$E_{max} = 3{,}68\,\frac{U}{d} = 0{,}736\,\frac{U}{R}$$

bulunur. Şayet küreler yekdiğerinden çok uzakta iseler $E_{max} = 0{,}5\ U/R$ olacağından küreler yaklaşınca, ayni gerilimde, alanın daha şiddetli olacağı anlaşılır. Levhaları arasındaki uzaklık $d - 2R = 0{,}6d$ ye, yani P_1 ve P_2 arasındaki uzaklığa eşit olan paralel levhalı kondansatördeki üniform alan şiddeti $E_0 = U/0{,}6d = 0{,}334\ U/R$ olacağından küre sistemindeki alanın daha şiddetli olduğu görülür.

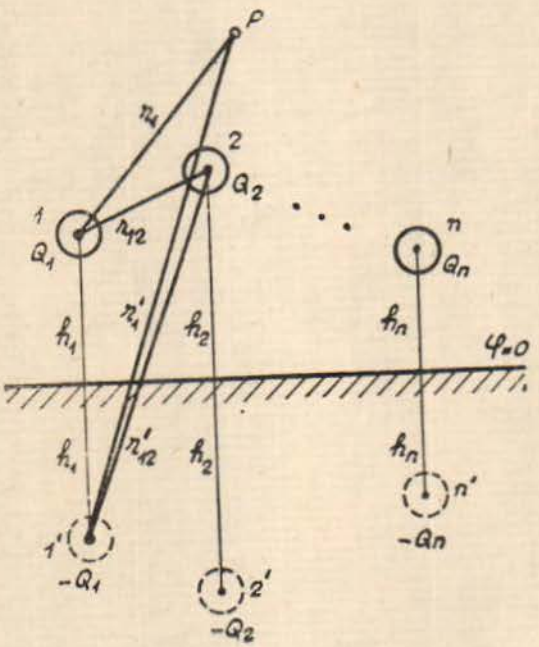
İki küre tertibinden yüksek gerilim tekniğinde ölçü maksadiyle faydalanılır.

19 — Toprak yüzeyi civarındaki küçük kürelerin alanı incelenecektir.

Bu problem de kürelerin toprağa nazaran imajlarını alarak incelenir, şek. 72. Sistemin potansiyel katsayıları

$$p_{kk} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{kk}} - \frac{1}{2h_k}\right), \quad p_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{ik}} - \frac{1}{r'_{ik}}\right)$$

denklemleri yardımiyle hesaplanır. Şayet kürelerin yükleri biliniyorsa



Şek. 72

potansiyelleri

$$\varphi_i = p_{i1} Q_1 + p_{i2} Q_2 + \ldots p_{in} Q_n$$

olacaktır. (i=1,2, ... , n). Her hangi bir noktadaki potansiyel

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[Q_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \ldots + Q_n\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right)\right]$$

olacaktır. Eğer potansiyeller verilmişse yükler yukarıdaki denklemleri çözerek bulunabilir.

Şek. 73 de görülen küre-toprak sisteminde kürenin potansiyeli

$$\varphi = U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h}\right)$$

dır. Buradan küre ile toprak arasındaki kapasite için

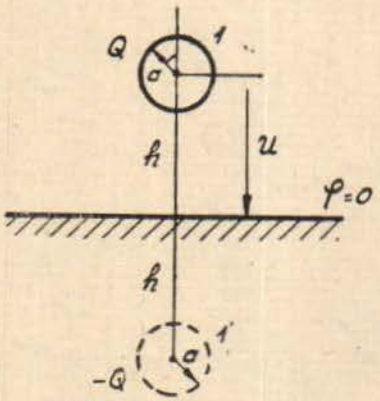
$$C = \frac{4\pi\varepsilon\, a}{1 - \dfrac{a}{2h}}$$

bulunur. Küre tek başına iken kapasitesi $4\pi\varepsilon a$ olduğundan, toprağın kapasiteyi büyüttüğü anlaşılır. Bu ifade $h \gg a$ için $C \approx 4\pi\varepsilon a$ şekline girer. Sistemin alanı, sıfır potansiyelindeki düzlem karşısına getirilen noktasal yük gibi incelenir . Kürenin yüzeyindeki yük dağılışı, daha önce iki küçük küre için bulunan σ_2 ifadesinde $Q_1 = -Q_2 = Q$ koymak ve endisleri gözönüne almamak suretiyle elde edilir. Böylece yoğunluk için

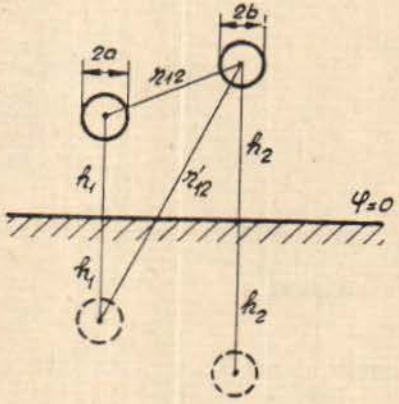
$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}\left(1 - 3k^2 \cos\theta\right)$$

bulunur ($k = a/2h$).

Şek. 74 de görülen iki küre için



Şek. 73



Şek. 74

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r'_{12}}\right)Q_2 ,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r'_{12}}\right)Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)Q_2$$

olacaktır. Şayet $Q_1 = -Q_2 = Q$ ise

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{r_{12}}\right) - \left(\frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} - \frac{2}{r'_{12}}\right)\right]$$

olacağından sistemin kapasitesi için

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{r_{12}}\right) - \left(\frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} - \frac{2}{r'_{12}}\right)}$$

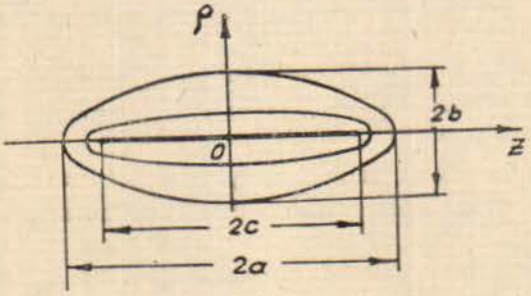
bulunur.

20 — Toprağa dik ve paralel olarak yerleştirilen üniform yüklü tellerin (çubukların) kapasiteleri hesaplanacaktır (düşey ve yatay antenler).

Q yükünü taşıyan rotasyon elipsoidinin potansiyel fonksiyonu için, daha önce görüldüğü gibi

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c} \ln \frac{z + c + r_1}{z - c + r_2}$$

yazılabilir, şek. 46. Eşpotansiyel yüzeyler rotasyon elipsoidleridir, şek. 75.

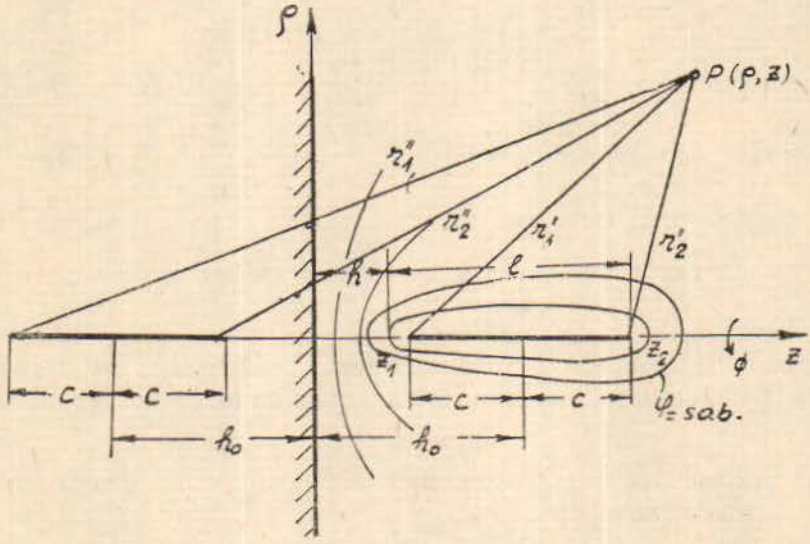


Şek. 75

Elipslerin küçük yarı ekseni çok küçük olduğu takdirde, yani $a \approx c$ alı-

nabildiği vakit, eşpotansiyel yüzeyler yaklaşık olarak uçları yuvarlak silindirler haline gelirler. Böyle bir elipsoidi, silindirik bir iletkenin eşdeğeri olarak kullanmak kabil olur.

Şek. 76 da $2c$ uznnluğundaki üniform yüklü çizgisel yük sıfır potansiyelindeki düzleme (toprak) dik olarak yerleştirilmiştir. Toprağın



Şek. 76

tesirini hesaba katmak için çizgisel yükün imajını alalım. ρ— ekseninin orijinal yük için $h+c$ kadar sola ve imaj yükü için ayni miktar kadar sağa kaydığını gözönüne alarak P (ρ,z) noktasındaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\left(\ln\frac{z-h_0+c+r'_1}{z-h_0-c+r'_2} - \ln\frac{z+h_0+c+r''_1}{z+h_0-c+r''_2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Eşpotansiyel yüzeyler artık rotasyon elipsoidi değildir ve toprağa yaklaştıkça bozulma artar. Bununla beraber çizgisel kaynağın yakınlarıgda elipsoid şeklinden uzaklaşma o kadar büyük değildir. $z=0$ düzlemi (toprak) sıfır potansiyelindeki eşpotansiyel yüzeydir (yukarıdaki ifadede $z=0$ koyarak $\varphi=0$ olduğu görülür). Uzunluğu l ve $z=h_0$ noktasındaki çapı d olan eşpotansiyel yüzeyle intibak eden bir telin kapasitesini yaklaşık olarak şöylece bulabiliriz: $l \gg d$ olduğunu farzedelim. P(h_0,ρ) noktasındaki potansiyel

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\left[\ln\frac{c+\sqrt{\rho^2+c^2}}{-c+\sqrt{\rho^2+c^2}} - \ln\frac{2h_0+c+\sqrt{\rho^2+(2h_0+c)^2}}{2h_0-c+\sqrt{\rho^2+(2h_0-c)^2}}\right]$$

dir. Tele yakın olan noktalarda ρ çok küçük olacağından bu ifadeyi

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\ln\frac{2c}{\rho}\sqrt{\frac{2h_0-c}{2h_0+c}}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $\rho=d/2$ koyarak telin potansiyeli için

$$\varphi_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\ln\frac{4c}{d}\sqrt{\frac{2h_0-c}{2h_0+c}}$$

elde edilir. Potansiyel ifadesinde $\varphi=\varphi_s$ ve $\rho=0$ koyarak φ_s=sab. yüzeyinin z—eksenini kestiği z_1 ve z_2 noktaları bulunabilir. Telin uzunluğu $z_2-z_1=l$ olacaktır. $l\gg d$ olduğu farzedildiğinden $l\approx 2c$ ve $h_0\approx h+c$ alarak

$$\varphi_s = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{d}\sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}$$

yazılabilir. Buradan telle toprak arasındakl kapasite için

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2l}{d}\sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}}$$

ifadesi balunur. Büyük h değerleri için bu ifade

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2l}{d}}$$

şekline girer. Bu ifade telin tek başına kapasitesini gösterir.

Şayet h çok küçükse bu sefer

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2l}{d\sqrt{3}}}$$

yazmak kabil olur.

Bir telle toprak arasındaki kapasitenin yarısı iki tel arasındaki kapasiteyi verecektir. Zira teller arasındaki gerilim $2\varphi_0$ dir. Ayni sonucu seri bağlı olan toprak kapasitelerinin eşdeğerini hesaplayarak da bulabiliriz.

$z=0$ düzlemi boyunca $r_1'=r_2''=\sqrt{h^2+\rho^2}$ ve $r'_2=r_1''=\sqrt{(h+l)^2+\rho^2}$ olacağını gözönüne alarak, toprak yüzeyinde tesirle meydana gelen yük dağılışı için

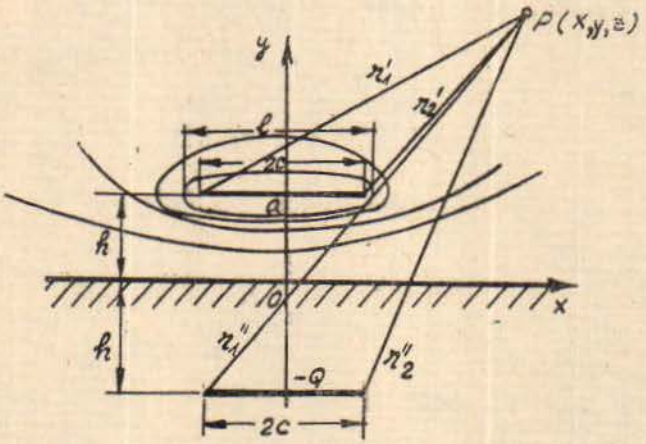
$$\sigma=-\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=-\frac{Q}{2\pi l}\left[\frac{1}{\sqrt{h^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{(h+l)^2+\rho^2}}\right]$$

bulunur. Alan şiddeti ise $E_z=\sigma/\varepsilon$ olacaktır. Yoğunluk ve alan şiddeti $\rho=0$ için maksimum olurlar ve

$$\sigma_{max}=-\frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{1}{h(h+l)}$$

dir.

Şek. 77 de görülen yatay tel için şu sonuçlar elde edilir:



Şek. 77

Sistemin alanında artık eksenel simetri yoktur. Orijinal yük ve imajı $P(\lambda,y,z)$ noktasında

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\left[\ln\frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+(y-h)^2+z^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+(y-h)^2+z^2}}\right.$$

$$\left.\ln\frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+(y+h)^2+z^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+(y+h)^2+z^2}}\right]$$

potansiyelini meydana getirirler. Çizgisel kaynak yakınlarında eşpotansiyel yüzeyler uçları yuvarlak silindirler haline geleceklerinden böyle bir yüzeyi, uzunlu l ve çapı d olan bir telin eşdeğeri olarak kabul edebiliriz. $P(0,h+\rho,0)$ noktasındaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\left[\ln\frac{c+\sqrt{c^2+\rho^2}}{\rho} - \ln\frac{c+\sqrt{c^2+(2h+\rho)^2}}{2h+\rho}\right]$$

yazılabilir. ρ çok küçük olduğu takdirde bu ifade

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\ln\frac{2c}{\rho}\,\frac{2h}{c+\sqrt{c^2+4h^2}}$$

şekline girer. $\rho = d/2$ koyarak l uzunluğundaki yatay telin potansiyeli için

$$\varphi_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\ln\frac{4c}{d}\,\frac{2h}{c+\sqrt{c^2+4h^2}}$$

bulunur. Potansiyel ifadesinde $\varphi = \varphi_s$ ve $y = h$, $z = 0$ koyarak $\varphi_s = $ sab. eşpotansiyelinin $y = h$ doğrusunu kestiği noktanın $x = l/2$ absisi elde edilir. $l \gg d$ olduğu takdirde $2c \approx l$ alınabileceğinden

$$\varphi_s = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{d}\,\frac{4h}{l+\sqrt{l^2+(4h)^2}}$$

ve

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{2l}{d}\,\dfrac{4h}{l+\sqrt{l^2+(4h)^2}}}$$

elde edilir. İki paralel tel arasındaki kapasite bunun yarısına eşit olacaktır. Şayet $(4h)^2 \gg l^2$ ise kapasite yaklaşık olarak

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{4h}{d}}$$

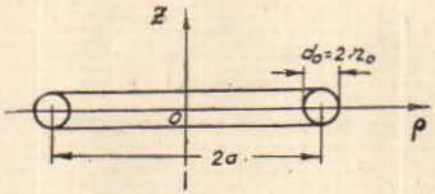
formülüyle hesaplanabilir.

21 — Toprak yüzeyine paralel olarak yerleştirilen üniform yüklü toroidin alanı incelenecektir.

İlk önce toroid uzayda tek başına bulunduğu vakit kapasitesini bulalım. Daha önce görüldüğü üzere, a yarıçaplı dairesel halkanın potansiyel fonksiyonu

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}\,K(k)$$

şeklindedir, şek, 16. Şek. 78 de dairesel kesitli toroid görülmektedir. Şayet $d_0 \ll a$ olduğu farzedilirse toroidin alanı çizgisel kaynağın alanı gibi incelenebilir. Toroid yüzeyindeki potansiyeli bnlmak için meselâ $z = 0, \rho = a + r_0$ noktası seçilirse



Şek. 78

$$k^2 = \frac{4a(a+r_0)}{(2a+r_0)^2} \approx 1$$

olur. K (1) değeri sınırlı olmadığından k^2 modülü yerine

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(\rho-a)^2+z^2}{(\rho+a)^2+z^2}$$

modülünü kullanmak elverişlidir. Bu yeni modül yardımiyle eliptik integral için $K \approx \ln(4/k')$ alınabilir. Toroid yüzeyinde

$$k'^2 = 1 - \frac{4a(a+r_0)}{(2a+r_0)^2} \approx \left(\frac{r_0}{2a}\right)^2$$

yazılabileceğinden eliptik integral için $K = \ln(8a/r_0)$ bulunur. Böylece Q yükünü taşıyan toroidin potansiyeli için

$$\varphi_s \approx \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon a}\ln\frac{8a}{r_0}$$

elde edilir. Toroidin kapasitesi ise

$$C \approx 2\pi\varepsilon \frac{2\pi a}{\ln \frac{8a}{r_0}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{4}{\pi}\frac{l}{r_0}}$$

olacaktır ($l=2\pi a$, toroidin uzunluğudur). Bu ifade, daha önce rotasyon elipsoidi için bulunan ifade ile karşılaştırılırsa yalnız logaritmadaki $4/\pi$ faktörü bakımından bir fark bulunduğu anlaşılır.

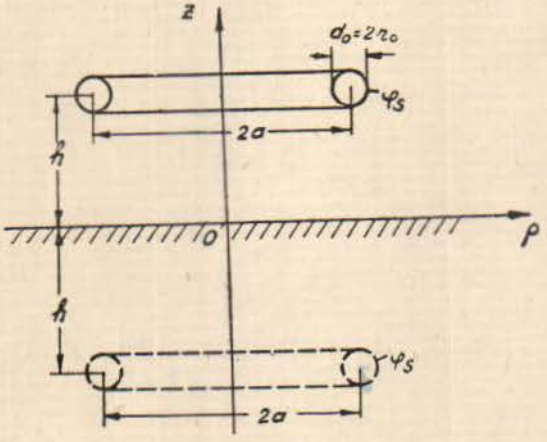
Şek. 79 da toprak yüzeyine paralel olarak yerleştirilen toroid görülmektedir. Toprağın tesiri, toroidin imajı yardımiyle gözönüne alınabilir. Her hangi bir noktadaki potansiyel için

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon}\left[\frac{K(k_1)}{\sqrt{(z-h)^2+(a+\rho)^2}} - \frac{K(k_2)}{\sqrt{(z+h)^2+(a+\rho)^2}}\right]$$

elde edilir. $K(k_1)$ ve $K(k_2)$, modülleri

$$k_1^2 = \frac{4a\rho}{(z-h)^2+(a+\rho)^2}, \quad k_2^2 = \frac{4a\rho}{(z+h)^2+(a+\rho)^2}$$

olan birinci nevi komple eliptik integralleri göstermektedir.



Şek. 79

Toprak yüzeyindeki yoğunluk $\sigma = -\varepsilon(\partial\varphi/\partial z)_{z=0}$ denklemi yardımiyle hesaplanabilir.

Toroid kendi yüzeyinde

$$\varphi_t = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon a} \ln \frac{8a}{r_0}$$

potansiyelini meydana getirir. $\rho \approx a$ ve $z \approx 2h$ alarak imajın toroid yüzeyinde meydana getireceği potansiyel için

$$\varphi_i = -\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{4a^2+4h^2}}\,K(k)$$

bulunur. Modül

$$k^2 = \frac{1}{1+(h/a)^2}$$

dir. Böylece toroidin potansiyeli için

$$\varphi_s = \varphi_t + \varphi_i = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon a}\left[\ln\frac{8a}{r_0} - \frac{1}{\sqrt{1+(h/a)^2}}\,K(k)\right]$$

bulunur. Toroidle toprak arasındaki kapasite $C = Q/\varphi_s$ olacaktır. İki paralel toroid arasındaki kapasite ise bunun yarısına eşit olur.

22 — Q_1 ve Q_2 yüklerini taşıyan iletkenler bir telle birleştiriliyor. İletkenlerin yeni yükleri ve ortak potansiyelleri hesaplanacaktır.

İletkenlerin ilk potansiyelleri

$$\varphi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2\ ,\quad \varphi_2 = p_{12}Q_1 + p_{22}Q_2$$

dir. Ortak potansiyel φ ile ve yeni yükler q_1 ve q_2 ile gösterilirse birleştirme telinin yükünü imal ederek

$$q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2 = Q\ ,$$

$$\varphi = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 = p_{12}q_1 + p_{22}q_2$$

yazılabilir. Bu denklemleri çözerek

$$q_1 = \frac{p_{22}-p_{12}}{p_{11}+p_{22}-2p_{12}}Q\ ,\quad q_2 = \frac{p_{11}-p_{12}}{p_{11}+p_{22}-2p_{12}}Q$$

ve

$$\varphi = \frac{p_{11}(p_{22}-p_{12})+p_{12}(p_{11}-p_{12}}{p_{11}+p_{22}-2p_{12}}Q$$

bulunur. p_{11} ve p_{22} katsayıları p_{12} den büyük olduğundan q_1 ve q_2 yükleri Q yükünün işaretinde olurlar. Eğer $p_{22} = p_{12}$ ise (1 iletkeni 2 içinde) $q_1 = 0$ ve $\varphi = \varphi_2$ olacaktır.

Hesaplar c katsayıları yardımiyle yapılırsa

$$q_1 = (c_{11} + c_{12})\varphi \quad , \quad q_2 = (c_{12} + c_{22})\varphi$$

ve $q_1 + q_2 = Q$ denklemleri yardımiyle

$$\varphi = \frac{(c_{11} + c_{11})\varphi_1 + (c_{22} + c_{12})\varphi_2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}$$

ve

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{22} + c_{12}}$$

bulunur. $c_{11} = -c_{12}$ için (1 iletkeni 2 içinde) yine $q_1 = 0$ ve $\varphi = \varphi_2$ elde edilir. Eğer tesir katsayıları çok küçükse $c_{11} = C_1$ ve $c_{22} = C_2$ koyarak

$$\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2} \quad , \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

yazılabilir. Şayet $C_2 \gg C_1$ ise $q_1 \approx 0$ ve $q_2 \approx Q$ olur.

23 — Üniform alan içine sokulan iletken kürenin ve iletken silindirin alan üzerindeki tesirleri incelenecektir.

İmaj teorisinden faydalanarak bir elektrik alanı içine sokulan iletken cisimlerin alan üzerine ve alanın iletkenler üzerine yapacağı tesiri inceleyebiliriz. İlk önce üniform alan içine sokulan küredeki durumu inceleyelim. Bunu, noktasal yükü karşısıha getirilen küre yardımiyle elde edebiliriz, şek. 52. Kürenin yüksüz olduğu kabul edilirse, merkezine $q' = -q' = Rq/d$ yükünü getirmek gerekir. Küre dışındaki q yükü, küre alan içine sokulmadan önce ve kürenin merkezinin bulunduğu yerde

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon d^2}$$

alanını meydana getirir. Şayet bu yük küreden uzaklaştırılır ve bu esnada E_0 alanı sınırlı değerde kalacak şekilde yükün büyüdüğü farzedilirse limitde $d \to \infty$ ve $b \to 0$ olacağından küre içindeki noktasal yükler bir dipol teşkil ederler. Diğer taraftan noktasal yükten çok uzaklardaki alana üniform gözüyle bakılabileceğinden, $q = 4\pi\varepsilon d^2 E_0$ yükü küre civarında E_0 üniform alanını meydana getirir. Bu suretle üniform alan içine sokulan küre problemine geçilmiş olacaktır. Küre içindeki dipolün momenti $p = q'b = 4\pi\varepsilon R^3 E_0$ dir. $q > 0$ için moment z-ekseni yönündedlr. Böy-

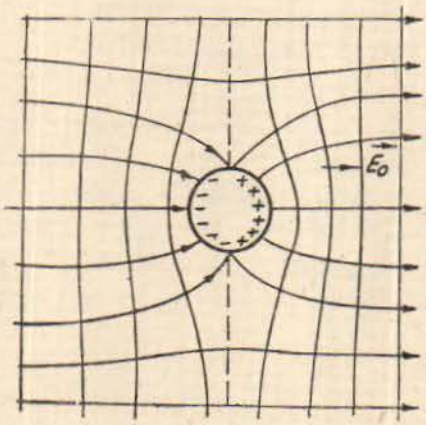
lece $\vec{E}_0$ alanının küreye nazaran imajının momenti p olan bir dipol olduğu söylenebilir.

Küre dışındaki potansiyel primer üniform alanın potansiyeli ile dipolün potansiyelini süperpoze ederek bulunacaktır. Üniform alanın potansiyeli $\varphi_0 = -E_0 z + k$ olacağından küre dışındaki potansiyel için, kürenin potansiyelini sıfır alarak,

$$\varphi = \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta$$

ifadesi elde edilir.

Küre yüzeyindeki alan şiddeti ve yoğunluk için $E_r = 3E_0 \cos\theta$ ve $\sigma = 3\varepsilon E_0 \cos\theta$ bulunur. Böylece $\theta = 0$ ve π noktalarında alanın $3E_0$ değerine yükseleceği anlaşılır. Şek. 80 de sistemin alanı görülmektedir. Küre yüzeyi gibi $\theta = \pi/2$ ve $3\pi/2$ düzlemleri de sıfır potansiyelindedirler. Eğer bu düzlemler yerine iletken yüzeyleri alınırsa, yarım küresel çıkıntısı olan bir düzlemin alanı elde edilir. Potansiyel ifadesinde



Şek. 80

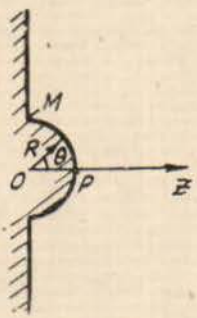
$r\cos\theta = z$ koyarak düzlemdeki yoğunluk için

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)E_0$$

bulunur. Alan şiddeti ise

$$E_z = \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E_0$$

olacaktır. $r = R$ için $E_z = 0$ olur (M noktası) ve küreden uzaklaştıkça alan E_0 değerine yaklaşır. Küre yüzeyinde ise $\theta = 0$ için alan üç katına yükselmekte idi (P noktası), şek. 81.



Şek. 81

Küre yüklü olduğu takdirde, merkezine Q_k yükünü getirmek gerekeceğinden potansiyel fonksiyonu

$$\varphi = \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta + \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon r}$$

şekline girer. $Q_k = 4\pi\varepsilon R \varphi_k$ koyarak

$$\varphi = \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta + \varphi_k \frac{R}{r}$$

yazılabilir.

Üniform alan içine sokulan sonsuz iletken silindir problemi de benzer şekilde incelenir. Şek. 58 deki silindir yüksüz olduğu takdirde eksenine λ yükünü getirmek gerekir. Silindir getirilmeden önce λ yükü eksenin bulunduğu yerde

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon d}$$

alanını meydana getirir. $d \to \infty$ limitine geçilir ve bu sırada E_0 sınırlı kalacak şekilde λ nın büyüdüğü farzedilirse silindir civarındaki alan üniform olur. Bu limite geçiş esnasında $b \to 0$ olacağından silindir içindeki imaj yükleri bir çizgisel dipol teşkil ederler. Bu dipolün birim uzunluktaki momenti $m = \lambda b = 2\pi\varepsilon R^2 E_0$ olacaktır. $\lambda > 0$ için moment $z-$ ekseni yönündedir. Dipol, üniform alanın silindire nazaran imajıdır. Böylece ekseni üniform alana dik olarak yerleştirilen yüksüz silindirin dışındaki potansiyel için, silindirin potansiyelini sıfır alarak,

$$\varphi = \left(\frac{R^2}{\rho} - \rho\right) E_0 \cos\phi$$

elde edilir.

Silindir yüzeyindeki alan şiddeti $E_\rho = 2E_0 \cos\phi$ ve yoğunluk $\sigma = 2\varepsilon E_0 \cos\phi$ olacaktır. Alan şiddeti $\phi = 0$ ve π için $2E_0$ değerine yükselir.

Sistemin alanı şek. 80 gibi ise de küre için alan rotasyon simetrik (yani ϕ ye bağlı değil) olduğu halde silindirde iki boyutludur (yani $z-$ ye bağlı değil). Potansiyel $\phi = \pi/2$ ve $3\pi/2$ düzlemlerinde de sıfır olur. Eğer bu düzlemler yerine iletken yüzeyleri alınırsa, yarı silindirik çıkıntısı olan bir düzlemin alanı elde ediiir. Düzlemdeki alan şiddeti

$$E_z = \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) E_0$$

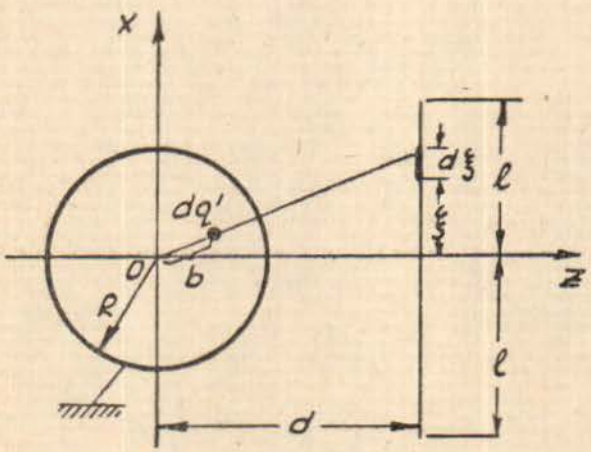
olacağından $\rho = R$ için $E_z = 0$ dır. Halbuki P noktasında alan iki katına çıkmaktadır.

Şayet silindir yüklü ise eksenine ayrıca λ_k çizgisel yükünü getirmek gerekir. Böylece potansiyel ifadesi

$$\varphi = \left(\frac{R^2}{\rho} - \rho\right) E_0 \cos\phi + \frac{\lambda_k}{2\pi\varepsilon} \ln\rho$$

şekline girer.

24 — Üniform çizgisel yükün topraklanmış küreye tesiri incelenecektir, şek. 82.



Şek. 82

Yoğunluğu λ olan çizgisel yükün $d\xi$ elemanında $dq=\lambda d\xi$ yükü bulunur. Noktasal gözüyle bakılabilecek olan bu yükün küreye nazaran imajı $dq'=-Rdq/d$ dir ve imaj yükü $b=R^2/\sqrt{d^2+\xi^2}$ noktasındadır. Böylece kürenin toplam yükü için

$$Q_k=-R\lambda\int_{-l}^{l}\frac{d\xi}{\sqrt{d^2+\xi^2}}=-2R\lambda\ln\left[\frac{l}{d}+\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2+1}\right]$$

bulunur. $l \ll d$ için $Q_k \approx -Rq/d$ olacaktır $(q=2l\lambda)$.

IV. DİELEKTRİKLER

11. Dielektriğin polarizasyonu.

Dielektrik veya yalıtkan denilen maddeler içinde, iletkenlerde olduğu gibi elektrik alanının tesiriyle hareket edebilen serbest yükler ya hiç yoktur veya varsa bile sayıları çok azdır. Bu sebeple iletkenin bir noktasına konan yük çok kısa zamanda bütün yüzeye dağıldığı halde dielektriklerde dağılma ya hiç olmaz veya çok uzun bir zamana ihtiyaç gösterir.

Elektrik alanı içine sokulan bir dielektriğin yüzeyinde pozitif ve negatif yükler belirir. Böylece dielektrik polarize olur, yani kutuplaşır. olaya polarizasyon veya kutuplaşma adı verilir. Bir bakıma polarizasyon, elektrik alanına sokulan iletkenlerin tesirle elektriklenmesine benzetilebilir. Bununla beraber görünürdeki benzerliğe rağmen bu iki olay birbirinden farklıdır. Tesirle elektriklenme serbest yüklerin hareketinden meydana geldiği halde, polarizasyonda bu çeşit bir hareket bahis konusu değildir. Polarizasyonda ortaya çıkan yükler molekül ve atom yapısına bağlı olan yüklerdir ve bunları iletkenlerdeki serbest yüklerle karıştırmamalıdır. Polarizasyon yüklerine bağlı yük adı da verilir.

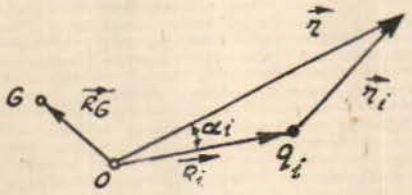
Polarizasyonun atomik teorisine kısaca göz atmadan önce yüklerin ağırlık merkezini tarif edelim. Pozitif ve negatif yüklerden meydana gelen bir noktasal yük dağılışının sistemden çok uzakta meydana getireceği potansiyel için yaklaşık olarak

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\sum_i q_i \left(1 + \frac{\vec{R}_i \cdot \vec{r}}{r^2}\right)$$

yazılabilir, şek. 83. Şayet orijin $\sum_i q_i \vec{R}_i = 0$ olacak şekilde seçilirse potansiyel ifadesi

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\sum_i q_i$$

şeklini alır. Böyle bir orijine yük dağılışının ağırlık merkezi denilir. Bu ifadeye göre, çok uzaklardaki potansiyel, ağırlık merkezine konulan $\sum_i q_i$ değerindeki noktasal yükün potansiyeline eşdeğer olmaktadır.



Şek. 83.

G ağırlık merkezinin her hangi bir orijlne göre yer vektörü

$$\vec{R}_G = \frac{\sum_i q_i \vec{R}_i}{\sum_i q_i}$$

olacaktır. Kartezyen koordinatlar x_G, y_G, z_G ile gösterilirse

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}$$

bulunur. Şayet yüklerin toplamı sıfır yani

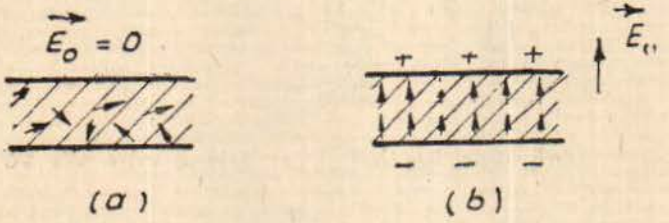
$$\sum_i q_i^+ = -\sum_i q_i^-$$

ise sistem için bir ağırlık merkezi bulunamazsa da pozitif ve negatif yükler için ayrı ağırlık merkezleri tarif edilebilir.

Bir nötr molekülde yüklerin toplamı sıfırdır. Ağırlık merkezlerinin karşılıklı durumuna göre molekülleri iki gruba ayırabiliriz. Poler moleküllerde pozitif ve negatif ağırlık merkezleri üstüste gelmediğinden bu moleküller, boyutlarına nazaran çok uzak noktalar için bir dipol gibi davranırlar. Mesela HCl, H_2O, SO_2 molekülleri poler gruba

gier. Poler olmayan moleküllerde ise iki ağırlık merkezi üstüste geldiğinden bunlarda dipol karakteri yoktur. Bunlara örnek olarak H_2, O_2, N_2 molleküllerini gösterebiliriz.

Poler olmayan moleküller elektrik alanı içine girince pozitif yükler alan yönünde ve negatif yükler ters yönde kayarlar. Böylece ağırlık merkezleri de kaymış olacağından molekül dipol haline gelir. Bu dipoller tatbik edilen alanın yönündedir. Dipollerin meydana gelmesini sonuçlayan kaymalar, dielektriğin bir tarafında pozitif ve diğer tarafında



Şek. 84

negatif yüklerin belirmesine sebep olur. Olay, bir kayma polarizasyonudur.

Dipol karakterinde olan poler moleküller elektrik alanının içine girmeden önce, ısı hareketlerinden dolayı, dielektrik içinde birbirini kompanze edecek şekilde düzensiz bir dağılışı halindedirler, şek. 84a. Moleküller alan içine girince dipoller dönerek dielektrik polarize olur, şek. 84b. Olay, bir yönelme (oryantasyon) polarizasyonudur.

Kayma polarizasyonu az çok her dielektrikte görülür.

Bazı sıvılar elektrik alanı içinde iken dondurulursa, alandan çıkarıldıkları vakit polarizasyonu muhafaza ederler. Bunlara elektret adı verilmektedir. Elektretlere sürekli mıknatısların elektriksel benzeri gözüyle bakabiliriz.

Polarizasyon mekanik tesirler sonucunda da meydada gelebilir (piyezoelektrik olay).

Polarizasyondan dolayı şekil değişmeleri de ortaya çıkar (elektrostriksiyon).

Polarize olan dielektriğin birim hacmindeki bileşke dipol momentine polarizasyon adı verilir ve $\vec{P}$ vektörü ile gösterilir. Dielektriğin dV hacmindeki dipol momenti $\vec{p}$ ile gösterilirse

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{dV} \tag{55}$$

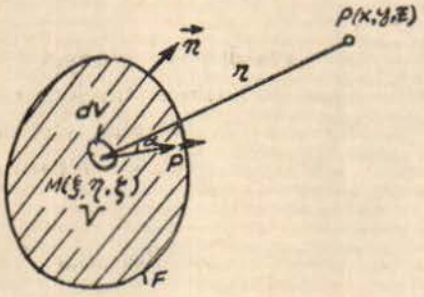
olacaktır, Dielektriğin dV hacmine, momenti $\vec{P}\,dV$ olan bir dipol gözüyle bakılabilir. Polarizasyonun MKSC — birimi $C/m^{2'}$ dir (p nin birimi Cm dir).

12. **Polarizasyon yoğunlukları.**

Dielektriğin dV hacmindeki dipol her hangi bir noktada

$$d\varphi = \frac{P dV \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{P}.\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

potansiyelini meydana getirir, şek. 85. Bu ifadede gradyanın, integrasyon bölgesinin koordinatlarına göre hesaplandığı kabul edilmiştir. V



Şek, 85

hacmi üzerinden integre ederek potansiyel için

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}.\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dV$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\vec{P}.\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) - \frac{\mathrm{div}\,\vec{P}}{r}$$

yazılabileceğinden, potansiyel ifadesi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{r}dV$$

şekline girer. Birinci integrali diverjans teoremi yardımiyle yüzey integraline çevirerek potansiyel ifadesi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_F \frac{P_n dF}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{r}dV$$

şekline sokulabilir. Bu ifadede

$$\sigma_p = P_n\,, \qquad \rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} \tag{56}$$

koyarak

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_F \frac{\sigma_p dF}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_p dV}{r} \tag{57}$$

elde edilir. P_n, polarizayon vektörünün yüzeydeki normal bileşenidir ve pozitif normal yönü dışarı doğrudur. Böylece dielektriğin her hangi bir noktada meydana getirdiği potansiyelin, yük dağılışı σ_p ve ρ_p olan bir sistemin potansiyeline eşdeğer olduğu anlaşılır. σ_p ve ρ_p ye polarizasyon yoğunlukları denilir.

Şayet $\vec{P}$ = sab. ise polarizasyon üniformdur. Üniform polarizasyonda $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$ olacaktır.

Dielektrik içindeki her hangi bir nokta için Gauss teoremini

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

şeklinde yazabiliriz. Zira gerek serbest yük yoğunluğu (ρ) ve gerekse polarizasyon yoğunluğu (ρ_p) alanda rol oynamaktadır. Bu ifadede $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$ koyarak

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

yazabiliriz. Nihayet

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{58}$$

koyarak, kitabın başında görülen

$$\text{div}\,\vec{D}=\rho$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Statik alanın rot $\vec{E}=0$ ve div $\vec{D}=\rho$ temel denklemlerine böylece, polarizasyonu belirten, (58) denklemi eklenmiş olmaktadır.

İzotrop bir ortam içinde polarizasyon alan şiddeti ile orantılı olduğundan

$$\vec{P}=\chi\vec{E}=\varepsilon_0\chi_r\vec{E} \qquad (59)$$

yazılabilir. Birimi F/m olan χ ya mutlak elektrik süseptibilite ve birimsiz bir sayı olan $\chi_r=\chi/\varepsilon_0$ *a* da izafî elektrik süseptibilite adları verilir. (58) ve (59) yardımiyle deplasman için

$$\vec{D}=\varepsilon_0(\chi_r+1)\vec{E}$$

yazılabilir. Bu ifadede

$$\varepsilon_r=\chi_r+1 \qquad (60)$$

koyarak

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

elde edilir. Boşluk için $\varepsilon_r=1$ ve $\chi_r=0$ dır. Son denkleme göre ε, ortamın dielektrik özelliğini karakterize etmektedir.

Şayet ortam izotrop değilse (kristaller) $\vec{D}$ ve $\vec{E}$ vektörleri ayni yönde bulunmayacaklarından $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ yazılamaz ve $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ bağıntısı daha genel olur. Keza böyle bir ortamda $\vec{P}$ ile $\vec{E}$ de ayni yönde değildir. İzotrop olmayan ortamda bir tek skaler ε sabiti yerine dokuz bileşeni olan ε_{ik} tansörü gelir deplasman ve alan şiddetinin bileşenleri arasında

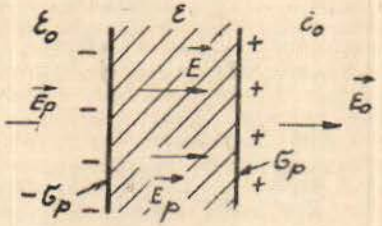
$$D_i=\sum_k \varepsilon_{ik}E_k \qquad (i,k=x,y,z) \qquad (61)$$

bağıntıları caridir.

Boşluk içindeki alan şidtedi $\vec{E}_0$ ile ve boşluk yerine dielektrik geldiği vakit ortaya çıkan polarizasyonun meydana getirdiği alan şiddeti $\vec{E}_p$ ile gösterilirse dielektrik içinde her hangi bir noktadaki alan şiddeti

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \tag{62}$$

olur. Örnek olarak, boşluktaki üniform $\vec{E}_0$ alanı içine ve alana normat olarak sokulan dielektrik levhayı inceleyelim, şek. 86. Polarizasyon üniform olacağından $\rho_p=0$ dır.



Şek. 86

Sınır yüzeylerindeki sınır şartı $\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P$ şeklinde olacağından (62) yardımiyle

$$\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}_p \,, \quad \sigma_p = -\varepsilon_0 E_p \tag{63}$$

bulunur. $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$ olduğunu gözönüne alarak da

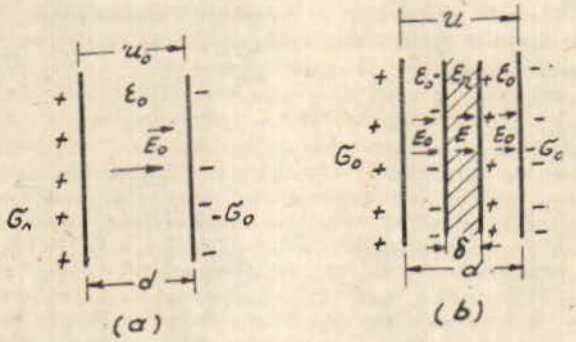
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{E_0}{\chi_r + 1} \tag{64}$$

elde edilir. Dielektrik içindeki alan boşluktaki alana nazaran $\varepsilon_r = \chi_r + 1$ defa zayıflamaktadır ($\chi_r > 0$, $\varepsilon_r > 1$). Şayet dielektrik yerine bir iletken alan içine sokulmuş olsaydı $\vec{E} = 0$ olması gerekeceğinden, iletkenlerin statik alanda $\varepsilon_r \to \infty$ olan bir ortam gibi davrandıklarını söyleyebiliriz. Bununla beraber iletkenlerde ε_r sınırlı değerdedir.

Şek. 87 de görülen paralel levhalı kondansatörde levhalar arasında başlangıçta boşluk bulunduğunu farzedelim, şek. 87 a. Levhalar arasındaki üniform alanın şiddeti $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ dır. Eğer, şek. 87 b de görüldüğü gibi, levhaların arasına δ kalınlığındaki dielektrik tabaka sokulursa $E = E_0 + E_p$ denkleminde $E = E_o/\varepsilon_r$, $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ ve $E_p = -\sigma_p/\varepsilon_0$ koyarak polarizasyon yoğunluğu için

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

bulunur. Polarizasyon yoğunluğu kondansatördeki yoğunlukla orantılıdır. $\varepsilon_r > 1$ olduğundan $\sigma_p < \sigma_0$ dır. Dielektrik yerine bir iletken levha sokulduğu takdirde $\sigma_p = \sigma_0$ olacaktır.



Şek. 87

Levhalar arasına dielektrik sokulunca kapasitenin büyüyeceği kolayca görülebilir. Boşluk halinde gerilim $U_0 = E_0 d$ dir. Dielektrik araya girince, σ_0=sab. kaldığını gözönüne alarak $\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E_0'$ yazılabileceğinden $E_0' = E_0$ olduğu yani boşluk kısmındaki alanın değişmediği anlaşılır. Buna karşılık dielektrik içindeki alan $E = E_0/\varepsilon_r = (\sigma_0 - P)/\varepsilon_0$ değerini alacaktır. Levhalar arasındaki gerilim ise

$$U = E_0(d-\delta) + \frac{E_0}{\varepsilon_r}\delta = U_0\left(1 - \frac{\delta}{d}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\,d - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\delta$$

değerini alacağından küçülecektir. Kondansatörün kapasitesi birinci halde C ile gösterilirse Q_0=sab. kaldığından

$$\frac{C}{C_0} = \frac{U_0}{U} = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{d}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

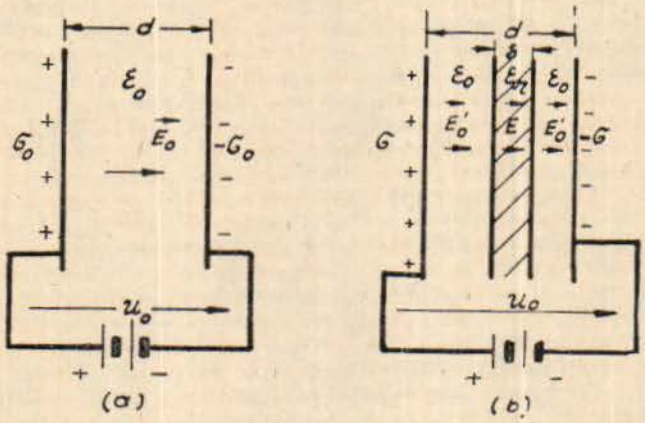
olacağı ve dolayısiyle dielektrik sokulunca kapasitenin büyüyeceği anlaşılır.

Şayet dielektrik, levhaların arasındakı bölgeyi tamamen doldurursa, $\delta = d$ olacağını gözönüne alarak

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} \quad , \quad C = \varepsilon_r C_0$$

bulunur. Yani Q_0=sab. için gerilimin ve alan şiddetinin ε_r defa küçülmelerine karşılık kapasite ε_r defa büyümektedir. Faraday, kapasitenin büyüyeceğini deneysel olarak tesbit etmiştir.

Şayet dielektrik tabakası, kondansatör bataryaya bağlı iken levhalar arasına sokulacak olursa şu sonuçlar elde edilir. Levhalar arasında boşluk varken $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0 = U_0/d$ dir, şek. 88 a. Dielektrik sokulunca U_0=sab. kaldığını gözönüne alarak



Şek. 88

$$U_0 = E_0 d = E_0'(d-\delta) + \frac{E_0'}{\varepsilon_r}\delta$$

yazılabilir, şek. 88b. Bu ifadede E_0', boşluk kısmındaki yeni alan şiddetini göstermektedir. Buradan

$$E_0' = \frac{E_0}{1 - \frac{\delta}{d}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

bulunur. O halde $E_0' > E_0$ olmaktadır. Levhaların yeni yükü ise

$$\sigma = \varepsilon_0 E'_0 = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\delta}{d}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

olacaktır. Böylece $\sigma > \sigma_0$ olduğu anlaşılır. Polarizasyon yoğunluğunu

$\sigma_p = -\varepsilon_0 E_p'$ yardımıyle hesaplayabiliriz. Bu suretle kondansatördeki yoğunluğun $\sigma - \sigma_0 = \sigma_p d/\delta$ kadar arttığı kolayca gösterilebilir. Bu yük artışı batarya tarafından karşılanır ve devreye bir ampermetre sokarak bunu görmek kabildir.

$U_0 =$ sab. olduğundan C/C_0 oranı için yine

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{d}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

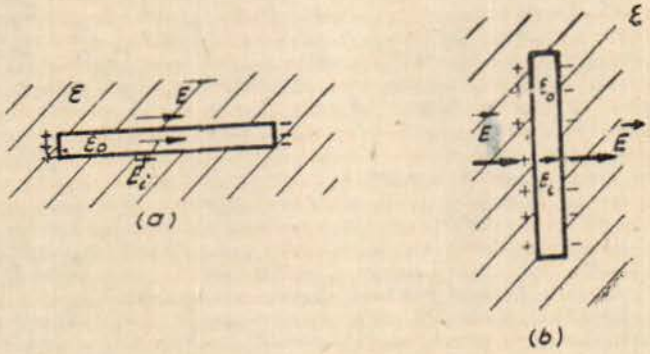
sonucu bulunur.

$d = \delta$ özel halinde

$$E' = E_0 \ , \quad \sigma = \varepsilon_r \sigma_0 \ , \quad \sigma - \sigma_0 = (\varepsilon_r - 1)\sigma_0 = \sigma_p \ , \quad C = \varepsilon_r C_0$$

bulunur.

Şek. 89 a da dielektrik içinde ve ekseni alan yönünde olan uzun ve ince bir silindirik boşluk görülmektedir. Silindir yeter uzunlunlukta alındığı takdirde tabanlarındaki polarizasyon yüklerinin tesirini ihmal etmek kabil olacağından, sınır şartı yardımiyle $E_i = E$ bulunur. Böylece ince ve uzun boşluktaki alanın dielektrik içindeki alana eşit olacağı anlaşılır.



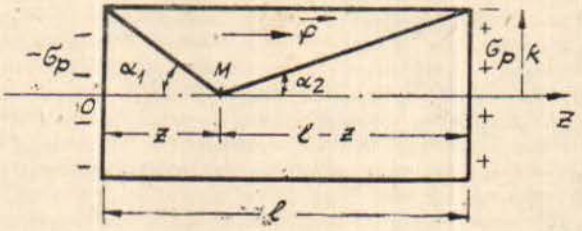
Şek. 89

Şek. 89 b de ise alana normal olarak yerleştirilen disk biçimindeki boşluk görülmektedir. Şayet diskin yarıçapının kalınlığına nazaran çok büyük olduğu farzedilirse sınır şartı yardımiyle $D_i = D$ $(E_i = D/\varepsilon_0)$ bulunur. Böylece disk içindeki deplasmanın dielektrik içindeki deplasmana eşit olacağı anlaşılır.

Aşağıda dielektriklerle ilgili olarak çeşitli alan problemleri gözden geçirilmiştir.

Örnekler:

1 — Eksen yönünde üniform polarize dielektrik silindirin eksenindeki alan hesaplanacaktır, şek. 90.



Şek. 90

Eksen üstünde her hangi bir noktadaki alan, yoğunlukları $\sigma_p = P$ ve $-\sigma_p = -P$ olan disklerin alanlarının bileşkesi olacağından $0<z<l$ için (silindir içinde)

$$E_p = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) - \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{l-z}{\sqrt{(l-z^2+R^2}}\right] =$$

$$= -\frac{P}{\varepsilon_0} + \frac{P}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

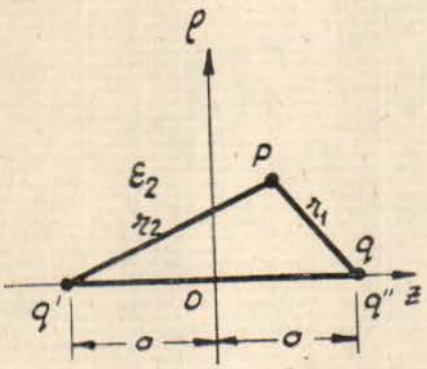
bulunur. $z > l$ ve $z < 0$ için

$$E_p = \pm\frac{P}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

elde edilir. Pozitif işaret $z > l$ için ve negatif işaret ise $z<0$ için alınır.

2—Şek. 91 de dielektrik sabiti ε_1 olan ortam içindeki q noktasal yükünün alanı incelenecektir. İki ortam birbirinden sonsuz genişlikteki düzlemsel sınır yüzeyi ile ayrılmıştır.

Alanı imaj metodundan faydalanarak bulalım. ε_1 ortamı içindeki alanın q orijinal yükü ile düzleme nazaran simetriği olan q' imaj yükü



Şek. 91

tarafından ve ε_2 ortamı içindeki alanın da orijinal yükün bulunduğu noktaya getirilen q'' yükü tarafından meydana getirildiğini farzedelim. İki ortam içindeki potansiyeller için

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right) \quad , \quad \varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r_1}$$

yazılabilir. Sınır şartları

$$(\varphi_1)_{z=0} = (\varphi_2)_{z=0} \quad , \quad \varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}$$

yardımiyle yazılan

$$q + q' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\, q'' \quad , \quad q - q' = q''$$

denklemlerini çözerek

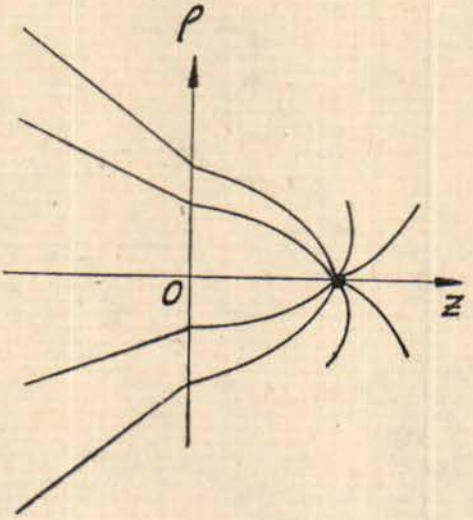
$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, q \quad , \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, q$$

bulunur. q ve q'' yüklerinin ayni işarette olmalarına karşılık q' yükü $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ için q ile ayni işaretli ve $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ için ters işaretli olur. Şek. 92 de alan şekli görülmektedir.

q yükü hava içinde bulunduğu takdirde $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_0$ ve $\varepsilon_2 = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$ alarak

$$q' = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r}\, q \quad , \quad q'' = \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r}\, q$$

bulunur. Bu durumda q ve q' yükleri ters işaretlidir.



Şek. 92

q yüküne tesir eden kuvvet için

$$F = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1(2a)^2}\, q = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\, q^2}{16\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

ifadesi elde edilir. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ için F kuvveti pozitif olacağından q yükü düzleme doğru çekilir.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ için iki ortam bir ortam haline geçer ve $q' = 0$, $q'' = q$ olur. $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ve $\varepsilon_2 \to \infty$ için $q' = -q$ ve $q'' = 2q$ bulunur. ε ortamı içindeki alan eşit ve zıt işaretli q ve $-q$ yükleri yardımiyle elde edilir. $\varepsilon_2 \to \infty$ olduğundan $2q$ yükünün bu ortamdaki alanı sıfır olur. Alan, iletken düzlem karşısına getirilen noktasal yükün alanıdır.

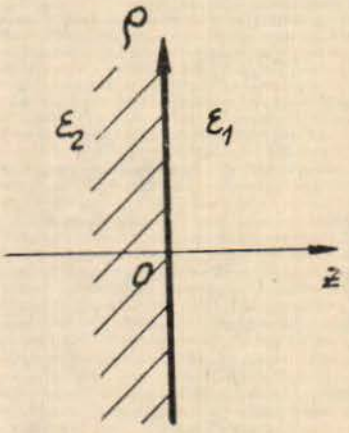
3 — Her hangi bir alanın dielektrik düzleme, dielektrik silindire ve dielektrik küreye tesiri incelenecektir, şek. 93.

Şek. 93 de $z > 0$ bölgesindeki yük dağılışının ε_1 ortamı içinde meydana getirdiği primer potansiyeli $\varphi = \varphi\ (x,y,z)$ fonksiyonu ile gösterelim. $z < 0$ bölgesi ε_2 ortamı ile doldurulunca primer potansiyel dağılışı değişeckktir. ε_1 ve ε_2 ortamlarındaki yeni potansiyelleri

$$\varphi_1 = \varphi(x,y,z) + k_1\varphi(x,y,-z) \quad ,$$

$$\varphi_2 = k_2\varphi(x,y,z)$$

şeklinde gösterelim. $\varphi(x,y,z)$ fonksiyonu gibi $\varphi(x,y,-z)$ fonksiyonu da $\Delta\varphi = 0$ denklemini sağlar. k_1 ve k_2 katsayılarını sınır şartlarına uyacak şekilde tâyin edelim. Sınır şartlarının $z=0$ için $\varphi_1 = \varphi_2$ ve $\varepsilon_1(\partial\varphi_1/\partial z) = \varepsilon_2(\partial\varphi_2/\partial z)$ şeklinde olduğunu gözönüne alarak elde edilen



Şek. 93

$$1 + k_1 = k_2 \quad , \quad 1 - k_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\, k_2$$

denklemlerini çözerek

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad , \quad k_2 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

bulunur. Şayet $\varepsilon_2 \to \infty$ alınırsa (iletken) $k_1 = -1$ ve $k_2 = 0$ olacağından

$$\varphi_1 = \varphi(x,y,z) - \varphi(x,y,-z) \quad , \quad \varphi_2 = 0$$

bulunur.

Yukarıda incelenen problemde primer potansiyel

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}$$

olduğundan

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}} \,,$$

$$\varphi_2 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}$$

bulunur. Böylece ε_1 ortamı içindeki alanın q ve q' yükleri tarafından ve ε_2 ortamı içindeki alanın da q'' yükü tarafından meydana getirildiği anlaşılır.

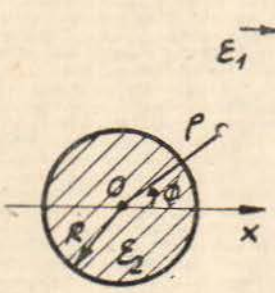
Sıfır potansiyelindeki iletken düzlem karşısındaki noktasal yük problemini de bu yoldan giderek kolayca çözebiliriz. Primer pctansiyelin

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}}\right],\quad \varphi_2 = 0$$

elde edilir.



Şek. 94

Şek. 94 de görülen silindirik sınır yüzeyi için primer alanın iki boyutlu olduğu kabul edilirse primer potansiyel $\varphi(\rho,\phi)$ olacaktır. Primer alan ε_1 ortamı içindedir. ε_1 ve ε_2 ortamlarındaki potansiyeller için

$$\varphi_1 = \varphi(\rho,\phi) + k_1\varphi\left(\frac{R^2}{\rho},\ \phi\right),$$

$$\varphi_2 = k_2\varphi(\rho,\phi)$$

yazalım. $\varphi(\rho,\phi)$ fonksiyonu gibi $\varphi(R^2/\rho,\phi)$ fonksiyonunun da Laplace denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Sınır şartlarının $\rho=R$ için $\varphi_1=\varphi_2$ ve $\varepsilon_1(\partial\varphi_1/\partial r)=\varepsilon_2\ (\partial\varphi_2/\partial r)$ şeklinde olduğunu gözönüne alarak k_1 ve k_2 için yine ayni ifadeler bulunur. Meselâ $+x$—ekseni yönündeki üniform alan içine sokulan iletken silindir probleminde primer potansiyel

$$\varphi = -E_0 x = -E_0\rho\cos\phi$$

olacağından

$$\varphi_1 = \left(\frac{R^2}{\rho} - \rho\right)E_0\cos\phi\ ,\quad \varphi_2 = 0$$

bulunur.

Üniform alan içine sokulan dielektrik silindir için, $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_0$ (hava) ve $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r$ alarak

$$\varphi_1 = \left(-\rho + \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\,\frac{R^2}{\rho}\right)E_0\cos\phi\ ,$$

$$\varphi_2 = -\frac{2}{\varepsilon_r+1} E_0 \rho \cos\phi = -\frac{2E_0 x}{\varepsilon_r+1}$$

elde edilir. Silindir içindeki alan şiddeti

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi_2 = -\frac{d\varphi_2}{dx}\vec{i} = \frac{2E_0}{\varepsilon_r+1}\vec{i} = \text{sab.}$$

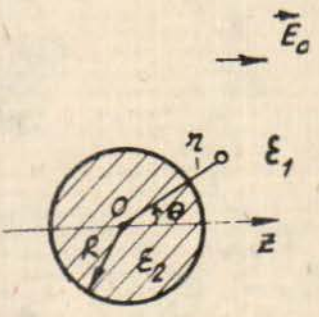
olacaktır. Silindir içindeki alan üniformdur ve primer alan gibi $+x$—ekseni yönündedir. Deplasman ve polarizasyon vektörleri için

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0}{\varepsilon_r + 1}\vec{i}$$

$$\vec{P} = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_0}{\varepsilon_r + 1}\vec{i}$$

bulunur. Polarizasyon üniformdur.

Şek. 95 de görülen dielektrik küre için primer potansiyel $\varphi(r,\theta,\phi)$ olduğuna göre ε_1 ve ε_2 ortamlarındaki potansiyeller için



Şek. 95

$$\varphi_1 = \varphi(r,\theta,\phi) + k_1 \frac{R}{r}\varphi\left(\frac{R^2}{r},\theta,\phi\right),$$

$$\varphi_2 = k_2 \varphi(r,\theta,\phi)$$

yazılabilir. Zira $\varphi(r,\theta,\phi)$ fonksiyonu gibi $\frac{R}{r}\varphi\left(\frac{R^2}{r},\theta,\phi\right)$ fonksiyonu da harmoniktir. Sınır şartlarından faydalanarak

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1\left[1 + \frac{1}{R}\left(\frac{\varphi}{\partial\varphi/\partial r}\right)_{r=R}\right]}$$

bulunur. $k_2 = 1 + k_1$ dir. $\varepsilon_2 = \infty$ için (iletken küre) $k_1 = -1$, $k_2 = 0$ olur. Üniform alan içine getirilen kürede primer potansiyel $\varphi = -E_0 r\cos\theta$ olduğundan

$$\varphi_1 = \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta$$

elde edilir. $\varphi_2 = 0$ dır.

Üniform alan içine sokulan dielektrik küre için

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}, \quad k_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}$$

bulunur. Böylece $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_0$ (hava) ve $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ alarak potansiyeller için

$$\varphi_1 = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta ,$$

$$\varphi_2 = -\frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0 r \cos\theta$$

ifadeleri bulunur. $z = r\cos\theta$ koyarak küre içindeki alan için

$$\vec{E_2} = -\frac{d\varphi_2}{dz}\vec{k} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_r + 2} E_0 \vec{k}$$

elde edilir. Küre içindeki alan üniformdur ve $E_2 < E_0$ dır.

Şayet $\varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ve $\varepsilon_2 \approx \varepsilon_0$ alınırsa (dielektrik içindeki küresel boşluk)

$$\varphi_1 = \left(\frac{1 - \varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta$$

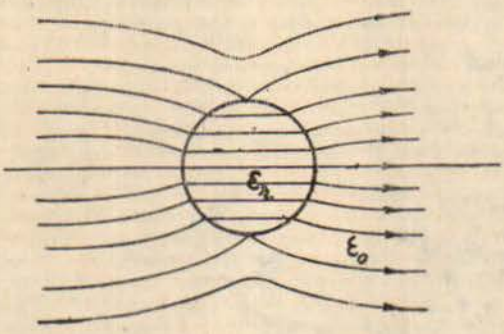
$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1} E_0 z$$

elde edilir. Küre içindeki alan

$$\vec{E_2} = \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_2 + 1} E_0 \vec{k}$$

dır. Alan yine üniform olmakla beraber bu sefer $E_2 > E_0$ dır.

Şek. 96 da $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ için alan şekli görülmektedir. Küre içindeki polarizasyon için



Şek. 96

$$\vec{P}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}_2=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}\vec{E}_0$$

ve polarizasyon alanı için $\vec{E}_2=\vec{E}_0+\vec{E}_p$ yardımiyle

$$\vec{E}_p=\vec{E}_2-\vec{E}_0=-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

elde edilir. Küre yüzeyindeki polarizasyon yoğunluğu için

$$\sigma_p=P_n=\vec{P}\cdot\vec{n}=P\cos\theta=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}E_0\cos\theta$$

bulunur.

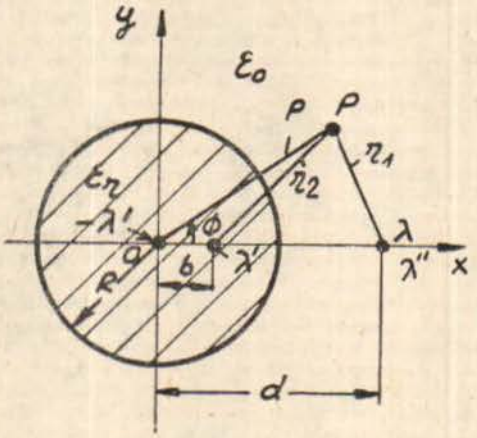
Dielektrik kürenin dışındaki potansiyel fonksiyonu incelenirse kürenin, merkezine getirilen ve momenti

$$\vec{p}=4\pi R^3\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}\vec{E}_0$$

olan bir dipol gibi davrandığı ve böylece dışarıdaki alanın, bu dipolün alanı ile üniform alanın süperpozisyonundan elde edilebileceği anlaşılır.

Üniform çizgisel yükün alanı içine sokulan dielektrik veya iletken silindir problemi ile noktasal yükün alanı içine sokulan dielektrik veya iletken küre problemi de benzer şekilde incelenir.

Şek. 97 de üniform çizgisel yüke paralel olarak yerleştirilen dielektrik silindir görülmektedir. Primer potansiyel için, birim yarıçaplı silindirin potansiyelini sıfır alarak,



Şek. 97

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos\phi}$$

yazabiliriz. k_1 ve k_2

$$k_1 = \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}, \quad k_2 = \frac{2}{1+\varepsilon_r}$$

olduğundan silindir dışındaki ve içindeki potansiyeller için

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_1 + \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \ln \sqrt{\frac{R^4}{\rho^2} + d^2 - \frac{2R^2 d\cos\phi}{\rho}}\right),$$

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{1+\varepsilon_r} \ln r_1$$

bulunur. Şek. 97 yardımiyle $b = R^2/d$ uzaklığından faydalanarak silindir dışındaki polansiyeli gösteren ifade

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_1 + \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \ln \frac{r_2 d}{\rho}\right)$$

veya

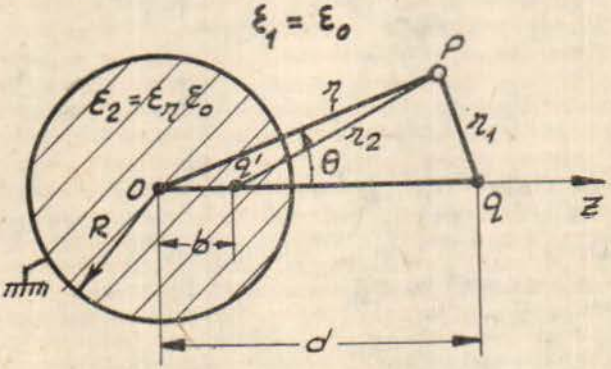
$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_1 + \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\ln r_2 - \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\ln \rho\right) + \varphi_0$$

şekline sokulabilir ($\varphi_0 = -\lambda \ln d/2\pi\varepsilon_0 = \text{sab.}$). Bu ifadeye göre, silindir dışındaki potansiyeli, $x=d$ noktasında bulunan λ orijinal yükü ile, biri $x=b=R^2/d$ noktasında ve diğeri $x=0$ noktasında bulunan $\lambda' = k_1\lambda$ ve $-\lambda' = -k_1\lambda$ imaj yüklerinin ε_0 ortamı içinde meydana getirdikleri potansiyelleri süperpoze ederek bulmak kabildir. Silindir içindeki potansiyel ise, orijinal yükün bulunduğu $x=d$ noktasına getirilen $\lambda'' = k_2\lambda$ imaj yükünün ε_0 ortamı içindeki potansiyelinden ibarettir. Şayet bu imaj yükü $\lambda'' = k_2\varepsilon_r\lambda$ şeklinde alınırsa, silindir içindeki potansiyeli hesaplarken ε ortamını gözönüne almak gerekecektir. Literatürde her iki gösteriş tarzı da kullanılmaktadır. $\varepsilon_r \to \infty$ alındığı takdirde sıfır potansiyelinde tutulan iletken silindirle paralel çizgisel yük sisteminin potansiyeli elde edileceği kolayca görülebilir.

Şek. 98 de görülen iletken küre ile noktasal yük sisteminde primer potansiyel

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}$$

ve $k_1 = -1$, $k_2 = 0$ dır. Böylece küre dışındaki potansiyel için



Şek. 98

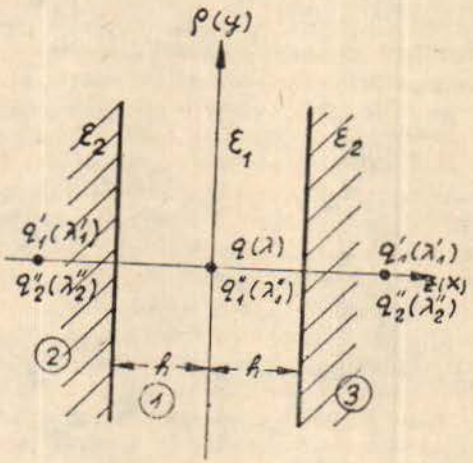
$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{r}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r^2}+d^2-\frac{2R^2d\cos\theta}{r}}}\right)$$

veya $b=R^2/d$ uzaklığından faydalanarak

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{d}\,\frac{1}{r_2}\right)$$

elde edilir. $\varphi_2=0$ dır. Bu ifadeye göre küre dışındaki alan, q orijinal yükü ile $z=b$ noktasındaki $q'=-qR/d$ imaj yükü yardımiyle elde edilmektedir. Dielektrik küre problemi de benzer şekilde incelenir.

4 — İki paralel dielektrik düzlem arasındaki noktasal veya çizgiseel yükün alanı incelenecektir, şek. 99.



Şek. 99.

Problemi çözmek için teorik olarak sonsuz sayıda imaj almak gerekir. 2 ve 3 ortamlarının ayni cinsten olduğunu ve orijinal yükün sınır yüzeylerinden eşit uzaklıkta bulunduğunu farzedelim. 1 bölgesindeki alan, $x=0$ noktasındaki q yükü ile $x=\pm 2nh$ $(n=1, \ldots, \infty)$ noktalarındaki q_n' imaj yükleri yardımile elde edilir ve $q_n'=k_1^n q$ dür. 2 bölgesindeki alan, $x=0$ noktasındaki q''_1 imaj yükü ile $x=2(n-1)h$ noktalarındaki $q_n''=k_2k_1^{n-1}q$ imaj yükleri yardımiyle ve nihayet 3 bölgesindeki alan, $x=0$ noktasındaki q_1'' imaj yükü ile $x=-2(n-1)h$ noktalarındaki q_n'' imaj yükleri yardımiyle elde edilir. k_1 ve k_2

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ ,\quad k_2 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

dir. Çizgisel yük için q ler yerine λ lar alınır.

Orijine getirilen ve a yarıçapı çok küçük olan bir iletken kürenin potansiyeli, bu kürenin taşıdığı Q yükünün meydana getireceği orijinal potansiyel ile 1 bölgesindeki potansiyelde payları olan imaj yüklerinin küre yüzeyinde meydana getirecekleri potansiyelleri toplayarak bulunur. Böylece $a \ll h$ için kürenin potansiyeli

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_1^n}{2nh}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{h}\ln(1-k_1)\right]$$

olacaktır. Kürenin kapasitesi ise

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_1 a}{1 - \frac{a}{h}\ln(1-k_1)}$$

olur. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ için kapasitenin her hangi bir dielektrik içindeki kapasiteden büyük olacağı görülmektedir. $\varepsilon_2 \to \infty$ için $k_1 = -1$ olacağından iki paralel iletken levha arasındaki küçük kürenin kapasite ifadesi elde edilir.

V. STATİK ELEKTRİK ALANINDAKİ ENERJİ VE KUVVETLER

13. Noktasal yük dağılışının potansiyel enerjisi.

Statik alanda her haagi bir P goktasındaki potansiyelin

$$\varphi = -\int_{R}^{P} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

integrali ile hesaplanabileceğini biliyoruz. R, potansiyeli sıfır seçilen noktayı yani referans noktasını göstermektedir. Bu ifadeyi q yükü ile çarparak

$$q\varphi = -\int_{R}^{P} q\vec{E} \cdot \vec{ds}$$

bulunur. q yüküne tesir eden alan kuvveti $\vec{F} = q\vec{E}$ olduğundan bu denklemin sağ tarafı, q yükü referans noktasından P noktasına gelinceye kadar alan kuvvetlerine karşı yapılan işi gösterir. Şayet bu iş pozitifse dış kuvvetler alan kuvvetlerine karşı bir iş görmüş ve negatifse alan kuvvetleri tarafından bir iş görülmüş olacaktır. Eğer P noktasına gelen yük serbest bırakılacak olursa bu iş tekrar kazanılabilir. Böylece P noktasında bulunan q yükünün

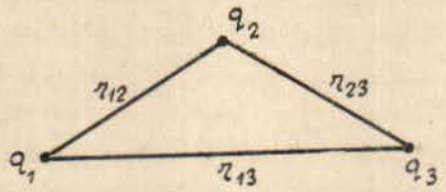
$$W = q\varphi = -\int_{R}^{P} \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad (65)$$

potansiyel enerjisini kazandığı anlaşılır. Şayet $R \to \infty$ seçilirse P noktasındaki potansiyel enerji, q yükünü sonsuzdan bu noktaya getirmek için alan kuvvetlerine karşı görülen işe idantik olur. $q = +1$ için $W = \varphi$ olacağından, P noktasındaki potansiyelin pozitif birim yükün potansiyel enerjisine eşdeğer olacağı anlaşılır.

Noktasal yük dağılışının potansiyel enerjisini hesaplamak için başlangıçta yalnız q_1 yükünün bulunduğunu ve diğer yüklerin sonsuzda olduğunu farzedelim. q_2 yükünü sonsuzdan r_{12} uzaklığına getirmek için

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}}$$

işi görülür, şek. 100. İki noktasal yükün potansiyel enerjisini gösteren bu denklemi



Şek. 100

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadede φ_1 ve φ_2, yüklerin bulunduğu yerlerde diğer yükün meydana getirdiği potansiyeli gösterir.

q_3 yükü sonsuzdan itibaren, q_1 ve q_2 yüklerinden r_{13} ve r_{23} uzaklığında bulunan noktaya getirilince sistemin potansiyel enerjisl

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon r_{23}}$$

değerini alacaktır, şek. 100. İlk terim esasen iki yükün sahip olduğu potansiyel enerjiyi, ikincl ve üçüncü terimlerin toplamı ise q_3 yükünü bu noktaya getirmek için alan kuvvetlerine karşı görülen işi gö terir. Bu ifadeyi de yukarıda yapıldığı gibi

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

şekline sokabiliriz. φ_1 , φ_2 ve φ_3 , yüklerin bulunduğu yerlerde diğer yüklerin meydana getirdiği potansiyeli göstermektedir.

Böylece devam ederek bütün yükler yerini aldığı vakit potansiyel enerjinin

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \qquad (66)$$

olacağı anlaşılır. φ_i , q_i yükünün bulunduğu noktada diğer yüklerin meydana getirdiği potansiyeli göstermektedir.

(66) denklemi statik alandaki potansiyel enerjiyi alanın kaynağı olan yükler cinsinden ifade etmektedir. Bu sebeple denklem «uzaktan tesir teorisi» ne uymaktadır. Alan teorisinden önce yerleşmiş olan bu teoride meselâ iki yük arasındaki kuvvet tesiri bir uzaktan tesirden ibarettir ve aradaki ortamın bir rolü yoktur. Kuvvet tesirinin kaynağı yalnız elektrik yükleridir. «Uzaktan tesir teorisi» veya alan teorisinde ise yükler yokken ortam normal durumda bulunmakta ve yükler getirilince ortamada fiziksel değişiklikler ortaya çıkmaktadır. Statik ve stasyoner alanlarda bu iki teori arasındaki fark bir rol oynamamakla beraber bilhassa hızlı değişen alanların incelenmesinde alan teorisinin değeri ortaya çıkar.

Enerjinin nerede yerleştiği sorusu (66) denklemine göre, potansiyel enerjinin yüklere bağlı ve her yükün enerjideki payının $q_i \varphi_i/2$ olduğunu söyleyerek cevaplandırılır. Alan teorisine göre ise enerji alan içinde yer alır ve ortamın her hacim elemanında

$$\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

enerjisi ve bütün alanı içine alan V bölgesinde

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_V E^2 \mathrm{d}V$$

enerjisi bulunur. Bu ifadeden kolayca yukarıda bulunan sonucu elde etmek kabildir. Bu maksadla yüklerin her hangi bir noktada meydana getirdikleri alanları $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, . . . , $\vec{E}_n$ ile gösterelim. Bileşke alan

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

olacağından

$$E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n)$$

$$= E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_n^2$$

$$= \vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n)$$
$$+ \vec{E}_2 \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n)$$
$$+ \ldots$$
$$+ \vec{E}_n \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_{n-1})$$

buluruz. Enerjinin hesabına geçilirse ilk sıradaki terimlerin yüklerin karşılıklı durumlarına bağlı olmadığı görülür. Genel olarak

$$\frac{\varepsilon}{2} \int E_i^2 \, dV$$

enerjisi, q_i yükünün self enerjisisini gösterir ve gerçek noktasal yük için bu enerji sonsuz olur. Self enerjilerin toplamı W_s ile gösterilirse

$$W_s = \frac{\varepsilon}{2} \int_V \sum_{i=1}^{n} E_i^2 \, dV \quad ,$$

yazılabilir.

İkinci sıraya tekabül eden enerjiyi bulmak için

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n = - \operatorname{grad} \varphi_1$$

koyalım. φ_1 , q_1 yükünden başka yüklerin meydana getirdikleri potansiyeli göstermektedir. Böylece ikinci sıra için enerji

$$- \frac{\varepsilon}{2} \int_V \left(\vec{E}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi_1 \right) dV$$

olur. Birinci Green formülü yardımıyle bu enerjiyi

$$- \frac{\varepsilon}{2} \left[\oint_F \varphi_1 \, E_{1n} \, dF - \int_V \left(\varphi_1 \operatorname{div} \vec{E}_1 \right) dV \right]$$

şekline sokabiliriz. V bölgesinin sonsuz küre ile q_1 yükünü kuşatan küçük bir küre tarafından sınırlandığı farzedilirse, sonsuzdaki küre yüzeyi için integral sıfır olur. Diğer taraftan küçük kürenin yüzeyinde $\varphi_1 = \text{sab.}$ kabul edilebileceğinden

$$-\varepsilon \oint_F E_{1n}\, dF = q_1$$

koyarak

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_V \vec{E}_1 \cdot (\vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n)\, dV = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1$$

bulunur. Bu işlemi bütün sıralar için yaparak

$$W = W_e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \qquad (67)$$

elde edllir. Bu ifadenin ikinci terimi sonsuzdaki yükleri toplamak için görülen işe eşittir. Birinci terim ise yükleri vücuda getirmek için sarfedilen self enerjiyi göstermektedir.

14. Sürekli yük dağılışının potansiyel enerjisi ve enerji yoğunluğu.

Hacimsel yük dagılışında q_i yükü yerine hacim elemanındaki $\rho\, dV$ yükü ve toplam yerine integral geleceğinden potansiyel enerji için

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi\, dV \qquad (68)$$

integrali elde edilir. Bu integralde φ, hacim elemanının bulunduğu noktadaki potansiyeli göstermektedir. Yüzeysel ve cizgisel dağılışlar için benzer integraller bulunur.

(68) denkleminde $\rho = \text{div}\, \vec{D}$ koymak ve

$$\text{div}\, (\varphi \vec{D}) = \varphi\, \text{div}\, \vec{D} + \vec{D} \cdot \text{grad}\, \varphi$$

idantikliğinden faydalanmak suretiyle

$$W = \frac{1}{2}\int_V \operatorname{div}(\varphi\vec{D})\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_V (\vec{D} \cdot \operatorname{grad}\varphi)\mathrm{d}V$$

yazılabilir. Birinci integrali diverjans teoreminden faydalanarak yüzey integraline çevirip $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ koyarsak

$$W = \frac{1}{2}\oint_F \varphi\, D_n dF + \frac{1}{2}\int_V (\vec{D} \cdot \vec{E})\mathrm{d}V$$

elde ederiz. Toplam potansiyel enerjiyi bulmak için integrasyonun sonsuz uzay üzerinden yapılması gerekir. Sonsuz uzaklık için yük dağılışına noktasal yük gözüyle bakmak kabil olduğundan φ potansiyeli $1/r$ gibi ve D_n normal bileşini $1/r^2$ gibi sıfıra yaklaşırlar. Buna karşılık yüzey elemanı r^2 gibi sonsuza yaklaşacağından integral altındaki ifade $1/r$ gibi sıfıra yaklaşır. Böylece birinci integral sıfır sonucunu vereceğinden potansiyel enerji için

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{D} \cdot \vec{E})\,\mathrm{d}V$$

bulunur. $\mathrm{d}V$ elemanındaki enerji

$$\mathrm{d}W = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}\,\mathrm{d}V$$

dir. Buradan birim hacimdeki enerji, yani enerji yoğunluğu için

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \tag{70}$$

bulunur. V hacmindeki enerji için

$$W = \int_V w\,\mathrm{d}V \tag{71}$$

yazılabilir.

İzotrop ortamda $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ koyarak

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{DE}{2} \tag{72}$$

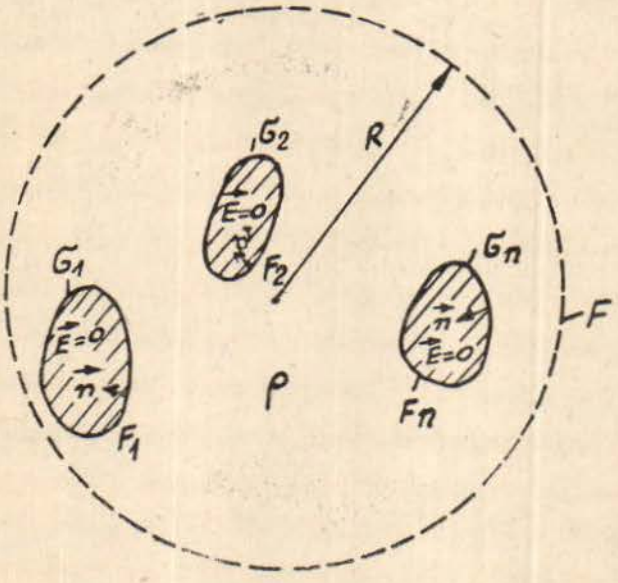
yazabiliriz. V hacmindeki enerji ise

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon_r E^2 dV = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_V \frac{D^2}{\varepsilon_r} dV \tag{73}$$

olacaktır. Ortam homogen olduğu takdirde ε_r integral dışına çıkarılabilir.

(69) denklemi potansiyel enerjiyi alan büyüklükleri cinsinden ifade etmektedir ve enerjinin $w = \vec{D} \cdot \vec{E}/2$ yoğunluğu ile dağıldığını belirtir.

Şek. 101 de görülen sistemde iletken yüzeylerindeki yoğunluklar



Şek. 101

σ_i ile ve ortam içindeki yoğunluk ρ ile gösterilmiştir. Bu sistemin potansiyel enerjisi için

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi \, dV + \frac{1}{2} \int_{F_1+\ldots+F_n} \sigma\varphi \, dF$$

$$= \frac{1}{2}\int_{F+F_1+\ldots+F_n} \varphi D_n dF + \frac{1}{2}\int_V (\vec{D}\,.\,\vec{E})dV + \frac{1}{2}\int_{F_1+\ldots+F_n} \sigma\varphi dF$$

yazılabilir. Birinci integral sonsuzdaki küre ile iletken yüzeyleri üzerinden hesaplanacaktır (V bölgesinin sınırları), yukarıda görüldüğü gibi sonsuzdaki yüzey için integral sıfırdır. Diğer taraftan iletken yüzeylerindeki pozitif normal yönleri içeri doğru olduğundan $D_n = -\sigma$ dır. Böylece potansiyel enerji için yine

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{D}\,.\,\vec{E})\,dV$$

bulunur. İletkenler içinde $\vec{E} = 0$ olduğundan enerji sıfırdır. Enerji iletkenlerin daldırıldığı ortam içindedir. Bu sebeple integralin bütün uzay üzerinden hesaplanmasında bir sakınca yoktur.

Şimdi boşluktaki enerji ile her hangi bir dielektrik içindeki enerjiyi karşılaştıralım. Boşluktaki alanı $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0$ ile ve dielektrik içindekini de $\vec{E}$, $\vec{D}$ ile gösterelim. Boşluk yerine dielektrik getirildiği vakit potansiyel enerji

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V (\vec{D}\,.\,\vec{E} - \vec{D}_0\,.\,\vec{E}_0)\,dV$$

kadar değişecektir. Bu ifade

$$\vec{D}\,.\,\vec{E} - \vec{D}_0\,.\,\vec{E}_0 = \vec{E}\,.\,(\vec{D} - \vec{D}_0) + \vec{D}_0\,.\,(\vec{E} - \vec{E}_0)$$

koyarak sadeleştirilebilir. Sağdaki birinci terim için

$$\int_V \vec{E}\,.\,(\vec{D} - \vec{D}_0)dV = -\int_V (\text{grad}\,\varphi)\,.\,(\vec{D} - \vec{D}_0)\,dV$$

$$= -\int_V \text{div}\,[\varphi(\vec{D} - \vec{D}_0)]\,dV + \int_V \varphi\,\text{div}\,(\vec{D} - \vec{D}_0)dV$$

yazılabilir. $\rho = \text{sab.}$ olduğu takdirde $\text{div}\,\vec{D} = \text{div}\,\vec{D}_0 = \rho$ olacağından

ikinci terim sıfırdır. Birinci terimi yüzey integraline çevirerek sonsuzdaki yüzey üzerinden sıfır sonucu bulunur. Böylece

$$W = W_0 + \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot (\vec{E} - \vec{E}_0)\, dV$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{2}\int_V \vec{E}_0 \cdot (\vec{D} - \vec{E}_0)\, dV = 0$$

yazılabileceğinden bunu son denklemden çıkararak

$$W = W_0 + \frac{1}{2}\int_V (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{E}_0 \cdot \vec{D})\, dV$$

bulunur. İzotrop ortamda $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ koyarak

$$W = W_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V (\varepsilon_r - 1)\vec{E} \cdot \vec{E}_0 dV = W_0 - \frac{1}{2}\int_V (\vec{P} \cdot \vec{E}_0)\, dV$$

bulunur. İntegral pozitif bir sonuç vereceğinden, iletkenlerin yükleri sabit tutulduğu takdirde boşluk yerine dielektrik getirilince potansiyel enerjinin azalacağı anlaşılır. Daha genel olarak ε_1 ortamı yerine $\varepsilon_2 (> \varepsilon_1)$ ortamı alındığı vakit enerjinin azalacağını söyliyebiliriz.

15. İletken sisteminin potansiyel enerjisi.

Bir iletken sisteminde her hangi bir iletkenin potansiyel enerjisi

$$W_i = \frac{1}{2}\oint_{F_i} \sigma_i \varphi_i\, dF_i$$

olacaktır. $\varphi_i =$ sab. olduğunu gözönüne alarak

$$W_i = \frac{\varphi_i}{2}\oint_{F_i} \sigma_i dF_i = \frac{Q_i \varphi_i}{2}$$

yazılabilir. Böylece sistemin enerjisinin

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \tag{74}$$

olacağı anlaşılır.

İletken sisteminin enerjisini p ve c katsayıları yardımiyle de ifade edebiliriz. φ_i ve Q_i yerine

$$\varphi_i = \sum_k p_{ik} Q_k \quad , \quad Q_i = \sum_k c_{ik} \varphi_k$$

koyarak

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k p_{ik} Q_i Q_k \quad , \tag{75}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k c_{ik} \varphi_i \varphi_k \tag{76}$$

ifadeleri elde edilir.

(74) denkleminde

$$Q_i = \oint_{F_i} \sigma_i dF_i = -\varepsilon \oint_{F_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \, dF_i$$

koyarak

$$W = -\frac{\varepsilon}{2}\sum_i \oint_{F_i} \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \, dF_i$$

buluruz. F_i yüzeyi boyunca $\varphi_i =$ sab. olduğundan φ_i integral içine sokulabilir. Bu ifadeye sonsuzdaki F yüzeyi için yazılan

$$\frac{\varepsilon}{2} \oint_F \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dF = 0$$

integralini ekliyebiliriz. Böylece iletken yüzeylerindeki pozitif normal yününü içeri doğru alarak

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \oint_F \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dF + \frac{\varepsilon}{2} \oint_{F_1 + \ldots + F_n} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dF$$

elde edilir. F ve F_i yüzeyleri tarafından sınırlanan V bölgesinde $\Delta\varphi=0$ ($\rho=0$) olduğunu gözönüne alarak birinci Green formülü yardımiyle

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_V(\text{grad}\varphi)^2dV=\frac{\varepsilon}{2}\int_V E^2dV$$

elde edilir.

İletken sisteminin ilk önce boşlukta bulunduğu farzederek her hangi bir noktadaki alanı $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0$ ile gösterelim. Bu durumda enerji yoğunluğu $w_0=\varepsilon_0{}^2E_0{}^2/2$ olacaktır. Şimdi boşluk yerine ε_r ortamı getirilince enerji yoğunluğunun alacağı değeri bulalım. Dielektrik içindeki alanı $\vec{E}$, $\vec{D}$ ile gösterelim. Şayet $Q_i=$ sab. tutulursa

$$\oint_{F_i}\vec{D}_i\,.\,d\vec{F}_i=\oint_{F_i}\vec{D}_{0i}\,.\,d\vec{F}_i=Q_i$$

yazarak

$$\vec{D}=\vec{D}_0 \quad \text{ve} \quad \vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

bulunur. Enerji yoğunluğu ise $w=w_0/\varepsilon_r$ olacaktır. Keza

$$\varphi=-\int\vec{E}\,.\,d\vec{s}$$

integrali yardımiyle hesaplanan potansiyel de ε_r defa küçülecektir. Sonuç olarak, yükleri sabit tutulan izole iletkenlerin içinde bulundukları ortam bir dielektrikle doldurulunca enerjinin, alan şiddetinin ve potansiyelin ε_r defa küçülecekleri anlaşılır. Keza kuvvet tesirleri de ε_r defa küçülecektir. Bu esnada kaybolan potansiyel enerji dielektriğin alan içine çekilmesi için sarfedilir.

Şayet $\varphi_i=$ sab. tutulacak olursa (iletkenleri üreteclere bağlayarak) $\vec{E}=\vec{E}_0$ ve $\vec{D}=\varepsilon_r\vec{D}_0$ olur. Böylece $w=\varepsilon_r w_0$ ve

$$Q_i=\oint_{F_i}D_n\,dF=\varepsilon_r\oint_{F_i}D_{on}\,dF=\varepsilon_r Q_{io}$$

bulunur. İletkenlerin potansiyelleri sabit turulduğu taedirde enerji, deplasman ve yükler ε_r defa büyür. Kuvvet tesiri de ε_r defa artar. Her hangi bir iletkenin yükündeki artış $Q_i - Q_{io} = Q_{io}(\varepsilon_r - 1)$ olacağından üreteç tarafından $\varphi_i Q_{io}(\varepsilon_r - 1)$ işi görülür. Bütün sistem için sarfedilen iş

$$A = (\varepsilon_r - 1)\sum_i \varphi_i Q_{io}$$

olur. Diğer taraftan

$$W_0 = \frac{1}{2}\sum_i Q_{io}\varphi_i = \int_V w_0 \, dV$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$A = 2(\varepsilon_r - 1) W_0$$

yazılabilir. Sistemln enerjisindeki artış $(\varepsilon_r - 1) W_0$ olduğundan üreteçler tarafından görülen işin yarısı alanın enerjisini yükseltmek için sarfedilir. Bu işin ikinci yarısı dielektriğin alana girmesi esnasında kazanılır (dielektrik alan içine çekilir).

Sabit tutulan yüklerin statik alanı içine nötr iletkenler sokulduğu takdirde alanın enerjisi azalır. İletken getirilmeden önceki alanı $\vec{E}, \vec{D}$ ile ve getirildikten sonraki alanı $\vec{E}', \vec{D}'$ ile gösterelim. Enerjideki değişme

$$W - W' = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D} \cdot \vec{E}\right) dV - \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}' \cdot \vec{E}'\right) dV$$

olacaktır. İntegraller alanın işgal ettiği bütün uzay üzerinden hesaplanır. Ancak iletkenler içinde alan sıfır olduğundan bu bölgelerin integralde payları bulunmayacaktır. İletken alan içine sokulmadan önceki hacmi (n iletkenin dışında kalan bölge) V ile ve nötr iletkenin işgal ettiği hacmi de V_0 ile gösterelim. $V' = V - V_0$, nötr iletken alan içine sokulduktan sonra alanın işgal ettiği hacim olacaktır. Bu suretle

$$W - W' = \frac{1}{2}\int_{V_0} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \, dV + \frac{1}{2}\int_{V'} (\vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{D}' \cdot \vec{E}') dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{V_0} \varepsilon E^2 \, dV + \frac{1}{2}\int_{V'} \varepsilon(\vec{E} - \vec{E}')^2 dV + \int_{V'} \vec{E}' \cdot (\vec{D} - \vec{D}') dV$$

yazılabilir. Son integral sıfır sonucunu verir. Zira $\operatorname{div}(\vec{D} - \vec{D}') = 0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{E}' \cdot (\vec{D} - \vec{D}') = -\operatorname{grad}\varphi' \cdot (\vec{D} - \vec{D}') = -\operatorname{div}[\varphi' (\vec{D} - \vec{D}')]$$

elde edilir. Diverjans teoremi yardımiyle

$$\int_{V'} \vec{E}' \cdot (\vec{D} - \vec{D}') dV = \int_{V'} \operatorname{div}[\varphi'(\vec{D}' - \vec{D})] dV$$

$$= \sum_i \varphi_i' \oint_{F_i} (D'_n - D_n) dF$$

bulunur. Q_i = sab. kaldığı kabul edilirse

$$\oint_{F_i} D'_n dF = \oint_{F_i} D_n dF = Q_i$$

olacağından son integral sıfır olur. Böylece

$$W - W' = \frac{1}{2}\int_{V_0} \varepsilon E^2 dV + \frac{1}{2}\int_{F'} \varepsilon(\vec{E} - \vec{E}')^2 dV$$

yazılabileceğinden $W > W'$ olacağı anlaşılır. Zira sağ taraf pozitiftir.

16. Thomson teoremi.

Bir iletken sistemindeki iletkenlerin yüzeylerinde, sistemin potansiyel enerjisi minimum olacak şekilde bir yük dağılışı meydana gelir. Bu teoremi şöylece ispatlayabiliriz : İletken yüzeylerinde ve dielektrik içinde

$$Q_i = \oint_{F_i} D_n dF \quad \text{(a)} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad (\vec{D} = \varepsilon \vec{E}) \qquad \text{(b)}$$

dir. Statik alanı karakterize eden şartlar ise iletken yüzeyleri için

$$\varphi_i = \text{sab.}\ (\vec{E}_i = 0) \tag{c}$$

ve her hangi bir nokta için

$$\text{rot}\ \vec{E} = 0\ (\vec{E} = -\text{grad}\varphi) \tag{d}$$

şeklindedir. Şimdi yalnız (a) ve (b) şartlarını yerine getiren ikinci bir $\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}'$ alanını gözönüne alalım. Bu alan statik değildir ve Thomson teoremi $W' > W$ olacağını belirtmektedir. W ve W' enerjileri

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}.\vec{E}\right) dV \quad , \quad W' = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}'.\vec{E}'\right) dV$$

dir. $W' > W$ olacağını ispatlamak için

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}'' \quad \text{ve} \quad \vec{D}' = \vec{D} + \vec{D}''$$

koyalım. (a) ve (b) şartlarından dolayı

$$\oint_{F_i} D_n''\, dF = 0,\ \text{div}\ \vec{D}'' = 0$$

olacaktır. Böylece statik olmayan alanın W' enerjisi için

$$W' = W + \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}''.\vec{E}''\right) dV + \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}.\vec{E}'' + \vec{D}''.\vec{E}\right) dV$$

yazılabilir ($\vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$). Son integralde $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$ koymak ve

$$\text{div}\,(\varphi \vec{D}'') = \varphi\,\text{div}\,\vec{D}'' + \vec{D}''.\,\text{grad}\,\varphi$$

bağıntısını gözönüne almak suretiyle

$$\vec{D}''.\vec{E} = -D''.\,\text{grad}\,\varphi = \varphi\,\text{div}\,\vec{D}'' - \text{div}\,(\varphi \vec{D}'')$$

yazabiliriz. İletken içinde alan sıfır olduğundan son integrali yalnız di-

elektriğin işgal eıtiği bölge üüerinden hesaplamak yetecektir. Bu bölgede $\operatorname{div} \vec{D}' = 0$ olduğundan diverjans teoremi yardımiyle

$$\int_V \left(\vec{D}' \cdot \vec{E}\right) dV = -\int_V \operatorname{div}\left(\varphi \vec{D}'\right) dV = -\sum_i \varphi_i \oint_{F_i} D_n' \, dF = 0$$

bulunur. Böylece

$$W' = W + \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E'^2 \, dV$$

elde edilir. Sağ tarafta ikinci terim pozitif olduğundan $W' > W$ olacağı anlaşılır. Alan içinde her hangi bir bölgede $\vec{E}' \neq \vec{E}$ olduğu takdirde W' enerjisi W enerjisinden büyük bir değer alır. Bu suretle statik denge durumunda potansiyel enerjinin minimum olacağı ispatlanmış olur.

Ayni minimum prensibi yerçekimi (gravitasyon) alanında da caridir. Yerçekimi alanında cisimler ancak potansiyel enerjinin minimum değer aldığı konularda kararlı denge halinde bulunurlar. Bu analoji, W enerjisinin mekanikteki potansiyel enerji gibi rol oynadığını gösterir.

Yukarıdaki açıklamalardan ayrıca belli bir yük dağılışı için yalnız blr tek çözümün bulunacağı da ortaya çıkar. Zira yalnız (a) ve (b) şartlarını sağlayan ve dolayısiyle statik karakterde olmayan her $\vec{E}'$ alanı için $W' > W$ olacaktır. Şayet $\vec{E}'$ alanı statik karakterde ise ayrıca $W > W'$ olması gerekir ki bu mümkün değildir.

Statik alan içinde bulunan yüklü cisimler yalnız alan kuvvetlerinin tesiri altında bulundukça kararlı dengede kalamazlar (Earnshaw teoremi). Zira yüklerin yapacağı her deplasman alan enerjisinin azalmasına sebep olur ki bu da cismin kararlı dengede kalamayacağını gösterir.

17. Statik alan kuvvetleri.

Statik alan içinddki kuvvetleri enerji fonksiyonu yardımiyle hesaplamak ekseriya daha elverişlidir. Bir iletken sisteminin potansiyel enerjisi için

$$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i$$

bulmuştuk. İlk önce iletkenlerin izole olduğunu ve dolayısiyle Q_i=sab. kaldığını farzedelim. Alan kuvvetleri tarafından dA işi görüldüğü takdirde enerji prensibine göre $dW+dA=0$ olacaktır. Böylece potansiyel enerjideki değişme için

$$dW = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \, d\varphi_i = -dA$$

bulunur. $dA>0$ olduğundan $dW<0$ dır ve dolayısiyle Q_i=sab. için sistemdeki potansiyel enerjinin, alan kuvvetleri tarafından görülen mekanik iş kadar azalacağı anlaşılır.

Şayet kayma esnasında iletkenler enerji kaynaklarına bağlı kalacak olurlarsa φ_i=sab. olacağından

$$dW = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i dQ_i$$

yazılabilir Q_i=sab. iken dA işi görülünce potansiyeller $\varphi_i+d\varphi_i$ değerini almakta ve φ_i = sab. iken ayni iş görülünce yükler $Q_i + dQ_i$ değerini almaktadır. Green karşıtlık teoremine göre

$$\sum_i Q_i\varphi_i = \sum_i (Q_i + dQ_i)(\varphi_i + d\varphi_i)$$

yazılabileceğinden sonsuz küçük terimi ihmal ederek

$$\sum_i \varphi_i dQ_i = -\sum_i Q_i d\varphi_i$$

bulunur. Böylece φ_i = sab. için

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_i Q_i d\varphi_i = dA$$

yazılabileceği anlaşılır. $dW>0$ olacağından φ_i =sab. için potansiyel ener-

jinin, alan kuvvetlerinin gördüğü mekanik iş kadar artacağı görülür. Sistemin enerji bilânçosu

$$dW_a = dW + dA = 2dW = \sum_i \varphi_i dQ_i$$

şeklindedir. dW_a, enerji kaynaklarının sisteme verdiği enerjiyi göstermektedir.

$\vec{ds}$ kayması için görülen iş $dA = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ olacağından Q_i=sab. için $dW = -\vec{F} \cdot \vec{ds}$ ve φ_i=sab. için $dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ yazılabilir. Böylece meselâ F_x — bileşeni için

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{Q=\text{sab.}} \\ F_x &= +\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\varphi=\text{sab.}} \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

ifadeleri elde edilir. F_y ve F_z — bileşenleri için de benzer ifadeler yazılabilir. Bu ifadeleri

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{\partial p_{ik}}{\partial x} Q_i Q_k \\ F_x &= +\frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{\partial c_{ik}}{\partial x} \varphi_i \varphi_k \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

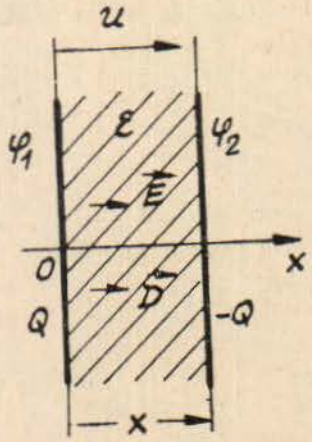
şekillerine sokabiliriz.

Şayet iletken bir eksen etrafında dönebiliyorsa. alan kuvvetlerinin bu eksene göre momentini M ile göstererek eksen etrafında $d\alpha$ açısı kadar dönme için görülen iş $dA = M d\alpha$ olacağından

$$\left.\begin{aligned} M &= -\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{Q=\text{sab.}} \\ M &= +\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\varphi=\text{sab.}} \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

elde edilir.

Paralel levhalı kondansatör yardımiyle $Q = \text{sab.}$ için $dW<0$ ve $\varphi = \text{sab.}$ için $dW > 0$ olacağını kolayca görebiliriz, şek. 102. Kondansatörün yükü ve enerjisi için



Şek. 102

$$Q = CU \quad , \quad W = \frac{1}{2} QU = CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

yazılabilir $(U = \varphi_1 - \varphi_2)$. $Q = \text{sab.}$ için

$$dW = -\frac{Q^2}{2C^2} dC = -\frac{1}{2} W \frac{dC}{C}$$

bulunur. Levhalar yekdiğerini çektiğinden $dC > 0$ ve dolayısiyle $dW<0$ dır.

$\varphi = \text{sab.}$ için

$$dW = \frac{1}{2} U^2 dC = \frac{1}{2} W \frac{dC}{C}$$

olacağından $dW>0$ dır.

Kuvvet için $Q=\text{sab.}$ halinde

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

ve $\varphi = \text{sab.}$ halinde

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

bulunur. $Q = CU$ yardımiyle iki ifadenin ayni olduğu kolayca görülebilir. $C = \varepsilon S/x$ koyarak

$$F_x = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon S}{x^2}$$

bulunur. F_x negatif olduğundan bir çekme kuvvetidir. $E = U/x$ ve $\sigma = \varepsilon E$ koyarak birim yüzeye düşen kuvvet için

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \qquad (80)$$

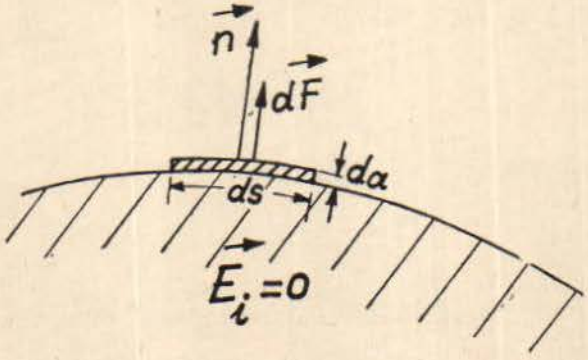
elde edilir. Buna elektrostatik basınç adı verilir. Basınç formülü iletkenlerin şekline bağlı değildir. Bu formülü genel olarak şöylece bulabiliriz. İletken yüzeyindeki dS yüzey elemanının dışarı doğru ve normal doğrultuda da kadar kaydağı farzedilirse bu esnada $dV = dS\,da$ hacmindeki

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \frac{D^2}{2\varepsilon} dV$$

enerjisi yokolur, şek. 103. Zira iletken içinde $\vec{E}_i = 0$ dır. Bu kayma esnasında görülen iş $dF\,da$ olduğundan birim yüzeye düşen kuvvet için

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \qquad (81)$$

elde edilir. Basınç kuvveti daima pozitif olduğundan iletkenin pozitif normali yönünde yani dışarı doğru tesir eder. dS elemanına tesir eden kuvvet için



Şek. 103

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\vec{n}\,dS = \frac{1}{2}\vec{E}\sigma\,dS$$

yazabiliriz, Böylece bütün iletken yüzeyine tesir eden kuvvet için

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\oint_S \vec{E}\sigma \, dS \tag{82}$$

integrali elde edilir.

Basınç denklemi şu şekilde de bulunabilir: İletken yüzeyinde $dQ = \sigma \, dS$ yük elemanına tesir eden kuvvet için

$$d\vec{F} = \vec{E}' dQ = \vec{E}' \sigma \, dS$$

yazılabilir. Bu ifadede $\vec{E}'$, dQ yükü hariç olmak üzere iletken yüzeyindeki yük dağılışının ve uzaydaki diğer yüklerin dQ elemanının bulunduğu yerde meydana getirdikleri bileşke alanı göstermektedir. dQ elemanının kendi alanı $\vec{E}_e$ ile gösterilirse iletken yüzeyinin hemen dışındaki alan $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_e$ ve içindeki alan ise $\vec{E}_i = \vec{E}' - \vec{E}_e$ olacağından $\vec{E}_e = \vec{E}' = \vec{E}/2$ bulunur. Böylece $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{n}$ koyarak

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\vec{n} \, dS$$

yazılabileceğinden basınç formülü tekrar elde edilir.

σ = sab. için basınç boşluktaki $p_0 = \sigma^2/2\varepsilon_0$ değerine nazaran ε_r defa küçülür. Buna karşılık φ = sab. tutulacak olursa yoğunluk $\varepsilon_r \sigma_0$ değerini alacağından basınç ε_r defa büyüyecektir.

18. Hacimsel kuvvetler ve Maxwell gerilme tansörü.

Statik alanın iç kuvvetlerini kuvvet yoğunluğu yani birim hacme düşen kuvvet yardımiyle ifade edebiliriz. Kuvvet yoğunluğu $\vec{f}$ ile gösterilirse dV elemanına tesir eden kuvvet $d\vec{F} = \vec{f} dV$ olacaktır. dV elemanı $\delta\vec{s}$ virtüel kaymasını yaptığı takdirde görülen iş

$$\delta A = \int_V (\vec{f} \cdot \delta\vec{s}) \, dV$$

olur. Bu sırada potansiyel enerji δW kadar azalacağından enerji prensibine göre

$$\delta W + \int_V (\vec{f} \cdot \vec{\delta s})\, dV = 0$$

yazılabiiir. Buradan meselâ x — bileşeni için

$$\int_V f_x\, dV = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

elede edilir. Diğer bileşenler için benzer denklemler yazılabilir. Potansiyel enerji için

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\, dV$$

koyarak

$$\int_V f_x dV = -\frac{1}{2}\int_V E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\, dV - \frac{1}{2}\int_V \varepsilon \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) dV$$

bulunur. rot $\vec{E} = 0$ ve

$$\int_V \text{grad}\, F\, dV = \oint_S F \vec{n}\, dS$$

bağıntılarından faydalanarak (F, her hangi bir skaler fonksiyonudur) ikinci integral

$$\int_V \varepsilon \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \ldots\right) dV = \oint_S \varepsilon E_x E_n dS - \int_V \rho E_x dV$$

şekline sokulabilir. E_n, alanın normal bileşenidir. Yüzey integral, bütün alanı içine alan sonsuzdaki yüzey üzerinden hesaplanırsa $E_x E_n$ çarpımı $1/r^4$ gibi sonsuz küçüğe gideceğinden bu integral sıfır olur. Böylece f_x için

$$f_x = \rho E_x - \frac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial_x}$$

elde edilir. Benzer denklemler diğer bileşenler için yazılabileceğinden kuvvet yoğunluğu vektörü için

$$\vec{f}=\rho\vec{E}-\frac{1}{2}E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon \tag{83}$$

ifadesi yazılabilir. Birinci terim ρ yüküne tesir eden alan kuvvetini gösterir. İkinci terim ise dielektrik sabiti değiştiği takdirde ortaya çıkan kuvveti göstermektedir. Değişme sürekli veya sınır yüzeylerinde olduğu gibi atlama şeklinde de olabilir. Bu suretle sınır yüzeylerinde ortaya çıkan kuvvetlerin sebebi anlaşılmış olur.

V hacmindeki kuvvet

$$\vec{F}=\int_V \vec{f}\,dV$$

integrali ile hesaplanacaktır. Maxwell gerilme tansörü yardımiyle bu hacimsel kuvvetler yerine yüzey kuvvetlerini almak kabil olur. Şimdi bu konuyu kısaca gözden geçirelim. Alan içinde bir S kapalı yüzeyi alalım. Bu yüzey ortamı iki bölgeye ayırır. Dıştaki bölgenin iç bölgeye yapacağı kuvvet tesirini yukarıdaki integralle hesaplayabiliriz. Maxwell bu kuvvetin bir yüzey kuvveti yardımiyle hesaplanabileceğini göstermiştir. dS yüzey elemanına tesir eden kuvveti $\vec{p}\,dS$ şeklinde gösterirsek ($\vec{p}$, birim yüzeye isabet eden yüzey kuvvetidir) $\vec{F}$ kuvvetini

$$\vec{F}=\int_V \vec{f}\,dV=\oint_S \vec{p}\,dS \tag{84}$$

şeklinde, yani bir yüzey integrali ile hesaplamak kabil olur. Bu çevirmeyi yapabilmek için Gauss teoremine göre kuvvet yoğunluğunun bileşenlerini bir diverjans şeklinde ifade etmek lâzımdır. Bunun için de

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}+\frac{\partial T_{13}}{\partial z},\\ f_y&=\frac{\partial T_{21}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}+\frac{\partial T_{23}}{\partial z},\\ f_z&=\frac{\partial T_{31}}{\partial x}+\frac{\partial T_{32}}{\partial y}+\frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

olacak şekilde T_{11}, T_{12}, . . , gibi büyüklüklerin bulunması gerekir. Bu büyüklükler, matris notasyonu ile yazılan,

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{86}$$

şeklindeki Maxwell gerilme tansörünün bileşenleridir. Bu bileşenler bulununca yüzey kuvvetinin bileşenleri

$$\left.\begin{aligned} p_x &= T_{11}\cos\alpha + T_{12}\cos\beta + T_{13}\cos\gamma \ , \\ p_y &= T_{21}\cos\alpha + T_{22}\cos\beta + T_{23}\cos\gamma \ , \\ p_z &= T_{31}\cos\alpha + T_{32}\cos\beta + T_{33}\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

denklemleri yardımiyle hesaplanır (mekanikte görüldüğü gibi). $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ve $\cos\gamma$, yüzey normalinin yön kosinüsleridir, Tansör bileşenlerini bulmak maksadiyle f_x ifadesinde $\rho = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E})$ koyarak

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{2}E_x^2\right) + E_x\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E_y) + E_x\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E_z) - \frac{1}{2}(E_y^2 + E_z^2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

yazalım. rot $\vec{E}=0$ olduğunu gözönüne alarak yazılabilecek olan

$$\varepsilon E_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) + \varepsilon E_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = 0$$

denklemini yukarıdaki ifadeye ilâve ederek

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varepsilon}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)\right] + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E_x E_z)$$

bulunur. Benzer şekilde f_y ve f_z—bileşenleri için

$$f_y = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varepsilon}{2}(-E_x^2 + E_y^2 - E_z^2)\right] + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E_y E_z),$$

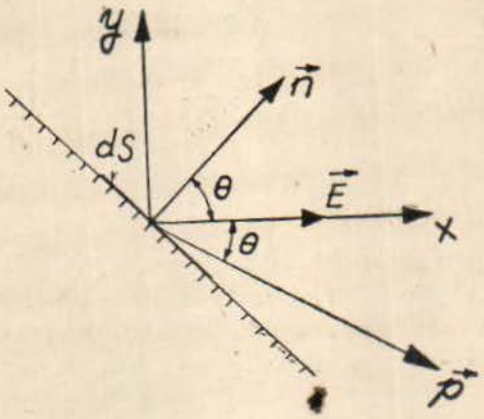
$$f_z = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E_x E_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E_y E_z) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon}{2}(-E_x^2 - E_y^2 + E_z^2)\right]$$

elde edilir. Bu denklemleri (85) ile karşılaştırarak gerilme tansörü için

$$T=\varepsilon\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2) & E_xE_y & E_xE_z \\ E_xE_y & 1/2(-E_x^2+E_y^2-E_z^2) & E_yE_z \\ E_xE_z & E_yE_z & 1/2(-E_x^2-E_y^2+E_z^2) \end{pmatrix} \quad (88)$$

bulunur, Maxwell tansörünün simetrik olduğu görülmektedir.

Maxwell gerilmelerinin anlamını kolayca görebilmek için alanın pozitis x—ekseni yönünde bulunduğunu ve z—ekseninin yüzey elemanının normaline ve alana dik olduğunu farzedelim, şek. 104. Alan yönü ile normal yönü arasındaki açıyı θ ile gösterelim. Bu durumda $E_y=E_z=0$, $E_x=E$, $\cos\alpha=\cos\theta$, $\cos\beta=\sin\theta$, $\cos\gamma=0$ olacağından tansör bileşenleri için



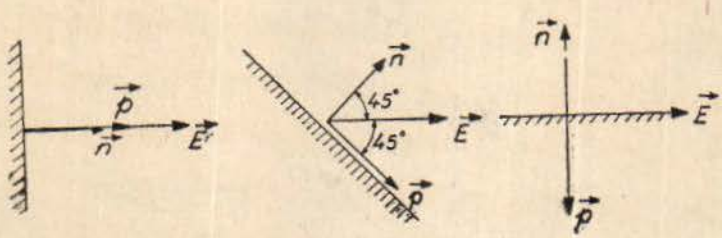
Şek. 104

$$T_{11}=\frac{\varepsilon}{2}E^2\,,\quad T_{22}=-\frac{\varepsilon}{2}E^2\,,\quad T_{33}=-\frac{\varepsilon}{2}E^2$$

bulunur. Diğer bileşenler sıfırdır. Böylece yüzey kuvvetinin bileşenleri için

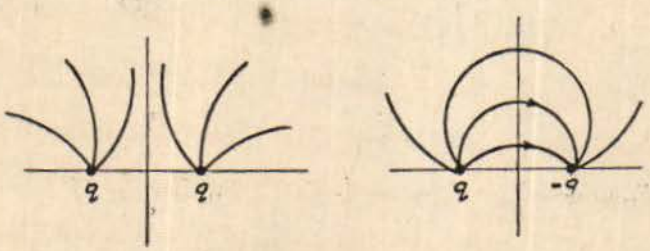
$$p_x = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \cos\theta \ , \quad p_y = -\frac{\varepsilon}{2} E^2 \sin\theta \ , \quad p_z = 0$$

bulunur. Yüzey kuvvetinin mutlak değeri $p = \varepsilon E^2/2$ olduğundan yüzey elemanının alana nazaran durumuna bağlı değildir. Normal yönü ile $\vec{p}$ vektkrü arasındaki açı, alan yönü tarafından iki eşit parçaya bölünmektedir. $\theta=0$ için $\vec{E}$ ve $\vec{n}$ paralel olacaklarından bir çekme gerilmesi ortaya çıkar, şek. 105. $\theta=45°$ olunca $\vec{p}$ vektörü yüzey elemanı ile aynı düzlemde bulunur ve bir kayma gerilmesi meydana gelir. Nihayet $\theta=90°$ için $\vec{p}$ vektörü $\vec{n}$ ye antiparalel olacağından bir basınç kuvveti ortaya çıkar.



Şek. 105

Yukarıdaki incelemelerden Maxwell gerilmelerinin tesiri ile alan çizgileri yönünde bir çekme kuvvetinin ve buna dik yönde de bir basınç kuvvetinin ortaya çıkacağı anlaşılır. İki noktasal yükün alanını inceleyerek bu tesirler kolayca görülebilir, şek. 106.



Şek. 106

Örnekler :

1 — Silindirik kondansatörün uzunluk birimindeki enerji buluna-

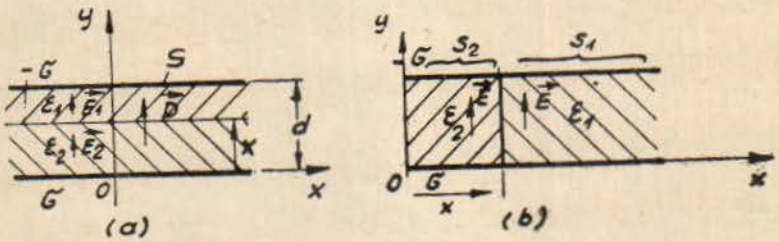
caktır.

İç ve dış yarıçapları a ve b ile gösterelim. Silindirler arasındaki alan $E_\rho = \lambda/2\pi\varepsilon\rho$ olduğundan uzunluk birimindeki enerji için

$$\overline{W} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

bulunur. İki silindir arasındaki gerilim yardımiyle $\overline{W}=\lambda U/2$ yazabiliriz. Uzunluk birimindeki kapasiteyi gösteren $\overline{C}=2\pi\varepsilon/\ln\frac{b}{a}$ ifadesinden faydalanarak enerjiyi $\overline{W} = \lambda^2/2\,\overline{C}$ denklemi yardımiyle de hesaplayabiliriz.

2 — Şek. 107 de görülen paralel levhalı kondansatörlerde $Q=$ sab. için iki dielektrik arasındaki sınır yüzeyine tesir eden kuvvet bulunacaktır.



Şek. 107

Şek. 107 a daki kondansatörde enerji yoğunlukları

$$w_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}E_1^2\,,\quad w_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}E_2^2$$

dir, $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ olduğunu gözönüne alarak toplam enerji için

$$W = \frac{1}{2}E_1 E_2 S\left[\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)y\right]$$

yazılabilir. Buradan kuvvet için

$$F_y = -\frac{dW}{dy} = \frac{1}{2}E_1E_2S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$

bulunur. Birim yüzeye düşan kuvvet ise

$$p = \frac{1}{2} E_1 E_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 E_1^2 - \varepsilon_2 E_2^2)$$

olacaktır. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ için $F_y > 0$ olacağından ε_2 dielektriği ε_1 içine çekilir. Genel olarak kuvvet daima dielektrik sabiti büyük olan ortamdan küçük olan ortama doğru yönelir.

Şek. 107 b de ise $E_1 = E_2 = E$, $Q = (\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)E$ olduğunu gözönüne alarak

$$W = \frac{E^2 d}{2} (\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2) = \frac{Q^2 d}{2[\varepsilon_1 S + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S_2]}$$

bulunur ($S = S_1 + S_2$). Kondansatörün kağıt düzlemine dik olan üçüncü boyutu h ile gösterilirse $S_2 = x\,h$ olacağından

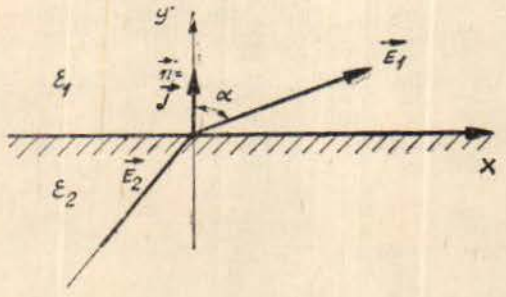
$$F_x = -\frac{dW}{dx} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) hd}{2} E^2$$

ve

$$p = \frac{F_x}{hd} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} E^2$$

bulunur. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ için $F_x > 0$ olacağından yine ε_2 dielektriği ε_1 içine doğru çekilir.

Şayet ε_1 ortamı içindeki $\vec{E}_1$ alanı sınır yüzeyinin normali ile her hangi bir α açısı yaparsa p yi bulmak için yukarıdaki sonuçlar süperpoze edilir, şek. 108. Sınır yüzeyinde $E_{1t} = E_{2t} = E_t$ ve $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ ($D_{1n} = D_{2n}$, $\sigma = 0$) olduğunu gözönüne alarak



Şek. 109

$$p = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 E^2_{1n} - \varepsilon E^2_{2n} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2\right] = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\left(E_t^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E^2_{1n}\right)$$

veya $E_1^2 = E_t^2 + E^2_{1n}$ ve $E_{1n} = E_1 \cos\alpha$ koyarak

$$p = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} E_1^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos^2\alpha\right)$$

bulunur. $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/2$ için yukarıda incelenen özel haller elde edilir.

Sınır yüzeyindeki kuvveti şu şekilde de bulabiliriz: Sınır yüzeyinde dielektrik sabiti sıçrama şeklinde değişmektedir. Birim yüzeye isabet eden yüzey kuvvetinin (gerilme)

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{E}\left(\vec{D} \cdot \vec{n}\right) + \frac{1}{2}\left[\vec{D}X\left(\vec{E}X\vec{n}\right)\right] \qquad (89)$$

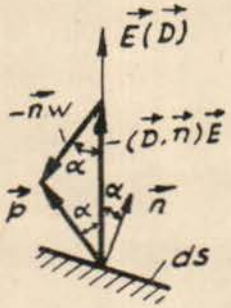
şeklinde yani iki vektörün bileşkesi olarak hesaplanacağı kolayca görülebilir. Birinci vektör $\vec{E}$ alanı yönünde ve ikinci vektör ise $\vec{E}$ ile $\vec{n}$ nin meydana getirdikleri düzlemde ve $\vec{D}$ vektörüne dik yöndedir. İkinci vektör için $(\vec{D} \cdot \vec{n})\vec{E} - (\vec{D} \cdot \vec{E})\vec{n}$ yazılabileceğinden

$$\vec{p} = (\vec{D} \cdot \vec{n})\vec{E} - \vec{n}\, w$$

elde edilir ($w = \vec{D} \cdot \vec{E}/2$) . $\vec{D}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı α ile gösterilirse

$$\vec{p} = D \cos\alpha\, \vec{E} - \vec{n}\, w$$

yazılabilir. Buradan $\vec{p}$ nin mutlak değeri için $p = w$ bulunur. Şek. 109



Şek. 109

yardımıyle $\vec{p}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açının $\vec{E}$ tarafından iki eşit açıya ayrıldığı görülür. $\vec{n}, \vec{E}$ ve $\vec{p}$ vektörleri ayni düzlemdedirler. $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi$ için $\vec{p} = \vec{n}\, w$ bulunur. $\vec{p}$ nin yönü alan yönüne bağlı değildir ve normal yönünde yani dışarı doğrudur. $\alpha = \pi/2$ için $\vec{p} = -\vec{n}\, w$ olur. $\vec{p}$ nin mutlak değeri ayni kalmakla beraber yönü içeri doğrudur.

İki dielektriği ayıran sınır yüzeyinde $\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$

olacaktır, şek. 108. Böylece

$$2\vec{p}=\vec{E}_1(\vec{D}_1\cdot\vec{n})-\vec{E}_2(\vec{D}_2\cdot\vec{n})+\vec{D}_1X(\vec{E}_1X\vec{n})-\vec{D}_2X(\vec{E}_2X\vec{n})$$

elde edilir. Bu ifadede ilk iki terim için

$$(\vec{E}_1+\vec{E}_2)\,[(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\cdot\vec{n}]+\vec{E}_1(\vec{D}_2\cdot\vec{n})-\vec{E}_2(\vec{D}_1\cdot\vec{n})$$

ve son iki terim için de

$$\vec{E}_2(\vec{D}_1\cdot\vec{n})-\vec{E}_1(\vec{D}_2\cdot\vec{n})+(\vec{D}_1+\vec{D}_2)X[(\vec{E}_1-\vec{E}_2)X\vec{n}]+(\vec{D}_2\cdot\vec{E}_1-\vec{D}_1\cdot\vec{E}_2)\vec{n}$$

yazılabileceğinden, sınır şartlarına göre

$$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)X\vec{n}=0\ ,\quad (\vec{D}_1-\vec{D}_2)\cdot\vec{n}=\sigma$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{p}=\frac{\sigma}{2}(\vec{E}_1+\vec{E}_2)+(\vec{D}_2\cdot\vec{E}_1-\vec{D}_1\cdot\vec{E}_2)\vec{n}$$

bulunur. Son terim $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\,(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2)\vec{n}$ şekline sokularak

$$\vec{p}=\frac{\sigma}{2}(\vec{E}_1+\vec{E}_2)+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2)\vec{n} \qquad (90)$$

elde edilir. Şayet 2 ortamı iletken ise $\vec{E}_2=0$ koyarak

$$\vec{p}=\frac{\sigma\vec{E}_1}{2}=\vec{n}\,w_1$$

bulunur. İki dielektriği ayıran sınır yüzeyinde serbest yük yoksa ($\sigma=0$)

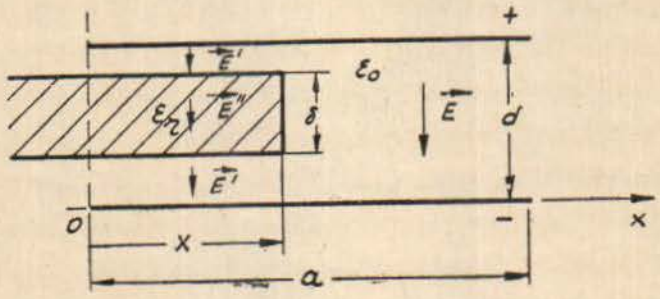
$$\vec{p}=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2)\vec{n}$$

olacaktır. $\vec{p}$ vektörü sınır yüzeyine diktir ve $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ için 1 ortamı içine doğru yönelir. Bu ifadede

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_{1t}E_{2t} + E_{1n}E_{2n} = E_t^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}^2$$

koyarak daha önce bulunan formül elde edilir.

3 — Şek. 110 da δ kalınlığındaki dielektrik levhayı içeri çeken kuvvet bulunacaktır (U=sab.). Levhalar dikdörtgen şeklinde olup diğer kenar b dir. Kenar tesirleri ihmal edilecektir.



Şek. 110

Bu sistemde $E = U/d$, $E'' = E'/\varepsilon_r$ ve

$$E'(d-\delta) + E''\delta = U$$

olduğunu gözönüne alarak toplam enerji için

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[E^2(a-x)db + E''^2(d-\delta)\times b + \varepsilon_r E''^2 \times b\delta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 b U^2\left[\frac{a-x}{d} + \frac{\varepsilon_r x}{\delta+\varepsilon_r(d-\delta)}\right]$$

yazılabilir. Buradan dielektrik levhaya tesir eden kuvvet için

$$F_x = \frac{dW}{dx} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)b\delta}{2d[\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)\delta]} U^2$$

bulunur. $F_x > 0$ olduğundan levha içeri çekilecektir.

$\delta = d$ olması halinde

$$F_x = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)b}{2d} U^2$$

olacaktır.

4 — Sıfır potansiyelindeki iletken düzlem karşısına getirilen noktasal yüke ve paralel çizgisel yüke tesir eden kuvvet bulunacaktır, şek. 36 ve 48.

Noktasal yük halinde düzlemdeki yoğunluk

$$\sigma = -\frac{a\,q}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

olduğundan basınç

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = \frac{q^2a^2}{8\pi^2\varepsilon(a^2+\rho^2)^3}$$

dir. Düzlemdeki yüzey elemanı $dS = 2\pi\rho d\rho$ olacağından

$$F_z = \frac{q^2a^2}{4\pi\varepsilon}\int_0^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(a^2+\rho^2)^3} = \frac{q^2}{16\,\pi\,\varepsilon\,a^2}$$

bulunur. $F_z>0$ olduğundan düzleme tesir eden kuvvet sağa doğrudur. Dolayısiyle q yükü bu kuvvetle sola doğru çekilir.

Üniform çizgisel yük halinde yoğunluk

$$\sigma = -\frac{a\lambda}{\pi(a^2+y^2)}$$

olduğundan

$$p = \frac{a^2\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon(a^2+y^2)^2}$$

dir Buradan uzunluk birimine düşen kuvvet için (z—ekseni boyunca)

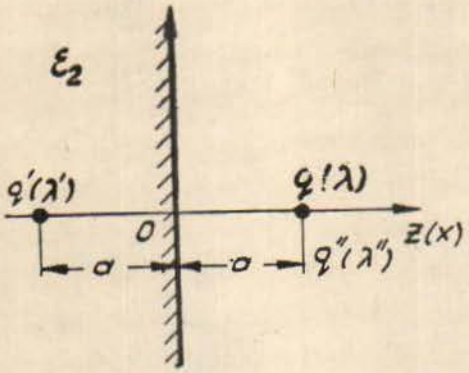
$$\overline{F}_z = \frac{a^2\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(a^2+y^2)^2} = \frac{\lambda^2}{4\,\pi\,\varepsilon\,a}$$

bulunur.

4 — Bir dielektrik düzlem karşısına getirilen noktasal ve çizgisel yüklere tesir eden kuvvetler bulunacaktır, şek. 111.

Noktasal yük halinde q yüküne tcsir eden kuvvet

$$F_x = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1(2a)^2}\, q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{q}{2a}\right)^2$$



Şek. 111

olacaktır. $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ için $F_x<0$ dır ve q yükü sınır yüzeyine doğru çekilir. $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ için $F_x>0$ olacağından q yükü sınır yüzeyinden itilir. $\varepsilon_2\to\infty$ için iletken düzlemle noktasal yük sistemindeki kuvvet formülü elde edilir.

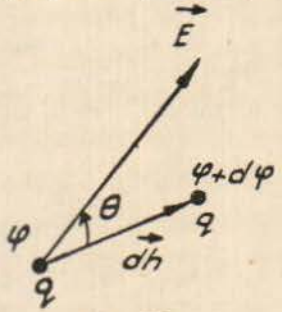
Ayni şekilde çizgisel yükün uzunluk birimine düşen kuvvet için

$$\overline{F}_x = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_1(2a)}\,\lambda = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{\lambda^2}{2a}$$

bulunur. $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ için çekme ve $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ için itme ortaya çıkar. $\varepsilon_2\to\infty$ için iletken düzlem ve çizgisel yük sistemindeki kuvvet formülü elde edilir.

6 — Üniform olmayan alan içinde noktasal dipole tesir eden kuvvet hesaplanacaktır.

Kuvveti enerjiden giderek bulmak elverişlidir. Şek. 112 yardımiyle dipolün potansiyel enerjisi için



Şek. 112

$$W = q(\varphi + d\varphi) - q\varphi = q\,d\varphi$$

yazabiliriz. φ ve $\varphi + d\varphi$, $-q$ ve q yüklerinin bulundukları noktalardaki potansiyelleri göstermektedir. Bu ifadede $d\varphi = \vec{dh}\,.\,\text{grad}\,\varphi$ koyarak

$$W = q\,\vec{dh}.\text{grad}\,\varphi = -\vec{p}.\vec{E} = -pE\cos\theta \qquad (92)$$

bulunur. Dipole tesir eden kuvvet $\vec{F}$ ile gösterilirse $\vec{ds}$ kayması için $dW = -\vec{F}.\vec{ds}$ olacağından $dW = \text{grad}\,W.\vec{ds}$ koyarak

$$\vec{F} = -\text{grad}\,W = \text{grad}\,(\vec{p}.\vec{E}) \qquad (93)$$

elde edilir. $\vec{p}$ = sab. olduğu gözönüne alınırsa meselâ F_x — bileşeni için

$$F_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

bulunur. Diğer bileşenler için de benzer denklemler yazılabilir. Üniform-alanda $\vec{E} = \vec{E}_0$ = sab. olacağından $\vec{F} = 0$ bulunur.

Vektör analizde görülen

$$\text{grad}\,(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}X\text{rot}\vec{B} + \vec{B}X\text{rot}\vec{A} + (\vec{A}.\text{grad})\vec{B} + (\vec{B}.\text{grad})\vec{A}$$

idantikliğinde $\vec{A} = \vec{p}$ ve $\vec{B} = \vec{E}$ koyarak ve $\vec{p}$ = sab., $\text{rot}\,\vec{E} = 0$ olduğunu hesaba katarak

$$\vec{F} = (\vec{p}.\text{grad})\vec{E} \qquad (94)$$

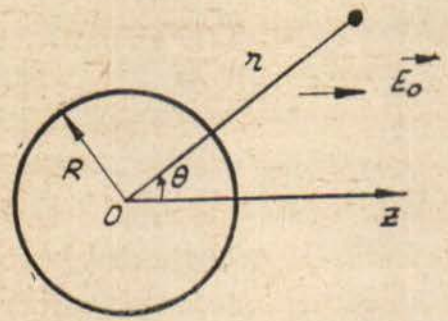
yazabiliriz.

Kuvvet formülünü şöyle de bulabiliriz: Alanın, $-q$ yükünün bulunduğu noktadaki x — bileşeni E_x ile gösterilirse q yükünün bulunduğu noktadaki bileşen $E_x + dE_x$ olur. Böylece F_x için

$$F_x = -qE_x + q(E_x + dE_x) = q\,dE_x = q\,\vec{dh}.\text{grad}\,E_x = \vec{p}.\text{grad}\,E_x$$

yazılabilir. Benzer şekilde $F_y = \vec{p}.\text{grad}\,E_y$ ve $F_z = \vec{p}.\text{grad}\,E_z$ elde edileceğinden $\vec{F} = (\vec{p}.\text{grad})\,\vec{E}$ olacaktır.

7 — Q yükünü taşıyan iletken küre $\vec{E}_0$ üniform alanı içine sokuluyor. Küreye tesir eden kuvvet bulunacaktır, şek. 113.



Şek. 113

Potansiyel için daha önce

$$\varphi = \left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) E_0 \cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

bulunmuştur. Buradan E_r ve E_θ için

$$E_r = \left(\frac{2R^3}{r^3} + 1\right) E_0 \cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2},$$

$$E_\theta = \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) E_0 \sin\theta$$

bulunur. Küre yüzeyindeki yoğunluk ise

$$\sigma = 3\varepsilon E_0 \cos\theta + \frac{Q}{4\pi R^2}$$

olur. Küreye tesir eden kuvveti

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \oint_S \vec{E}\, \sigma \mathrm{d}S$$

integrali yardımiyle hesaplayalım. Simetriden dolayı kuvvetin yalnız F_z bileseni bulunacağından

$$F_z = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sigma E_r \cos\theta\, (2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta) = Q E_0$$

elde edilir. Vaktörel olarak $\vec{F} = Q\vec{E}_0$ olacaktır. Kuvvet alan yönünde tesir eder ve yarıçapa bağlı değildir. Kuvvet ifadesini basınç formülü yardımiyle de bulabiliriz Basınç $p = \sigma^2/2\varepsilon$ olduğundan yine

$$F_z = \frac{\pi R^2}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \left(3\varepsilon E_0 \cos\theta + \frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \sin\theta d\theta = QE_0$$

bulunur.

VI. SINIR DEĞERİ PROBLEMLERİ

19. Sınır değeri problemleri ve nevileri.

Alan teorisinde ekseriya rastlanan problem, potansiyel denkleminin sınır şartlarına uyan çszümünü bulmaktır. Sınır şartlarının oynadığı önemli rolden dolayı bu problemlere sınır değeri problemi (Boundary—value problems, Randwertaufgabe) adı verilir. Bir sınır değeri problemi çözülüp potansiyel fonksiyonu bulunduktan sonra alan vektörü bir türev işlemi ile elde edilir.

Potansiyelin sınır yüzeylerinde aldığı değerler verildiği takdirde probleme birinci nevi sınır değeri problemi veya Dirichlet problemi adı verilir. Şayet sınır yüzeylerindeki $\partial\varphi/\partial n$ normal türevleri (E_n bileşeni veya σ dağılışı biliniyorsa probleme ikinci nevi sınır değeri problemi veya Neumann problemi adı verilir. Sınır yüzeylerinde kısmen potansiyel değerlerinin ve kısmen de normal türev değerlerinin verilmesi halinde üçüncü nevi veya karışık bir sınır değeri problemi bahis konusu olur.

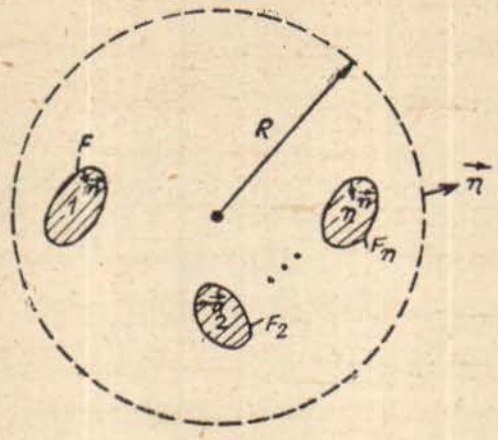
Bu bahiste, sınır değeri problemlerini çözmek için kullanılan çeşitli metodlar gözden geçirilecektir. Daha önce gördüğümüz imaj metodu bu metodlardan biridir.

Laplace denklemi lineer olduğundan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ gibi harmonik fonksiyonlar yardımiyle elde edilen

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$$

fonksiyonu da harmonik olacaktır (c = sab.)

Bir sınır değeri probleminin bir tek çözümü vardır veya iki çözüm ancak bir sabit kadar farkedebilir (teklik teoremi). Şek. 114 de bir iletken sistemi görülmektedir. İletken yüzeylerindeki φ veya $\partial\varphi/\partial n$ değerleri verilmiş olabilir. Ayni sınır şartını yerine getiren φ_1 ve φ_2



Şek. 414

gibi iki harmonik fonksiyonun bulunduğunu farzedelim. Bu fonksiyonlar için $\Delta\varphi_1 = 0$ ve $\Delta\varphi_2 = 0$ olacağından $\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ yazılabilir. Green teoremi, bütün sistemi kuşatan çok büyük yarıçaplı küre yüzeyi ile iletkenlerin yüzeyleri tarafından sınırlandırılan bölgeye tatbik edilirse

$$\int_{F+F_1+\ldots+F_n} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF = \int_V (\text{grad } \varphi)^2 dV$$

elde edilir ($\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$). $R \to \infty$ için $\varphi\, \partial\varphi/\partial n$ çarpımı $1/R^3$ gibi sonsuz küçüğe ve küre yüzeyi ise R^2 gibi sonsuz büyüğe yaklaşacağından küre yüzeyi için integral sıfır olur. Böylece

$$\int_{F_1+\ldots+F_n} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF = \int_\infty (\text{grad } \varphi)^2 dV$$

yazılabilir. Hangi sınır şartı yerine gelirse gelsin soldaki integral sıfır sonucunu vereceğinden

$$\int_\infty (\text{grad } \varphi)^2 dV = 0$$

olacaktır. İntegral altındaki fonksiyon pozitif olduğundan bu integralin

sıfır olabilmesi için grad $\varphi=0$ veya

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\text{sab.}$$

olması gerekir. Bir Dirichlet probleminde sabitin sıfır olacağı ve bir Neumann probleminde ise sabitin sıfırdan farklı olabileceği kolayca görülür. Bununla beraber sabit sıfırdan farklı olsa bile yoğunluk ve alan vektörü türevle elde edildiğinden çözüm yine tektir. Poisson denklemi için de benzer sonuçlar elde edilir.

İletkenlerin potansiyelleri yerine yükleri bilindiği takdirde iletkenler dışında Laplace denklemini sağlayacak ve iletkenlerin yüzeylerinde

$$Q_i=-\varepsilon\oint_{F_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}F_i$$

olacak şekilde bir harmonik fonksiyonun bulunması gerekir. Daha genel olarak iletkenlerden bazılarının potansiyelleri ve diğerlerinin yükleri verilmiş olabilir. Bu genel halde potansiyel fonksiyonu, bazı sınır yüzeylerinde sabit değerleri alacak ve diğer yüzeylerde ise yukarıdaki şartı yerine getirecek şekilde tâyin edilecektir.

20. Koordinat sistemleri.

Sınır değeri problemlerinin çözümlerini sadeleştirmek için incelenen sisteme uygun olan bir koordinat sistemi seçilir. Bunun için de koordinat yüzeylerinden biri sınır yüzeyine intibak eden bir koordinat sistemi seçilmelidir. Aşağıda çeşitli ortogonal koordinat sistemleri kısaca gözden geçirilmiştir.

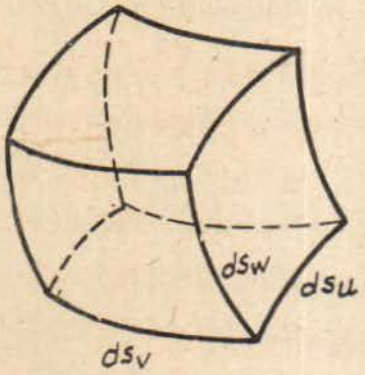
Bir noktanın genel koordinatları u, v, w ile gösterilirse bunlarla kartezyen koordinatlar birbirine

$$x=x(u,v,w)\ ,\quad y=y(u,\ v,\ w)\ ,\quad z=z(u,\ v,\ w) \tag{95}$$

fonksiyonları ile bağlı olurlar. Bu denklemlerde $u=\text{sab}$, $v=\text{sab.}$ ve $w=\text{sab.}$ koyarak elde edilen yüzeylere koordinat yüzeyleri adı verilir. Koordinal yüzeylerinin kesişme eğrilerine koordinat çizgisi denilir. Koordinat yüzeyleri yekdeğerini $(u,\ v,\ w)$ noktasında keserler. Koordinat yüzeyleri yekdiğerine dik olan sisteme ortogonal koordinat sistemi adı verilir. Pratikte genel olarak bu sistemler kullanılır. Her hangi bir vek-

törün bileşenleri $\vec{u}_u, \vec{u}_v, \vec{u}_w$ birim vektörleri yardımiyle tâyin edilir. Sağ sistemde $\vec{u}_u X \vec{u}_v = \vec{u}_w$ dir. Ortogonal sistemlerde birim vaktörler her noktada birbirine dik kalmakla beraber yönleri genel olarak noktadan noktaya değişir.

Genel koordinatlar nadiren uzunlukları gösterirler. Şek. 115 de görülen hacim elemanının kenarları yani du, dv, dw değişmelerine tekabül eden uzunluklar için



Şek. 115

$$ds_u = h_u du \ , \quad ds_v = h_v dv \ , \quad ds_w = h_w dw$$

yazılır. Metrik katsayı denilen h katsayıları genel olarak koordinatların fonksiyonudur. Bu katsayıları

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \qquad (96)$$

şeklinde hesaplamak kabildir. h_v ve h_w ifadeleri u yerine v ve w koyarak elde edilir.

Ortogonal koordinatlarda uzunluk ve hacim elemanları

$$\left.\begin{aligned} \vec{ds} &= (h_u du)\vec{u}_u + (h_v dv)\vec{u}_v + (h_w d_w)\vec{u}_w \\ dV &= h_u h_v h_w du dv dw \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

dir.

Kartezyen koordinatlardaki bileşenleri A_x, A_y, A_z olan $\vec{A}$ vektörünün her hangi bir ortogonal sistemdeki A_u bileşeni

$$A_u = \frac{1}{h_u}\left(A_x \frac{\partial x}{\partial u} + A_y \frac{\partial y}{\partial u} + A_z \frac{\partial z}{\partial u}\right) \qquad (98)$$

ifadesi yardımiyle bulunur. Diğer bileşenler için u yerine v ve w alınır.

grad φ nin bileşenleri

$$\text{grad}_u\,\varphi=\frac{1}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \text{grad}_v\,\varphi=\frac{1}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \text{grad}_w\,\varphi=\frac{1}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w} \tag{99}$$

denklemleri yardımiyle hesaplanır.

$\vec{A}$ vektörünün diverjansı

$$\text{div}\,\vec{A}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v h_w A_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(h_u h_w A_v\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(h_u h_v A_w\right)\right] \tag{100}$$

şeklinde ve rot $\vec{A}$ nın bileşenleri ise

$$\left.\begin{aligned}
\text{rot}_u\vec{A}&=\frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(h_w A_w\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(h_v A_v\right)\right],\\
\text{rot}_v\vec{A}&=\frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(h_u A_u\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(h_w A_w\right)\right],\\
\text{rot}_w\vec{A}&=\frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v A_v\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(h_u A_u\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

ifadeleri yardımiyle bulunur.

Potansiyel fonksiyonunun laplasiyeni

$$\Delta\varphi=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right] \tag{102}$$

ifadesi yardımiyle hesaplanır.

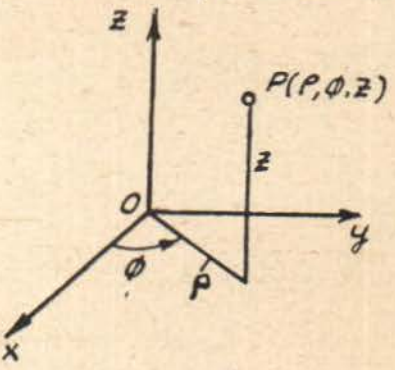
Yukarıda da belirtildiği gibi sınır değeri problemi çözülürken, incelenen tertibin sınırlarına uyan bir koordinat sistemi seçmek elverişlidir. Meselâ u=sab. koordinat yüzeyi sınır yüzeyine uyacak şenilde seçilmişse $\varphi(u,v,w)$ harmonik fonksiyonunun sınır yüzeyindeki normal türevi $\partial\varphi/\partial u$ ve teğetsel türevleri ise $\partial\varphi/\partial v$, $\partial\varphi/\partial w$ olacaktır.

Aşağıda çeşitli ortogonal koordinatlar özetlenmiştir.

Kartezyen koordinatlar: Birim vektörler $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ile gösterilir. $h_x=h_y=h_z=1$ dir. Koordinat yüzeyleri x=sab., y=sab. ve z=sab. düzlemleridir.

Dairesel silindirik koordinatlar: Koordinatlar $u=\rho$, $v=\phi$, $w=z$ ve birim vektörler $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\phi$, $\vec{k}$ dır, şek. 116. $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$

dir. Koordinat yüzeyleri $\rho =$ sab. silindirleri, $\phi =$ sab. yarı sonsuz ve $z =$ sab. sonsuz düzlemleridir. Metrik katsayılar $h_\rho = h_z = 1$, $h_\phi = \rho$ dur.



Şek. 116

Eliptik silindirik koordinatlar: Eliptik silindirik koordinatlar

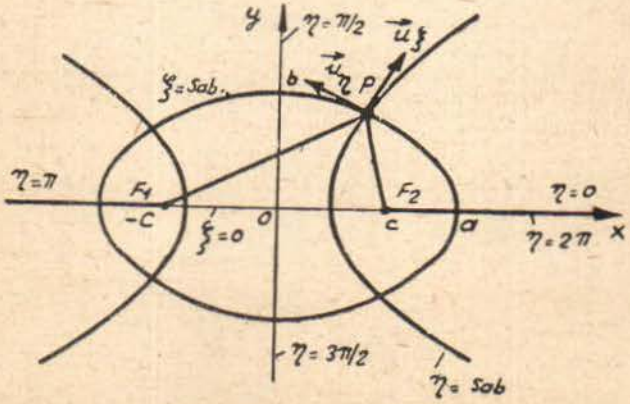
$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{Ch}\xi \cos\eta \\ y &= c \operatorname{Sh}\xi \sin\eta \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

denklemleri ile târif edilir ($c =$ sab.). Üçüncü koordinat z dir. Bu denklemler arasında η ve ξ yi yokederek

$$\frac{x^2}{(c \operatorname{Ch}\xi)^2} + \frac{y^2}{(c \operatorname{Sh}\xi)^2} = 1 \quad ,$$

$$\frac{x^2}{(c\cos\eta)^2} - \frac{y^2}{(c\sin\eta)^2} = 1$$

bulunur. Birinci denklem $\xi =$ sab. için büyük ve küçük yarı eksenleri $a = c \operatorname{Ch}\xi$, $b = c \operatorname{Sh}\xi$ olan ortak odaklı elipsleri ve ikinci denklem $\eta =$ sab. için $a = c\cos\eta$, $b = c\sin\eta$ olan ayni odaklı hiperbolleri gösterir, şek. 117. P noktasının F_1, F_2 odaklarından uzaklıkları r_1, r_2 ile gösterilirse $r_1 + r_2 = c \operatorname{Ch}\xi$ ve $r_1 - r_2 = 2c\cos\eta$ bulunur. ξ ve η koordi-



Şek. 117

natlarının değişme sınırları $\xi \geqq 0$ ve $2\pi \geqq \eta \geqq 0$ dır. $\xi=0$ için elipsler odakları birleştiren doğruya dejenere olurlar. Hiperboller ise $\eta=0$ ve $\eta=2\pi$ için F_2 noktasının sağında kalan doğruya ve $\eta=\pi$ için F_1 noktasının solunda kalan doğruya dejenere olurlar. $\eta=\pi/2$ ve $\eta=3\pi/2$ için $x=0$ düzlemi üstündeki noktalar elde edilir. Koordinat yüzeyleri $\xi=$sab. eliptik silindirleri, $\eta=$sab. hiperbolik silindirleri ve $z=$sab. düzlemleridir.

Metrik katsayılar

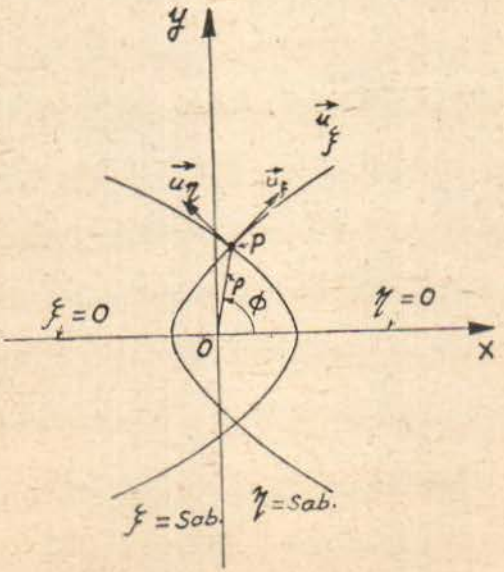
$$h_\xi = h_\eta = c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta}\,, \quad h_z = 1 \tag{104}$$

dir.

Parabolik silindirik koordinatlar: P noktasının poler koordinatları ρ, ϕ ile gösterilirse parabolik silindirik koordinatlar

$$\xi = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\phi}{2}\,, \quad \eta = \sqrt{2\rho}\sin\frac{\phi}{2} \tag{105}$$

şeklinde târif edilir. Üçüncü koordinat z dir. $\xi=$sab. ve $\eta=$sab. için ortak odakları orijinde bulunan iki parabol ailesi elde edilir, şek. 118.



Şek. 118

Koordinat yüzeyleri parobollik sitindirler ve $z=$sab. düzlemleridir. Paraboller $\xi=0$ için $-x-$ eksenine ve $\eta=0$ için $+x-$ eksenine dejenere olurlar. ξ ve η için değişme sınırları $-\infty$ ile $+\infty$ arasındadır. ξ ve η nın işaretleri ϕ açısının değeri ile belli olur.

(104) yardımiyle

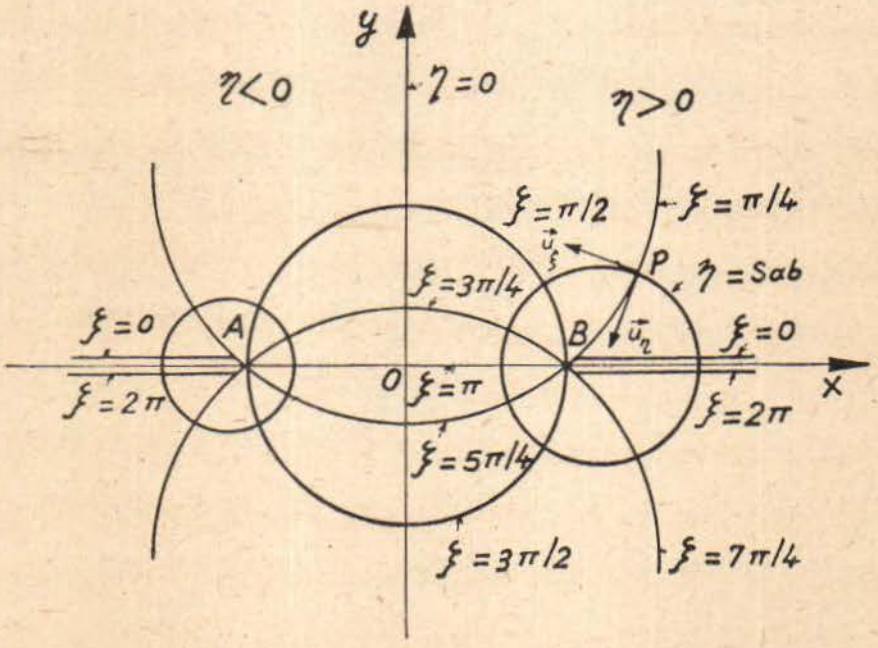
$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\ ,\quad y=\xi\eta \tag{106}$$

bulunur. Metrik katsayılar

$$h_\xi=h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\ ,\quad h_z=1 \tag{107}$$

dir.

Bipoler koordinatlar: $x-$ekseni üstünde $A(-a,0)$ ve $B(a,0)$ noktalarını alalım, şek. 119. ξ ve η parametre olmak üzere yazılan



Şek. 119

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-a\ \mathrm{ctg}\ \xi)^2&=\left(\frac{a}{\sin\xi}\right)^2\ ,\\ (x-a\ \mathrm{Cth}\ \eta)^2+y^2&=\left(\frac{a}{\mathrm{Sh}\eta}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

denklemlerinden birincisi yardımiyle ξ=sab. için merkezleri y—ekseni üstünde buulunan ve A,B noktalarından geçen daireler ve ikincisi yardımiyle η=sab. için merkezleri x—ekseni üstünde bulunan daireler elde edilir. ξ,η, z ye P noktasının bipoler koordinatları denilir. Koordinatlar için değişme sınırları $0 \leqq \xi \leqq 2\pi$, $-\infty < \eta < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ dir. ξ ve $\xi+\pi$ için ayni daire elde edileceğinden bu koordinatı bir değerli yapmak için $\xi<\pi$ değerleri x—ekseni üstünde kalan daire yayları için ve diğer değerler de alt taraftaki yaylar için kullanılır. A noktası $\eta=-\infty$ değerine ve B noktası $\eta=+\infty$ değerine tekabül eder. $\eta=0$ için daireler y—eksenine dejenere olurlar.

(108) yardımiyle

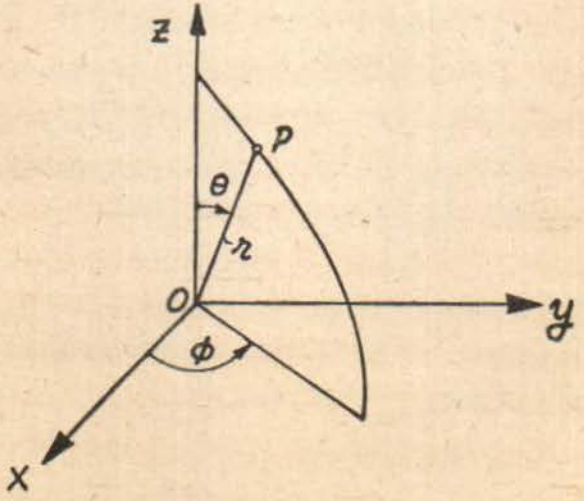
$$x = \frac{a \operatorname{Sh}\eta}{\operatorname{Ch}\eta - \cos\xi} \quad , \quad y = \frac{a \sin\xi}{\operatorname{Ch}\eta - \cos\xi} \tag{109}$$

bulunur. Metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{Ch}\eta - \cos\xi} \quad . \quad h_z = 1 \tag{110}$$

dir.

Küresel koordinatlar: Koordinatlar $u=r$, $v=\theta$, $w=\phi$ ve birim vektörler $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$ dir, şek. 120. Kartezyen koordinatlarla küresel koordinatlar arasında $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ bağıntıları vardır. Koordinat yüzeyleri r=sab. küreleri, θ=sab. konileri ve ϕ = sab. yarı sonsuz düzlemleridir. Metrik katsayılar $h_r=1, h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$ dır.

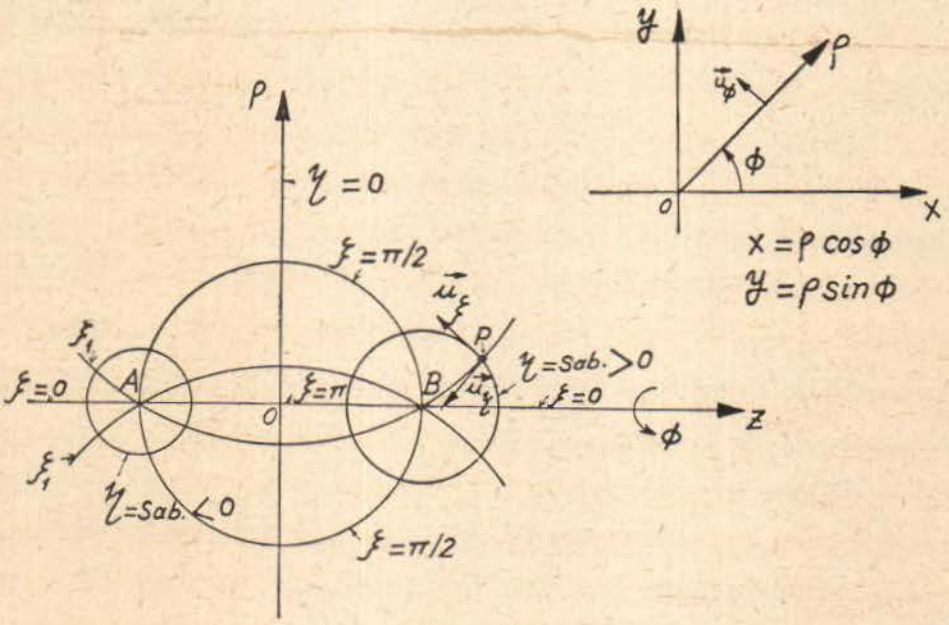


Şek. 120

Dipoler koordinatlar : Bu sistemin ξ ve η koordinatları ile z ve ρ koordinatları arasında

$$z = \frac{a \operatorname{Sh} \eta}{\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi} \quad , \quad \rho = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi} \tag{111}$$

bağıntıları vardır. Üçüncü koordinat ϕ açısıdır, şek. 121. Koordinatların



Şek. 121

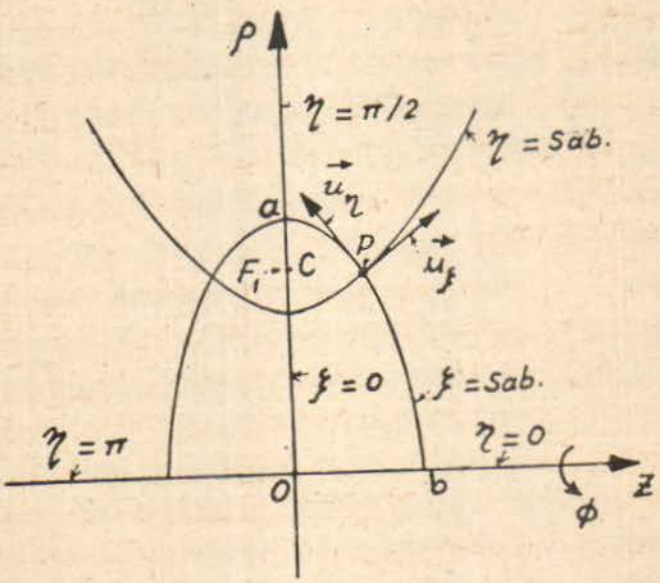
değişme sınırları $0 \leqq \xi \leqq \pi$, $-\infty < \eta < +\infty$, $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ dir. η = sab. yüzeyleri A veya B noktasını kuşatan kürelerdir. ξ = sab. yüzeyleri ise $\xi \approx \pi$ değerleri için masura biçimindedirler ve $\xi \approx 0$ civarında ise kürelere yaklaşırlar. ϕ = sab. yüzeyleri ise düzlemlerdir. Metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi} \quad , \quad h_\phi = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi} \tag{112}$$

dir.

Sferoidal (eliptik) koordinatlar : Bu koordinatlar ortak odaklı elipsleri eksenleri etrafında döndürerek elde edilir. Dönme küçük veya büyük eksen etrafında olduguna göre iki türlü sferoidal koordinat meydana gelir.

Yassılaşmış (oblate) sferoidal koordinatlar elipsleri küçük eksenleri etrafında döndürerek elde edilir, şek. 122. ξ ve η koordinatları



Şek. 122

$$z = c\,\mathrm{Sh}\,\xi\cos\eta\ ,\quad \rho = c\,\mathrm{Ch}\,\xi\sin\eta$$

şeklinde târif edilir. Üçüncü koordinat ϕ açısıdır. Bu denklemler arasında η ve ξ yi yokederek

$$\frac{z^2}{(c\,\mathrm{Sh}\,\xi)^2} + \frac{\rho^2}{(c\,\mathrm{Ch}\,\xi)^2} = 1\ ,$$

$$-\frac{z^2}{(c\cos\eta)^2} + \frac{\rho^2}{(c\sin\eta)^2} = 1$$

bulunur. Birinci denklem yardımiyle ξ=sab. için yarı eksenleri $a = c\,\mathrm{Ch}\xi$ (ρ—ekseni doğrultusunda) ve $b = c\,\mathrm{Sh}\,\xi$ (z — ekseni doğrultusunda) olan ortak odaklı elipsoidler elde edilir. Elipsoidler ξ=0 için z=0 düzlemindeki c yarıçaplı daireye dejenere olurlar. İkinci denklem yardımiyle η=sab. için ayni odaklı hiperboloidler elde edilir. Hiperboloidler $\eta = \pi/2$ için c yarıçaplı dairesel deliği ihtiva eden z=0 düzlemine dejenere olurlar. ζ ve η koordinatlarının değişme sınırları $0 < \xi < \infty$, $0 \leqq \eta \leqq \pi$ dır (küresel r, θ koordinatları gibi). Metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \sin^2\eta}\,, \quad h_\phi = \rho \tag{114}$$

dir.

Uzamış (prolate) sferoidal koordinatlar elipsleri büyük eksenleri etrafında döndürerek elde edilir, şek. 123. ξ ve η koordinatları

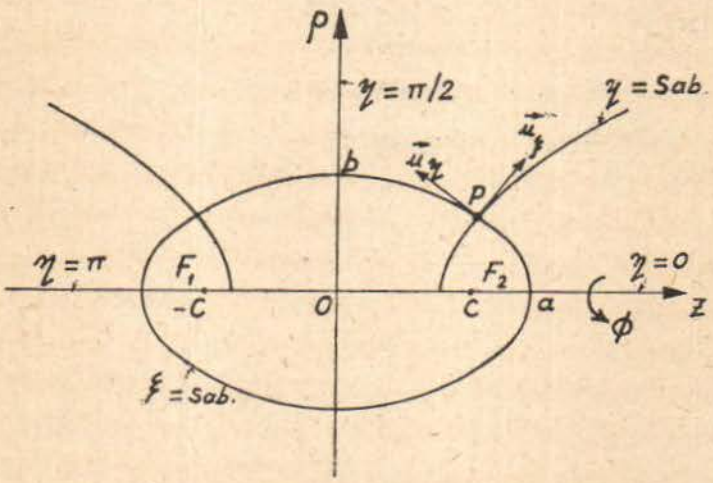
$$z = c\,\mathrm{Ch}\,\xi\cos\eta\,, \quad \rho = c\,\mathrm{Sh}\,\xi\sin\eta \tag{115}$$

şeklinde târif edilir. Üçüncü koordinat yine ϕ açısıdır. Bu denklemler yardımiyle

$$\frac{z^2}{(c\,\mathrm{Ch}\,\xi)^2} + \frac{\rho^2}{(c\,\mathrm{Sh}\,\xi)^2} = 1\,,$$

$$\frac{z^2}{(c\cos\eta)^2} - \frac{\rho^2}{(c\sin\eta)^2} = 1$$

bulunur. ξ=sab. için ortak odaklı elipsler ve η=sab. için ayni odaklı hiperboller elde edilir. Elipsleri z—ekseni etrafında döndürerek uzamış (prolate) elipsoidler elde edilir. Elipsoidler $\xi=0$ için odakları birleştiren



Şek. 123

doğruya ve $\xi\to\infty$ için kürelere dejenere olurlar. Hiperbolleri z—ekseni etrafında döndürerek hiperboloidler elde edilir. Hiperboloidler $\eta=0$ ve $\eta=\pi$ için z—ekseninin odakların sağında ve solunda kalan kısımla-

rına dejenere olurlar ve $\eta=/2$ için $z=0$ düzlemi haline gelirler. ξ ve η koordinatlarının değişme sınırları r, θ koordinatları gibidir. Metrik katsayılar

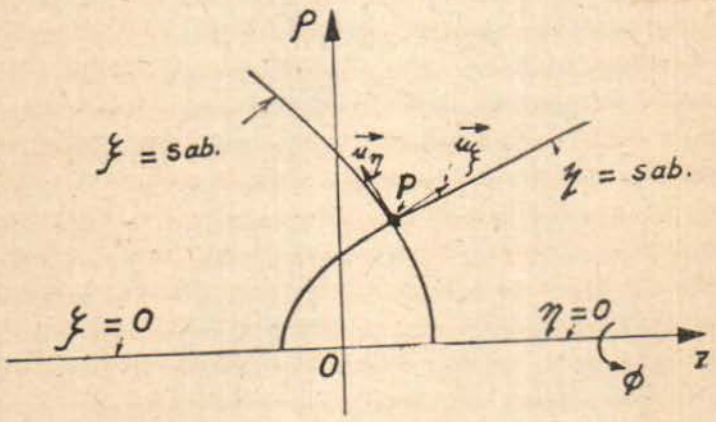
$$h_\xi=h_\eta=c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi-\cos^2\eta}\ ,\quad h_\phi=\rho \tag{116}$$

dır.

Paraboloidal koordinatlar : Bu koordinatlar parabolleri eksenleri etrafında döndürerek elde edilir. ξ ve η koordinatları

$$z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\ ,\quad \rho=\xi\eta \tag{117}$$

şeklinde târif edilir. Üçüncü koordinat ϕ açısıdır, şek. 124. ξ ve η



Şek. 124

koordinatlarının değişme sınırları $0 \leqq \xi < \infty$, $0 \leqq \eta < \infty$ dır. $\xi=$ sab. ve $\eta=$sab. için odakları orijinde bulunan paraboller elde edilir. Metrik katsayılar

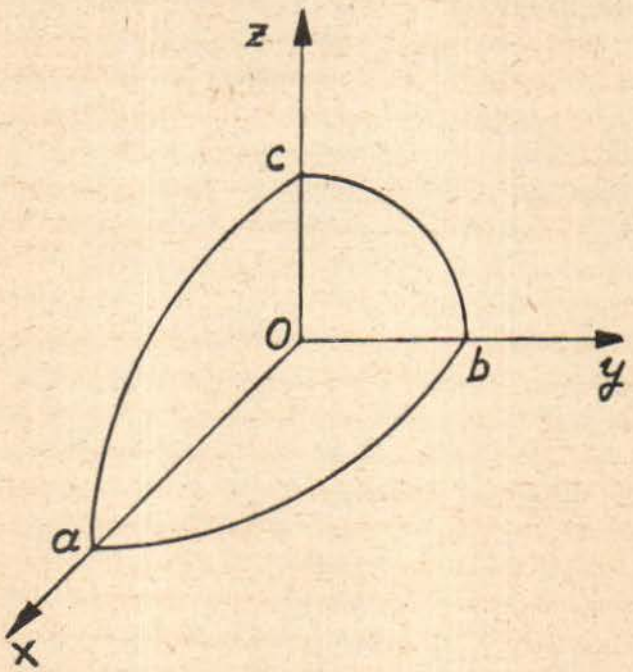
$$h_\xi=h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\ ,\quad h_\phi=\rho \tag{118}$$

dir.

Elipsoidal koordinatlar : Yarı eksenleri a,b,c $(a>b>c)$ olan elipsoidin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

dir, şek. 125. p parametresine göre yazılan



Şek. 125

$$\frac{x^2}{a^2+p}+\frac{y^2}{b^2+p}+\frac{z^2}{c^2+p}=1$$

denklemi $p=\xi>-d^2$ için elipsoidleri, $-c^2>p=\eta>-b^2$ için bir yaprakli hiperboloidleri ve $-b^2>p=\zeta>-a^2$ için iki yapraklı hiperboloidleri gösterir. Hepsinin odakları şek. 125 de görülen elipsoidin odaklarına intibak eder. Uzayda her noktadan bu tip yüzeylerden biri geçer. Böylece ξ, η, ζ ya, belirtilen değişme sınırları için, uzaydaki bir noktanın koordinatları gözüyle bakılabilir. Koordinat yüzeyleri $\xi=$sab. elipsoidleri, $\eta=$sab. hiperboloidleri (bir yapraklı) ve $\zeta=$sab. hiperboloidleridir (iki yapraklı).

p yerine ξ,ζ,η koyup, elde edilen denklemler x,y,z ye göre çözülürse

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} \quad , \\ y^2 &= \frac{(b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)} \quad , \\ z^2 &= \frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

bulunur. Metrik katsayılar

$$\left.\begin{aligned} h_\xi &= \frac{1}{2R_\xi}\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} \quad , \\ h_\eta &= \frac{1}{2R_\eta}\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)} \quad , \\ h_\zeta &= \frac{1}{2R_\zeta}\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)} \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

dir. R_p $(p=\xi,\eta,\zeta)$,

$$R_p = \sqrt{(p+a^2)(p+b^2)(p+c^2)} \tag{122}$$

kısaltmasını göstermektedir.

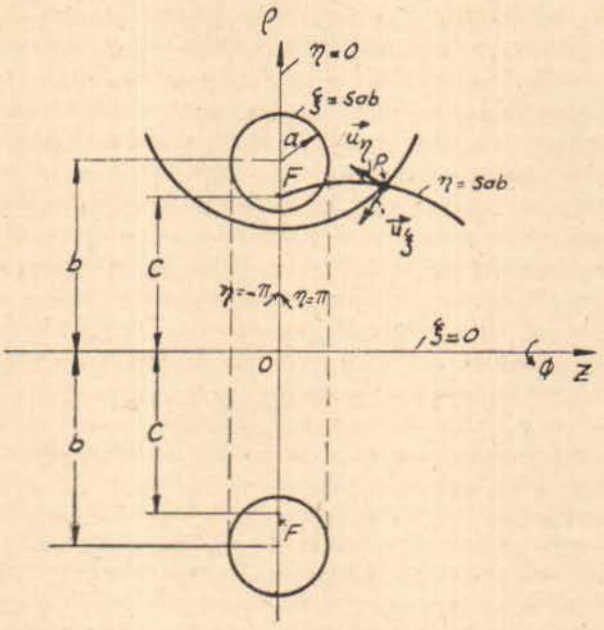
Toroidal koordinatlar : Bu sistemde ξ,η koordinatları

$$z = \frac{c \sin \eta}{\mathrm{Ch}\,\xi - \cos \eta} \quad , \quad \rho = \frac{c\,\mathrm{Sh}\,\xi}{\mathrm{Ch}\,\xi - \cos \eta} \tag{123}$$

denklemleri ile târif edilir, şek. 126. Üçüncü koordinat ϕ açısıdır. Bu denklemler yardımiyle

$$\left.\begin{aligned} z^2+(\rho-C\mathrm{th}\,\xi)^2 &= \left(\frac{c}{\mathrm{Sh}\,\xi}\right)^2 \quad , \\ (z-c\,\mathrm{ctg}\,\eta)^2+\rho^2 &= \left(\frac{c}{\sin \eta}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

yazılabilir. Birinci denklem $\xi=$ sab. için merkezleri ρ—ekseni üstünde bulunan ve yarıçapları $a=c/\mathrm{Sh}\,\xi$ olan daireleri gösterir. Daireler $\xi=0$ için z—ekseni ve $\xi=\infty$ için F noktasına dejenere olurlar. Daireleri z—ekseni etrafında döndürerek toroidler elde edilir. Toroidler $\xi=\infty$ için c yarıçaplı daireye dejenere olurlar. İkinci denklem $\eta=$ sab. için daire yaylarını gösterir. Bu yayları z—ekseni etrafında döndürerek küresel kepler elde edilir. Metrik katsayılar



Şek. 126

$$h_\xi = h_\eta = \frac{c}{\operatorname{Ch}\xi - \cos\eta}\ , \quad h_\phi = \rho \tag{125}$$

dir.

21. Ortogonal fonksiyon sistemleri.

$\phi_n(x)$ fonksiyon sistemi, m ve n tam sayı olmak üzere $m \neq n$ için

$$\int_a^b p(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \tag{126}$$

şartını yerine getiriyorsa bu sistemin (a, b) aralığında ve $p(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu söylenir. Meselâ $\sin nx$ ve $\cos nx$ trigonometrik fonksiyonları $(-\pi, \pi)$ aralığında ortogonal bir sistem teşkil ederler. Zira $m \neq n$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0\ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$$

dır. Ağırlık fonksiyonu ise $p(x)=1$ dir. Bessel ve Legendre fonksiyonları da ortogonallik şartını yerine getirirler.

$m=n$ için (126) integrali

$$N_n = \int_a^b [\phi_n(x)]^2 dx \tag{127}$$

şeklini alır. Buna sistemin normu denilir. Trigonometrik fonksiyonların normu π dir.

Dirichlet şartlarını sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \tag{128}$$

şeklinde bir ortogonal fonksiyon serisine açılabilir. Serinin katsayıları $\phi_n(x)$ sisteminin ortogonallik özelliğinden faydalanarak kolayca bulunur. Serinin iki tarafı $\phi_n(x)\,dx$ ile çarpılıp a,b arasında integre edilirse

$$A_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, dx \tag{129}$$

elde edilir.

Fourier serisi ve integrali : Fourier serisi pratikte çok kullanılan özel bir ortogonal seridir. Periyodik $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{130}$$

Fourier serisine açılabilir. Bu serinin katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \tag{131}$$

integralleri yardımiyle hesaplanır ($-\pi$ ve π yerine 0 ve 2π de alınabilir). Şayet $f(x)=f(-x)$ ise (çift fonksiyon) $b_n=0$ ve

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \ , \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (132)$$

ve $f(x)=-f(-x)$ ise (tek fonksiyon) $a_0=0$, $a_n=0$ ve

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (133)$$

olur. Böylece çift fonksiyonu kosınüs serisine ve tek fonksiyonu ise sinüs serisine açmak kabil olur. x—değişkeni bir uzunluğu gösterdiği takdirde uzunluk peridyonu $2l$ ile gösterek

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

yazılır. Katsayı integrallerinde π yerine l ve nx yerine $\frac{n\pi x}{l}$ alınır.

Sınır değeri problemlerinin çözümünde bir fonksiyonun belli bir aralık içindeki değişimi bizi ilgilendirir. Bu aralık dışında fonksiyonun bir çift veya tek fonksiyon gibi devam ettiğini farzedek bir kosinüs veya sinüs serisine açmak kabil olur.

Aralık sonsuza gittiği takdirde Fourier serisi yerine Fourier integrali kullanılır. Fourier integralinden periyodik olmayan fonksiyonları göstermek için faydalanılır, $f(x)$ fonksiyonunun $-\infty<x<\infty$ aralığındaki Fourier integral ifadesi (reel şekil)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}m\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos m\,(x-s)\,\mathrm{d}s \qquad (134)$$

dir. Şayet

$$\left.\begin{aligned} U(m) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\,dx \\ W(m) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx\,, \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

konursa

$$f(x) = \int_0^{\infty}\Big[U(m)\sin mx + W(m)\cos mx\Big]\,dm \qquad (136)$$

yazılabilir.

$f(x)$ çiftse

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dm \int_0^{\infty} f(s)\cos ms\cos mx\,ds \qquad (137)$$

(kosinüs integrali) ve tekse

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dm \int_0^{\infty} f(s)\sin ms\sin mx\,ds \qquad (138)$$

(sinüs integrali) yazılabilir. Bunlar sonsuz aralık için kosinüs ve sinüs serilerinin yerine geçerler.

$f(x)$ çift olduğu vakit $U(m) = 0$ ve

$$W(m) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos mx\,dx \qquad (139)$$

olur. $f(x)$ tek olduğu vakit de $W(m) = 0$ ve

$$U(m) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin mx\,dx \qquad (140)$$

olacaktır.

Şayet bizi yalnız $(0,\infty)$ aralığı ilgilendiriyorsa $f(x)$ ister çift, ister tek olsun veya hiç biri olmasın bir kosinüs veya sinüs integrali ile gösterilebilir.

Fourier integralinin kompleks şekli

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jmx}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{jms}\,ds\,dm \tag{141}$$

dir. İç integrali $g(m)$ şeklinde göstererek bu integrali

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(m)\,e^{jmx}\,dm\,,\\ g(m)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-jmx}\,dx \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

şeklinde iki integrale ayırmak kabil olur. İntegraller ayrı yazıldığı için ikinci integralde s yerine x konmuştur. Bu integrallere Fourier transformasyonları denilir. $f(x)$ integralinde $jm=p$ koyarak

$$f(x)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} g(p)\,e^{px}\,dp \tag{143}$$

yazılabilir. Bu kompleks integral rezidülerden faydalanarak hesaplanabilir.

$g(m)$ integralinde $e^{-jmx}=\cos mx+j\sin mx$ koyarak

$$g(m)=\pi[W(m)-j\,U(m)] \tag{144}$$

bulunur. Bunu $f(x)$ integralinde yerine koyarak (136) ifadesi elde edilir.

Fourier integralinin kompleks şekli ile çalışmak elverişlidir. Zira $f(x)$ ve $g(m)$ yi karşılıklı olarak veren cetveller düzenlenmiştir.

Sturm—Liouville problemi: Sınır değeri problemlerinin çözümünde

$$\frac{d}{du}\left[r(u) \frac{d}{du}\phi(u) \right] + [q(u)+\lambda p(u)]\phi(u) = 0 \qquad (145)$$

tipinde diferansiyel denkleme rastlanır. λ bir parametredir ve ileride görüleceği gibi problemin sınır şarları ancak belli λ değerleri için sağlanabilir. Bu λ değerlerine problemin karakteristik değerleri (eigenwerte, eigenvalues) ve bu değerlere tekabül eden çözümlere karakteristik fonksiyonlar (eigenfuktionen, eigenfunctions) adı verilir. Şayet $u = a$ ve $u = b$ sınırlarında $k_1\phi(a) + k_2\phi'(a) = 0, k_3\phi(b) + k_4\phi'(b) = 0$ ($k_1 \ldots k_4$ = sab.) şeklindeki homogen sınır şartları sağlanırsa (145) denkleminin çözümleri $p(u)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir fonksiyon sistemi teşkil ederler. Bu sınır şarları her üç nevi sınır değeri problemini içine alır. Zira $k_2=k_4=0$ için 1. nevi, $k_1=k_3=0$ için 2. nevi ve k lar sıfırdan farklı ise 3. nevi bir sınır değeri problemi bahis konusu olur. Böylece λ_m, λ_n gibi iki karakteristik değere ($m \neq n$) tekabül eden karakteristik fonksiyonlar $\phi_m(u)$ ve $\phi_n(u)$ ile gösterilirse, homogen sınır şartlarından biri gerçeklendiği vakit

$$\int_a^b p(u)\phi_m(u)\phi_n(u)\,du = 0$$

olacağı anlaşılır. (139) diferansiyel denkleminin homogen sınır şartlarını sağlayan çözümlerini bulmaya Sturm—Liouville problemi denilir.

Bessel ve Legendre fonksiyonları: Laplace denkleminin silindirik koordinatlardaki çözümünde

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (m^2\rho^2 - n^2)R = 0 \qquad (146)$$

şeklindeki Bessel diferansiyel dnnklemi ile karşılaşılır. m ve n (>0) parametrelerdir ve n denklemin basamağını gösterir. $R=R(\rho)$, yalnız ρ—değişkeninin fonksiyodunur. $x = m\rho$ koyarak denklem

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)R = 0 \qquad (147)$$

şekline sokulabilir. Bu denklemin çözümlerine Bessel fonksiyonları (silindirik fonksiyonlar) denilir. Genel çözüm x argümanına göre

$$R = A J_n(x) + B Y_n(x) \tag{148}$$

şeklindedir. A ve B, integrasyon sabitleridir. $J_n(x)$, n. basamaktan 1. nevi ve $Y_n(x)$ ise ayni basamaktan 2. nevi Bessel fonksiyonlarını gösterirler. Literatürde $N_n(x)$ şeklinde de gösterilen 2. nevi Bessel fonksiyonuna Neumann fonksiyonu adı da verilir. Bu fonksiyonlar seriler yardımiyle bulunur.

1. nevi Bessel fonksiyonları $n=1,2,\ldots$ için orijinde sıfır olurlar ve $J_0(0)=1$ dir. Bessel fonksiyonlarının değişmeleri sönen titreşimleri andırır ve sonsuz sayıda kökleri vardır. 2. nevi fonksiyonlar $x\to 0$ için $-\infty$ olurlar. Bu sebeple $\rho=0$ ekseni çözüm bölgesine girdiği vakit Neumann fonksiyonu kullanılamaz ve genel çözüm yalnız birinci terimden ibaret olur ($B=0$).

(146) da m^2 yerine $-m^2$ alınırsa çözüm

$$R = A J_n(jx) + B Y_n(jx)$$

şeklinde olur. Dolayısiyle Bessel fonksiyonlarının argümanı imajinerdir. Modifiye Bessel fonksiyonları yardımiyle

$$R = A I_n(x) + B K_n(x)$$

yazılabilir. $I_n(x)$ ve $K_n(x)$, 1. ve 2. nevi modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. $x \to 0$ için $K_n(x)$ ve $x \to \infty$ için $I_n(x)$ sonsuz olur. Bu sebeple $\rho=0$ ekseni çözüm bölgesine girince yalnız birinci ve $\rho\to\infty$ çözüm bölgesine girince de yalnız ikinci terim kullanılır.

3. nevi Bessel fonksiyonları (Hankel fonsiyonları)

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + j\,Y_n(x)\ , \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - j\,Y_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

şeklinde tarif edilirler. Bu fonksiyonlar sınır değeri problemlerinde pratik faydalar sağlarlar.

Bessel denklemi

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(-\frac{n^2}{\rho} + m^2\rho\right)R = 0$$

şeklinde yazılarak Sturm—Liouville tipi ile karşılaştırılırsa karakteristik

değerlerin $\lambda = m^2$ ve ağırlık fonksiyonunun $p(\rho)=\rho$ olduğu görülür. Homogen sınır şartları sağlandığı vakit Bessel fonksiyonları ortogonal bir sistem teşkil ederler. Özel olarak $J_n(m_\alpha \rho)$ partiküller çözümleri, $\rho = 0$ için

$$k_1 J_n(m_\alpha \rho) + k_2 \frac{dJ_n(m_\alpha \rho)}{d\rho} = 0$$

şartı gerçeklenirse, $0 \leqq \rho \leqq a$ aralığında ortogonal bir sistem meydana getirirler. Sistemin normu

$$N_n = \int_0^a \rho J_n^2(m_\alpha \rho)\, d\rho \tag{150}$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Böylece $k_2=0$ (1. nevi) için

$$N_n = \frac{a^2}{2} J^2_{n+1}(m_\alpha a)$$

ve $k_1=0$ için (2. nevi)

$$N_n = \frac{J_n^2(m_\alpha a)}{2 m_\alpha^2} [(m_\alpha a)^2 - n^2]$$

bulunur. k_1 ve k_2 sabitleri sıfırdan farklı olduğu vakit

$$N_n = \frac{J_n^2(m_\alpha a)}{2m_\alpha^2}\left[(m_\alpha a)^2 - n^2 + \left(\frac{k_1 a}{k_2}\right)^2\right]$$

elde edilir.

$a \leqq \rho \leqq b$ aralığında 1. ve 2. nevi homogen sınır şartları için normlar

$$N_n = \frac{b^2}{2} J^2_{n+1}(m_\alpha b) - \frac{a^2}{2} J^2_{n+1}(m_\alpha a),$$

$$N_n = \frac{1}{2m_\alpha^2}\left\{\left[(m_\alpha b)^2 - n^2\right] J_n^2(m_\alpha b) - \left[(m_\alpha a)^2 - n^2\right] J_n^2(m_\alpha a)\right\}$$

formülleri ile bulunur.

Bessel fonksiyonlarının ortogonalliğinden faydalanarak $f(\rho)$ fonksiyonunu

$$f(\rho) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha J_n(m\alpha\rho) \tag{151}$$

şeklinde Fourier—Bessel serisine açmak kabil olur. m_α değerleri sınır şartlarına uyan karakteristik değerlerdir. Serinin katsayıları

$$A_\alpha = \frac{1}{N_n} \int_0^a \rho f(\rho)\, J_n(m_\alpha \rho)\, d\rho \tag{152}$$

integrali yardımiyle hesaplanır.

Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki çözümünde

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dT}{d\theta}\right) + n(n+1)\, T = 0 \tag{153}$$

Legendre diferansiyel denklemine rastlanır. n tam sayıdır ve $T = T(\theta)$ dır. $\mu = \cos\theta$ koyarak Legendre denklemi

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dT}{d\mu}\right] + n(n+1)\, T = 0 \tag{154}$$

şekline sokulabilir. Legendre denkleminin genel çözümü

$$T = A P_n(\mu) + B Q_n(\mu) \tag{155}$$

dir. $P_n(\mu)$, 1. nevi Legendre fonksiyonudur. [$P_n^0(\mu)$ şeklinde de yazılır]. Bu fonksiyona Legendre polinomu (veya yüzey zonal harmoniği) denilir. Meselâ

$$P_0(\mu) = 1 \ , \quad P_1(\mu) = \mu \ , \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \ ,$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) \ , \quad P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$$

dir. Legendre polinomları $\mu = 1$ için $(\theta = 0)$ $P_n(1) = 1$ değerini alırlar.

$Q_n(\mu)$, 2. nevi Legendre fonksiyonudur. [$Q_n^0(\mu)$ şeklinde de yazılır]. Meselâ

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} \quad , \qquad Q_1(\mu) = P_1(\mu)Q_0(\mu) - 1 \quad ,$$

$$Q_2(\mu(=P_2(\mu)Q_0(\mu) - \frac{3}{2}\mu \quad ,$$

$$Q_3(\mu) = P_3(\mu)Q_0(\mu) - \frac{5}{2}\mu^2 + \frac{2}{3}$$

dir. İkinci nevi Legendre fonksiyonları $\mu = \pm 1$ ($\theta = 0$ veya π) için logaritmik olarak sonsuz olduklarından poler eksen çözüm bölgesine girince bu fonksiyonlar kullanılamaz ($B = 0$).

Legendre denklemi Sturm—Liouville tipi ile karşılaştırılırsa $\lambda = n(n+1)$ ve $p(\mu) = 1$ olduğu görülür. Legendre polinomları $-1 \leqq \mu \leqq 1$ aralığında ortogonal bir sistem teşkil ederler. Zira $m \neq n$ için

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu)\, P_n(\mu)\, d\mu = 0$$

dır. Sistemin normu

$$N_n = \int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \tag{156}$$

dir.

Dirichlet şartlarını yerine getiren bir $f(\mu)$ fonksiyonu $(-1,1)$ aralığında

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) \tag{157}$$

Legendre serisine açılabilir. Serinin katsayıları

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu)\, P_n(\mu) d\mu \tag{158}$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Şayet fonksiyon $f(\theta)$ şeklinde verilmişse seri

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta)$$

şeklini alır ve katsayılar

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \qquad (159)$$

integrali ile hesaplanır.

Legendre diferansiyel denklemi

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T = 0 \qquad (160)$$

asosye Legendre denkleminin $m = 0$ için özel halidir. m ve n tam sayılardır. $\mu = \cos\theta$ koyarak

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dT}{d\mu}\right] + \left[n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]T = 0 \qquad (161)$$

yazılabilir. Genel çözüm

$$T = A\,P_n^m(\mu) + B\,Q_n^m(\mu) \qquad (162)$$

dir. $P_n^m(\mu)$, n. basamaktan ve m. dereceden 1. nevi aşsosye Legendre fonksiyonudur ($m = n$). Meselâ

$$P_1^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}\ ,$$

$$P_2^1(\mu) = 3\mu\sqrt{1-\mu^2}\ ,\quad P_2^2(\mu) = 3(1-\mu^2)\ ,$$

$$P_3^1(\mu) = \frac{3}{2}\left(5\mu^2-1\right)\sqrt{1-\mu^2}\ ,\quad P_3^2(\mu) = 15\mu(1-\mu^2)\ ,\quad P_3^3(\mu) = 15(1-\mu^2)^{3/2}$$

dir. $P_n^m(1) = 0$ dır.

$Q_n^m(\mu)$, n. basamaktan ve m. dereceden 2. nevi asosye Legendre fonsiyonudur, Bu fonksiyonlar $\mu = \pm 1$ için sonsuz olduklarından poler eksen çözüm bölgesine girince kullanılamazlar. Meselâ

$$Q_1^1(\mu) = \left[\quad Q_0(\mu) + \frac{\mu}{1-\mu^2}\right]\sqrt{1-\mu^2}$$

$$Q_2^1(\mu) = \left[3\mu Q_0(\mu) + \frac{3\mu^2-2}{1-\mu^2}\right]\sqrt{1-\mu^2}\ ,$$

$$Q_2^2(\mu) = \left[3\,Q_0(\mu) + \frac{5\mu-3\mu^3}{(1-\mu^2)^2}\right]\sqrt{1-\mu^2}$$

dir.

(161) denklemi Sturm—Liouville tipi ile karşılaştırılırsa

$$\lambda = n(n+1) \quad , \quad p(\mu) = 1$$

veya

$$\lambda = -m^2 \quad , \quad p(\mu) = \frac{1}{1-\mu^2}$$

alınabileceği görülür. Yalnız 1. nevi asosye Legendre fonksiyonları $(-1,1)$ aralığında ortogonal bir sistem teşkil eder. Zira $\alpha \neq \beta$ için

$$\int_{-1}^{+1} P_\alpha^m(\mu)\, P_\beta^m(\mu)\, d\mu = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{+1} P_n^\alpha(\mu)\, P_n^\beta(\mu) d\mu = 0$$

dır. n basamağına göre norm $(m = \text{sab.})$

$$N_n = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{163}$$

olur.

Legendre denklemlerine potansiyel denkleminin sferoidal koordinatlardaki çözümünde de rastlanır. Bu koordinatlarda μ değişkeni $0 \leqq \mu \leqq \infty$ sınırları arasında değişir. Oblate koordinatlarda rastlanan

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1+\mu^2\right)\frac{dF}{d\mu}\right] - \left[n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{1+\mu^2}\right]F = 0 \tag{164}$$

denkleminin çözümleri imajiner argümanlıdır. $F = F(\mu)$ dir. $m = 0$ için Legendre fonksiyonları $P_n(j\mu)$ ve $Q_n(j\mu)$ olur. $m \neq 0$ için $P^m{}_n(j\mu)$ ve $Q_n^m(j\mu)$ elde edilir. Meselâ $P_0(j\mu) = 1$, $P_1(j\mu) = j\mu$, $P_1^1(j\mu) = \sqrt{1+\mu^2}$, $Q_0(j\mu) = -\text{arc ctg}\ \mu$ dir.

Ortogonal fonksiyonlar hakkında daha etraflı bilgi vermeğe kitabın hacmi müsait olmadığından bu hususta literatüre müracaat tavsiye edilir.

VII. DEĞİŞKENLERE AYIRMA METODU

22. Genel bilgi.

Potansiyel fonksiyonu, simetriden dolayı, bir değişkene bağlı olduğu takdirde Laplace denklemi âdi bir diferansiyel denklem haline geleceğinden çözüm direkt integrasyonla kolayca bulunur. Bu çeşit problemlerden bir kaç örnek daha önce görülmüştür. Diğer örnekler daha ilerideki bahislerde görülecektir.

Potansiyel fonksiyonu iki veya üç koordinata bağlı olduğu vakit sınır değeri problemlerini çözmek yani sınır şartlarını sağlayan harmonik fonsiyonları bulmak için çeşitli metodlar vardır. Bunları şöylece sıralayabiliriz : Değişkenlere ayırma, konform tasvir, enversiyon, imaj (daha önce görüldü), Green fonksiyonları, integral denklemleri. varyasyon hesabı, diferans denklemleri (nümerik metod), grafik, deney (anolojik).

Bu bahiste değişkenlere ayırma metodu gözden geçirilecektir. Metodun esası parsiyel diferansiyel denklemleri âdi diferanslyel denklemlere ayırmaktan ibarettir. Bu ayırma işlemi gördüğümüz koordinat sistemleri için mümkündür. Çeşitli koordinat sistemlerinde ayırmanın nasıl yapılacağı aşağıdaki bahislerde görülecektir.

İki boyutlu problemlerde potansiyel fonksiyonu bir eksene göre değişmez ve meselâ $\partial/\partial z = 0$ dır. Bütün $z =$ sab. düzlemlerinde alan ayni şekildedir. Eşpotansiyel yüzeyler silindirik yüzeylerden ve eşpotansiyel çizgiler ise bu yüzeylerin $z =$ sab. düzlemlerindeki izlerinden ibarettir. Bir sınır değeri problemine iki boyutlu gözüyle bakabilmek için incelenen sistemdeki tertiplerin sonsuz uzunlukta olması gerekir. Bu sebeple pratik bakımdan ideal bir iki boyutlu alan elde etmek imkânsızdır. Bununla beraber sınırlı uzunluktaki tertiplerde bazı şartların yerine gelmesi halinde (meselâ iletkenlerin uzunlukları, aralarındaki uzaklık yanında çok büyükse) kenar tesirlerini ihmal ederek problemi iki boyutlu gibi incelemek kabil olur. İki boyutlu problemleri de prensib olarak değişkenle-

re ayırma metodu yardımiyle çözebilirsek de bu problemler için konform tasvir metodu çok daha elverişlidir.

23. Poisson denkleminin integrasyonu.

Laplace denklemi, elektrik yükleri iletken yüzeylerine dağıldığı veya ortamda noktasal veya çizgisel karakterde konsantre yükler bulunduğu vakit kullanılır. Zira ortam içinde sürekli bir yük dağılışı yoktur. Buna karşılık sürekli yük dağılışı için $\Delta\varphi=-\rho/\varepsilon$ Poisson denkleminin çözümlerini araştırmak gerekecektir. Homogen olmayan bu parsiyel diferansiyel denklemin genel çözümü, partiküller çözüm ile homogen denklemin çözümünden (tamamlayıcı fonksiyon) teşekkül eder. Bir koordinata göre değişen problemlerde çözüm direkt integrasyonla kolayca bulunur. Meselâ kartezyen koordinatlarda $\partial/\partial y=\partial/\partial z=0$ için yazılan $d^2\varphi/dx^2=-\rho/\varepsilon$ denklemi $\rho=\rho_0=$sab. için integre edilirse

$$\varphi(x)=Ax+B-\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2$$

bulunur. $Ax+B$, homogen denklemin (Laplace denklemi) çözümünü ve $-\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2$ ise partiküler çözümü göstermektedir. A ve B integrasyon sabitleri problemin sınır şartları yardımiyle bulunur.

Poison denkleminin partiküler çözümü ikinci Green teoremi yardımiyle bulunabilir. Partiküler çözüm daha önce $\rho\,dV$ yük elemanının r uzaklığındaki P noktasında meydana getirdiği $d\varphi=\rho\,dV/4\pi\varepsilon r$ potansiyelinin integrasyonu ile bulunmuştur ve

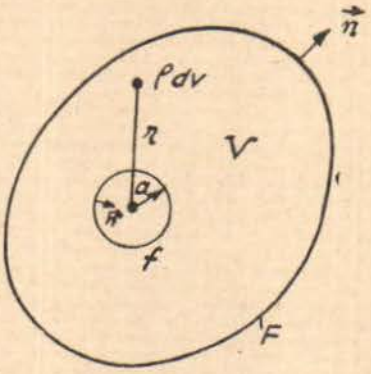
$$\varphi_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho\,dV}{r}$$

dir. Poison denkleminin Green çözümünü bulmak için faydalanılacak olan ikinci Green formülü daha önce görüldüğü gibi

$$\int_V(\phi\,\Delta\varphi-\varphi\Delta\phi)\,dV=\oint_F\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dF$$

şeklindedir. $\phi=1/r$ seçilirse $r\to 0$ için $\phi\to\infty$ olacağından, P noktasını, yarıçapı a olan çok küçük bir küre ile kuşatarak bu noktayı integ-

rasyon bölgesi dışında tutmak suretiyle yok edelim, şek. 127. Green teoremi kürenin f yüzeyi ile her hangi bir F kapalı yüzeyi tarafından



Şek. 127

sınırlanan V bölgesine tatbik edilirse $\Delta\phi = \Delta(1/r) = 0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\int_V \frac{\Delta\varphi}{r}\,dV = \oint_f \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]df + \oint_F \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF$$

yazılabilir. f yüzeyi için pozitif normal yönü V bölgesinden dışarı ya ni kürenin P merkezine doğru olduğundan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$$

dir. Böylece $r = a$ koyarak

$$\oint_f = -\frac{1}{a}\oint_f \frac{\partial\varphi}{\partial r}df - \frac{1}{a^2}\oint_f \varphi df$$

elde edilir. φ ve $\partial\varphi/\partial r$ nin f yüzeyi üzerinden hesaplanan ortalama değerleri $\bar{\varphi}$ ve $\overline{(\partial\varphi/\partial r)}$ ile gösterilirse

$$\oint_f = -4\pi a\left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\right) - 4\pi\,\bar{\varphi}$$

yazabiliriz. $a \to 0$ limitine geçilirse birinci terim sıfır ve $\bar{\varphi} \to \varphi_P$ olur. Böylece P noktasındaki potansiyel için, $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$ olduğunu da gözönüne alarak

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\oint_F \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dF \qquad (165)$$

ifadesi bulunur. Birinci terim F içindeki yüklerin ve ikinci terim ise F dışındaki yüklerin potansiyeldeki paylarını gösterir. Şayet F yüzeyi bütün yük dağılışını içine alacak şekilde seçilirse ikinci terim sıfır olur. Ayni sonucu F yüzeyini, merkezi P de bulunan R yarıçaplı bir küre gibi düşünmek ve $R\to\infty$ limitine geçme suretiyle de görebiliriz. Zira $R\to\infty$ için yüzey integrali içindeki terimler $1/R^3$ gibi sıfıra ve kürenin yüzeyi R^2 gibi sonsuza gideceğinden çarpımları $1/R$ gibi sıfıra gider.

(165) denkleminde birinci terim Poisson denkleminin partiküler çözümünü ve ikinci terim ise Laplace denkleminin çözümünü gösterir. F yüzeyindeki φ ve $\partial\varphi/\partial n$ değerleri bilinecek olursa yüzey integralini hesaplamak kabil olur.

24. Kartezyen koordinatlarda analitik çözüm.

İlk önce iki boyutlu Laplace denkleminin çözümünü görelim. $\partial/\partial z=0$ için iki boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

şeklindedir. $\varphi(x,y)$ yerine

$$\varphi(x,y) = X(x)\ Y(y)$$

şeklinde yalnız x ve yalnız y değişkenine bağlı olan iki fonksiyonun çarpımı alınırsa Laplace denklemi (XY ye bölerek)

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

şekline girer. Birinci terim yalnız x değişkenine ve ikinci terim ise yalnız y değişkenine bağlı olduğundan bu denklemin gerçeklenebilmesi için terimlerin sabit olması gerekir. Böylece ikinci terimi m^2 ye eşit yazarak

$$\frac{d^2X}{dx^2} + m^2 X = 0\ ,\quad \frac{d^2Y}{dy^2} - m^2 Y = 0$$

denklemleri elde edilir. Parsiyel diferansiyel denklem iki âdi diferansiyel denkleme ayrılmıştır. m ye ayırma sabiti denilir. Bu sabitin alacağı değerler sınır şartları ile belli olur. Birinci denklem Sturm—Liouville denklemi ile karşılaştırılırsa $r(x)=1$, $q(x)=0$, $p(x)=1$ ve $\lambda=m^2$ olduğu görülür. Sınır şartlarına uyan her hangi bir karakteristik değer m_α ile gösterilirse bu diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$X_\alpha = A_\alpha \sin m_\alpha x + B_\alpha \cos m_\alpha x \ ,$$

$$Y_\alpha = C_\alpha \ \mathrm{Sh}\ m_\alpha y + D_\alpha \ \mathrm{Ch}\ m_\alpha y$$

olur. Y_α için $Y_\alpha = C_\alpha e^{m_\alpha y} + D_\alpha e^{-m_\alpha y}$ üstel şekli de alınabilir. Harmonik fonksiyon $X_\alpha Y_\alpha$ ve genel çözüm

$$\varphi(x,y) = \sum_\alpha X_\alpha Y_\alpha$$

dir. Toplam α üzerinden yapılır. Karekteristik değerler sürekli bir spektrum teşkil ettiği takdirde toplam yerine

$$\varphi(x,y) = \int f(m) X_\alpha Y_\alpha \, dm$$

integralini almak gerekir.

m^2 yerine $-m^2$ alınırsa X ve Y fonksiyonlarının rolleri değişir.

$m=0$ için çözümler $X_0 = A_0 x + B_0$, $Y_0 = C_0 y + D_0$ şeklinde yani lineer olur. Harmonik $X_0 Y_0$ dır. Bunu $k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 xy$ şeklinde yazabiliriz. Problemin şartları gerektirirse bu harmoniği de hesaba katmak icap eder.

Üç boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

dir. Eğer

$$\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

ayırması yapılırsa

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

elde edilir. Birinci terimi $-m^2$ ye ve ikinci terimi $-n^2$ ye eşit yazarak

$$\frac{d^2X}{dx^2} + m^2 X = 0 \ , \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + n^2 Y = 0 \ , \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - (m^2+n^2)Z = 0$$

diferansiyel denklemleri bulunur. Sınır şartlarını sağlayan karakteristik değerler m_α ve n_β ile gösterilirse çözümler

$$X_\alpha = A_\alpha \sin m_\alpha x + B_\alpha \cos m_\alpha x \ ,$$

$$Y_\beta = C_\beta \sin n_\beta y + D_\beta \cos n_\beta y \ ,$$

$$Z_{\alpha,\beta} = E_{\alpha,\beta} \ \mathrm{Sh}\ \sqrt{m_\alpha{}^2 + n\beta^2}\, z + F_{\alpha,\beta} \ \mathrm{Ch}\ \sqrt{m_\alpha{}^2 + n_\beta{}^2}\, z$$

olur. Harmonik $X_\alpha Y_\beta Z_{\alpha,\beta}$ ve genel çözüm

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} X_\alpha Y_\beta Z_{\alpha,\beta}$$

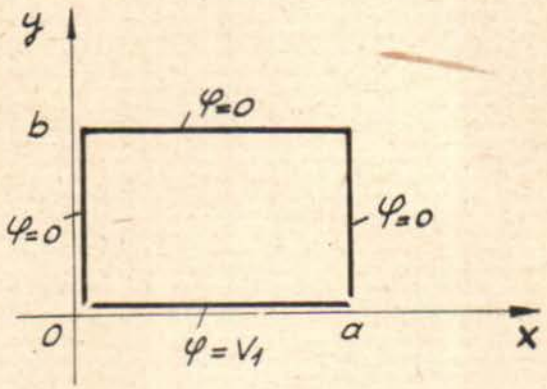
dir. Toplamlar α ve β üzerinden yapılır. Sürekli spektrumda toplamlar yerine integraller gelir.

m veya n den biri sıfır olursa çözümlerden biri lineer karakterde olur ve çift toplam basit toplam haline gelir. $m=n=0$ halinde harmonik $(A_0X+B_0)(C_0y+D_0)(E_0z+F_0)$ olacaktır.

Yukarıdaki çözümlerde integrasyon sabitleri sınır şartları yardımiyle tâyin edilirler.

Örnekler :

1 — Sonsuz uzun dikdörtgen kesitli tübün kenarlarındaki potansiyeller bilindiğine göre potansiyel fonksiyonu bülunacaktır, şek. 128



Şek. 128

$\partial/\partial z=0$ olduğundan problem iki boyutludur. Sınır şartları $\varphi(0,y)=0$ $\varphi(a,y)=0$, $\varphi(x,b)=0$ ve $\varphi(x,0)=V_1$=sab. dir. X için üstel çözüm alınırsa $X(0)=0$ şartından $B=0$ ve $X(a)=0$ şartından $A\,\mathrm{Sh}\,ma=0$ bulunur. $A=0$ almak gerekeceğinden bu çözüm kullanılamaz. X için trigonometrik çözüm alınırsa $X(0)=0$ dan $B=0$ ve $X(a)=0$ dan $A\sin ma=0$ bulunur. Buradan $m_\alpha = \alpha\pi/a\,(\alpha=1,2,...)$ değerlerinin alınacağı anlaşılır. α için negatif değerler alınırsa potansiyel fonksiyonunun yalnız işareti değişir. $Y(b)=0$ şartından $C_\alpha/D_\alpha = -\,\mathrm{Cth}\,m_\alpha b$ bulunur. $A_\alpha D_\alpha = K_\alpha$ koyarak genel çözüm için

$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha} K_\alpha \sin\frac{\alpha\pi x}{a}\,\frac{\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha\pi}{a}(b-y)}{\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha\pi b}{a}}$$

ifadesi elde edilir. V_1, $(0,a)$ aralığında Fourier sinüs serisine açılırsa

$$V_1 = \sum_{\alpha} M_\alpha \sin \frac{\alpha \pi x}{a}$$

bulunur. M_α katsayıları

$$M_\alpha = \frac{2V_1}{a} \int_0^a \sin \frac{\alpha \pi x}{a} \, dx$$

integrali yardımiyle hesaplanır ve $M_\alpha = 4V_1/\alpha\pi$ (α=tek sayı) dır. Genel Çözüm $\varphi(x,0) = V_1$ şartı yardımiyle

$$V_1 = \sum_{\alpha} K_\alpha \sin \frac{\alpha \pi x}{a}$$

şekline gireceğinden bunu V_1 serisi ile karşılaştırarak $K_\alpha = 4V_1/\alpha\pi$ olduğu görülür. Böylece potansiyel için

$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha(\text{tek})} \frac{4V_1}{\alpha\pi} \sin \frac{\alpha \pi x}{a} \frac{\text{Sh} \frac{\alpha\pi}{a}(b-y)}{\text{Sh} \frac{\alpha \pi b}{a}}$$

serisi elde eldilir.

Dikdörtgenin $y = b$ kenarının V_2 potansiyeli verildiği takdirde (diğer kenarlar sıfır potansiyelinde) problem benzer şekilde çözülür. $X(0) = X(a) = Y(0) = 0$ şartları yardımiyle genel çözüm için

$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha} K_\alpha \sin \frac{\alpha \pi x}{a} \text{Sh} \frac{\alpha \pi y}{a}$$

ifadesi bulunur ($K_\alpha = A_\alpha \, C_\alpha$). Fourier sinüs serisi ile karşılaştırarak son sınır şartı yardımiyle

$$K_\alpha = \frac{4V_2}{\alpha\pi \, \text{Sh} \frac{\alpha \pi b}{a}}$$

ve potansiyel için

$$\varphi(x,y)=\sum_{\alpha(\text{tek})}\frac{4V_2}{\alpha\pi}\sin\frac{\alpha\pi x}{a}\,\frac{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi y}{a}}{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi b}{a}}$$

bulunur.

Şayet $x=0$ kenarının V_3 potansiyeli verilirse X ve Y fonsiyonlarının rollerini değlştirmek gerekir. Analiz sonunda

$$\varphi(x,y)=\sum_{\alpha}\frac{4V_3}{\alpha\pi}\sin\frac{\alpha\pi y}{b}\,\frac{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi a}{b}}$$

bulunur. $x=a$ kenarının V_4 potansiyeli verildiği takdirde benzer analizle

$$\varphi(x,y)=\sum_{\alpha}\frac{4V_4}{\alpha\pi}\sin\frac{\alpha\pi y}{b}\,\frac{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi x}{b}}{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi a}{b}}$$

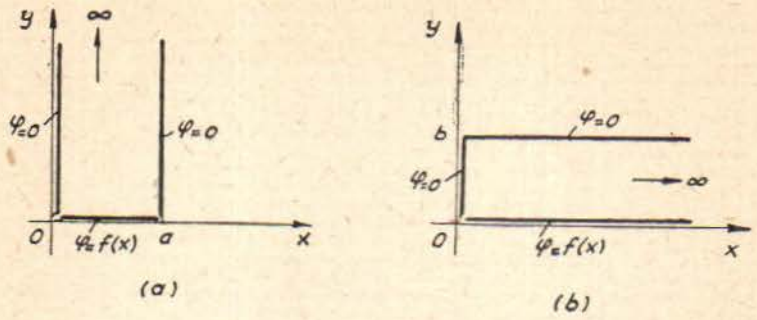
bulunur. Bir kenarın potansiyel dağılışı $f(x)$ veya $f(y)$ şeklinde yani x ve y değişkenlerinin fonksiyonu olarak verilirse Fourier serisinin katsayıları

$$M_\alpha=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\alpha\pi x}{a}\,dx$$

integrali yardımiyle hesaplanır. $f(y)$ fonksiyonu için a yerine b ve x yerine y alınacaktır.

Yukarıdaki çözümleri süperpoze ederek kenarların potansiyel dağılışları ne olursa olsun çözümleri elde etmek kabil olur. Meselâ $y=0$ ve $x=a$ kenarlarının V_1 ve V_4 potansiyelleri verildiği takdirde (diğer kenarlar sıfır potansiyelinde) çözüm yukarıda üç kenarın potansiyelleri sıfırken elde edilen sonuçları süperpoze ederek elde edilir.

2 — Şek. 129 da görülen sistemlerin potansiyel fonksiyonları bulunaktır.



Şek. 129

(a) daki sistem için $X(0)=0$ ve $X(a)=0$ şartları yardımiyle $B=0$ ve $m_\alpha = \alpha\pi/a$ bulunur. Diğer taraftan

$$Y = Ce^{my} + De^{-my}$$

üstel şeklinden kolayca görüleceği gibi $C=0$ almak gerekeceğinden

$$\varphi(x,y) = \sum_\alpha K_\alpha\, e^{-\frac{\alpha\pi y}{a}} \sin\frac{\alpha\pi x}{a}$$

bulunur. $\varphi(x,0)=f(x)$ şartı yardımiyle

$$f(x) = \sum_\alpha K_\alpha \sin\frac{\alpha\pi x}{a}$$

bulunacağından K_α katsayıları

$$K_\alpha = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\alpha\pi x}{a}\,dx$$

integrali yardımiyle hesaplanır.

(b) deki sistemde $X(0)=0$ şartından $B=0$ bulunursa da $\sin ma=0$ yazılamaz. Zira $a\to\infty$ için sinüsün limiti yoktur. Sonuç olarak m her değeri alabileceğinden sürekli bir spektrum elde edilir. $Y(b)=0$ şartından $C/D=-\mathrm{Cth}\, mb$ bulunacağından harmonik için

$$XY = K \sin mx \frac{\operatorname{Sh} m(b-y)}{\operatorname{Sh} mb}$$

yazılabilir. Genel çözüm

$$\varphi(x,y) = \int_0^\infty K(m) \sin mx \frac{\operatorname{Sh} m(b-y)}{\operatorname{Sh} mb} \, dm$$

şeklindedir. $\varphi(x,0) = f(x)$ şartından

$$f(x) = \int_0^\infty K(m) \sin mx \, dm$$

bulunnr. $x < 0$ bölgesi problemin sınırı dışındadır. $f(x)$ in Fourier sinüs integrali

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin mx \, dx$$

şeklinde olduğundan genel çözümün Fourier integrali

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \, ds \int_0^\infty \sin mx \sin ms \frac{\operatorname{Sh} m(b-y)}{\operatorname{Sh} mb} \, dm$$

olacaktır.

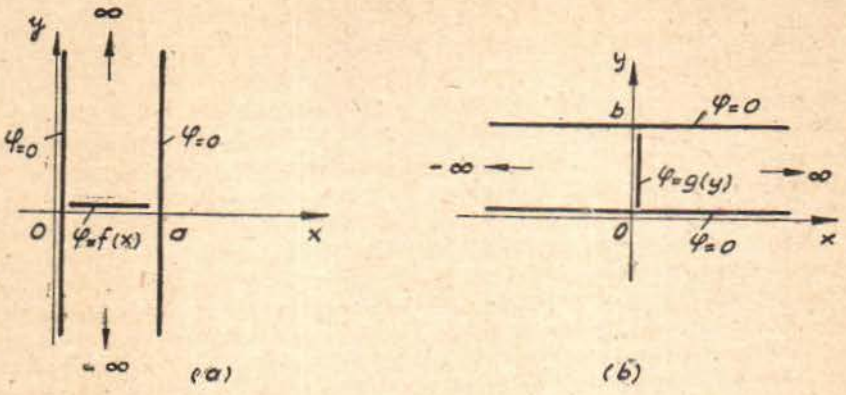
3 — Şek, 130 daki sistemlerin potansiyel fonksiyonları bulunacaktır.

(a) daki sistemde $y > 0$ bölgesinde

$$\varphi(x,y) = \sum_\alpha K_\alpha e^{-\frac{\alpha \pi y}{a}} \sin \frac{\alpha \pi x}{a}$$

dır. $y < 0$ bölgesinde pozitif işaret almak icap eder. K_α nın nasıl bulunacağı yukarıda görülmüştür.

(b) deki sistemde $x > 0$ bölgesinde

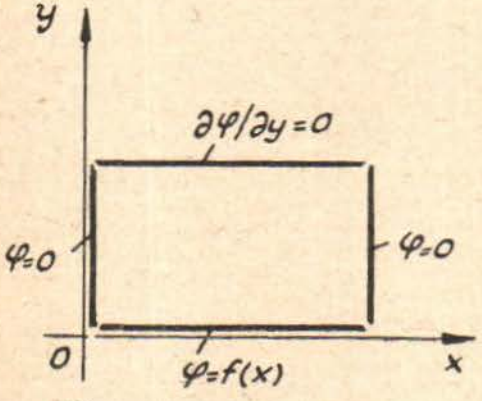


Şek. 130

$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}\, e^{-\frac{\alpha\pi x}{b}} \sin\frac{\alpha\pi y}{b}$$

dır. $x>0$ bölgesinde pozitif işaret alınır.

4 — Şek. 131 deki sistemde potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 131

$X(0) = 0$ ve $X(a) = 0$ şartları yardımiyle $B = 0$ ve $m_{\alpha} = \alpha\pi/a$ bulunur. $(\partial\varphi/\partial y)_{y=b} = 0$ şartına göre $Y'(b) = 0$ olacağından $C_{\alpha}/D_{\alpha} = -\text{Th}\, m_{\alpha}\, b$ bulunur. Genel çözüm

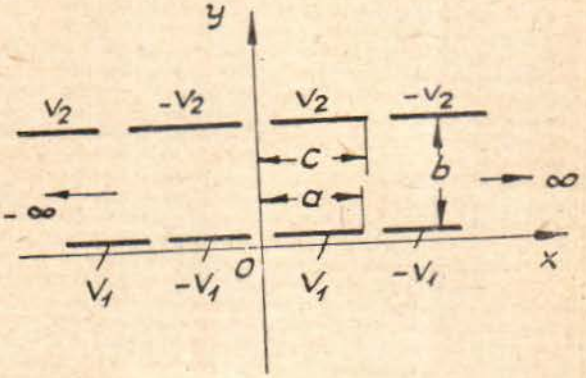
$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha} K_\alpha \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \frac{\operatorname{Ch} \frac{\alpha\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{Ch} \frac{\alpha\pi b}{a}}$$

dir. $\varphi(x,0)=f(x)$ şartı yardımiyle

$$K_\alpha = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\alpha\pi x}{a} dx$$

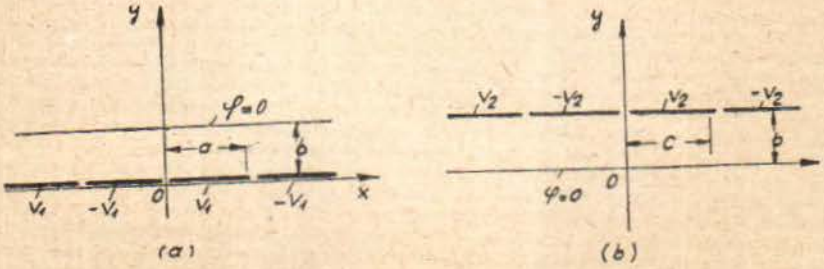
bulunur.

5 — Şek. 132 deki sistemde potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 132

Problem süperpozisyonla çözülebilir. Süperpoze edilecek sistemler şek. 133 de görülmektedir. (*a*) daki sistem için



Şek. 133

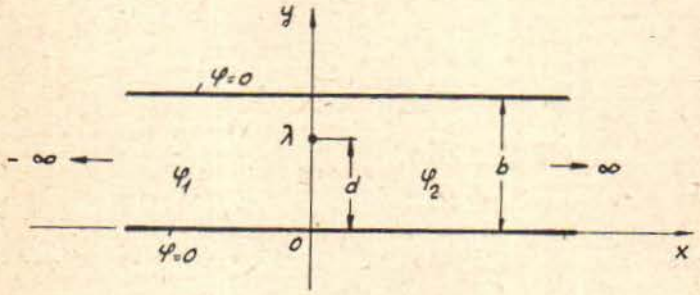
$$\varphi_1(x,y) = \sum_{\alpha(\text{tek})} \frac{4V_1}{\alpha\pi} \frac{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi b}{a}} \sin\frac{\alpha\pi x}{a}$$

ve (b) deki sistem için

$$\varphi_2(x,y) = \sum_{\alpha} \frac{4V_2}{\alpha\pi} \frac{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi y}{c}}{\operatorname{Sh}\frac{\alpha\pi b}{c}} \sin\frac{\alpha\pi x}{c}$$

bulunur. Orijinal problemin çözümü $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ dir.

6 — Topraklanmış paralel levhaların arasına üniform çizgisel yük getiriliyor, Şek. 134. Sistemin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 134

Problem iki boyutludur. Sınır şartları $\varphi(x,0) = 0$, $\varphi(x,b) = 0$, $\varphi(\pm\infty,y)=0$ dır. X için üstel çözüm ve Y için trigonometrik çözüm alınırsa $Y(0)=0$ şartından $D=0$ ve $Y(b)=0$ şartından $m_\alpha = \alpha\pi/b$ ($\alpha=1,2,...$) bulunur. $\varphi(\pm\infty,y)=0$ şartı yardımiyle $x>0$ için $C=0$ ve $x<0$ için $D=0$ bulunur. Böylece bu bölgedeki potansiyel fouksiyonlarını φ_1 ve φ_2 ile göstererek

$$\varphi_1 = \sum_{\alpha} K_\alpha e^{\frac{\alpha\pi x}{b}} \sin\frac{\alpha\pi y}{b} \quad (x>0),$$

$$\varphi_2 = \sum_{\alpha} P_\alpha e^{-\frac{\alpha\pi x}{b}} \sin\frac{\alpha\pi y}{b} \quad (x<0)$$

elde edilir. $x=0$ için $\varphi_1=\varphi_2$ olacağından $K_\alpha = P_\alpha$ dır. $x=0$ düzlemindeki yük dağılışı için birim impuls fonksiyonu yardımiyle

$$\sigma(y) = \lambda\delta(y-d)$$

yazılabilir. Bu fonksiyon için

$$\int_0^b \delta(y-d)\,dy = 1\ ,\quad \int_0^b f(y)\,\delta(y-d)dy = f(d)$$

dir $(0<d<b)$. $x=0$ düzlemindeki ikinci sınır şartı

$$\frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{x=0}$$

şeklinde olacağından

$$\frac{\lambda\,\delta(y-d)}{\varepsilon_0} = \sum_\alpha K_\alpha \frac{2\alpha\pi}{b}\sin\frac{\alpha\pi y}{b}$$

elde edilir. Buradan

$$K_\alpha = \frac{\lambda}{\alpha\pi\varepsilon_0}\int_0^b \delta(y-d)\sin\frac{\alpha\pi y}{b}\,dy = \frac{\lambda}{\alpha\pi\varepsilon_0}\sin\frac{\alpha\pi d}{b}$$

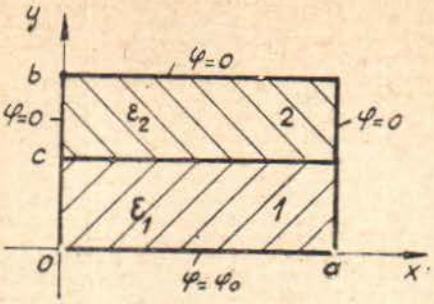
bulunur. Aranan potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_1(x,y) = \sum_\alpha \frac{\lambda}{\alpha\pi\varepsilon_0}\sin\frac{\alpha\pi d}{b}\,e^{-\frac{\alpha\pi x}{b}}\sin\frac{\alpha\pi y}{b}\ ,$$

$$\varphi_2(x,y) = \sum_\alpha \frac{\lambda}{\alpha\pi\varepsilon_0}\sin\frac{\alpha\pi d}{b}\,e^{\frac{\alpha\pi x}{b}}\sin\frac{\alpha\pi y}{b}$$

dir.

7 — Şek. 135 deki sistemde potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 135

1 ve 2 bölgelerindeki potansiyelleri φ_1 ve φ_2 ile gösterelim. $X(0)=0$ şartından $B=0$ ve $X(a)=0$ şartından $m_\alpha = \alpha\pi/a$ bulunur. Bu bölgelerdeki harmonikler için

$$(c_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha y + d_\alpha \operatorname{Ch} m_\alpha y) \sin m_\alpha x \quad ,$$
$$(e_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha y + f_\alpha \operatorname{Ch} m_\alpha y) \sin m_\alpha x$$

yazılabilir. $y=0$ için $\varphi=0$ olduğundan $e_\alpha/f_\alpha = -\operatorname{Cth} m_\alpha b$ bulunur. Genel çözümler.

$$\varphi_1(x,y) = \sum_\alpha (c_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha y + d_\alpha \operatorname{Ch} m_\alpha y) \sin m_\alpha x \quad ,$$

$$\varphi_2(x,y) = \sum_\alpha f_\alpha \frac{\operatorname{Sh} m_\alpha (b-y)}{\operatorname{Sh} m_\alpha b} \sin m_\alpha x$$

şeklindedir. $y=0$ için $\varphi_1(x,0)=\varphi_0=$ sab. olduğundan

$$\varphi_0 = \sum_\alpha d_\alpha \sin \frac{\alpha\pi x}{a}$$

yazarak

$$d_\alpha = \frac{4\varphi_0}{\alpha\pi} \quad (\alpha = \text{tek sayı})$$

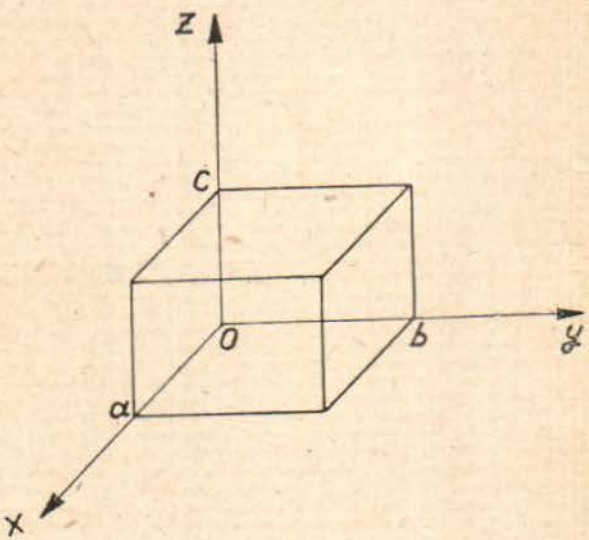
bulunur. İki dielektrik arasındaki sınır yüzeyinde sınır şartları $y=0$ için $\varphi_1=\varphi_2$ ve $\varepsilon_1(\partial\varphi_1/\partial y)=\varepsilon_2(\partial\varphi_2/\partial y)$ şeklinde olduğundan

$$c_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha c+d_\alpha \operatorname{Ch} m_\alpha c=f_\alpha \frac{\operatorname{Sh} m_\alpha (b-c)}{\operatorname{Sh} m_\alpha b}$$

$$\varepsilon_1(c_\alpha \operatorname{Ch} m_\alpha c+d_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha c)=-\varepsilon_2 f_\alpha \frac{\operatorname{Ch} m_\alpha (b-c)}{\operatorname{Sh} m_\alpha b}$$

denklemleri yazılabilir ve bunları çözerek katsayılar bulunur.

8 — Şek. 136 daki kutunun içindeki potansiyel fonksiyonu bulunacaktır. $z=0$ yüzeyindeki potansiyel dağılışı $\varphi=f(x,y)$ dir ve diğer yüzler topraklanmıştır.



Şek. 136

$X(0)=0$ şartından $B=0$, $X(a)=0$ şartından $m_\alpha=\alpha\pi/a$, $Y(0)=0$ şartından $D=0$, $Y(b)=0$ şartından $n_\beta=\beta\pi/b$ bulunur $(\alpha,\beta=1,2,\ldots)$. α ve β için negatif değerleri almağa lüzum yoktur. Zira bunlar fonksiyonu değiştirmezler. X_α ve Y_β çözümleri $X_\alpha=A_\alpha \sin m_\alpha x$, $Y_\beta=C_\beta \sin n_\beta y$ şeklindedir. $Z_{\alpha,\beta}$ ise

$$Z_{\alpha,\beta}=E_{\alpha,\beta}\operatorname{Sh}\sqrt{m_\alpha{}^2+n_\beta{}^2}\,z+F_{\alpha,\beta}\operatorname{Ch}\sqrt{m_\alpha{}^2+n_\beta{}^2}\,z$$

şeklindedir. $Z(c) = 0$ şartından $F_{\alpha,\beta}/E_{\alpha,\beta} = -\operatorname{Th}\sqrt{m_\alpha^2 + n_\beta^2}\, c$ bulunacağından

$$Z_{\alpha,\beta} = E_{\alpha,\beta} \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{m_\alpha^2 + n_\beta^2}(z-c)}{\operatorname{Ch}\sqrt{m_\alpha^2 + n_\beta^2}\, c} \sin m_\alpha x \sin n_\beta y$$

yazılabilir. Genel çözüm

$$\varphi(x,y,z) = \sum_\alpha \sum_\beta K_{\alpha,\beta} \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}(z-c)}{\operatorname{Ch}\sqrt{m_\alpha^2 + n_\beta^2}\, c} \sin m_\alpha x \sin n_\beta y$$

dir ($K_{\alpha,\beta} = A_\alpha C_\beta E_{\alpha,\beta}$).

$f(x,y)$ fonksiyonu bir çift Fourier serisine açılabilir. Aralıklar x—değişkeni için $(0,a)$ ve y— değişkeni için $(0,b)$ olduğundan

$$f(x,y) = \sum_\alpha \sum_\beta M_{\alpha,\beta} \sin m_\alpha x \sin n_\beta y$$

serisi elde edilir. $M_{\alpha,\beta}$ katsayıları

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin m_\alpha x \sin n_\beta y \, dx \, dy$$

çift integrali yardımiyle hesaplanır. $z = 0$ için $\varphi(x,y,0) = f(x,y)$ olduğundan

$$f(x,y) = -\sum_\alpha \sum_\beta K_{\alpha,\beta} \operatorname{Th}\sqrt{m_\alpha^2 + n_\beta^3}\, c \sin m_\alpha x \sin n_\beta y$$

yazılabilir. Bunu Fourier serisi ile kaşılaştırarak

$$K_{\alpha,\beta} = -\frac{M_{\alpha,\beta}}{\operatorname{Th}\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\, c}$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(x,y,z) = \sum_\alpha \sum_\beta M_{\alpha,\beta} \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\,(c-z)}{\operatorname{Sh}\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\, c} \sin m_\alpha x \sin n\beta y$$

dir.

Şayet diğer yüzlerin potansiyel dağılışları bilinirse benzer analiz yapılır. Keza süperpozisyondan faydalanarak her hangi bir potansiyel dağılışı problemi etüd edilebilir.

$c\to\infty$ olduğu takdirde Z fonksiyonu üstel olarak yani

$$Z=Ee^{\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\,z}+Fe^{-\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\,z}$$

şeklinde yazılırsa $E=0$ almak gerektiği görülür. Genel çözüm

$$\varphi(x,y,z)=\sum_\alpha\sum_\beta M_{\alpha,\beta}\,e^{-\sqrt{m_\alpha^2+n_\beta^2}\,z}\sin m_\alpha x\sin n_\beta y$$

dir. $a\to\infty$ ve $b\to\infty$ için seri yerine Fourier integrali kullanılır.

25. Dairesel silindirik koordinatlarda analitik çözüm.

Silindirik koordinatlarda $\partial/\partial z=0$ için iki boyutlu Laplace denklemi

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

şeklindedir. $\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)\,F(\phi)$ koyarak

$$\frac{1}{R}\left(\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}=0$$

elde edilir. İkinci terim $-m^2$ ye eşit yazılırsa

$$\frac{d^2F}{d\phi^2}+m^2F=0\,,\quad \rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-m^2R=0$$

diferansiyel denklemleri bulunur. $m\neq0$ için çözümler

$$F=A\sin m\phi+B\cos m\phi\,,$$

$$R=C\rho^m+D\rho^{-m}$$

dir. $m=0$ için çözümler $F_0=A_0\phi+B_0$, $R_0=C_0\ln\rho+D_0$ şeklinde olur. m

nin alacağı değerler sınır. şartlarına bağlıdır· Ekseriya rastlandığı gibi $\varphi(\rho,\phi)=\varphi(\rho,\phi+2\pi)$ ise m ye tam sayı değerleri vermek ve $A_0=0$ almak icap eder. Harmonik R_mF_m şeklindedir ve dairesel harmonik adını alır. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,\phi)=\sum_m R_mF_m$$

dir. Harmoniğin derecesi m dir. Sıfırıncı dereceden harmonik $k_1+k_2\phi+k_3\ln\rho+k_4\phi\ln\rho$ şeklinde de yazılabilir. m değerleri sürekli olduğu vakit toplam yerine

$$\varphi(\rho,\phi)=\int f(m)\,R_mF_m\,dm$$

integrali alınır.

m^2 yerine $-m^2$ alınırsa çözümler

$$F=A\,\mathrm{Sh}\,m\phi+B\,\mathrm{Ch}\,m\phi,$$

$$R=C\cos(m\ln\rho)+D\sin(m\ln\rho)$$

şeklinde olur.

Üç değişkenli Laplace denklemi

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

şeklindedir. $\varphi(\rho,\phi,z)=R(\rho)F(\phi)Z(z)$ koyarak

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}+\frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

yazılabilir. İkinci terimi $-n^2$ eşit yazarak

$$\frac{d^2F}{d\phi^2}+n^2F=0 \qquad (a)$$

bulunur ve Laplace denklemi

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

şekline girer. Son terimi m^2 ye eşit yazarak

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - m^2Z = 0 \quad , \qquad (b)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + (m^2\rho^2 - n^2)R = 0 \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. $m \neq 0$ ve $n \neq 0$ için (a), (b), (c) denklemlerinin çözümleri

$$R = A\, J_n(m\rho) + B\, Y_n(m\rho) \quad ,$$

$$F = C \sin n\phi + D \cos n\phi \quad ,$$

$$Z = M \operatorname{Sh} mz + N \operatorname{Ch} mz$$

olur. Silindirik harmonik RFZ dir. Genel çözüm

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \sum_m \sum_n RFZ$$

olarak bulunur.

$m = 0$ için çözümler

$$R = A\rho^n + B\rho^{-n} \quad ,$$

$$F = C \sin n\phi + D \cos n\phi \quad ,$$

$$Z = Mz + N$$

ve genel çözüm

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \sum_n RFZ$$

dir. $n = 0$ için çözümler

$$R = A\, J_0(m\rho) + B\, Y_0(m\rho) \quad ,$$

$$F = C\phi + D \quad ,$$

$$Z = M \operatorname{Sh} mz + N \operatorname{Ch} mz$$

olur. Genel çözüm

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \sum_m RFZ$$

dir. $m=n=0$ için çözümler

$$R=A\ln\rho+B\ ,$$

$$F=C\phi+N\ ,$$

$$Z=Mz+N$$

olur.

m^2 yerine $-m^2$ alınırsa

$$R=AI_n(m\rho)+BK_n(m\rho)\ ,$$

$$F=C\sin n\phi+D\cos n\phi\ ,$$

$$Z=M\sin mz+N\cos mz$$

çözümleri elde edilir. I_n ve K_n, modifiye Bessel fonksiyonlarıdır.

m değerleri sürekli olursa toplamlar yerine integraller alınır.

Eksenel (rotasyon) simetrik sistemlerde simetri ekseni z—ekseni olduğuna göre $\partial/\partial\phi=0$ olacağından

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+m^2\rho^2R=0\ ,$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-m^2Z=0$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. $m\neq0$ için çözümler

$$R=AJ_0(m\rho)+BY_0(m\rho)\ ,$$

$$Z=M\,\mathrm{Sh}\,mz+N\,\mathrm{Ch}\,mz$$

dir. $m=0$ için harmonik $(A_0\ln\rho+B_0)(M_0z+N_0)$ dır.

m^2 yerine $-m^2$ alınırsa

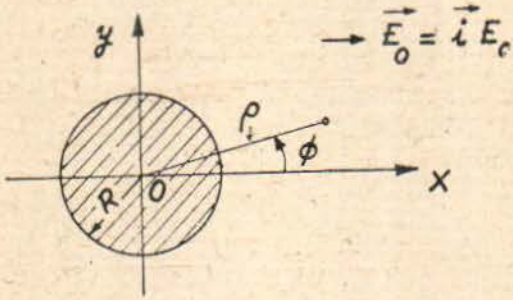
$$R=AI_0(m\rho)+BK_0(m\rho)\ ,$$

$$Z=M\sin mz+N\cos mz$$

çözümleri elde edilir.

Örnekler :

1 — Sıfır potansiyelindeki sonsuz iletken silindir üniform elektrik alanı içine sokuluyor, şek. 137. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 137

Üniform alanın potansiyeli için $E_0 = -d\varphi/dx$ yardımiyle $\varphi_{\ddot{u}} = -E_0 x + k = -E_0 \rho \cos\phi + k$ veya $x=0$ için $\varphi_{\ddot{u}} = 0$ seçerek $\varphi_{\ddot{u}} = -E_0 \rho \cos\phi$ bulunur. Alan iki boyutludur ($\partial/\partial z = 0$). Genel çözüm için

$$\varphi(\rho,\phi) = A_0 \ln\rho + B_0 + \sum_m (A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi)(C_m \rho^m + D_m \rho^{-m})$$

yazalım. x=eksenine göre simetriyi gözönüne alarak tek fonksiyon olan sinüslü terimler kullanılmaz. Böylece $B_m C_m = a_m$ ve $B_m D_m = b_m$ koyarak

$$\varphi(\rho,\phi) = A_0 \ln\rho + B_0 + \sum_m (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

bulunur. Çok uzaklarda iletken silindirin üniform alan üzerine yadtığı bozucu tesir kaybolacağından potansiyel $-E_0 \rho \cos\phi$ değerine yaklaşır. Böylece $\rho \gg R$ için $A_0 = B_0 = 0$, $a_1 = -E_0$ ve $m>1$ için $a_m = 0$ almak gerekeceğinden potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,\phi) = -E_0 \rho \cos\phi + \sum_m b_m \rho^{-m} \cos m\phi$$

şekline girer. $\rho = R$ için $\varphi(R,\phi) = 0$ olacağını gözönüne alarak

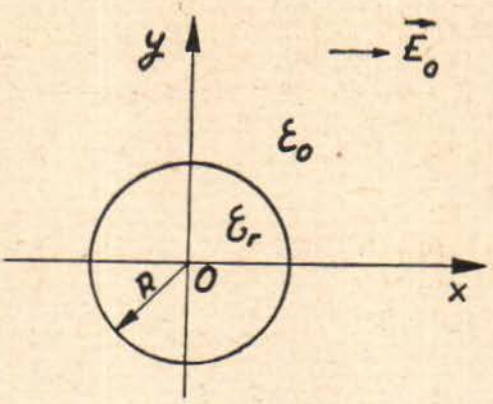
$$0 = -E_0 R \cos\phi + \sum_m b_m R^{-m} \cos m\phi$$

yazılabilir. Bu ifadenin ϕ açısına bağlı olmaması için $m=1$ almak gerekeceğinden $b_1 = R^2 E_0$ ve $m \neq 1$ için $b_m = 0$ bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,\phi) = -\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right) E_0 \cos\phi$$

dir.

2 — Sonsuz uzun dielektrik silindir üniform elektrik alanı içine sokuluyor, şek. 138 Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 138

Silindirin dışındaki ve içindeki potansiyelleri φ_0 ve φ_i ile gösterelim. φ_0 için yukarıda görüldüğü gibi

$$\varphi_0 = -E_0 \rho \cos\phi + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^{-m} \cos m\phi$$

yazılabilir. Zira çok uzaklarda polarizasyonun tesiri kaybolacaktır. $\rho = 0$ ekseninin çözüm bölgesine girdiğini gözönüne alarak φ_i için

$$\varphi_i = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \rho^m \cos m\phi$$

yazabiliriz ($A_m C_m = c_m$). Silindir yüzeyindeki sınır şartları $\rho = R$ için $\varphi_i = \varphi_0$ ve $\varepsilon_r \, \partial\varphi_i/\partial\rho = \partial\varphi_0/\partial\rho$ şeklinde olacaktır. Böylece

$$\sum_m c_m R^m \cos m\phi = -E_0 R \cos\phi + \sum_m b_m R^{-m} \cos m\phi$$

$$\varepsilon_r \sum_m m c_m R^{m-1} \cos m\phi = -E_0 \cos\phi + \sum_m m b_m R^{-(m+1)} \cos m\phi,$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_m A_m \cos m\phi = \sum B_m \cos m\phi$$

eşitliğinde $A_m = B_m$ olacağından ancak $m = 1$ değerlerinin alınabileceği görülür. Bu suretle

$$c_1 R = -E_0 R + \frac{b_1}{R}\ , \quad \varepsilon_r c_1 = -E_0 - \frac{b_1}{R^2}$$

yazarak

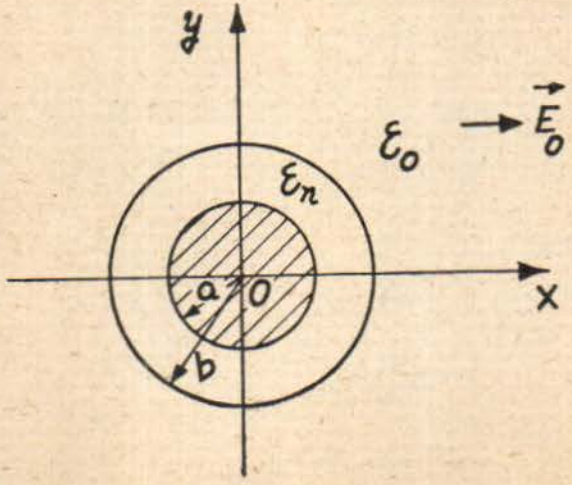
$$b_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} R^2 E_0\ , \quad c_1 = -\frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1}$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_0 = -\left(\rho - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{R^2}{\rho}\right) E_0 \cos\phi\ , \quad \varphi_i = -\frac{2E_0 \rho \cos\phi}{\varepsilon_r + 1}$$

dir.

3 — Dielektrik kılıflı sıfır potansiyelindeki sonsuz uzun silindirik iletken üniform alan içine sokuluyor, şek. 139. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 139

Silindir dışındaki potansiyel için

$$\varphi_0 = -E_0 \rho \cos\phi + \sum_m a_m \rho^{-m} \cos m\phi$$

yazılabilir. Kılıf içinde $\rho=0$ ve $\rho=\infty$ değerleri bahis konusu olamayacağından

$$\varphi_i = \sum_m (b_m \rho^m + c_m \rho^{-m}) \cos m\phi$$

yazabiliriz. $\rho=a$ ve $\rho=b$ için sınır şartları yardımiyle

$$\sum_m (b_m a^m + c_m a^{-m}) \cos m\phi = 0 \ , \qquad (a)$$

$$-E_0 b \cos\phi + \sum_m a_m b^{-m} \cos m\phi = \sum_m (b_m b^m + c_m b^{-m}) \cos m\phi \ , \qquad (b)$$

$$-E_0 \cos\phi - \sum_m m a_m b^{-(m+1)} \cos m\phi = \varepsilon_r \sum_m m[b_m b^{m-1} - c_m b^{-(m+1)}] \cos m\phi \qquad (c)$$

denklemleri elde edilir. $m \neq 1$ için bu denklemler ancak

$$b_m a^m + c_m a^{-m} = 0 \ , \qquad (d)$$

$$a_m b^{-m} = b_m b^m + c_m b^{-m} \qquad (e)$$

$$-a_m b^{-(m+1)} = \varepsilon_r [b_m b^{m-1} - c_m b^{-(m+1)}] \qquad (f)$$

oldüğu vakit saglanabilir. (f) yi b ile çarpıp (e) ye ilâve ederek

$$(\varepsilon_r + 1) b_m = (\varepsilon_r - 1) c_m b^{-2m} \qquad (g)$$

bulunur. (d) ve (g) nin ayni zamanda sağlanabilmesi için ya $b_m = 0$, $c_m = 0$ veya

$$\frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r - 1} = -\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}$$

olması icap eder. ε_r ile yarıçaplar birbirine bağlı olmadığından son şart sağlanamaz. O halde $b_m = c_m = 0$ almak gerekir. (e) den $a_m = 0$ buluna-

cağından $m \neq 1$ için $a_m = b_m = c_m = 0$ olacağı anlaşılır. $m = 1$ için yazılan

$$-E_0 + \frac{a_1}{b^2} = b_1 + \frac{c_1}{b^2} \quad ,$$

$$-E_0 - \frac{a_1}{b^2} = \varepsilon_r \left(b_1 - \frac{c_1}{b^2} \right) ,$$

$$b_1 a + \frac{c_1}{a} = 0$$

denklemlerini çözerek

$$a_1 = \frac{(\varepsilon_r+1)a^2+(\varepsilon_r-1)b^2}{(\varepsilon_r+1)b^2+(\varepsilon_r-1)a^2} \; b^2 E_0 \; ,$$

$$b_1 = - \frac{2b^2 E_0}{(\varepsilon_r+1)b^2+(\varepsilon_r-1)a^2} \quad ,$$

$$c_1 = \frac{2a^2b^2E_0}{(\varepsilon_r+1)b^2+(\varepsilon_r-1)a^2}$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_0 = \left(- E_0 \rho + \frac{a_1}{\rho} \right) \cos \phi \quad ,$$

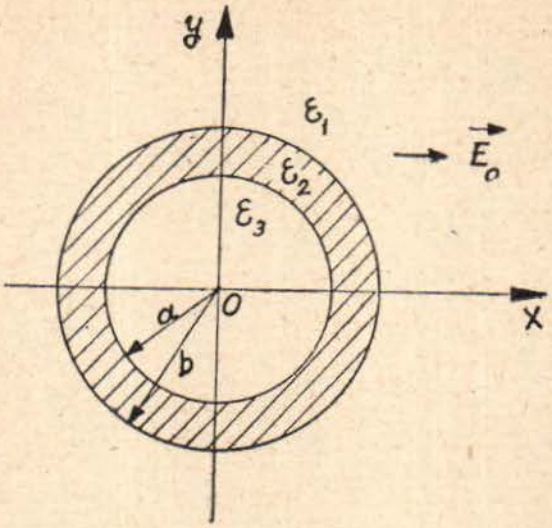
$$\varphi_1 = \left(b_1 \rho + \frac{c_1}{\rho} \right) \cos \phi$$

dir.

Özel haller: $a=0$ için yarıçapı b olan dielektrik silindirin potansiyeli bulunur. $\varepsilon_r = 1$ yapılırsa yarıçapı a olan iletken silindirin potansiyeli bulunur. İletken silindirin potansiyeli, dielektrik silindirin potansiyelinde $\varepsilon_r \to \infty$ koyarak da bulunabilir.

4 — Dielektrik boru üniform alan içine sokuluyor, şek 140. Potansiyel fonksiyonları bulunacaktır.

Sınır şartları $\rho = a$ için $\varphi_2 = \varphi_3$, $\varepsilon_2 \partial\varphi_2/\partial\rho = \varepsilon_3 \partial\varphi_3/\partial\rho$ ve $\rho = b$ için $\varphi_1 = \varphi_2$ $\varepsilon_1 \partial\varphi_1/\partial\rho = \varepsilon_2 \partial\varphi_2/\partial\rho$ şeklindedir. Ayrıca $\rho \to \infty$ için $\varphi_1 = -E_0 \rho \cos \phi$ olmak zorundadır. Simetriden dolayı sinüs terimlerini bırakarak



Şek. 140

$$\varphi_1 = \left(-E_0\rho + \frac{A}{\rho}\right)\cos\phi \ ,$$

$$\varphi_2 = \left(B\rho + \frac{C}{\rho}\right)\cos\phi \ ,$$

$$\varphi_3 = D\rho\cos\phi$$

yazılabilir. İntegrasyon sabitleri sınır şartları yardımiyle bulunacaktır. Meselâ

$$D = -\frac{4E_0}{\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right)+\frac{a^2}{b^2}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right)}$$

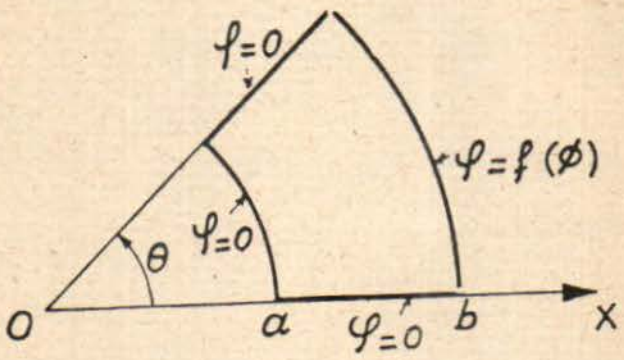
dir. $\varphi_3 = D\rho\cos\phi = Dx$ olduğundan

$$E_{3x} = -\frac{d\varphi_3}{dx} = -D$$

bulunur. Boru içindeki alan üniformdur. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ alınırsa yarıçapı b olan dielektrik silindirin potansiyel fonksiyonları bulunur. Ayni sonuç $a = b$ alarak da bulunabilir. $\varepsilon_3 \to \infty$ için dielektrik kılıflı iletkenin potansiyel

fonksiyonları elde edilir.

5 — $\rho = a$, $\rho = b$ silindirleri ile $\phi = 0$, $\phi = \theta$ düzlemleri tarafından sınırlandırılan sektör içindeki potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 141.



Şek. 141

Sistemin sonsuz uzunlukta olduğu kabul edilirse problem iki boyutlu olur. Sınır şartları $\varphi(a,\phi) = 0$, $\varphi(\rho,0) = 0$, $\varphi(\rho,\theta) = 0$, $\varphi(b,\phi) = f(\phi)$ dir. Sıfırıncı dereceden harmonik bu şartlara uymaz. Harmonik için

$$RF = (C\rho^m + D\rho^{-m})(A \sin m\phi + B \cos m\phi)$$

yazalım. $\varphi(\rho,0) = 0$ şartına göre $F(0) = 0$ olacağından $B = 0$ bulunur. $\varphi(\rho,\theta) = 0$ şartına göre $F(\theta) = 0$ olacağından $m_\alpha = \alpha\pi/\theta (\alpha = 1,2,...)$, $\varphi(a,\phi) = 0$ şartına göre $R(a) = 0$ olacağından $D_\alpha/C_\alpha = -a^{-2m\alpha}$ bulunur. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,\phi) = \sum_\alpha K_\alpha \sin m_\alpha\phi\,(\rho^{m\alpha} - a^{2m\alpha}\rho^{-m\alpha})$$

şeklindedir ($K_\alpha = A_\alpha C_\alpha$). $\varphi(b,\phi) = f(\phi)$ şartı yardımiyle

$$f(\phi) = \sum_\alpha K_\alpha \sin m_\alpha \phi(b^{m\alpha} - a^{2m\alpha} b^{-m\alpha})$$

yazılabilir. $f(\phi)$ yi Fourier sinüs serisine açarak

$$f(\phi) = \sum_{\alpha} M_\alpha \sin \frac{\alpha\pi\phi}{\theta}$$

bulunur. Katsayılar

$$M_\alpha = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta f(\phi) \sin \frac{\alpha\pi\phi}{\theta} \, d\phi$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Karşılaştırarak

$$K_\alpha = \frac{2}{\theta(b^{m\alpha} - a^{2m\alpha} b^{m\alpha})} \int_0^\theta f(\phi) \sin \frac{\alpha\pi\phi}{\theta} \, d\phi$$

bulunur. Şayet

$$k_\alpha = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta f(\phi) \sin \frac{\alpha\pi\phi}{\theta} \, d\phi$$

koyarsak

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{\alpha} k_\alpha \sin m_\alpha \phi \, \frac{a^{-m\alpha} \rho^{m\alpha} - a^{m\alpha} \rho^{-m\alpha}}{a^{-m\alpha} b^{m\alpha} - a^{m\alpha} b^{-m\alpha}}$$

buluruz.

Şayet diğer kenarların potansiyeli sıfırken $\varphi(a, \phi) = g(\phi)$ verilirse yukarıdaki ifadede yalnız a ile b nin yeri değişir ve $b \to \infty$ için potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{\alpha} k_\alpha \left(\frac{a}{\rho}\right)^{m\alpha} \sin m_\alpha \phi$$

şeklini alır.

$a = 0$ yapılırsa $D = 0$ almak icap eder. Genel çozüm

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{\alpha} K_\alpha \rho^{m\alpha} \sin m_\alpha \phi$$

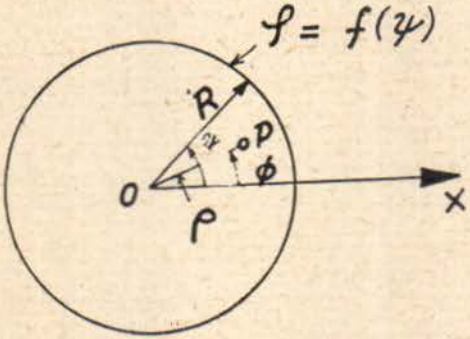
şeklindedir. $b = R$ alarak $\varphi(R,\phi) = f(\phi)$ şartı yardımiyle

$$\varphi(\rho,\phi) = \sum_{\alpha} k_\alpha \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m_\alpha} \sin m_\alpha \phi$$

bulunur. k_α, yukarıda verilmiştir.

$f(\phi)$ ve $g(\phi)$ dağılışları verildiği takdirde problem süperpozisyonla çözülür.

Şek. 142 de R yarıçaplı dairedeki potansiyel dağılışı $f(\psi)$ olduğu takdirde genel çözüm için



Şek. 142

$$\varphi(\rho,\phi) = k + \sum_m \rho^m (a_m \sin m\phi + b_m \cos m\phi)$$

yazılabileceğinden

$$f(\psi) = k + \sum_m R^m (a_m \sin m\phi + b_m \cos m\phi)$$

bulunur. Fourier serisinin katsayılarını veren integraller yardımiyle

$$\varphi(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\phi-\psi)} f(\psi)\,d\psi$$

elde edilir. Buna Poisson integrali denilir.

Şek. 141 de $\varphi(\rho,\theta) = h(\rho)$ veya $\varphi(\rho,0) = u(\rho)$ dağılışları verildiği takdirde sınır şartları ρ değişkenine göre homogen olacağından

$$RF=(A\ \mathrm{Sh}\ m\phi + B\ \mathrm{Ch}\ m\phi)[C\cos(m\ln\rho)+D\sin(m\ln\rho)]$$

harmoniği kullanılır. Yukarıdaki problemlerde kullanılan harmoniğin ve sıfırıncı dereceden harmoniğin sınır şartlarına uymadıkları kolayca görülebilir. $F(0)=0$ şartından $B=0$ bulunacağından harmonik

$$\mathrm{Sh}\ m\phi\,[a\cos(m\ln\rho)+b\sin(m\ln\rho)]$$

şekline girer. $R(a)=0$ ve $R(b)=0$ şartları yardımiyle $a/b=-\sin(m\ln a)/\cos(m\ln a)=-\sin(m\ln b)/\cos(m\ln b)$, $\sin m(\ln a-\ln b)=0$ bulunacağından $m_\alpha = \alpha\pi/\ln(b/a)$ olacağı anlaşılır ($\alpha = 1,2,\ldots$). Genel çözüm

$$\varphi(\rho,\phi)=\sum_\alpha b_m\ \mathrm{Sh}\ m_\alpha\phi\ \frac{\sin(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})}{\cos(m_\alpha \ln a)}$$

dır. $\varphi(\rho,\theta)=h(\rho)$ sınır şartı yardımiyle

$$h(\rho)=\sum_\alpha b_m\ \mathrm{Sh}\ m_\alpha\theta\ \frac{\sin(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})}{\cos(m_\alpha \ln a)}=\sum_\alpha K_\alpha \sin(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})$$

elde edilir. R fonksiyonu için sınır şartları homogen olduğundan (1. nevi) norm için

$$N_\alpha=\int_a^b \sin^2(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})\,d\rho$$

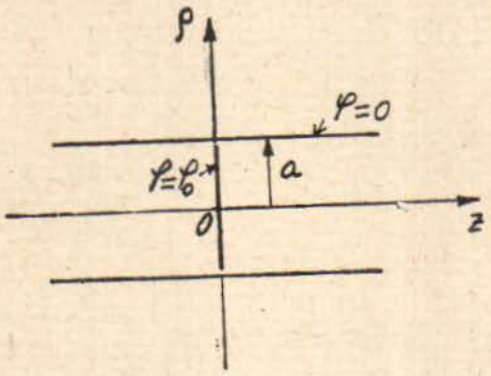
bulunur. Serinin katsayıları

$$K_\alpha=\frac{\int_a^b f(\rho)\sin(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})\,d\rho}{\int_a^b \sin^2(m_\alpha \ln\frac{\rho}{a})\,d\rho}$$

integrali yardımiyle hesaplanır.

$g(\phi)$ ve $h(\phi)$ dağılışları verildiği takdirde problem süperpozisyonla çözülür. Genel olarak her hangi bir potansiyel dağılışı için sınır değeri problemini süperpozisyonla çözebiliriz.

6 — Şek. 143 deki sistemde potansiyel fonksiyonu bulunacaktır. Silindirin potansiyeli sıfır ve diskin potansiyeli ise φ_0 dır.



Şek. 143

Eksenel simetriden dolayı $\partial/\partial\phi = 0$ dır. R ve Z için $R = AJ_0(m\rho) + BY_0(m\rho)$, $Z = Me^{mz} + Ne^{-mz}$ alalım. ρ—ekseni problemin sınırı içine girdiğinden $B = 0$, $z>0$ bölgesi için $M = 0$ ve $z<0$ bölgesi için $N = 0$ alınacaktır. Böylece $z>0$ için harmonik $KJ_0(m\rho)e^{-mz}$ olur. $R(a)=0$ şartı yardımiyle $J_0(m_\alpha a) = 0$ bulunur. m_α değerleri sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonunun kökleridir. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,z) = \sum_\alpha K_\alpha J_0(m_\alpha \rho)e^{-m_\alpha z}$$

dir. $\varphi(\rho,0) = \varphi_0$ şartı yardımiyle

$$\varphi_0 = \sum_\alpha K_\alpha J_0(m_\alpha \rho)$$

yazılabilir. Norm $N_\alpha = a^2J_1^2(m_\alpha a)/2$ olduğundan Fourier-Bessel serisinin katsayıları

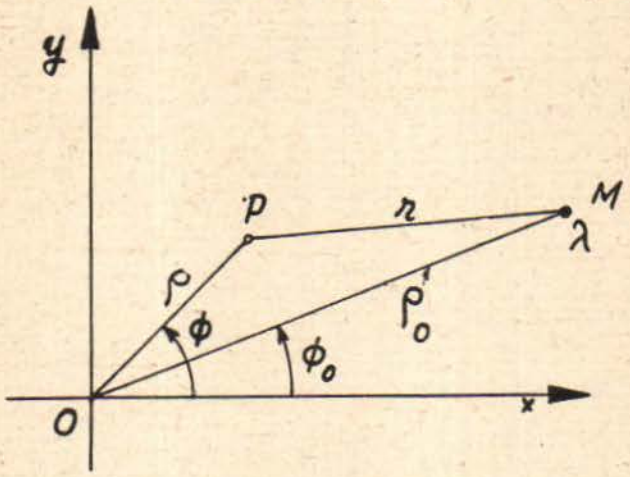
$$K_\alpha = \frac{2\varphi_0}{a^2J_1^2(m_\alpha a)} \int_0^a \rho J_0(m_\alpha \rho)d\rho$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} \frac{2\varphi_0 e^{-m_\alpha z} J_0(m_\alpha \rho)}{m_\alpha a J_1(m_\alpha a)}$$

dır. $z<0$ için $e^{m_\alpha z}$ alınır.

7 — Çizgisel yükün potansiyeli seriye açılacaktır. şek. 144.



Şek. 144

$M(\rho_0, \phi_0)$ noktasındaki üniform çizgisel yük $P(\rho, \phi)$ noktasında

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln r$$

potansiyelini meydana getirir ($r=1$ yarıçaplı silindir referans seçilmiştir). r uzaklığı

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}$$

olduğundan potansiyel için

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \rho - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left\{ \ln \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{j(\phi - \phi_0)} \right] + \ln \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{-j(\phi - \phi_0)} \right] \right\}$$

veya

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \rho_0 - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left\{ \ln \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{j(\phi - \phi_0)} \right] + \ln \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-j(\phi - \phi_0)} \right] \right\}$$

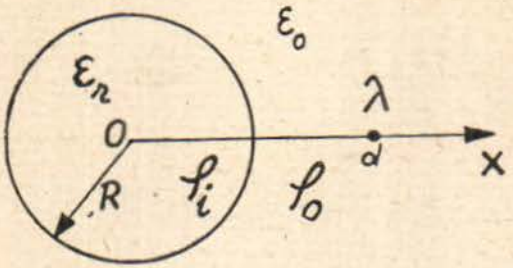
yazılabilir. Parantez içindeki logaritmaları seriye açarak

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\rho - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^m \cos(\phi-\phi_0)\right] \quad (\rho>\rho_0)\ ,$$

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\rho_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^m \cos(\phi-\phi_0)\right] \quad (\rho<\rho_0)$$

elde edilir.

8 — Dielektrik silindirle paralel üniform çizgisel yük sisteminin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 145.



Şek. 145

Çizgisel yükün meydana getireceği primer potansiyel $\rho_0 = d$ ve $\phi_0 = 0$ koyarak elde edilir. Silindir dışındaki potansiyeli φ_0 ile ve içindeki potansiyeli de φ_i ile gösterelim. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,\phi) = (A_0\phi + B_0)(C_0 \ln\rho + D_0) + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi)(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m})$$

şeklindedir. $\phi = 0$ eksenine göre simetriden dolayı ϕ açısı ve $\sin m\phi$ alınmaz. Keza $\rho = 0$ ve $\rho\to\infty$ için potansiyel sınırlı kalacağından logaritmik terim kullanılamaz. Silindir içinde $\rho = 0$ ve silindir dışında ise $\rho\to\infty$ olabileceğinden içteki potansiyel için $D_m = 0$ ve dıştaki potansiyel için de $C_m = 0$ almak gerekir. Böylece φ_0 için $(R<\rho<d)$

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\sum_m \frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{d}\right)^m \cos m\phi - \ln d\right] + \sum_m a_m\rho^{-m}\cos m\phi + a_0$$

ve φ_i için

$$\varphi_i = \sum_m b_m \rho^m \cos m\phi + b_0$$

yazılabilir. φ_0 ifadesinde birinci terim primer potansiyeli (çizgisel yükün potansiyeli) ve diğer terim ise polarizasyon sonucu meydana gelen sekonder potansiyeli gösterirler. φ_i ifadesi ise her iki tesiri ihtiva etmektedir. Problemin sınır şartları $\rho = R$ için $\varphi_i = \varphi_0$, $\varepsilon_r \partial\varphi_i/\partial\rho = \partial\varphi_0/\partial\rho$ şeklindedir. Bu şartlar yardımiyle

$$b_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln d + a_0 \ ,$$

$$a_m = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \frac{R^{2m}}{md^m} \ ,$$

$$b_m = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(1+\varepsilon_r)md^m}$$

bulunacağından $a_0 = k$ koyarak

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \sum_m \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\rho}{d} \right)^m + \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \left(\frac{R^2/d}{\rho} \right)^m \right] \cos m\phi - \ln d \right\} + k \ ,$$

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)} \sum_m \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{d} \right)^m \cos m\phi - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln d + k$$

ifadeleri elde edilir. $\rho > d$ bölgesindeki potansiyel fonksiyonu φ_0 ifadesinde ρ/d yerine d/ρ alarak yazılabilir.

φ_0 ifadesine

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \ln \rho$$

terimi ilâve edilecek ve çıkarılacak olursa

$$\lambda' = -\lambda \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} \ , \quad \lambda'' = -\lambda'$$

koyarak

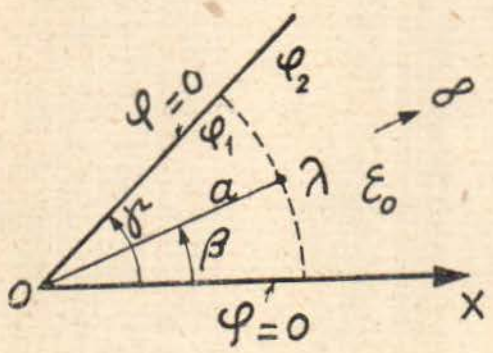
$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left[\sum_m \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{d} \right)^m \cos m\phi - \ln d \right] + \frac{\lambda''}{2\pi\varepsilon_0} \left[\sum_m \frac{1}{m} \left(\frac{R^2/d}{\rho} \right)^m \cos m\phi - \ln \rho \right] - \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \rho + k$$

yazılabileceğinden, dıştaki potansiyelin $x=d$ noktasındaki λ yükü, $x=R^2/d$ noktasındaki λ'' imaj yükü ve orijindeki λ' imaj yükü tarafından meydana getirildiğini farzetmenin kabil olduğu anlaşılır. φ_i ifadesinin incelenmesinden de bu potansiyelin $x=d$ noktasına yani orijinal yükün bulunduğu yere getirildiği farzedilen

$$\lambda'' = \frac{2\lambda}{1+\varepsilon_r}$$

imaj yükü tarafından meydana getirildiğinin söylenebileceği anlaşılır.

9 — Şek. 146 da görülen topraklanmış levhalar arasına paralel üniform çizgisel yük yerleştiriliyor. Sistemin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 146

Potansiyel fonksiyonlarını $\rho<a$ bölgesi için φ_1 ile ve $\rho>a$ bölgesi için φ_2 ile gösterelim. Harmoniği

$$FR=(A\sin m\phi+B\cos m\phi)\,(C\rho^m+D\rho^{-m})$$

şeklinde alalım. $\phi=0$ ve $\phi=\gamma$ için $\varphi=0$ olacağından $B=0$ ve $m_k=k\pi/\gamma$ $(k=1,2,\ldots)$ almak gerekir. Diğer taraftan 1 bölgesi için $D=0$ ve 2 bölgesi için $C=0$ almak gerekeceğinden

$$\varphi_1=\sum_k A_k\rho^{m_k}\sin m_k\phi\ ,$$

$$\varphi_2 = \sum_k B_k \rho^{-m_k} \sin m_k \phi$$

yazılabilir. $\rho = a$ için $\varphi_1 = \varphi_2$ olduğundan $B_k = A_k$ olacaktır. Böylece A_k bulununca problemin çözülmüş olacağı anlaşılır. Çizgisel yük $\rho = a$ yarıçaplı silindir üstündeki

$$\sigma(\phi) = \lambda \delta(\phi - \beta)$$

yüzey yüküne eşdeğerdir. Bu ifadede görülen açısal δ—fonksiyonu (birim impuls fonksiyonu)

$$a \int_0^{\gamma} \delta(\phi - \beta) d\phi = 1 \quad ,$$

$$\int_0^{\gamma} f(\phi) \delta(\phi - \beta) d\phi = f(\beta)/a \quad (0 < \beta < \gamma)$$

denklemleri ile tarif edilir. $\rho = a$ için ikinci sınır şartı (birinci yukarıda kullanıldı)

$$\frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \delta(\phi - \beta)}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \right)_{\rho = a} = \sum_k 2 A_k m_k a^{m_k - 1} \sin m_k \phi$$

şeklinde olacaktır. Buradan Fourier serisinin katsayıları için

$$A_k = \frac{\lambda}{k\pi \varepsilon_0 a^{m_k}} \sin \frac{k\pi\beta}{\gamma}$$

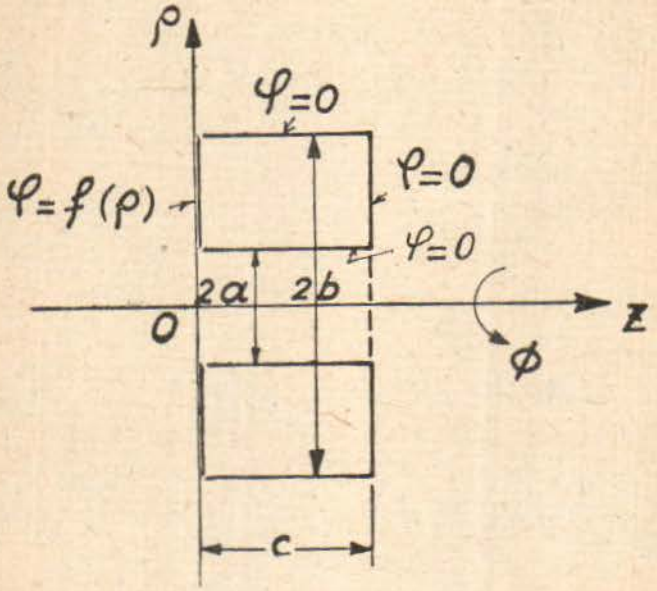
bulunur. Potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \sum_k \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{k\pi/\gamma} \sin \frac{k\pi\beta}{\gamma} \sin \frac{k\pi\phi}{\gamma} \, ,$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \sum_k \frac{1}{k} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{k\pi/\gamma} \sin \frac{k\pi\beta}{\gamma} \sin \frac{k\pi\phi}{\gamma}$$

dır.

10—$\rho=a$ ve $\rho=b$ silindirleri ile $z=0$ ve $z=c$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin kenarlarındaki potansiyel dağılışı verildiğine göre içteki potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 147.



Şek. 147

Eksenel simetriden dolayı $\partial/\partial\phi=0$ dır. Harmoniği

$$RZ=[A\,J_0(m\rho)+B\,Y_0(m\rho)]\,(M\,\mathrm{Sh}\,mz+N\,\mathrm{Ch}\,mz)$$

şeklinde alalım. $Z(c)=0$ şartından $M/N=-\mathrm{Cth}\,mc$ ve $R(b)=0$ şartından $B/A=-J_0(mb)/Y_0(mb)$ bulunacağından harmonik

$$RZ=K[J_0(m\rho)-\frac{J_0(mb)}{Y_0(mb)}\,Y_0(m\rho)]\frac{\mathrm{Sh}\,m(c-z)}{\mathrm{Sh}\,mc}$$

şekline girer ($K=AN$). $R(a)=0$ şartı yardımiyle

$$J_0(ma)Y_0(mb)-J_0(mb)Y_0(ma)=0$$

denklemi elde edilir. m değerleri bu denklemin kökleri olacaktır. Bu kökler cetveller yardımiyle bulunur. Kökler m_α ile gösterilirse ($\alpha=1,2,...$) genel çözüm için

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha \frac{\operatorname{Sh} m_\alpha (c-z)}{\operatorname{Sh} m_\alpha c} \left[J_0(m_\alpha \rho) - \frac{J_0(m_\alpha b)}{Y_0(m_\alpha b)} Y_0(m_\alpha \rho) \right]$$

yazılabilir. Son sınır şartı yardımiyle ($z = 0$)

$$f(\rho) = \sum_{\alpha} K_\alpha \left[J_0(m_\alpha \rho) - \frac{J_0(m_\alpha b)}{Y_0(m_\alpha b)} Y_0(m_\alpha \rho) \right]$$

elde edilir. ρ ya göre sınır şartı homogen (1. nevi) olduğundan bu fonksiyonu seriye açabiliriz. Parantez içindeki ifadeyi kısaca $R_0(m_\alpha \rho)$ şeklinde göstererek

$$K_\alpha = \frac{2}{b^2 R_1^2(m_\alpha b) - a^2 R_1^2(m_\alpha a)} \int_a^b \rho f(\rho) R_0(m_\alpha \rho) d\rho$$

bulunur.

Şayet $c \to \infty$ yapılırsa Z fonksiyonu için $Z = Ne^{-mz}$ çözümünü alarak

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha e^{-mz} \left[J_0(m_\alpha \rho) - \frac{J_0(m_\alpha b)}{Y_0(m_\alpha b)} Y_0(m_\alpha \rho) \right]$$

elde edilir.

Eğer $a=0$ yapılırsa, $z=0$ yüzünün potansiyel dağılışı $f(\rho)$ olan ve diğer yüzleri sıfır potansiyelinde tutulan silindir elde edilir $Y_0(0)$ sonsuz olduğundan Neumann fonksiyonunu kullanamayız. Böylece genel çözüm için

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha \frac{\operatorname{Sh} m_\alpha (c-z)}{\operatorname{Sh} m_\alpha c} J_0(m_\alpha \rho)$$

elde edilir. m değerleri $J_0(m_\alpha b) = 0$ denkleminin kökleridir. $c \to \infty$ için bu çözüm

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha e^{-m_\alpha z} J_0(m_\alpha \rho)$$

şekline girer. Norm $N_\alpha = b^2 J_1^2(m_\alpha b)/2$ olduğundan meselâ $f(\rho) = \varphi_0 =$ sab. için

$$K_\alpha = \frac{\varphi_0}{N_\alpha} \int_0^b \rho J_0(m_\alpha \rho) d\rho = \frac{2\varphi_0}{m_\alpha b J_1(m_\alpha b)} ,$$

$$\varphi(\rho,z) = 2\varphi_0 \sum_\alpha \frac{J_0(m_\alpha \rho)}{m_\alpha b J_1(m_\alpha b)} e^{-m_\alpha z}$$

bulunur.

Diğer yüzlerin potansiyeli sıfırken $z=c$ yüzünün $\varphi=g(\rho)$ potansiyel dağılışı verilirse $Z(0)=0$ şartından $N=0$ ve $R(b)=0$ şartından $B/A = -J_0(mb)/Y_0(mb)$ bulunacağından harmonik

$$RZ = K \operatorname{Sh} mz \left[J_0(m\rho) - \frac{J_0(mb)}{Y_0(mb)} Y_0(m\rho) \right]$$

şeklinde olur. m_α değerleri $R(a)=0$ şartı yardımiyle yazılan $J_0(ma)Y_0(mb) - J_0(mb)Y_0(ma)=0$ denkleminin kökleridir. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,z) = \sum_\alpha K_\alpha \operatorname{Sh} m_\alpha z \left[J_0(m_\alpha \rho) - \frac{J_0(m_\alpha b)}{Y_0(m_\alpha b)} Y_0(m_\alpha \rho) \right]$$

şeklindedir. $\varphi(\rho,c) = g(\rho)$ şartı yardımiyle

$$K_\alpha = \frac{2}{\operatorname{Sh} m_\alpha c \left[b^2 R_1^2(m_\alpha b) - a^2 R_1^2(m_\alpha a) \right]} \int_a^b \rho g(\rho) R_0(m_\alpha \rho) d\rho$$

bulunur.

Diğer yüzlerin potansiyeli sıfırken $z=0$ ve $z=c$ yüzlerinin $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ dağılışları verilirse problem süperpozisyonla çözülür.

Şayet $\rho=a$ veya $\rho=b$ yüzlerinin potansiyel dağılışları verilecek olursa sınır şartı z—değişkenine göre homogen olacağından (diğer yüzlerin potansiyeli sıfır) Z için trigonometrik çözüm alınır. Meselâ $\rho=b$ yüzünün potansiyel dağılışı $\varphi=h(z)$ şeklinde verilmiş olsun. Harmonik

$$RZ = [AI_0(m\rho) + BK_0(m\rho)](M \sin mz + N \cos mz)$$

dir. $Z(0)=0$ şartından $N=0$ ve $Z(c)=0$ şartından $m_\alpha = \alpha\pi/c$ $(\alpha=1,2,...)$ bulunur. $R(a)=0$ şartı yardımiyle $B/A = -I_0(m_\alpha a)/K_0(m_\alpha a)$ yazılabileceğinden genel çözüm için

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha \left[I_0(m_\alpha \rho) - \frac{I_0(m_\alpha a)}{K_0(m_\alpha a)} K_0(m_\alpha \rho) \right] \sin m_\alpha z$$

elde edilir. Son sınır şartına göre $\varphi(b,z) = h(z)$ olacağınean

$$h(z) = \sum_{\alpha} K_\alpha \left[I_0(m_\alpha b) - \frac{I_0(m_\alpha a)}{K_0(m_\alpha a)} K_0(m_\alpha b) \right] \sin m_\alpha z$$

yazılabilir. $h(z)$ yi Fourier sinüs serisine açarak

$$K_\alpha = \frac{1}{I_0(m_\alpha b - \frac{I_0(m_\alpha a)}{K_0(m_\alpha a)} K_0(m_\alpha b)} \frac{2}{c} \int_0^c h(z) \sin m_\alpha z \, dz$$

bulunur.

$a = 0$ için $K_0(0)$ sonsuz olduğundan ikinci nevi modifiye fonksiyon kullanılamaz ve genel çözüm

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha I_0(m_\alpha \rho) \sin m_\alpha z$$

şekline girer. $\varphi(b,z) = h(z)$ şartı yardımiyle

$$h(z) = \sum_{\alpha} K_\alpha I_0(m_\alpha b) \sin m_\alpha z$$

yazarak

$$K_\alpha = \frac{2}{c I_0(m_\alpha b)} \int_0^c h(z) \sin m_\alpha z \, dz$$

elde edilir.

$c \to \infty$ için m değerleri sürekli olacağından Fourier serisi yerine Fourier integralini kullanmak icap eder.

Şayet $a = 0$ için sıfır potansiyelindeki $z = 0$ ve $z = c$ düzlemleri arasındaki ve $h(z)$ potansiyelindeki $\rho = b$ silindiri dışındaki potansiyel

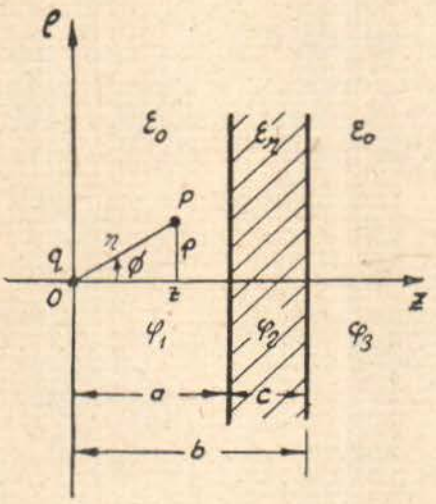
dağılışını bulmak istersek I_0 yerine K_0 fonksiyonunu kullanmak icap eder. Genel çözüm

$$\varphi(\rho,z) = \sum_{\alpha} K_\alpha K_0(m_\alpha \rho) \sin m_\alpha z$$

dir. K_α katsayıları $\varphi(b,z)=h(z)$ şartından faydalanarak bulunur.

$\rho=a$ silindirinin $\varphi=u(z)$ potansiyeli verildiği takdirde problem benzer şekilde incelenir. Diğer yüzlerin potansiyeli sıfırken $\rho=a$ ve $\rho=b$ silindirlerinin $u(z)$ ve $h(z)$ dağılışları verilecek olursa problem süperpozisyonla çözülür. Genel olarak her hangi bir potansiyel dağılışı için problem süperpozisyonla incelenir. Meselâ iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan c uzunluğundaki silindirik kutunun potansiyel dağılışı $z=0$ için V_1, $z=c$ için V_2, $\rho=a$ için V_3 ve $\rho=b$ için V_4 olarak verilirse yukarıda elde edilen sonuçları bu sabit potansiyeller için değerlendirerek süperpozisyon yapmak icap eder.

11 — Noktasal yük ve dielektrik levha sisteminin potansiyel dağılışı bulunacaktır, şek. 148.



Şek. 148

Problem imaj metodu yardımiyle çözülebilirse de bu yol pek elverişli olmaz ve sonuçlar pratik değildir. Levha yüzeylerinin denklemleri

$z=a$ ve $z=b$ dir. Noktasal yükün potansiyeli için

$$\varphi(\rho,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

yazılabilir. Eksenel simetriden dolayı potansiyel ϕ açısına bağlı değildir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \int_0^\infty J_0(m\rho)e^{-m|z|}dm$$

yazılabileceğinden

$$\varphi(\rho,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty J_0(m\rho)e^{-m|z|}\,dm$$

elde edilir. Şek. 148 de 1,2,3 ile işaretlenen bölgelerdeki potansiyeller için

$$RZ = [AJ_0(m\rho) + BY_0(m\rho)]\,(Me^{mz} + Ne^{-mz})$$

harmoniğini kullanacağız. Ancak m değerleri sürekli olduğundan (zira m spektrumuna sürekli karakter verecek her hangi bir sınır şartı yoktur) çözümler toplam yerine integraller yardımiyle ifade edilecektir. $\rho=0$ için $Y_0(0)$ sonsuz olduğundan 2. nevi silindirik fonksiyonu bırakarak $R=AJ_0(m\rho)$ alınacaktır.

$-\infty<z<a$ bölgesinde $N=0$ almak gerekeceğinden

$$\varphi_1(\rho,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty J_0(m\rho)e^{-m|z|}dm + \int_0^\infty A(m)e^{mz}J_0(m\rho)\,dm$$

yazılabilir. $a<z<b$ bölgesi için

$$\varphi_2(\rho,z) = \int_0^\infty [B(m)e^{-mz}+C(m)e^{mz}]J_0(m\rho)\,dm$$

olacaktır. Nihayet $b<z<\infty$ bölgesinde $M=0$ almak gerekeceğinden

$$\varphi_3(\rho,z) = \int_0^\infty D(m)e^{-mz}J_0(m\rho)\,dm$$

yazılabilir.

Sınır şartları

$$z = a \quad \text{için} \quad \varphi_1 = \varphi_2 \;,\; \partial\varphi_1/\partial z = \varepsilon_r \partial\varphi_2/\partial z \;,$$

$$z = b \quad \text{için} \quad \varphi_2 = \varphi_3 \;,\; \varepsilon_r \partial\varphi_2/\partial z = \partial\varphi_3/\partial z \;,$$

şeklinde olacağından

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} e^{-ma} + A(m)e^{ma} = B(m)e^{-ma} + C(m)e^{ma} \;,$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} e^{-ma} - A(m)e^{ma} = B(m)e^{-ma} - C(m)e^{ma} \;,$$

$$B(m)e^{-mb} + C(m)e^{mb} = D(m)e^{-mb}$$

$$\varepsilon_r[B(m)e^{-mb} - C(m)e^{mb}] = D(m)e^{-mb}$$

denklemleri elde edilir. Bnnlar çözülerek $A(m)$ vs. katsayıları bulunur. Meselâ

$$D(m) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 e^{-2mc}} \left(\beta = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\right)$$

bulunacağından

$$\varphi_3(\rho,z = \frac{q\,(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{J_0(m\rho)e^{-mz}}{1-\beta^2 e^{-2mc}}\,dm$$

elde edilir. $1/(1-\beta^2 e^{-2mc})$ yi seriye açarak bu ifade

$$\varphi_3(\rho,z) = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{\rho^2+(z+2nc)^2}}$$

şekline sokulabilir.

Levha sayısı birden fazla olduğu vakit de problem benzer şekilde çözülür.

12 — Üniform yüklü dairesel halkanın ve dairesel diskin potansiyel fonksiyonları bulunacaktır.

Dairesel halkanın ekseni üstündeki potansiyel için daha önce

$$\varphi(0,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

bulunmuştur. Noktasal yükün potansiyeli için yazılan

$$\varphi(\rho,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_0^\infty J_0(m\rho)\, e^{-m|z|}\, dm$$

ifadesine göre eksen üstündeki potansiyel, $J_0(0) = 0$ olduğundan,

$$\varphi(0,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_0^\infty e^{-m|z|}\, dm$$

olacaktır. Diğer taraftan halkanın eksenindeki potansiyel için

$$\varphi(0,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_0^\infty J_0(ma)\, e^{-m|z|}\, dm$$

integrali yazılabileceğinden $P(\rho,z)$ noktasındaki potansiyel için

$$\varphi(\rho,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_0^\infty J_0(ma) J_0(m\rho)\, e^{-m|z|}\, dm$$

elde edilir.

Üniform yüklü diskin potansiyeli integrasyonla bulunur. Diskin toplam yükü Q ile gösterilirse $2\pi a da$ elemanındaki yük $dQ = \frac{Q}{\pi b^2} 2\pi a da = 2Qada/b^2$ olacağından

$$d\varphi = \frac{2\,Q\,a\,da}{4\pi\varepsilon\,b^2}\int_0^\infty J_0(ma)\,J_0(m\rho)\,e^{-m|z|}\,dm$$

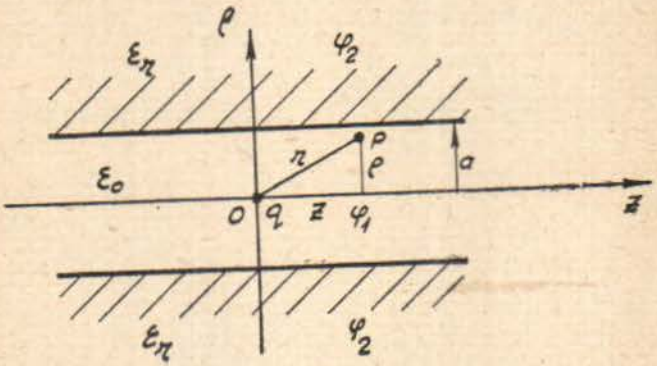
yi sıfırla b (diskin yarıçapı) arasında integre ederek

$$\varphi(\rho,z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\,b^2}\int_0^\infty J_0(m\rho)\,e^{-m|z|}\,dm\int_0^b a\,J_0(ma)da$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\,b}\int_0^\infty J_0(m\rho)\,J_1(mb)e^{-m|z|}\,dm/m$$

bulunur.

13 — Şek. 149 da q noktasal yükü sonsuz uzun silindirik bir boşluk içinde bulunduğuna göre potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 149

Eksenel simetriden dolayı problem ϕ açısına bağlı değildir. Modifiye silindirik fonksiyonlar yardımiyle

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos mz\,K_0(m\rho)\,dm$$

yazılabileceğini gözönüne alarak noktasal yükün potansiyeli için

$$\varphi(\rho,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty \cos mz\, K_0(m\rho)\, dm$$

integrali elde edilir. $\varphi(\rho,z) = \varphi(\rho,-z)$ olduğundan

$$Z = M \sin mz + N \cos mz$$

de sinüslü terimler alınmaz. Keza $\rho \to 0$ için sonsuz olan 2. nevi modifiye Bessel fonksiyonunu bırakarak 1 bölgesindeki potansiyel için

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty \cos mz\, K_0(m\rho)dm + \int_0^\infty A(m) \cos mz\, I_0(m\rho)\, dm$$

yazılabilir. Birinci terim noktasal yükün potansiyelini (primer potansiyel) ve ikinci terim ise polarizasyondan ileri gelen potansiyeli (sekonder potansiyel) göstermektedır. m değerleri sürekli olduğundan toplam yerine integral alınmıştır.

2 bölgesinde $I_0(m\rho)$ modifiye fonksiyonu alınamaz. Zira $\rho \to \infty$ için bu fonksiyon sonsuzdur. Böylece

$$\varphi_2 = \int_0^\infty B(m) \cos mz\, K_0(m\rho)\, dm$$

yazılabilir. $A(m)$ ve $B(m)$, sınır şartları yardımiyle bulunur. $\rho = a$ için $\varphi_1 = \varphi_2$ ve $\partial\varphi_1/\partial\rho = \varepsilon_r \partial\varphi_2/\partial\rho$ olacağından

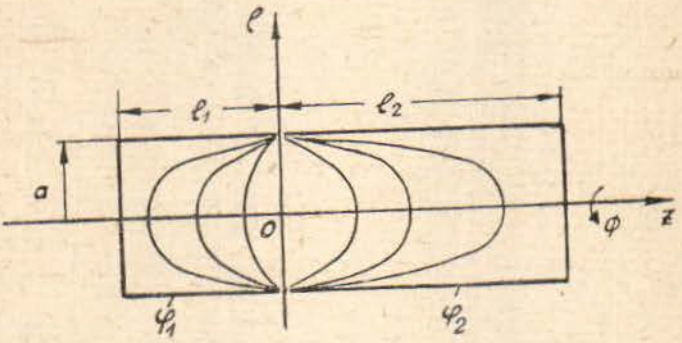
$$A(m) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{ma(\varepsilon_r - 1)K_0(ma)K_0'(ma)}{1 - ma(\varepsilon_r - 1)I_0(ma)K_0'(ma)},$$

$$B(m) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{1}{1 - ma(\varepsilon_r - 1)I_0(ma)K_0'(ma)}$$

bulunur. İntegraller mümerik olarak veya planimetre ile heaaplanır. Şayet $\varepsilon_r \to \infty$ yapılırsa sıfır potansiyelindeki iletken içindeki silindirik ka-

nalın potansiyel dağılışı elde edilir.

14 — Şek, 150 deki sistemin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır. Ayni eksenli silindirler arasında $z=0$ düzleminde sonsuz küçük bir aralık vardır. Silindirlerin potansiyelleri φ_1 ve φ_2 dir.



Şek. 150

Eksenel simetriden $\partial/\partial\phi = 0$ dır. R ve Z için

$$R = A\,I_0(m\rho) + B\,K_0(m\rho) \quad ,$$

$$Z = M \sin mz + N \cos mz$$

alalım. $\rho=0$ için sonsuz olan $K_0(m\rho)$ modifiye fonksiyonunu bırakarak harmonik için

$$RZ = (G \sin mz + H \cos mz)\, I_0(m\rho)$$

yazalım ($G = MA$, $H=NA$). $m=0$ için harmonik $(A_0 \ln \rho + B_0)(M_0 z + N_0)$ dır. $\rho = 0$ için $\ln \rho$ sonsuz olacağından $A_0 = 0$ almak icap eder. O halde bu harmoniği $k_1 + k_2 z$ ($k_1 = B_0 N_0$, $k_2 = B_0 M_0$) şeklinde alabiliriz. z—değişkenine göre sınır şartları homogen değildir. Bununla beraber $z=-l_1$ ve $z=+l_2$ noktalarındaki sabit potansiyel değerlerini $m=0$ harmoniğine yükleyerek homogen olmayan şartları dağıtmak kabil olur. Böylece $k_1 - k_2 l_1 = \varphi_1$ ve $k_1 + k_2 l_2 = \varphi_2$ denklemleri yardımiyle

$$k_1 = \frac{l_1\varphi_2 + l_2\varphi_1}{l_1 + l_2} \quad , \quad k_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l_1 + l_2}$$

bulunur. k_1 ve k_2 için bu değerler alınınca $Z(-l_1)=0$ ve $Z(+l_2)=0$ olacağından

$$-M \sin m l_1 + N \cos m l_1 = 0 \ ,$$

$$M \sin m l_2 + N \cos m l_2 = 0$$

yazarak $\sin m(l_1+l_2)=0$ bulunur. Bu denklemi sağlayan m değerleri

$$m_\alpha = \frac{\alpha \pi}{l_1+l_2} \qquad (\alpha=1,2, \ldots)$$

şeklinde bulunur. Böylece genel çözüm için

$$\varphi(\rho,z) = k_1+k_2 z + \sum_\alpha (G_\alpha \sin m_\alpha z + H_\alpha \cos m_\alpha z)\, I_0(m_\alpha \rho)$$

veya $G_\alpha/H_\alpha = \operatorname{ctg} m_\alpha l_1$ olduğunu gözönüne alarak

$$\varphi(\rho,z) = k_1+k_2 z + \sum_\alpha H_\alpha \frac{\sin m_\alpha (l_1+z)}{\sin m_\alpha l_1} I_0(m_\alpha \rho)$$

yazılabilir.

$\rho=a$ olunca $-l_1<z<0$ için $\varphi=\varphi_1$ ve $0<z<+l_2$ için $\varphi=\varphi_2$ değerini alacağından Fourier sinüs serisinin katsayıları

$$A_\alpha = \frac{2}{l_1+l_2}\left[\int_{-l_1}^{0} (\varphi_1-k_1-k_2 z) \sin m_\alpha (l_1+z) dz \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{+l_2} (\varphi_2-k_1-k_2 z) \sin m_\alpha (l_1+z)\, dz \right]$$

şeklinde hesaplanır. Yarım periyod l_1+l_2 dir. İntegraller hesaplanırsa

$$A_\alpha = -\frac{2}{\alpha\pi}(\varphi_1-\varphi_2) \cos m_\alpha l_1$$

bulunur. Genel çözümle karşılaştırarak $(\rho=a)$ H_α katsayıları için

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha\pi}(\varphi_2-\varphi_1) \cos m_\alpha l_1 \ \frac{\sin m_\alpha l_1}{I_0(m_\alpha a)}$$

ifadesi bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,z) = \frac{(l_1+z)\varphi_2 + (l_2-z)\varphi_1}{l_1+l_2} + \frac{2}{\pi}\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha}\cos m_\alpha l_1 \sin m_\alpha (l_1+z)\frac{I_0(m_\alpha \rho)}{I_0(m_\alpha a)}$$

dir.

$l_1=l_2=l$ için $\cos m_\alpha l_1 = \cos(\alpha\pi/2)$ olacağından seri yalnız çift α değerleri için yazılır. Bu durumda $z=0$ için $\sin(\alpha\pi/2)=0$ olacağından simetri düzleminin potansiyeli

$$\varphi(\rho,0) = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$$

değerini alır.

Şayet silindirlerden biri sonsuz uzun olursa problem Fourier integralini kullanarak çözülür. Meselâ $l_2\to\infty$ alarak şu sonuçlar elde edilir: $Z(-l_1)=0$ şartından $G/H=\operatorname{ctg} m l_1$ bulunacağından

$$\varphi(\rho,z)=\varphi_1+\int_0^\infty H(m)\frac{\sin m(l_1+z)}{\sin m\, l_1} I_0(m\rho)\, dm$$

yazılabilir, m değerleri sürekli olduğundan toplam yerine integral alınmış ve $z=-l_1$ için $\varphi=\varphi_1$ olduğu gözönüne alınarak denkleme φ_1 eklenmiştir. $H(m)$ katsayısı, $\rho=a$ sınırındaki potansiyel dağılışını Fourier integrali yardımiyle göstererek bulunur. Bu maksadla $\zeta=z+l_1$ değişken transformasyonu yapılırsa $\rho=a$ için

$$\varphi(a,z)=\varphi_1+\int_0^\infty H(m)\frac{\sin m\,\zeta}{\sin m\, l_1} I_0(ma)\, dm$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$f(\zeta)=\varphi(a,\zeta)-\varphi_1$$

fonksiyonunun kompleks Fourier integrali

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(m)e^{jm\zeta}\,dm = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} g(p)e^{p\zeta}\,dp$$

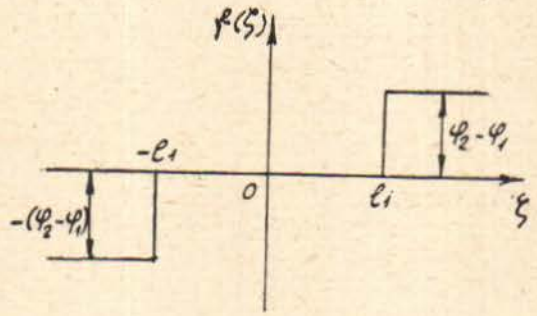
şeklindedir. Katsayı fonksiyonu

$$g(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)e^{-p\zeta}\,d\zeta$$

integrali ile bulunur. Şek. 151 de $f(\zeta)$ nın değişimi görülmektedir. $\varphi(a,\zeta)$ ifadesine göre tek fonksiyonu gözönüne alarak

$$g(p) = -\int_{-\infty}^{-l_1} (\varphi_2-\varphi_1)\,e^{-p\zeta}d\zeta + \int_{l_1}^{\infty} (\varphi_2-\varphi_1)e^{-p\zeta}d\zeta = -j\,\frac{2}{m}\,(\varphi_2-\varphi_1)\cos ml_1$$

bulunur. Diğer taraftan $U(m)$ fonksiyonu



Şek. 151

$$U(m) = -\frac{1}{\pi}\,Im\left\{g(m)\right\} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi_1-\varphi_2}{m}\cos m l_1$$

dir. Bunu $\varphi(a,\zeta)$ ifadesi ile karşılaştırarak

$$H(m) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi_1-\varphi_2}{m}\,\frac{\sin m l_1 \cos m l_1}{I_0(ma)}$$

bulunur. Böylece potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(\rho,z)=\varphi_1-\frac{2}{\pi}(\varphi_1-\varphi_2)\int_0^{\infty}\frac{\cos m l_1}{m}\sin m(l_1+z)\frac{I_0(m\rho)}{I_0(ma)}\,dm$$

elde edilir. Bu integral nümerik veya grafik olarak hesaplanabilir. Rezidülerden faydalanarak da hesaplar yapılabilir. Bu maksadla $p=jm$ koyarak kompleks integrasyona geçilir. Kutuplar $p=0$ ve $I_0(ma)=J_0(pa)=0$ denkleminin kökleridir.

Her iki silindir sonsuz uzun olduğu takdirde problem yine Fourier integrali yardımiyle çözülebilirse de Bessel fonksiyonları ile çözmek daha kolay olur. Bu maksadla

$$R = A\,J_0(m\rho) + BY_0(m\rho)\ ,$$

$$Z = Me^{mz} + Ne^{-mz}$$

çözümlerini gözönüne alalım. $\rho = 0$ ekseni çözüm bölgesinde bulunduğundan Neumann fonksiyonu kullanılamaz ve $z>0$ için $M=0$ ve $z>0$ için $N=0$ almak gerekir. Böylece $z>0$ bölgesindeki harmonik için $Ke^{-mz}J_0(m\rho)$ alınabilir ($K=AN$). Bu fonksiyonun $\rho=a$ için sıfır olması istenirse bu sınırdaki sınır şartını ($\varphi=\varphi_2$) gözönüne alarak genel çözüme φ_2 yi eklemek icap eder. Diğer taraftan $J_0(m_\alpha a)=0$ denkleminin kökleri yardımiyle m_α değerleri bulunur. $J_0(m_\alpha \rho)$ fonksiyonları ortogonal bir sistem teşkil ederler ve norm

$$N_\alpha = \frac{a^2}{2}J_1^2(m_\alpha a)$$

dır. Genel çözüm için

$$\varphi(\rho,z)=\varphi_2+\sum_\alpha K_\alpha e^{-mz}J_0(m_\alpha \rho)$$

yazılabilir. K_α katsayıları $\varphi(\rho,0)=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ olacağını gözönüne alarak yazılan

$$\varphi_2+\sum_\alpha K_\alpha J_0(m_\alpha \rho)=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$$

denklemi yardımiyle bulunur. Böylece

$$K_\alpha = \frac{1}{2N_z}(\varphi_1-\varphi_2)\int_0^a \rho J_0(m_\alpha \rho)\,d\rho = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{m_\alpha a J_1(m_\alpha a)}$$

elde edilir. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,z)=\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2)\sum_\alpha \frac{J_0(m_\alpha \rho)}{m_\alpha a J_1(m_\alpha a)} e^{-m_\alpha z}$$

şeklinde olacaktır.

Pratikte ekseriya eksen üzerindeki potansiyel ve türevi ile ilgilenilir. $\rho=0$ için

$$\varphi(0,z)=\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2)\sum_\alpha \frac{e^{-m_\alpha z}}{m_\alpha a J_1(m_\alpha a)}$$

bulunur. Toplam için yaklaşık olarak $(1-\mathrm{Th}\,\omega z)/2$ yazılabileceğinden

$$\varphi(0,z) \approx \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\mathrm{Th}\,\omega z$$

bulunur ($\omega=1{,}32/a$).

Yukarıda incelenen tertiplere elektron optiğinde rastlanır.

26. Eliptik silindirik koordinatlarda analitik çözüm.

Eliptik silindirik koordinatlarda metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = c\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta} = h \quad , \quad h_z = 1$$

olduğundan Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$$

şeklindedir. $\varphi(\xi,\eta,z)=F(\xi)\,H(\eta)\,Z\,z)$ ayırması yapılırsa

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\xi^2}+\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2}\right)+\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

bulunur. Son terimi m^2 ye eşit yazarak

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - m^2Z = 0 \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2} + m^2h^2 = 0$$

elde edilir. İkinci denklemde $h^2 = c^2(\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta)$ koyarak

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\xi^2} + m^2c^2\,\mathrm{Ch}^2\xi + \frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2} - m^2\cos^2\eta = 0$$

yazılabilir. İlk iki terimi p^2 ye eşit yazarak

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + (m^2c^2\,\mathrm{Ch}^2\,\xi - p^2)\,F = 0 \quad , \qquad (b)$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + (p^2 - m^2c^2\cos^2\eta)\,H = 0 \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri bulunur.

(a) denkleminin çözümü $m \neq 0$ için

$$Z = M\,\mathrm{Sh}\,mz + N\,\mathrm{Ch}\,mz$$

dir. (b) ve (c) denklemlerinin çözümleri Mathieu fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar için özel literatüre müracaat tavsiye edilir.

Potansiyel fonksiyonu bulunduktan sonra alan bileşenleri

$$E_\xi = -\frac{1}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \quad , \quad E_\eta = -\frac{1}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad .$$

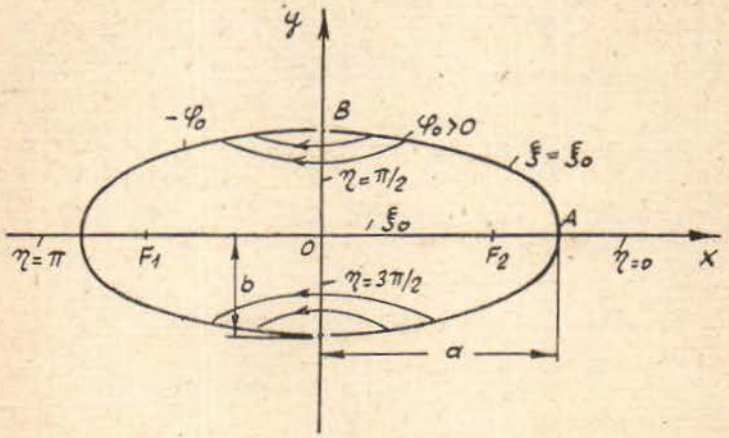
türevleri yardımiyle hesaplanır.

İki boyutlu problemlerde potansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0$$

şeklinde, yani kartezyen koordinatlar gibidir. x ye y yerine ξ ve η alarak benzer çözümler yazılabilir. İki boyutlu problemlerin çözümüne örnek olarak şek. 152 de görülen sonsuz uzun eliptik silindirin içindeki

potansiyel fonksiyonunu araştıralım. Eliptik silindirin $x>0$ yarısı φ_0



Şek. 152

potansiyelinde ve $x<0$ yarısı ise $-\varphi_0$ potansiyelindedir. $F(\xi)$ ve $H(\eta)$ için

$$F=A\ \mathrm{Sh}\ p\xi + B\ \mathrm{Ch}\ p\xi\ ,$$

$$H=C\sin p\eta + D\cos p\eta$$

çözümlerini alalım. Sistemde iki simetri şartı vardır. Simetriden dolayı $\xi=0$ ekseni (büyük eksen) bir alan çizgisidir. Bu sebeple büyük eksen boyunca $E_\xi = 0$ ve dolayısiyle $(\partial F/\partial\xi)_{\xi=0} = 0$ olması gerekir. Böylece

$$(pA\ \mathrm{Ch}\ p\xi + pB\ \mathrm{Sh}\ p\xi)_{\xi=0} = 0$$

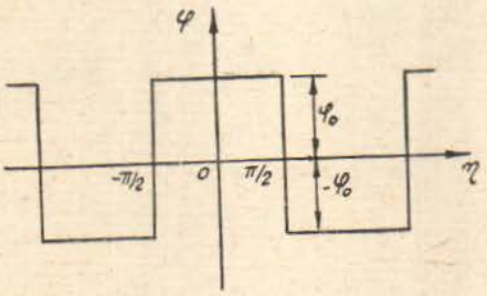
denklemi yardımiyle $A = 0$ bulunur. Diğer taraftan $\eta=\pi/2$ ve $\eta=3\pi/2$ için (küçük eksen boyunca) potansiyel sabittir ve yarım silindirlerin potansiyellerinin ortalamasına yani sıfıra eşittir. Buradan $H(\pi/2)=H(3\pi/2)=0$ yani $C=0$ bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi\ (\xi,\eta) = \sum_p K_p\ \mathrm{Ch}\ p\xi\cos p\eta$$

şeklindedir ($K=BD$).

Potansiyel $\xi=\xi_0$ eliptik silindiri üstünde $-\pi/2<\eta<\pi/2$ için $\varphi=\varphi_0$

değerini ve $\pi/2<\eta<3\pi/2$ için $\varphi=-\varphi_0$ değerini almaktadır, şek. 153. Bu dikdörtgen dalganın Fourier serisi



Şek. 153

$$\varphi(\xi_0,\eta)=\frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)\eta$$

şeklindedir. Bunu

$$\varphi(\xi_0,\eta)=\sum_p K_p \operatorname{Ch} p\xi_0 \cos p\eta$$

ile karşılaştırarak $p=2n+1$ ve

$$K_p=\frac{4\varphi_0}{\operatorname{Ch} p\xi_0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

bulunur. Böylece potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{\operatorname{Ch}(2n+1)\xi}{\operatorname{Ch}(2n+1)\xi_0}\cos(2n+1)\eta$$

elde edilir.

Elipsi karekterize eden ξ_0 değeri yarı eksenler yardımiyle kolayca bulunur. A noktasında $x=a$, $\eta=0$, $\xi=\xi_0$ olduğundan $a=c\operatorname{Ch}\xi_0$ ve B noktasında $y=b$, $\eta=\pi/2$, $\xi=\xi_0$ olduğundan $b=c\operatorname{Sh}\xi_0$ yazarak $\xi_0=\operatorname{Th}^{-1}(b/a)$ elde edilir.

27. Parabolik silindirlik koordinatlarda analitik çözüm.

Parabolik silindirik koordinatlarda metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = h \quad , \quad h_z = 1$$

olduğundan $F(\xi)$, $H(\eta)$ ve $Z(z)$ fonksiyonları için

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - m^2 Z = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + (m^2\xi^2 - p^2)\, F = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + (m^2\eta^2 + p^2)\, H = 0$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Son iki denklemin çözümleri Hermite fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar için özel literatüre müracaat edilmesi tavsiye olunur.

28. Küresel koordinatlarda analitik çözüm.

Bu koordinatlarda Laplace denklemi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

şeklinkedir. Şayet potansiyel ϕ açısına bağlı değilse, yani z—eksenine göre eksenel simetri varsa, $\partial/\partial\phi = 0$ olacağından laplace denklemi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0$$

şekline girer. $\varphi(r,\theta) = R(r)T(\theta)$ ayırması yardımiyle

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{T\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dT}{d\theta}\right) = 0$$

elde edilir. Birinci terim yalnız r ye ve ikinci terim ise yalnız θ ya bağlı olduğundan birinciyi k ya eşit yazarak

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - kR = 0 \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dT}{d\theta}\right) + kT = 0 \qquad (b)$$

diferansiyel denklemleri bulunur. (a) denkleminde $R = r^n$ ve $R = r^{-(n+1)}$ koyarak $k = n(n+1)$ bulunacağından bu denklemin çözümünün

$$R_n \to A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$$

olacağı anlaşılır.

İkinci denklem Legendre denklemidir ve $k=n(n+1)$, $\mu=\cos\theta$ koyarak

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dT}{d\mu}\right]+n(n+1)T=0$$

şekline girer. Bu denklemin çözümlerinden yalnız $P_n(\mu)$ şeklinde gösterilen Legendre polinomları, n nin tam sayı değerleri için, $\mu=\pm 1$ olduğu vakit sınırlı kaldıklarından poler eksenin çözüm bölgesine girmesi halinde harmonik

$$R_nP_n=\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

şeklinde alınır. Buna zonal harmonik denilir. Genel çözüm

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_nP_n$$

dir. $1/r$ zonal harmoniği noktasal yükün potansiyelini ve $\cos\theta/r^2$ zonal harmoniği ise dipolün potansiyelini gösterir.

Üç değişkenli Laplace denkleminde $\varphi(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$ koyarak

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2S}{\partial\phi^2}=0$$

bulunur. Birinci terim yalnız r ye ve son iki terim ise hem θ ya ve hem de ϕ ye bağlıdır. Birinci terimi $n(n+1)$ e eşit yazarak

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-n(n+1)R=0 \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2S}{\partial\phi^2}+n(n+1)S=0 \qquad (b)$$

denklemleri elde edilir. $S(\theta,\phi)=T(\theta)F(\phi)$ ayırması yapılırsa son denklem

$$\frac{\sin\theta}{T}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right)+n(n+1)\sin^2\theta+\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}=0$$

şekline girer. Yalnız ϕ ye bağlı olan son terimi $-m^2$ ye eşit yazarak

$$\frac{d^2F}{d\phi^2}+m^2\phi=0 \quad , \qquad (c)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T=0 \qquad (d)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. $\mu=\cos\theta$ koyarak son denklem

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dT}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]T=0 \qquad (e)$$

şekline sokulabilir. (a) ve (c) denklemlerinin çözümleri

$$R_n=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}} \quad ,$$

$$F_m=C_m\sin m\phi+D_m\cos m\phi$$

dir. (d) nin çözümü ise

$$T_n^m=E_{m,n}P_n^m(\cos\theta)+F_{m,n}Q_n^m(\cos\theta)$$

dır. P_n^m ve Q_n^m, 1. ve 2. nevi asosye Legendre fonksiyonlarıdır.

Küresel harmonik $R_n\,T_n^m\,F_m$ ve genel gözüm

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{n=0}^{\infty}R_n\,T_n^m\,F_m$$

olacaktır. Eksenel simetri halinde $m=0$ olur.

Şayet $r=0$ çözüm bölgesinr girerse $A=0$ ve $r\to\infty$ çözüm bölgesine girerse $B=0$ alınır. Potansiyel fonksiyonu genel olarak bir değerli olacağından $\varphi(\phi)=\varphi(\phi+2\pi)$ dir ve bu sebeple m ye tam sayı değerlerini vermek gerekir. $Q_n^m(\mu)$ fonksiyonları $\mu=\pm1$ için sonsuz olduklarından poler eksen çözüm bölgesine girdiği vakit kullanılamazlar.

$P_n^m(\mu)$ fonksiyonları ise n tam sayı olmadığı vakit yakınsak değildirler. Nihayet $P_n^m(\mu)$ fonksiyonları ancak $n=m$ için mevcutturlar. Küresel koorditatlardaki analitik çözümleri araştırırken bu önemli noktaları gözönünde bulundurmak lâzımdır.

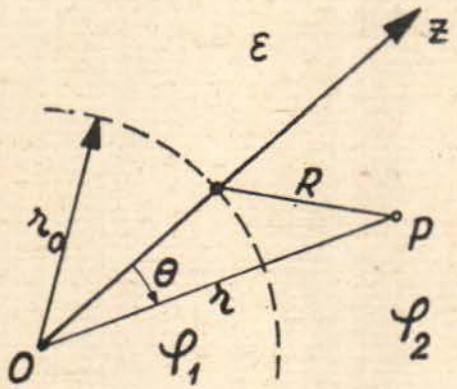
(*b*) diferansiyel denkleminin çözümlerine yani

$$S_n^m(\theta,\phi)=P_n^m(\cos\theta)\ (C_m \sin m\phi + D_m \cos m\phi)$$

fonksiyonlarına yüzey harmonik adı verilir. Bunlar n veya m ye göre ortogonal bir fonksiyon sistemi meydana getirirler. Keza $P_n^m(\mu)$ fonksiyonları $-1 \leqq \mu \leqq +1$ aralığında ortoganol bir sistem teşkil ederler.

Örnekler :

1 — Noktasal yükün potansiyeli Legendre polinomları serisine açılacaktır, şek. 154



Şek. 154

Orijinden r_0 uzaklığındaki q yükü P noktasında $\varphi = q/4\pi\varepsilon R$ potansiyelelini meydana getirir. Şek. 154 yardımiyle

$$R=\sqrt{r_0^2+r^2-2rr\cos\theta}$$

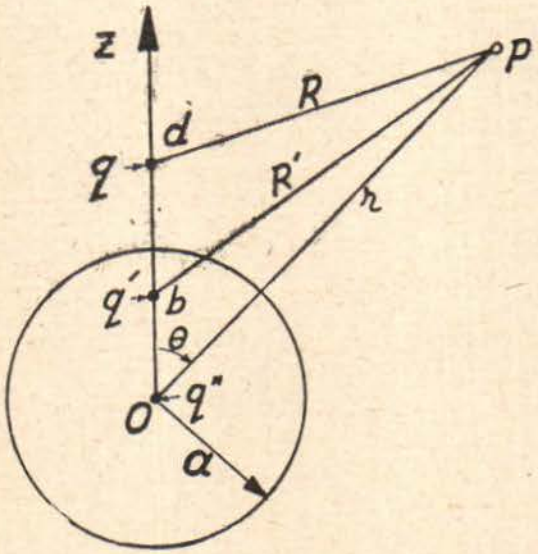
yazılabileceğinden seriye açarak $r<r_0$ ve $r>r_0$ için

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (r<r_0)\ ,$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad (r > r_0)$$

ifadeleri elde edilir. φ_2 ifadesinde birinci terim orijinde bulunan noktasal yükün potansiyelini ve ikinci terim ise yine orijinde bulunan dipolün potansiyelini gösterir. Diğer terimlere 2., 3. vs. basamaktan çok kutupluların potansiyeli (mültipol) gözüyle bakmak kabildir.

2 — İletken küre ve noktasal yük sisteminin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 155.



Şek. 155

Potansiyel ϕ açısına bağlı değildir ($m=0$). $\mu=\pm 1$ için sonsuz olduğundan $Q_n(\mu)$ fonksiyonları ve $r\to\infty$ için sonsuz olan r^n terimleri kullanılmaz. Boylece küre dışındaki potansiyel için

$$\varphi(r,\theta)=\varphi_p+\varphi_s=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}+\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. φ_p, noktasal yükün potansiyelini (primer potansiyel) ve φ_s ise küre yüzeyinde indüklenen yük dağılışının potansiyelini (sekonder potansiyel) göstermektedir. $r<d$ için

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon d}\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right]P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. Kürenin potansiyelini φ_k ile göstererek

$$\varphi(a,\theta) = \varphi_k = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon d}\left(\frac{a}{d}\right)^n + \frac{B_n}{a^{n+1}}\right]P_n(\cos\theta)$$

elde edilir. Kürenin potansiyeli sabit olacağından bu denklemin her θ açısı için sağlanması gerekir. Bunun için de sıfırdan farklı n değerleri için $P_n(\cos\theta)$ lerin katsayıları sıfır olmak zorundadır. Bu suretle $n=0$ ve $n\neq 0$ için katsayıları bulmaya yarayan

$$B_0 = a\varphi_k - \frac{aq}{4\pi\varepsilon d} \quad , \quad B_n = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}$$

ifadeleri elde edilir. Küre dışındaki her hangi bir noktada potansiyel

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{a\varphi_k}{r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

olur. Küre yüzeyindeki yük yoğunluğu için

$$\sigma = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{q}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{a^{n-1}}{d^{n+1}}P_n(\cos\theta) + \frac{\varepsilon\varphi_k}{a}$$

bulunur. Kürenin toplam yükü ise

$$Q_k = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi a^2 \int_0^{\pi}\sigma \sin\theta \, d\theta$$

olacaktır. Legendre fonksiyonlarının ortogonalliğinden dolayı $n \neq m$ için

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0$$

dır. $m=0$ için $P_0(\cos\theta)=1$ olduğunu gözönüne alarak $n \neq 0$ için

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0$$

bulunur. Böylece

$$Q_k = -\frac{a}{d} q + 4\pi\varepsilon a\, \varphi_k = 4\pi\varepsilon B_0$$

elde edilir. Buradan kürenin potansiyeli için

$$\varphi_k = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon d}$$

yazılabilir. Şayet küre topraklanmışsa $\varphi_k = 0$ alınır. Küre izole ve nötr olduğu takdirde ise $Q_k=0$ olacaktır.

Sekonder potansiyeli

$$\varphi_s = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon r} - \frac{qa^3/d^2}{4\pi\varepsilon} \frac{\cos\theta}{r^2} - \cdots$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifade incelenirse birinci terimin orijindeki $Q_k=4\pi\varepsilon B_0$ noktasal yükünün potansiyelini, ikinci terimin momenti $-qa^3/d^2 = 4\pi\varepsilon B_1$ olan ve z — ekseni yönünde bulunan dipolün potansiyelini vs. gösterdikleri anlaşılır.

Şek. 155 de $z=b=a^2/d$ noktası $z=d$ noktasının küreye göre enversidir. Bu noktanın P ye uzaklığı R' ile gösterilirse

$$\frac{1}{R'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{d^n} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

yazılabilir. Bu suretle potansiyel ifadesi

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R} - \frac{qa/d}{4\pi\varepsilon R'} + \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon r} + \frac{qa/d}{4\pi\varepsilon r}$$

şekline girer. Bu ifadede birinci terim $z=d$ noktaşındaki q yükünün, ikinci terim $z=b$ noktasındaki $q'=-qa/d$ imaj yükünün, üçüncü terim orijindeki Q_k yükünün (nötr kürede sıfır) ve dördüncü terim orijindeki $q''=-q'=qa/d$ yükünün potansiyelini gösterir.

3 — Dieleklrik küre ve noktasal yük sisteminin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

Dielektrik kürenin dielektrik sabitini ε_1 ile ve dış ortamınkini de ε_2 ile gösterelim, şek. 155. Küre dışındaki potansiyel için

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. Birinci terim primer potansiyeli ve ikinci terim ise polarizasyon sonucu meydana gelen sekonder potansiyeli gösterir. Küre içindeki potansiyel için

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

yazabiliriz. $r=0$ için sonsuz olan $r^{-(n+1)}$ terimleri bırakılmıştır. Bu ifade hem q yükünün payını ve hem de polarizasyonu içine almaktadır. Küre dışında $r<d$ için

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_2 d}\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta)$$

olacaktır. Sınır şartları $r=a$ için

$$\varphi_1=\varphi_2 \quad \text{ve} \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$$

şeklindedir. Bunlar yardımiyle

$$A_n = \frac{q}{4\pi}\,\frac{2n+1}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\,\frac{1}{d^{n+1}},$$

$$B_n = \frac{q}{4\pi}\,\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)n}{\varepsilon_1[n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2]}\,\frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}$$

bulunur. Böylece potansiyel fonksiyonları için

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{q}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{r^n}{d^{n+1}}P_n(\cos\theta) \quad ,$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R} + \frac{q}{4\pi}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

ifadeleri elde edilir.

$\varepsilon_1 \to \infty$ için bu ifadeler

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 d} \quad ,$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

şekline girerler. Bunlar ise nötr iletken kürenin potansiyelleridir. $b=a^2/d$ ve $q'=-aq/d$ koyarak

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_2 r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. İkinci terim $z=b$ envers noktasında bulunan q' imaj yükünün potansiyelini gösterir. Bu ifadeyi

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_2 R'}$$

şeklinde de yazabiliriz.

4 — Poler eksen üstündeki $\lambda=\lambda(\zeta)$ sürekli çizgisel yük dağılışının potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

Yük dağılışının orijinden itibaren l uzunluğu boyunca yerleştiği farzedilmektedir. Poler eksen üstündeki $d\zeta$ elemanı R uzaklığındaki P noktasında $d\varphi=\lambda d\zeta/4\pi\varepsilon R$ potansiyelini meydana getireceğinden $r>l$ için

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^l \lambda(\zeta)\,\zeta^n\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\,d\zeta$$

bulunur. $n=0$ için

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} \int_0^l \lambda(\zeta)\, d\zeta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

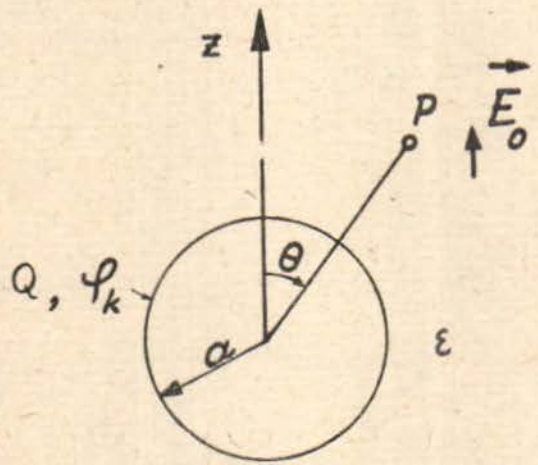
olur (Q=toplam yük). Bu ifade orijindeki noktasal yükün potansiyelini gösterir. Diğer terimler yüksek basamaktan eksenel mültipollerin potansiyellerini gösterirler. n. basamaktan mültipol için

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, p^{(n)}\, r^{-(n+1)}\, P_n(\cos\theta) \quad ,$$

$$p^{(n)} = \int_0^l \lambda(\zeta)\, \zeta^n\, d\zeta$$

dir.

5 — İletken küre üniform alan içine sokuluyor, şek. 156. Sistemin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 156

Üniform alanın yönü $+z$—ekseni yönünde alınırsa primer potansiyel için

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta = -E_0 r\, P_1(\cos\theta)$$

yazılabilir ($z=0$ için $\varphi_0=0$ alarak). Kürenin tesirle elektriklenmesinden dolayı yüzeyinde meydana gelen yük dağılışının doğuracağı sekonder

potansiyel için

$$\varphi_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

yazılabilir. Böylece küre dışındaki potansiyel için

$$\varphi(r,\theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

elde edilir. Kürenin potansiyeli φ_k ile gösterilirse $r = a$ için

$$\varphi_k = -E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{a^{n+1}}$$

yazılabilir. Küre yüzeyinde potansiyel sabit olacağından bu ifade θ açısına bağlı olamaz. Böylece

$$B_0 = a\varphi_k \ , \quad B_1 = a^3 E_0 \ , \quad B_n = 0 \ (n>1)$$

bulunacağından potansiyel için

$$\varphi(r,\theta) = \left(-r + \frac{a^3}{r^2}\right) E_0 \cos\theta + \frac{a}{r}\varphi_k$$

elde edilir. Kürenin yüzey yoğunluğu

$$\sigma = -\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 3\varepsilon E_0 \cos\theta + \frac{\varepsilon \varphi_k}{a}$$

olacaktır. Kürenin toplam yükü ise

$$Q_k = a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi\varepsilon a \varphi_k$$

dır. Sekonder potansiyel için

$$\varphi_s = \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos\theta + \frac{a}{r}\varphi_k$$

yazılabilir. Birinci terim orijinde bulunan ve momenti $p=4\pi\varepsilon a^3 E_0$ olan dipolün potansiyelini ve ikinci terim ise orijindeki Q_k noktasal yükünün Coulomb potsnsiyelini gösterir (nötr kürede Q_k 0 dır).

6 — Dielektrik küre üniform alan içine sokuluyor. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

Kürenin dielektrik sabitini ε_1 ile ve dış ortamınkini de ε_2 ile gösterelim. Kürenin içindeki potansiyel için

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. Polarizasyon sonucu meydana gelen sekonder potansiyel için

$$\varphi_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

ya zılabileceğinden kürenin dışındaki potansiyel için

$$\varphi_2 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

elde edilir.

Problemin sınır şartları $r=a$ için $\varphi_1=\varphi_2$ ve $\varepsilon_1 \partial\varphi_1/\partial r = \varepsilon_2 \partial\varphi_2/\partial r$ dir. Böylece

$$\sum_n A_n a^n P_n(\cos\theta) = -E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_n B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{a^{n+1}}, \qquad (a)$$

$$\varepsilon_1 \sum_n n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta) = -\varepsilon_2 E_0 P_1(\cos\theta) - \varepsilon_2 \sum_n B_n \frac{n+1}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta) \qquad (b)$$

yazılabilir. $n=0$ için (a) denkleminden $B_0/A_0 = a^{n+1}$ ve (b) denkleminden $B_0=0$ bulunur. O halde $A_0 = B_0 = 0$ dır. $n>1$ için (a) dan $B_n/A_n = a^{2n+1}$ ve (b) den $B_n/A_n = -n\varepsilon_1 a^{2n+1}/(n+1)\varepsilon_2$ elde edilir. Buradan $n\neq 1$ için $A_n=B_n=0$ almak gerektiği anlaşılır. $n=1$ için denklemleri çözerek

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \quad B_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E_0$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos\theta ,$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

dir. Kürenin sekonder potansiyeli

$$\varphi_s = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

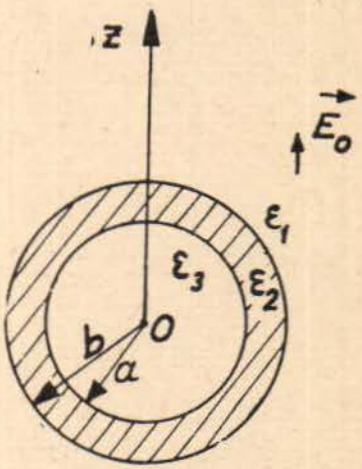
dir. Bu ifade, orijine yerleştirilen ve momenti

$$p = 4\pi\varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E_0$$

olan dipolün potansiyelini gösterir.

İletken küreye ait formülleri $\varepsilon_1 \to \infty$ alarak kolayca elde edebiliriz.

7 — Şek. 157 de görülen üç bölgedeki potansiyel fonksiyonları bulunacaktır.



Şek. 157

Üniform alan $+z-$ ekseni yönündedir. Üç bölgedeki potansiyeller için

$$\varphi_1 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_n A_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} ,$$

$$\varphi_2 = \sum_n \left(B_n r^n + \frac{C_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) ,$$

$$\varphi_3 = \sum_n D_n r^n P_n(\cos\theta)$$

yazılabilir. Sınır şartları yardımiyle $n=0$ ve $n>1$ için katsayıların sıfır olacağı görülür. Böylece potansiyel fonksiyonları

$$\varphi_1 = \left(-E_0 r + \frac{A_1}{r^2}\right) P_1(\cos\theta) \ ,$$

$$\varphi_2 = \left(B_1 r + \frac{C_1}{r^2}\right) P_1(\cos\theta) \ ,$$

$$\varphi_3 = D_1 r P_1(\cos\theta)$$

şekline girerler. Katsayılar sınır şartlarından bulunur. Meselâ $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$ ve $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ alarak

$$D_1 = -\frac{q\varepsilon_r E_0}{(2\varepsilon_r+1)(\varepsilon_r+2) - 2(\varepsilon_r - 1)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^3}$$

elde edilir. $\varphi_3 = D_1 r \cos\theta = D_1 z$ olduğundan iç bölgedeki alan

$$E_{3z} = -\frac{d\varphi_3}{dz} = -D_1 = \frac{E_0}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{\varepsilon_r}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right]}$$

olur. Bu alan üniformdur. İfadenin incelenmesinden içteki alanın daima dıştaki alandan daha zayıf olacağı anlaşılır. Dielektrik küre ekranlayıcı bir tesir göstermektedir. Ancak bu ekranlamanın bir değer kazanabilmesi için yüksek dielektrik sabitli özel malzemeler kullanmak gerekir. $\varepsilon_r \to \infty$ alınırsa ekranlame tam olur (iletken küre, $E_{3z} = 0$). Şayet $a \to 0$ yapılırsa üniform alan içine sokulan b yarıçaplı dielektrik küreye ait formüller elde edilir.

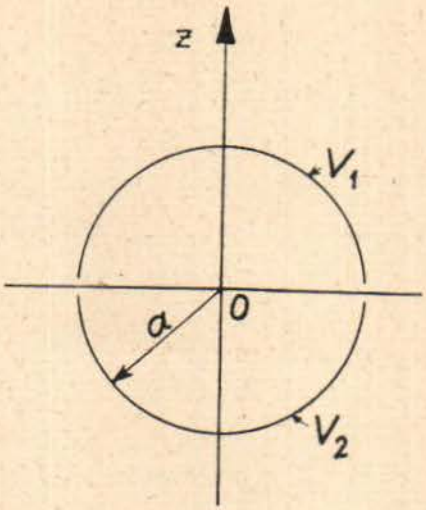
8 — Şek. 158 deki yarım kürelerin potansiyelleri V_1 ve V_2 olduğuna göre içteki ve dıştaki potansiyel dağılışları bulunacaktır.

$r \leqq a$ ve $r \geqq a$ için potansiyel fonksiyonlarını φ_1 ve φ_2 ile göstererek

$$\varphi_1(r,\theta) = \sum_n A_n r^n P_n(\mu) \ ,$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \sum_n B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

yazılabilir ($\mu = \cos\theta$). Küre yüzeyindeki sınır şartları



Şek. 158

$1 \geqq \mu \geqq 0$ için $\varphi = \varphi_1$,

$0 \geqq \mu \geqq -1$ için $\varphi = \varphi_2$

şcklindedir. Potansiyel fonksiyonları küre yüzeyinde

$$\varphi_1(a,\theta) = \sum_n A_n a^n P_n(\mu) \quad ,$$

$$\varphi_2(a,\theta) = \sum_n B_n a^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

olacaktır. Potansiyel dağılışı Legendre serisine açılırsa iki bölgedeki katsayıları bulmak için

$$\frac{2}{2n+1}(A_n a^n) = \int_{-1}^{0} \varphi_2 P_n(\mu)\, d\mu + \int_{0}^{+1} \varphi_1 P_n(\mu)\, d\mu \quad ,$$

$$\frac{2}{2n+1}\left[B_n a^{-(n+1)}\right] = \int_{-1}^{0} \varphi_2 P_n(\mu)\, d\mu + \int_{0}^{+1} \varphi_1 P_n(\mu) d\mu$$

efadeleri elde edilir. Diğer taraftan

$$(2n+1)\int_{\mu_1}^{\mu_2} P_n(\mu)d\mu = P_{n+1}(\mu_2) - P_{n-1}(\mu_2) - P_{n+1}(\mu_1) + P_{n-1}(\mu_1)$$

ve $n=2k$ (çift) için

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}, \quad P_{2k}(-1) = P_{2k}(+1) = +1$$

ve $n=2k+1$ (tek) için

$$P_{2k+1}(0) = 0 \quad , \quad P_{2k+1}(+1) = -P_{2k+1}(-1) = +1$$

olduğunu gözününe alarak n çift olduğu vakit yalnız $n=0$ için

$$A_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad B_0 = \frac{a}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

bulunur ve diğerleri sıfır olur. n tek olduğu vakit

$$A_n = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2a^n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n+1)}(2n+1)$$

bulunur. B_n katsayıları yukarıdaki ifadelerde a^n yerine $a^{-(n+1)}$ koyarak yazılabilir. Böylece potansiyeller için

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sum_{n=1\,(\text{tek})}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n+1)}(2n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\mu),$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\frac{a}{r} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sum_{n=1(\text{tek})}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n+1)}(2n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\mu)$$

ifadeleri elde edilir.

$\theta=\pi/2$ düzleminin potansiyeli $\varphi=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ dir. Bu sebeple yukarıdaki çözümler, potansiyeli φ_1 olan yarım küre ile $(\varphi_1+\varphi_2)/2$ potansiyelindeki dairesel disk arasındaki potansiyeli bulmak için kullanılabilir.

Şayet $\varphi_2 = -\varphi_1$ seçilirse topraklanmış disk ile yarım küre arasındaki potansiyel fonksiyonu elde edilir.

9 — Her hangi bir eksenel simetrik küresel potansiyel dağılışının meydana getireceği potansiyel incelenecektir.

Kürenin yarıçapı R olsun Yüzeydeki potansiyel dağılışını $\varphi(R,\theta) = f(\theta)$ ile gösterelim. Kürenin içindeki ve dışındaki potansiyeller için

$$\varphi_i = \sum_n A_n r^n P_n(\mu) \quad ,$$

$$\varphi_0 = \sum_n B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

yazılabilir. A_n ve B_n katsayıları

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^{+1} f(\theta) P_n(\mu)\, d\mu \quad ,$$

$$B_n = R^{2n+1} A_n$$

olacaktır. Böylece

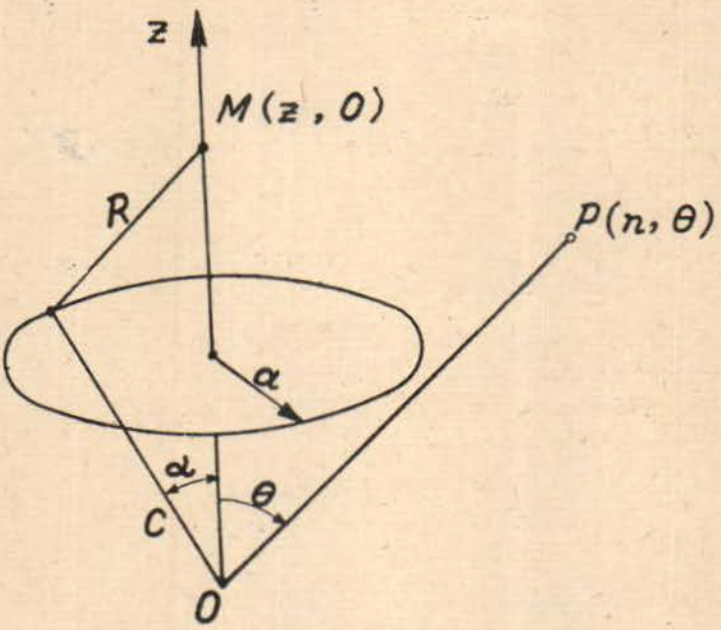
$$\varphi_i = \sum_n \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} f(\theta) P_n(\mu)\, d\mu \quad ,$$

$$\varphi_0 = \sum_n \frac{2n+1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} f(\theta) P_n(\mu)\, d\mu$$

bulunur.

10 — Üniform yüklü dairesel halkanın ve diskin potansiyel fonksiyonları bulunacaktır.

Şek. 159 da görülen halkanın toplam yükü Q ile gösterilirse eksen üstündeki $M(z,0)$ noktasında meydana gelen potansiyel $\varphi(z,0) = Q/4\pi\varepsilon R$ olur. $1/R$ yi Legendre polinomları serisine açarak potansiyel fonksiyonları için



Şek. 159

$$\varphi_1(z,0)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_n\left(\frac{z}{c}\right)^n P_n(\cos\alpha) \qquad (z<c)\ ,$$

$$\varphi_2(z,0)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_n\left(\frac{c}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha) \qquad (z>c)$$

elde edilir. Her hangi bir $P(r,\theta)$ noktasındaki potansiyeller için

$$\varphi_1(r,\theta)=\sum_n A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad (r<c)\ ,$$

$$\varphi_2(r,\theta)=\sum_n B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta \qquad (r<c)$$

yazılabileceğinden $r=z$ ve $\theta=0$ için karşılaştırarak

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_n \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\alpha)\, P_n(\cos\theta) \qquad (r<c)\ ,$$

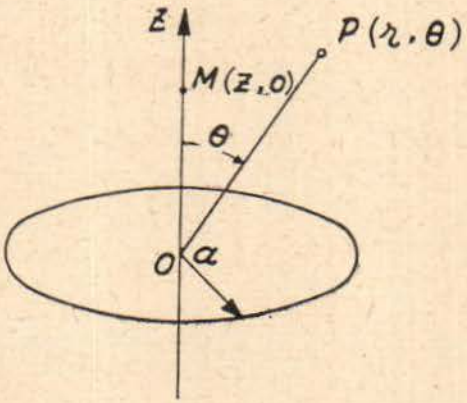
$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\sum_n \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha)\, P_n(\cos\theta) \qquad (r>c)$$

bulunur. $P_n(1)=1$ olduğundan $r=z$ ve $\theta=0$ koyarak eksen üstündeki değerlerin elde edileceği kolayca görülebilir,

Halkanın potansiyeli için bulunan bu fonksiyonlar disk, silindir ve küresel kepin potansiyellerini bulmak için çok elverişlidir. Hesaplar integrasyonla yapılır. Şek. 160 da görülen üniform yüklü disk, eksen üstündeki M(z,0) noktasında

$$\varphi(z,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)$$

potansiyelini doğurur. Bu ifadeyi



Şek. 160

$$\varphi(z,0) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - 1\right)$$

veya

$$\varphi(z,0)=\frac{\sigma a}{2\varepsilon}\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}-1\right)$$

şeklinde yazıp binom serisine açarak

$$\varphi(z,0)=\frac{\sigma a}{2\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}C_{1/2}{}^{n}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n-1}\qquad(z>a)\quad,$$

$$\varphi(z,0)=\frac{\sigma a}{2\varepsilon}\left[1-\frac{z}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{1/2}{}^{n}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n}\right]\quad(z<a)$$

serileri elde edilir. $C_{1/2}{}^{1}=1$ ve $C_{1/2}{}^{n}$ ise

$$C_{1/2}{}^{n}=(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}$$

dir. Böylece her hangi bir noktadaki potansiyeller için

$$\varphi(r,\theta)=\frac{\sigma a}{2\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}C_{1/2}{}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1}P_{2n-1}(\cos\theta)\qquad(r>a),$$

$$\varphi(r,\theta)=\frac{\sigma a}{2\varepsilon}\left[1-\frac{r\cos\theta}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{1/2}{}^{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta)\qquad(r<a)\right.$$

ifadeleri bulunur.

29. Sferoidal koordinatlarda analitik çözüm.

Yassılaşmış (oblate) sferoidal koordinatlarda $u=\operatorname{Sh}\xi$, $v=\cos\eta$ değişken transformasyonu yapılırsa

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=cuv,$$
$$\rho=c\sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\cos\phi$$

yazılabilir. Yeni değişkenler için değişme sınırları

$$0 \leqq u < \infty \ , \qquad -1 \leqq v \leqq +1$$

dir. Bu değişkenlere göre metrik katsayılar

$$h_u = c\sqrt{\frac{u^2+v^2}{1+u^2}} \ , \qquad h_v = c\sqrt{\frac{u^2+v^2}{1-v^2}} \ , \qquad h_\phi = \rho$$

olacağından Laplace denklemi için

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(1+u^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[(1-v^2)\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right] + \frac{u^2+v^2}{(1+u^2)(1-v^2)}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

bulunur. $\varphi(u,v,\phi) = G(u)H(v)F(\phi)$ ayırması yapılırsa

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} + m^2F = 0 \ , \qquad (a)$$

$$\frac{d}{du}\left[(1+u^2)\frac{dG}{du}\right] - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1+u^2}\right]G = 0 \ , \qquad (b)$$

$$\frac{d}{dv}\left[(1-v^2)\frac{dH}{dv}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-v^2}\right]H = 0 \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. (a) nın çözümü

$$F_m = C_m \sin m\phi + D_m \cos m\phi$$

dir. (b) ve (c) nin çözümleri ise

$$G_{m,n} = A_{m,n}P_n^m(ju) + B_{m,n}Q_n^m(ju) \ ,$$

$$H_{m,n} = A'_{m,n}P_n^m(v) + B'_{m,n}Q_n^m(v)$$

dir. Sferoidal harmonik $G_{m,n}H_{m,n}F_m$ ve genel çözüm

$$\varphi(u,v,\phi) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n}H_{m,n}F_m$$

olacaktır. Eksenel simetri halinde $m=0$ alınır.

Küre, sferoidin özel hali olduğundan küresel harmonikler de sferoidal harmoniklerin özel hali olur.

Örnekler :

1 — φ_0 potansiyelindeki yassı iletken sferoidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

Sferoidin yarı eksenleri a ve b ile gösterilirse $\xi_0 = \mathrm{Th}^{-1}(b/a)$ bulunur. $P_n^m(j\mathrm{Sh}\,\xi)$ fonksiyonu $\xi \to \infty$ için sınırlı kalmadığından kullanılamaz. $m=0$ olduğunu gözönüne alarak genel çözüm için

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\eta)\, Q_n(j\,\mathrm{Sh}\,\xi)$$

yazılabilir. $Q_n(\cos\eta)$ fonksiyonu $\eta=0$ ve $\eta=\pi$ için sonsuz olduğundan kullanılmamıştır, Bu ifade, sferoidi belirten ξ_0 değeri için φ_0 potansiyelini vereceğinden

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\eta)\, Q_n(j\,\mathrm{Sh}\,\xi_0)$$

elde edilir. A_n katsayıları için

$$A_n Q_n(j\,\mathrm{Sh}\,\xi_0) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_0 P_n(\mu)\, d\mu$$

yardımiyle $n \neq 0$ için $A_n = 0$ ve $n=0$ için

$$A_0 = \frac{\varphi_0}{Q_0(j\,\mathrm{Sh}\,\xi_0)}$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi = \varphi(\xi) = \varphi_0 \frac{Q_0(j\,\mathrm{Sh}\,\xi)}{Q_0(j\,\mathrm{Sh}\,\xi_0)} = \varphi_0 \frac{\mathrm{arc\ ctg}\,(\mathrm{Sh}\,\xi)}{\mathrm{arc\ ctg}\,(\mathrm{Sh}\,\xi_0)}$$

elde edilir. Alan şiddeti

$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\varphi_0}{c\,\mathrm{Ch}\,\xi\sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \sin^2\eta}\,\operatorname{arc\,ctg}\,(\mathrm{Sh}\,\xi_0)}$$

$$= \frac{\varphi_0}{c\sqrt{1+u^2}\sqrt{u^2+v^2}\,\operatorname{arc\,ctg}\,u_0} \qquad (u_0 = \mathrm{Sh}\,\xi_0)$$

olur. Sferoidin yüzeyindeki yük yoğunluğu

$$\sigma = (\varepsilon E_\xi)_{\xi=\xi_0} = \frac{\varepsilon\varphi_0}{c\sqrt{1+u_0^2}\sqrt{u_0^2+v^2}\,\operatorname{arc\,ctg}\,u_0}$$

dır. Sferoidin yükünü şöyle bulabiliriz: Çok uzaklarda yani büyük ξ değerleri için eşpotansiyel yüzeyler kürelere yaklaşırlar. ξ gibi $u = \mathrm{Sh}\,\xi$ de büyük değerler alacağından

$$z = c\,u\cos\eta\,, \qquad \rho = c\sqrt{1+u^2}\,\sin\eta \approx c\,u\sin\eta$$

ve dolayısiyle $z^2 + \rho^2 = r^2 \approx c^2u^2$ yazabiliriz. Alanın normal bileşeni çok uzaklarda yaklaşık olarak

$$\lim_{\xi\to\infty} E_\xi \approx \frac{\varphi_0}{cu^2\,\operatorname{arc\,ctg}\,u_0} = \frac{c\varphi_0}{r^2\,\operatorname{arcctg}\,u_0}$$

değerini alacaktır. Bu ifade, orijinde bulunan Q noktasal yükünün alanı ile karşılaştırılırsa

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon c\,\varphi_0}{\operatorname{arc\,ctg}\,u_0}$$

bulunur. Sferoidin kapasitesi ise

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{4\pi\varepsilon c}{\operatorname{arc\,ctg}\,u_0}$$

olacaktır.

Potansiyel ve yoğunluk ifadelerini Q yükü cinsinden

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon c}\operatorname{arc\,ctg}\,u\,,$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c^2\sqrt{1+u_0^2}\sqrt{u_0^2+v^2}}$$

şekline sokabiliriz, Yoğunluk $v=0$ için maksimum ve $v=1$ için minimum olur. Maksimum ve minimum değerler $\sigma_{max}=Q/4\pi ab$ ve $\sigma_{min}=Q/4\pi a^2$ dir.

$\xi_0 \to 0$ için sferoid c yarıçaplı dairesel disk haline gelir. arc ctg (0) $=\pi/2$ olduğundan σ ve C için

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c\sqrt{c^2-\rho^2}} \quad , \quad C = 8\varepsilon c$$

bulunur.

Potansiyelin yalnız ξ (veya u) koordinatına bağlı olacağını gözönüne alarak çözüm direkt integrasyonla bulunabilir. Laplace denklemi

$$\frac{d}{du}\left[(1+u^2)\frac{d\varphi}{du}\right]=0$$

şeklindedir. İntegre ederek

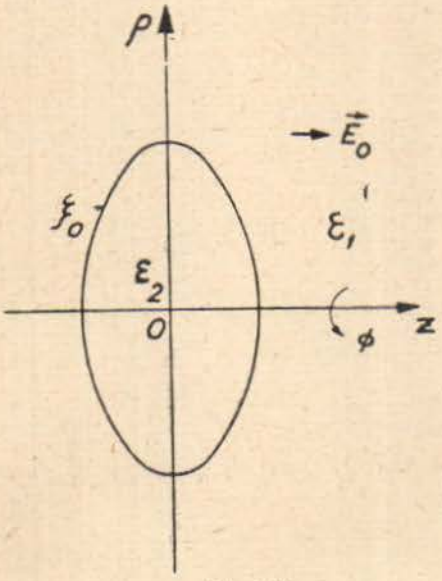
$$\varphi(u) = A \operatorname{arc\,ctg} u + B$$

bulunur. $u \to \infty$ için $\varphi=0$ seçerek ve $\varphi(u_0)=\varphi_0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\varphi(u) = \varphi_0 \frac{\operatorname{arc\,ctg} u}{\operatorname{arc\,ctg} u_0}$$

elde edilir.

2 — Dielektrik sferoid üniform alan içine sokuluyor, şek. 151. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 161

Üniform alan $+z-$ ekseni yönündedir. Primer potansiyel

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 c\, u\, v = -E_0 c\, u\, P_1(v)$$

dir. dıştaki potansiyeli φ_1 ile ve sferoid içindekini de φ_2 ile gösterelim. Eksenel simetriyi gözönüne alarak

$$\varphi_1(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(v) Q_n(ju) + \varphi_0 \qquad (u > u_0)\ ,$$

$$\varphi_2(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(v) P_n(ju) \qquad (u < u_0)$$

yazabiliriz. $z-$ ekseni çözüm bölgesine girdiğinden $Q_n(v)$ fonksiyonu ve $\xi \to \infty$ için sonsuz olan $P_n(ju)$ fonksiyonu φ_1 ifadesine sokulmamıştır. Ayni sebeple $Q_n(v)$ ve $\xi \to 0$ için sonsuz olan $Q_n(ju)$ fonksiyonu φ_2 ifadesine konmamıştır.

Problemin sınır şartları $\xi = \xi_0$ için $\varphi_1 = \varphi_2$ ve $\varepsilon_1 \partial\varphi_1/\partial\xi = \varepsilon_2 \partial\varphi_2/\partial\xi$ dir. Bunlar yardımiyle meselâ φ_2 için

$$\varphi_2 = -\frac{E_0 z}{1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\left(1 + u_0^2\right)\left(1 - u_0 \operatorname{arc\,ctg} u_0\right)} = -\frac{E_0 z}{\Delta}$$

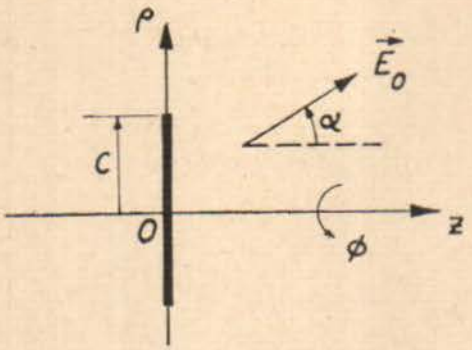
bulunur. $u_0 = \operatorname{Sh} \xi_0 = \operatorname{Sh}\left(\operatorname{Th}^{-1}\frac{b}{a}\right)$ dır. Sferoid içindeki alan

$$E_{2z} = -\frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{E_0}{\Delta} = \text{sab.}$$

dir. Alan üniformdur. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ için $E_2 < E_0$ olacağı görülmektedir.

Yassı bir sferoidal disk için $u_0 \approx 0$ alınabileceginden $E_{2z} \approx \varepsilon_1 E_0/\varepsilon_2$ yazılabilir.

3 — Yüksüz dairesel disk, ekseni ile α açısı yapan üniform alan içine sokuluyor, şek. 162. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 162

Alanı, biri normal diğeri de teğetsel olmak üzere iki bileşene ayırabiliriz. Bu bileşenler $E_n = E_0 \cos\alpha$ ve $E_t = E_0 \sin\alpha$ olacaktır. Sonuç süperpozisyonla bulunur.

Teğetsel bileşen için primer potansiyel

$$\varphi_\infty = -E_t x = -E_0 \sin\alpha(\rho\cos\phi) = -cE_0\sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\sin\alpha\cos\phi$$

dir. Potansiyel çok uzaklarda bu değere yaklaşır. Böylece F için $F = C\cos\phi$ almak gerekeceğinden $m=1$ dir. Diğer taraftan $n=m$ oldnğundan n nin en küçük değeri $n=1$ olmalıdır. $n>1$ değerlerinin alınamayacağı kolayca görülebilir. $v=\pm 1$ için potansiyelin sınırlı kalacağını gözönüne alarak

$$\varphi_t = P_1^1(v)\,[A\,P_1^1(ju) + B\,Q_1^1(ju)]\cos\phi$$

elde edilir. Fonksiyonları yerine koyarak

$$\varphi_t = \sqrt{1-v^2}\left[jA\sqrt{1+u^2} + B\sqrt{1+u^2}\left(\operatorname{arc\,ctg} u - \frac{u}{1+u^2}\right)\right]\cos\phi$$

bulunur. $u=0$ için $\varphi_t=0$ olacağından $jA = -\pi B/2$ yazılabilir. $u\to\infty$ için $\varphi_t=\varphi_\infty$ olacağından $B = 2cE_0 \sin\alpha/\pi$ bulunur. Böylece

$$\varphi_t = -\frac{2\rho}{\pi}E_0\sin\alpha\left(\operatorname{arc\,ctg} u + \frac{u}{1+u^2}\right)\cos\phi$$

elde edilir, $u=0$ için $\varphi_t=0$ ve $v\to\infty$ için $\varphi_t=\varphi_\infty$ olduğu kolayca gö-

rülebilir.

Alanın normal bileşeni diskin tesiriyle bir distorsiyon uğramayacağından φ_t ile $\varphi_a = -E_0 z \cos\alpha$ yı süperpoze ederek

$$\varphi = -E_0\left[\frac{2\rho}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} u + \frac{u}{1+u^2}\right)\sin\alpha\cos\phi + z\cos\alpha\right]$$

bulunur.

Uzamış (prolate) sferoidal koordinatlarda $u = \operatorname{Ch}\xi$, $v = \cos\eta$ değişken transformasyonu yapılırsa

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = c\,u\,v \quad ,$$

$$\rho = c\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}$$

yazılabilir. u ve v için değişme sınırları

$$1 \leqq u < \infty \quad , \quad -1 \leqq v \leqq +1$$

dir. Yeni değişkenlere göre metrik katsayılar

$$h_u = c\sqrt{\frac{u^2-v^2}{u^2-1}} \quad , \quad h_v = c\sqrt{\frac{u^2-v^2}{1-v^2}} \quad , \quad h_\phi = \rho$$

olacağından Laplace denklemi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[(1-v^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] + \frac{u^2-v^2}{(u^2-1)(1-v^2)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

şeklindedir. $\varphi(u,v,\phi) = G(u)H(v)F(\phi)$ ayırması yapılırsa

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} + m^2 F = 0 \quad , \qquad (a)$$

$$(1-u^2)\frac{d^2G}{du^2} - 2u\frac{dG}{du} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]G = 0 \quad , \qquad (b)$$

$$(1-v^2)\frac{d^2H}{dv^2} - 2v\frac{dH}{dv} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-v^2}\right]H = 0 \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. (a) nın çözümü

$$F_m = C_m \sin m\phi + D_m \cos m\phi$$

dir. (*b*) ve (*c*) nin çözümleri ise asosye Legendre fonksiyonlarıdır. u değişkeni 1 ile ∞ arasında değiştiginden $P_n^m(u)$ ifadesinde $1-u^2$ yerine u^2-1 ve $Q_n^m(u)$ ifadesindeki logaritmalarda $1-u$ yerine $u-1$ alınır. Harmonik $G_{m,n}\, H_{m,n}\, F_m$ ve genel çözüm

$$\varphi(u,v,\phi) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n}\, H_{m,n}\, F_m$$

dir. Eksenel simetri halinde $m = 0$ alınır.

Örnekler:

1 — φ_0 potansiyelindeki iletken sferoidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

$m = 0$ olduğundan $(\partial/\partial\phi = 0)$ genel çözüm

$$\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(u) + B_n Q_n(u)]\,[A'_n P_n(v) + B'_n Q_n(v)]$$

şeklindedir. $v = \pm 1$ için sınırlı olmayan $Q_n(v)$ yi ve $u \to \infty$ için sonsuz olan $P_n(u)$ yu bırakarak

$$\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, Q_n(u)\, P_n(v)$$

yazılabilir. $u = u_0$ $(\xi = \xi_0)$ için

$$\varphi(u_0,v) = \varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Q_n(u_0) P_n(v)$$

olacaktır. C_n katsayıları

$$C_n Q_n(u_0) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_0\, P_n(\mu)\, d\mu$$

yardımiyle bulunur. $n\neq 0$ için $C_n=0$ ve $n=0$ için

$$C_0=\frac{\varphi_0}{Q_0(u_0)}$$

dır. Böylece

$$\varphi=\varphi(u)=\varphi_0\frac{Q_0(u)}{Q_0(u_0)}=\varphi_0\frac{\ln\dfrac{u+1}{u-1}}{\ln\dfrac{u_0+1}{u_0-1}}=\varphi_0\frac{\mathrm{Cth}^{-1}(u)}{\mathrm{Cth}^{-1}(u_0)}$$

bulunur. Alan şiddeti

$$E_\xi=\frac{\varphi_0}{c\sqrt{(u^2-v^2)(u^2-1)}\ \mathrm{Cth}^{-1}\mu_0}$$

dır. Sferoidin yüzeyindeki yoğunluk ise

$$\sigma=\varepsilon(E_\xi)_{\xi=\xi_0}=\frac{\varepsilon\varphi_0}{c\sqrt{(u_0^2-v^2)(u_0^2-1)}\,\mathrm{Cth}^{-1}u_0}$$

olacaktır. Toplam yük ve kapasite için

$$Q=\frac{4\pi\varepsilon c\,\varphi_0}{\mathrm{Cth}^{-1}u_0}\ ,$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon c}{\mathrm{Cth}^{-1}u_0}$$

ifadeleri bulunur. Toplam yük cinsinden

$$\varphi(u)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon c}\ln\frac{u+1}{u-1}\ ,$$

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi c^2\sqrt{(u_0^2-v^2)(u_0^2-1)}}$$

yazılabilir. $\sigma_{max}=Q/4\pi b^2$ ve $\sigma_{min}=Q/4\pi ab$ dir.

Şayet $\xi_0\to 0$ limitine geçilirse sferoid $2c$ uzunluğundaki elipsoidal çubuk haline gelir.

Potansiyelin yalnız u koordinatına bağlı olduğunu gözönüne alarak yassılaşmış sferoidde olduğu gibi problemi direkt integrasyonla çözebiliriz. Laplace denklemi

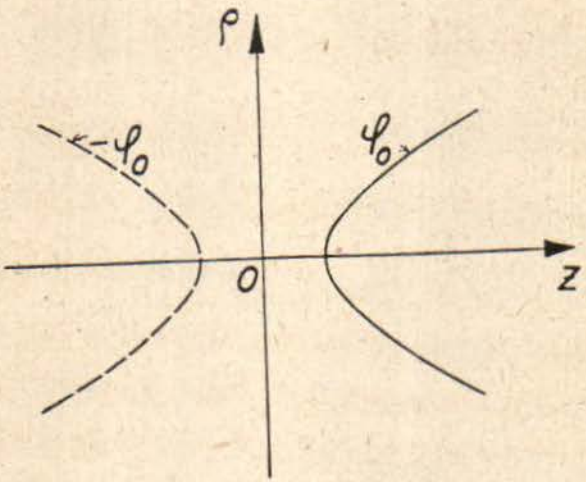
$$\frac{d}{du}\left[(u^2-1)\frac{d\varphi}{du}\right]=0$$

şeklinde olduğundan integre ederek

$$\varphi(u)=A\,\mathrm{Cth}^{-1}u+B$$

bulunur. $u\to\infty$ için $\varphi=0$ seçerek ve $\varphi(u_0)=\varphi_0=A\,\mathrm{Cth}^{-1}u_0$ olduğunu gözönüne alarak yukarıdaki sonuç elde edilir.

2 — φ_0 potansiyelindeki iletken hiperboloidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 163.



Şek. 163

İkinci elektrod olarak $-\varphi_0$ potansiyelindeki simetrik hiperboloid veya sıfır potansiyelindeki $z=0$ simetri düzlemi alınabilir. Eksenel simetriden dolayı $m=0$ dır. Yukarıda açıklanan sebeplerden dolayı $Q_n(v)$ ve $P_n(v)$ fonksiyonlarını bırakarak

$$\varphi(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,Q_n(v)\,P_n(u)$$

yazılabilir. $v=v_0(\eta=\eta_0)$ için $\varphi=\varphi_0$ olacağından

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Q_n(v) P_n(u)$$

elde edilir. $n\neq 0$ için $C_n=0$ ve $n=0$ için $C_0=\varphi_0/Q_0(v_0)$ bulunacağından

$$\varphi(v)=\varphi_0 \frac{Q_0(v)}{Q_0(v_0)} = \varphi_0 \frac{\mathrm{Th}^{-1}(v)}{\mathrm{Th}^{-1}(v_0)}$$

olacaktır. Alan şiddeti için

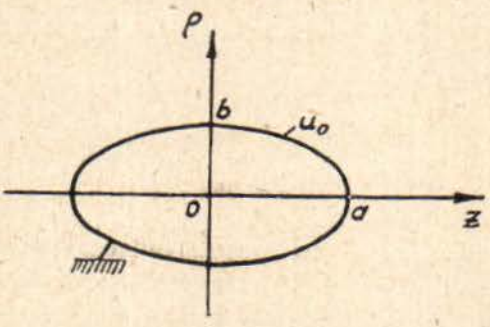
$$E_\eta = \frac{\varphi_0}{c \sin\eta \sqrt{\mathrm{Ch}^2\xi - \cos^2\eta}\ \mathrm{Th}^{-1}(\cos\eta_0)}$$

elde edilir. $\xi=0$ ve $\eta=\eta_0$ için alan şiddeti maksimum olur ve

$$E_{max} = \frac{\varphi_0}{c\left[\left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathrm{Th}^{-1}\frac{a}{c}\right]}$$

dir $(c=\sqrt{a^2-b^2})$.

3 — Sıfır potansiyelinde tutulan iletken sferoid üniform alan içine sokuluyor, şek. 164. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 164

Potansiyel fonksiyonu $(m=0)$

$$\varphi(u,v) = P_1(v)\,[A\,P_1(u)+B\,Q_1(u)\,]$$

olacaktır. Fonksiyonları yerine koyarak

$$\varphi = \frac{z}{c}\left[A + B\left(\mathrm{Cth}^{-1} u - \frac{1}{u}\right)\right]$$

bulunur. $z \to \infty$ için $u \to \infty$ olacağından üniform alanın potansiyeli $(-E_0 z)$ ile karşılaştırarak $A = -c E_0$ elde edilir. Sferoidin sıfır potansiyelinde olduğunu gözönüne alarak B için

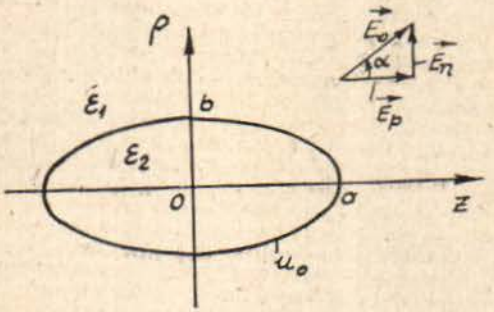
$$B = \frac{c E_0}{\mathrm{Cth}^{-1} u_0 - \dfrac{1}{u_0}}$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi = -E_0 z\left(1 - \frac{\mathrm{Cth}^{-1} u - \dfrac{1}{u}}{\mathrm{Cth}^{-1} u_0 - \dfrac{1}{u_0}}\right)$$

olur. $u_0 = a/c = a/\sqrt{a^2 - b^2}$ dir.

4 — Dielektrik sferoid üniform alan içine sokuluyor, şek. 165. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 165

Üniform alanı z—ekseni yönünde ve normal yönde bileşenlere ayırabiliriz. E_p bileşeni ile eksenel simetrik bir alan elde edilir. Bu bileşen için çözüm yolu oblate sferoid gibidir. Sferoid içindeki alan için

$$E_{2z} = \frac{E_0}{1 + \left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\left(u_0^2 - 1\right)\left(u_0 \,\mathrm{Cth}^{-1} u_0 - 1\right)}$$

bulunur.

E_n bileşeni için hesaplar yapılırsa

$$E_{2x} = \frac{E_0}{1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\frac{u_0}{2}\left[u_0 - (u_0^2 - 1)\,\mathrm{Cth}^{-1}u_0\right]}$$

elde edilir. Her iki bileşen için sferoid içindeki alan üniformdur ve tatbik edilen alanın yönündedir.

30. Paraboloidal koordinatlarda analitik çözüm.

Bu koordinatlarda metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \quad , \quad h_\phi = \rho = \xi\eta$$

olduğundan Laplace denklemi

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

şeklindedir. $\varphi(\xi,\eta,\phi) = G(\xi)H(\eta)F(\phi)$ ayırması yardımiyle

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} + m^2F = 0 \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dG}{d\xi}\right) - \left(m^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)G = 0 \quad , \qquad (b)$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dH}{d\eta}\right) + \left(m^2 - \frac{n^2}{\eta^2}\right)H = 0 \quad , \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. (a) nın çözümü

$$F_n = C_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi$$

dir. (b) nin çözümleri modifiye Bessel fonksiyonları ve (c) nin çözümleri ise Bessel fonksiyonları olduğundan

$$H_{m,n} = A_{m,n}J_n(m\eta) + B_{m,n}Y_n(m\eta) \quad ,$$

$$G_{m,n} = A'_{m,n}I_n(m\xi) + B'_{m,n}K_n(m\xi)$$

dir. Harmonik $G_{m,n}H_{m,n}F_n$ ve genel çözüm

$$\varphi(\xi,\eta,\phi)=\sum_m\sum_n G_{m,n}H_{m,n}F_n$$

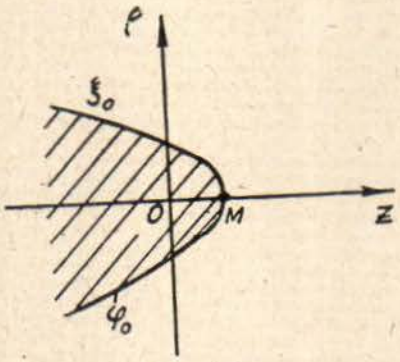
dir. $m=n=0$ için harmonik

$$(A\ln\eta+B)\ (A'\ln\xi+B')\ (C\phi+D)$$

şeklinde olur. Eksenel simetri halinde $n=0$ dır.

Örnekler:

1 — φ_0 potansiyelindeki iletken paraboloidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 166.



Şek. 166

Potansiyel yalnız ξ koordinatına bağlı olacağından

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\varphi}{d\xi}\right)=0$$

denklemini integre ederek

$$\varphi(\xi)=A\ln\xi+B$$

bulunur. Paraboloidin yüzeyindeki sınır şartı $\varphi(\xi_0)=\varphi_0$ dır. Şayet $\xi=\xi_1$ paraboloidi referans olarak seçilirse $\varphi(\xi_1)=0$ olacağından

$$\varphi(\xi)=\varphi_0\frac{\ln(\xi/\xi_1)}{\ln(\xi_0/\xi_1)}$$

bulunur. Eğer ξ_1 yeter derecede büyük seçilirse referans paraboloidi düzleme yaklaşır. Alan için

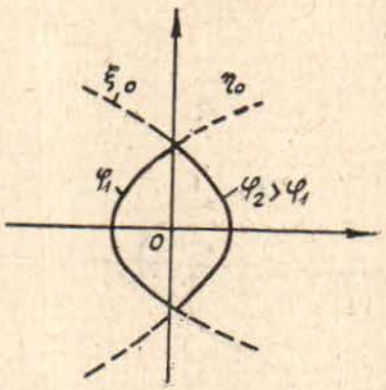
$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\varphi_0}{\xi\sqrt{\xi^2+\eta^2}\ln(\xi_1/\xi_0)}$$

bulunur. $\xi=\xi_0$ ve $\eta=0$ (M noktası) için E_ξ maksimum olarak

$$E_{max} = \frac{\varphi_0}{\xi_0^2 \ln(\xi_1/\xi_0)}$$

değerini alır.

2 — φ_1 ve φ_2 potansiyellerinde tutulan ξ_0 ve η_0 paraboloidlerinin meydana getirdiği sistemde potansiyel fonksiyonu bulunacaktır, şek. 167.



Şek. 167

Eksenel simetriden dolayı $n=0$ dır. İkinci nevi Bessel fonksiyonları orijinde sonsuz olduklarından kullanılamaz. Harmonik $AI_0(m\xi)J_0(m\eta)$ dır. Genel çözüm

$$\varphi(\xi,\eta) = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i I_0(m_i\xi)J_0(m_i\eta)$$

şeklinde yazılırsa $J_0(m_i\eta_0)=0$ için η_0 paraboloidinin yüzeyindeki sınır şartı elde edilir. m_i değerleri sıfırıncı basamaktan Bessel denkleminin kökleri yardımiyle bulunur. $\varphi(\xi_0,\eta)=\varphi_2$ şartı yardımiyle

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i I_0(m_i\xi_0)J_0(m_i\eta)$$

elde edilir. η nın değişme sınırları $0 \leqq \eta \leqq \eta_0$ olduğundan, η için sınır şartının homogen olduğunu gözönüne alarak norm için

$$N_i = \frac{\eta_0^2}{2} J_1^2(m_i \eta_0)$$

bulunur. Böylece

$$A_i I_0(m_i \xi_0) \frac{\eta_0^2}{2} J_1^2(m_i \eta_0) = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_0^{\eta_0} \eta J_0(m_i \eta) d\eta$$

denklemi yardımiyle

$$A_i = \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{m_i \eta_0 J_1(m_i \eta_0) I_0(m_i \xi_0)}$$

elde edilir. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_1 + 2(\varphi_2 - \varphi_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(m_i \xi) J_0(m_i \eta)}{m_i \eta_0 I_0(m_i \xi_0) J_0(m_i \eta_0)}$$

olacaktır.

31. Elipsoidal koordinatlarda analitik çözüm.

Bu koordinatlarda Laplace denklemi

$$(\eta - \xi) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(R_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) = 0$$

şeklindedir. Bunun çözümleri elipsoidal harmoniklerdir.

Örnekler:

1 — Yarı eksenleri a,b,c $(a>b>c)$ olan iletken elipsoidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.

Elipsoid için $\xi = 0$ dır. $\varphi = \varphi(\xi)$ olacağından Laplace denklemi

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = 0$$

şeklindedir. İntegre ederek

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{A}{R_\xi}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

olduğu gözönüne alınırsa $\varphi(\infty)=0$ seçerek

$$\varphi(\xi) = \int_\xi^\infty E_\xi h_\xi \, d\xi = -A\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}$$

yazılabilir. Çok büyük ξ değerleri için $R_\xi \approx \xi^{3/2}$ alınabileceğinden

$$\varphi \approx -\frac{2A}{\sqrt{\xi}}$$

yazılabilir. Her hangi bir elipsoidin denklemi

$$\frac{x^2}{1+\frac{a^2}{\xi}} + \frac{y^2}{1+\frac{b^2}{\xi}} + \frac{z^2}{1+\frac{c^2}{\xi}} = \xi$$

şeklinde yazılırsa, büyük ξ değerleri için $(\xi \gg a^2)$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \approx \xi$$

bulunur. Böylece

$$\varphi \approx -\frac{2A}{r}$$

yazılabileceği anlaşılır. Bu ifadeyi orijindeki noktasal yükün $\varphi = Q/4\pi\varepsilon r$ Coulomb potansiyeli ile karşılaştırarak $A = -Q/8\pi\varepsilon$ bulunur. Böylece her hangi bir noktadaki potansiyel için

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}}$$

elde edilir. Eşpotansiyel yüzeyler $\xi=$sab. elipsoidleridir. İntegral eliptik bir integraldir ve cetveller yardımiyle hesaplanır.

Alan şiddeti için

$$E_\xi = -\frac{A}{h_\xi R_\xi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}$$

bulunur. Elipsoidin yüzey yoğunluğu ise

$$\sigma=\varepsilon(E_\xi)_{\xi=0}=\frac{Q}{4\pi\sqrt{\eta\zeta}} = \frac{Q}{8\pi h_\xi abc}$$

olacaktır. Kartezyen koordinatlar cinsinden

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

yazılabilir.

Elipsoidin potansiyeli φ_0 ile gösterilirse

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}$$

elde edilir. Buradan kapasite için

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{8\pi\varepsilon}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}$$

bulunur.

Şayet Q toplam yükü yerine φ_0 potansiyeli verilmişse

$$A = -\frac{\varphi_0}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}$$

olacağından

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}}{\int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}},$$

$$E_\xi = \frac{\varphi_0}{h_\xi R_\xi \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}} = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{(\zeta-\eta)(\xi-\zeta)} \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}},$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varphi_0}{abc\, h_\xi \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}} = \frac{2\varepsilon\varphi_0}{\eta\zeta \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}$$

yazılabilir.

Elipsoidin her hangi bir noktasındaki teğet düzlemine orijinden çizilen normalin uzunluğu p ile gösterilirse $h_\xi = 1/2p$ olacağı kolayca gösterilebilir. Böylece yüzey yoğunluğunun p ile orantılı olduğu anlaşılır.

Elipsoidin toplam yükü için

$$Q = \oint_F \sigma\, dF = \oint_F \frac{\varepsilon\varphi_0\, dF}{h_\xi abc \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}$$

yazılabilir. $h_\xi = 1/2p$ koyarak

$$Q = \frac{2\varepsilon\varphi_0}{abc \int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}} \oint_F p\, dF$$

bulunur. p nin yüzey integrali elipsoidin hacminin üç katına eşit olduğundan

$$Q=\frac{8\pi\varepsilon\varphi_0}{\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{R_\xi}}$$

elde edilir.

Özel haller:

a) $a=b>c$ için elipsoid oblate sferoid haline gelir. z—eksenine göre eksenel simetri vardır. İntegraller elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Böylece

$$\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)\sqrt{\xi+a^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}},$$

$$C=\frac{Q}{\varphi(0)}=\frac{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2-c^2}}{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2-1}},$$

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2c}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}}=\frac{Q}{4\pi a^2c}\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

bulunur ($\rho=\sqrt{x^2+y^2}$).

b) $a>b=c$ için prolate sferoid elde edilir. x—eksenine göre eksenel simetri vardır. İntegraller yine kolayca ifade edilebilir. Böylece

$$\varphi(\xi)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon}\int_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+b^2)\sqrt{\xi+a^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Th}^{-1}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+a^2}-\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{\operatorname{Th}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a b^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{\rho^2}{b^4}}}$$

bulunur ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

c) $c = 0$ için $z = 0$ düzlemindeki sonsuz ince eliptik disk elde edilir. Kapasite

$$C = \frac{8\pi\varepsilon}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)\xi}}}$$

eliptik integrali yardımiyle hesaplanır. Yoğunluk ifadesi

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cx}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{cy}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}}$$

şeklinde yazılırsa

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

koyarak ($\xi = 0$) ve $c \to 0$ limitine geçerek

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

bulunur. $x = a$, $y = 0$ ve $x = 0$, $y = b$ için yoğunluk sonsuz olur.

d) $a = b$ iken $c \to 0$ yapılırsa $z = 0$ düzlemindeki sonsuz ince dairesel disk elde edilir. Potansiyel, kapasite ve yoğunluk için

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon} \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\sqrt{\xi}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} \operatorname{arc\,tg} \frac{Q}{\sqrt{\xi}} ,$$

$$C = 8\varepsilon a ,$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

bulunur. $b=c$ iken $a\to 0$ yapılırsa $x=0$ düzlemindeki dairesel diske ait ifadeler elde edilir.

Diskin potansiyel fonksiyonu φ_0 cinsinden ifade edilirse

$$\varphi=\varphi_0\frac{\int_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)\sqrt{\xi}}}{\int_{0}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)\sqrt{\xi}}}=\frac{2\varphi_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}=$$

$$=\frac{2\varphi_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{r^2-a^2+\sqrt{(r^2-a^2)^2+4a^2z^2}}}$$

bulunur.

e) $a\gg b=c$ için ince ve uzun bir çubuk elde edilir. Daha önce böyle bir çubuğun kapasitesinin yaklaşık olarak ($l=2a$, $2b=d$)

$$C\approx\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2l}{d}}=\frac{4\pi\varepsilon a}{\ln\frac{2a}{b}}$$

şeklinde hesaplanabileceğini görmüştük. Yukarıda kapasite için bulunan ifadeden binom teoremi yardımiyle bu yaklaşık formül kolayca çıkarılabilir.

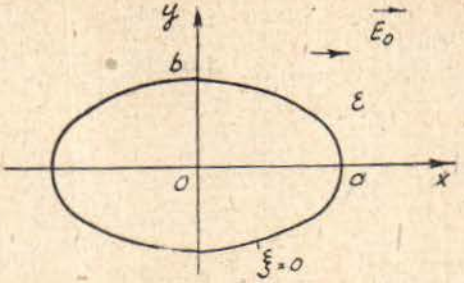
f) $a=b=c$ için elipsoid küreye dejenere olur. Meselâ kapasite için

$$C=\frac{8\pi\varepsilon}{\int_{0}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)^{3/2}}}=4\pi\varepsilon a$$

elde edilir.

Sferoid problemleri hiç şüphesiz sferoidal koordinatlardan faydalanmak suretiyle de çözülebilir.

2 — $\xi=0$ iletken elipsoidi üniform alan içine sokuluyor, şek. 168. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 168

Büyük eksen yönünde bulunduğu farzedilen üniform alanın potansiyeli için elipsoidal koordinatlar cinsinden

$$\varphi_0 = -E_0 x = -E_0 \sqrt{\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}}$$

yazılabilir. Bu potansiyel fonksiyonu Laplace denkleminin

$$\varphi_0 = AF(\xi)\, G(\eta)\, H(\zeta)$$

şeklinde bir çözümüdür ve

$$A = -\frac{E_0}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}}\,, \quad F(\xi)=\sqrt{\xi+a^2}\,, \quad G(\eta)=\sqrt{\eta+a^2}\,,$$

$$H(\zeta)=\sqrt{\zeta+a^2}$$

dir. Tesirle elektriklenen elipsoidin sekonder potansiyeli φ_s ile gösterilirse aranan potansiyel $\varphi=\varphi_0+\varphi_s$ olur. Sekonder potansiyel sonsuzda sıfır olacak (zira sonsuzda $\varphi\to\varphi_0$) ve her hangi bir ξ=sab. elipsoidi üstünde φ_0 gibi değişeceğinden

$$\varphi_s = Bf(\xi)\, G(\eta)\, H(\zeta)$$

yazabiliriz. $f(\xi)$ fonksiyonuna ait diferansiyel denklemi bulmak için Laplace denkleminde $\varphi=\varphi_s$, $G=\sqrt{\eta+a^2}$, $H=\sqrt{\zeta+a^2}$ koyarak

$$R_\xi \frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{df}{d\xi}\right) - \left(\frac{b^2+c^2}{4} + \frac{\xi^2}{2}\right) f = 0$$

elde edilir. Bu denklemin bir çözümü $F(\xi)=\sqrt{\xi+a^2}$ dir. Diğer çözümü şöylece bulabiliriz : Şayet $y_1(x)$ fonksiyonu

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)\,y=0$$

denkleminin bir çözümü ise diğer bağımsız çözüm

$$y_2(x)=y_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

dir. Yukarıdaki diferansiyel denklemde

$$p(\xi)=\frac{1}{R_\xi}\frac{dR_\xi}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\ln R_\xi$$

olduğundan

$$f(\xi)=F(\xi)\int\frac{e^{-\ln R_\xi}}{F^2(\xi)}\,d\xi=F(\xi)\int\frac{d\xi}{F^2(\xi)R_\xi}$$

bulunur. Bu integralde sınırlar keyfî olmakla beraber $f(\xi)$ nin sonsuzda sıfır olacağını gözönüne alarak

$$f(\xi)=F(\xi)\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}$$

yazılabilir. Böylece sekonder potansiyel için

$$\varphi_s=BF(\xi)G(\eta)H(\xi)\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}=\varphi_0\frac{B}{A}\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}$$

elde edilir. Potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\xi)=\varphi_0\left[1+\frac{B}{A}\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}\right]$$

dir. $\varphi(0)=V_0$ şartı yardımiyle (V_0=elipsoidin potansiyeli)

$$V_0=\varphi_0\left[1+\frac{B}{A}\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}\right]$$

yazarak

$$\frac{B}{A}=\frac{V_0-\varphi_0}{\varphi_0}\,\frac{1}{\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}}$$

bulunur. Buradan potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(\xi)=\varphi_0+\frac{V_0-\varphi_0}{\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}}\int_\xi^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}$$

elde edilir. Eliptik integraller cetveller yardımiyle hesaplanır. Şayet elipsoid topraklanmışsa $V_0=0$ koyarak

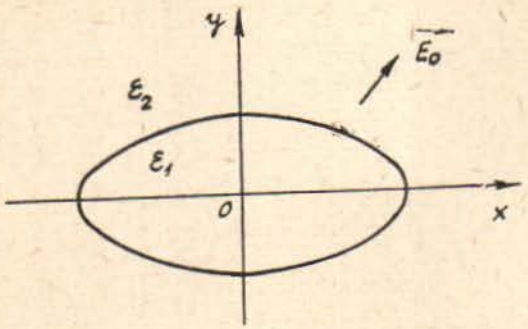
$$\varphi=\varphi_0\left[1-\frac{\int_\xi^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}}{\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}}\right]$$

yazabiliriz.

Üniform alan diğer eksenler yönünde bulunduğu takdirde yukarıdaki ifadilerde a^2 yerine b^2 veya c^2 alarak sonuçlar bulunur.

Üniform alan her hangi bir yönde bulunduğu vakit bunu eksenler yönünde bileşenlere ayırarak sonuç süperpozisyonla elde edilir.

3 — $\xi=0$ dielektrik elipsoidi üniform alan içine sokuluyor, şek. 169. Potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 169

Üniform alanın her hangi bir yönde bulunduğunu farzederek eksenler yönündeki bileşenlerini E_{ox}, E_{oy}, E_{oz} ile gösterelim. İlk önce E_{ox} bileşenini gözden geçirelim. Potansiyel fonksiyonu elipsoid dışında

$$\varphi_2 = F(\xi)G(\eta)H(\zeta)\left[A + B\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}\right]$$

şeklinde olacaktır. Hiç süphesiz B sabiti yukarıdaki değerden farklıdır. Elipsoid içinde kalan bölge için $-c^2 \leqq \xi \leqq 0$ dır $(a>b>c)$. $f(\xi)$ fonksiyonu $\xi = -c^2$ için sonsuz olduğundan ve $F(\xi) = \sqrt{\xi+a^2}$ sınırlı kaldığından

$$\varphi_1 = CF(\xi)G(\eta)H(\zeta) = \frac{C}{A}\varphi_0 = -\frac{C}{A}E_{ox}x$$

alınabilir. Problemin sınır şartları

$$(\varphi_1)_{\xi=0} = (\varphi_2)_{\xi=0}\ ,\quad \varepsilon_1\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} = \varepsilon_2\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}$$

şeklindedir. Bunlar yardımiyle integralde $\xi \to s$ alarak

$$C = A + B\int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)R_s}\ ,$$

$$B = \frac{abc}{2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} C$$

bulunur. Bu ifadeler yardımiyle

$$C = \frac{A}{1 + \frac{a\,b\,c}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_1(0)}$$

elde edilir. $A_1(0)$

$$A_1(0) = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2) R_s}$$

integralini göstermektedir. Böylece elipsoid içindeki potansiyel için

$$\varphi_1 = - \frac{E_{ox} x}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_1(0)}$$

ifadesi elde edilir. Elipsoid içindeki alan şiddeti ise

$$E_{1x} = - \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{E_{ox}}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_1(0)}$$

olacaktır. Elipsoid içindeki alan üniformdur.

Diğer bileşenler için benzer hesaplar yapılır. Sonuç süperpozisyonla bulunur. Üniform alanın potansiyeli

$$\varphi_0 = - E_{ox} x - E_{oy} y - E_{oz} z$$

dir. Elipsoid içindeki potansiyel

$$\varphi_1 = - \left[\frac{E_{ox} x}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_1(0)} + \frac{E_{oy} y}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_2(0)} + \frac{E_{oz} z}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) A_3(0)} \right]$$

olacaktır. $A_1(0)$ integrali yukarıda verilmiştir. $A_2(0)$ ve $A_3(0)$ integralleri

$$A_2(0)=\int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s} \quad , \quad A_3(0)=\int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s}$$

dir. Alanın E_{1y} ve E_{1z} bileşenleri için

$$E_{1y}=\frac{E_{oy}}{1+\frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)A_2(0)} \quad ,$$

$$E_{1z}=\frac{E_{oz}}{1+\frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)A_3(0)}$$

bulunur.

E_{ox} bileşeni için elipsoid dışındaki potansiyel fonksiyonu

$$\varphi_2=\varphi_0\left[1-\frac{\frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}}{1+\frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)A_1(0)}\right]$$

şeklinde olacaktır. E_{oy} ve E_{oz} bileşenleri için benzer ifadeler elde edilir. $\varepsilon_1\to\infty$ yapılırsa sıfır potansiyelindeki iletken elipsoid için daha önce bulunan ifade elde edilir.

Elipsoid içindeki polarizasyonun x—bileşeni için

$$P_{1x}=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_{1x}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{1+\frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)A_1(0)}E_{ox}$$

bulunur. P_{1y} ve P_{1z} bileşenleri için de benzer ifadeler elde edilir.

$\varepsilon_1=\varepsilon_0$ alarak elipsoid biçimindeki boşluktaki alan hesaplanabilir.

Özel haller oblate ($a=b$) ve prolate ($b=c$) sferoidler için elde edilir. Sferoidler için eliptik integralleri elemanter fonksiyonlarla göstermek kabil olur.

32. Toroidal koordinatlarda analitik çözüm.

Toroidal koordinatlarda metrik katsayılar

$$h_\xi = h_\eta = \frac{c}{\mathrm{Ch}\,\xi - \cos\eta}\,, \quad h_\phi = \rho = \frac{c\,\mathrm{Sh}\,\xi}{\mathrm{Ch}\,\xi - \cos\eta}$$

olduğundan Laplace denklemi

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mathrm{Sh}\,\xi}{\mathrm{Ch}\,\xi-\cos\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathrm{Sh}\,\xi}{\mathrm{Ch}\,\xi-\cos\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Sh}\,\xi(\mathrm{Ch}\,\xi-\cos\eta)}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

şeklindedir. Şayet

$$\varphi(\xi,\eta,\phi) = \sqrt{\mathrm{Ch}\xi - \cos\eta}\, f(\xi,\eta,\phi)$$

yazılırsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\mathrm{Ch}\,\xi}{\mathrm{Sh}\,\xi}\,\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{f}{4} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\xi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = 0$$

elde edilir. $f(\xi,\eta,\phi) = G(\xi)\,H(\eta)\,F(\phi)$ koyarak

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2F = 0 \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\eta^2} + n^2H = 0 \quad , \qquad (b)$$

$$(1-u^2)\,\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}u^2} - 2u\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} + \left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]G = 0 \qquad (c)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir ($u = \mathrm{Ch}\,\xi$). (a) ve (b) nin çözümleri trigpnometriktir. (c) nin çözümü ise basamakları tam sayı olmayan asosye Legendre fonksiyonlarıdır. Genel çözüm

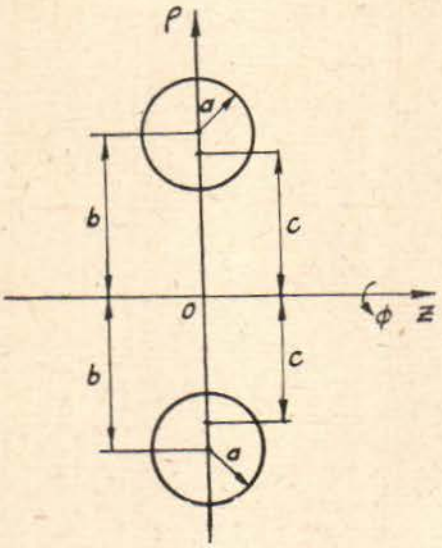
$$\varphi(\xi,\eta,\phi) = \sqrt{\mathrm{Ch}\xi-\cos\eta}\,\sum_m\sum_n\left[A_{m,n}P_n^{m}{}_{-\frac{1}{2}}(u) + B_{m,n}Q_n^{m}{}_{-\frac{1}{2}}(u)\right]$$

$$C_n \sin n\eta + D_n \cos n\eta)\,(E_m \sin m\phi + F_m \cos m\phi)$$

şeklindedir.

Örnekler :

1 — Şek. 170 de görülen φ_0 potansiyelindeki iletken toroidin potansiyel fonksiyonu bulunacaktır.



Şek. 170

Eksenel simetriden dolayı $m=0$ dır. Toroid yüzeyine ait ξ_0 değerini bulalım. $a=c/\mathrm{Sh}\,\xi_0$, $b=c\,\mathrm{Cth}\,\xi_0$ olduğundan $\mathrm{Ch}\,\xi_0=b/a$ elde edilir. $\xi>\xi_0$ için yalnız 2. nevi Legendre fonksiyonunu kullanabiliriz. η koordinatına göre simetriden dolayı yalnız $\cos n\eta$ yı alarak genel çözüm için

$$\varphi(\xi,\eta)=\sqrt{\mathrm{Ch}\xi-\cos\eta}\sum_n A_n\cos(n\eta)\,Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\xi)$$

yazılabilir. $\xi=\xi_0$ için $\varphi=\varphi_0$ olacağından

$$\varphi_0=\sqrt{\mathrm{Ch}\,\xi_0-\cos\eta}\sum_n A_n\cos(n\eta)Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\xi_0)$$

elde edilir. A_n katsayılarını bulmak için $\varphi_0/\sqrt{\mathrm{Ch}\,\xi_0-\cos\eta}$ yı Four-

ier serisine açarak

$$A_n = \frac{2\varphi_0}{\pi Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\xi_0)} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\eta}{\sqrt{\mathrm{Ch}\xi_0 - \cos\eta}}\, d\eta$$

bulunur.

VIII. ENVERSİYON (EVİRTİM) METODU

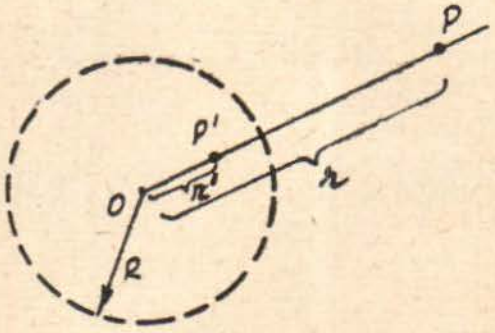
33. Üç boyutlu enversiyon.

Enversiyon metodu yardımiyle bir problem, daha basit çözülebilen veya çözümü esasen bilinen bir probleme transforme edilir. Basit problem çözüldükten sonra ters transformasyonla orijinal problemin çözümü elde edilir. Bu bakımdan metod imaj metodunu andırırsa da daha geneldir. Gerek üç boyutlu ve gerekse iki boyutlu problemleri enversiyonla çözmek kabilse de iki boyutlu problemler için konform tasvir metodu çok daha elverişlidir. Metodun en önemli mahzuru ancak belli bazı yüzey şekilleri için kullanılabilmesidir.

Bir problemi enaersiyonla çözmek için bir geometrik ve bir de elektriksel enversiyon yapmak gerekir. Üç boyutlu geometrik enversiyon bir küre yardımiyle elde edilir. Şek. 171 de P ve P′ noktalarının R yarıçaplı kürenin 0 merkezinden r ve r' uzaklıkları arasında

$$r r' = R^2 \tag{166}$$

bağıntısı varsa bu noktalrr küre yüzeyine nazaran birbirinin enversi olurlar. 0 ya enversiyon merkezi ve R ye enversiyon yarıçapı denilir.



Şek. 171

Uzayda her hangi bir yüzey üstündeki noktaların enversini alarak en-

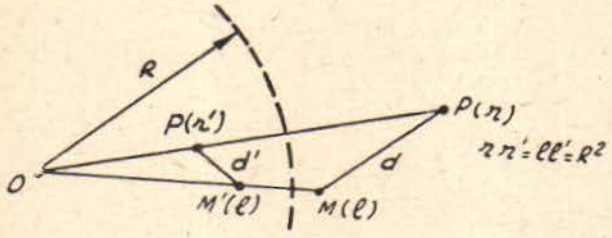
vers yüzey elde edilir. Orijinal yüzeyin küresel koordinatlardaki denklemi $f(r,\theta,\phi)=0$ olursa envers yüzeyin denklemi $f(R^2/r',\theta,\phi)=0$ şeklinde olur.

Bir kürenin enversi genel olarak yine bir küredir. Enversiyon merkezinden geçen bir kürenin enversi ise merkez doğrusuna normal olan bir sonsuz düzlemdir. Tersine olarak bir düzlemin enversi enversiyon merkezinden geçen bir küredir. Kürenin yarıçapı a ile ve düzlemin enversiyon merkezinden uzaklığı d ile gösterilirse $2ad=R^2$ olur. Enversiyon küresini ortogonal olarak kesen bir kürenin enversi yine kendisidir.

P ve P′ noktalarında envers uzunluk elemanları ve envers yüzey elemanları ds,ds' ve dF,dF' ile gösterilirse

$$\frac{ds}{ds'}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{R^2}{r'^2},\quad \frac{dF}{dF'}=\frac{r^2}{r'^2} \tag{167}$$

olacağı kolayca görülebilir.



Şek. 172

Geometrik enversiyon hakkında verilen bu kısa bilgiden sonra elektriksel enversiyonu gözden geçirelim. Şek. 172 de P,P′ ve M,M′ noktaları envers nokta çiftlerini göstermektedir. M de bulunan q noktasal yükü P noktasında $\varphi=q/4\pi\varepsilon d$ potansiyelini ve M′ de bulunan q' noktasal yükü P′ noktasında $\varphi'=q'/4\pi\varepsilon d'$ potansiyelini meydana getirecektir. OPM ve OM′P′ üçgenlerinin benzerliğinden faydalanarak bu potansiyellerin oranı için

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{q}{q'}\,\frac{d}{d'}=\frac{q'}{q}\,\frac{r}{l'}=\frac{q'}{q}\,\frac{l}{r'}$$

yazabiliriz. Şayet yüklerin oranı

$$\frac{q'}{q}=\frac{R}{l}=\frac{l'}{R}=\sqrt{\frac{l'}{l}} \tag{168}$$

olacak şekilde seçilirse envers potansiyeller arasındaki oran

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{R}{r'} = \frac{r}{R} \tag{169}$$

şekline girer. Yukarıdaki şartı sağlayan yükler yekdiğerinin elektriksel enversidir. O halde envers yüklerin envers noktalarda meydana getirdikleri envers potansiyellerin oranı, yüklerin yerine ve değerine bağlı değildir. (169) bağıntısı her hangı bir yük sistemi için cari olur. Eğer $\varphi=0$ ise $\varphi'=0$ olacağından $M_1,...,M_n$ noktalarındaki $q_1,...,q_n$ yüklerinin tesiri altında bulunan bir iletkenin enversi $M_1',...,M_n'$ envers noktalarındaki $q_1',...,q_n'$ envers yüklerinin tesiri altında sıfır potansiyelini alacaktır.

Envers yükler arasındaki oran yardımiyle envers yük yoğunluklarının oranı kolayca bulunabilir. $\sigma=q/dF$, $\sigma'=q'/dF'$ ve $\lambda=q/ds$, $\lambda'=q'/ds'$ olduğunu gözönüne alarak

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma'}{\sigma} &= \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{R}{r'}\right)^3, \\ \frac{\lambda'}{\lambda} &= \frac{r}{R} = \frac{R}{r'} \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

bulunur.

Elektriksel enversiyon analitik olarak, Laplace denkleminin belli bir koordinat transformasyonuna karşı envaryan özelligine dayanır. Şayet $\varphi(r,\theta,\phi)$ bir potansiyel fonksiyonu (harmonik fonksiyon) ise ($\Delta\varphi=0$)

$$\varphi'(r',\theta,\phi)=\frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'}, \theta, \phi\right)$$

fonksiyonunun da potansiyel fonksiyonu olacağı kolayca gösterilebilir ($\Delta\varphi'=0$). Bu transformasyona Kelvin transformasyonu denilir.

Şek. 173 *a* da topraklanmış olan F iletkeni 0 noktasına getirilen q noktasal yükünün tesiri altındadır. Sistemin potansiyeli φ ile gösterilirse F yüzeyi üstünde $\varphi(F)=0$ olacaktır. Potansiyel fonksiyonunu

Şek. 173

$$\varphi=\varphi_P+\varphi_s=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}+\varphi_s$$

şeklinde yazabiliriz. Birinci terim noktasal yükün potansiyelini (primer potansiyel) ve ikinci terim ise F yüzeyinde tesirle meydana gelen yük dağılışının potansiyelini (sekonder potansiyel) göstermektedir. Şek. 173 *b* de noktasal yük kaldırılmıştır. Bu denge durumunda potansiyel fonksiyonu φ_s olacaktır. $\varphi(F)=0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\varphi_s(F)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

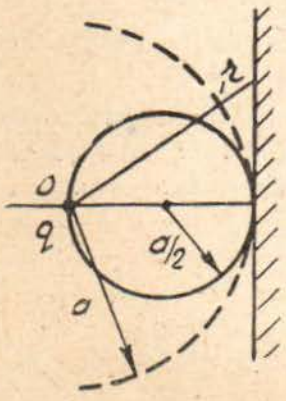
yazabiliriz. Şek. 173 *c* deki envers yüzeyin potansiyeli $\varphi'=R\varphi_s/r'$ olacağından

$$\varphi'=-\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

bulunur. Boylece φ' nin envers yüzey üstünde sabit bir değer aldığı anlaşılır. Bu açıklamalardan, F' yüzeyini φ' potansiyelinde tutan yük ve potansiyel dağılışı bilindiği takdirde enversiyon merkezindeki q yükünün tesiri altında bulunan topraklanmış F envers yüzeyinin yük ve potansiyel dağılışını bulmak kabil olduğu görülmektedir. Tersine olarak $q=-4\pi\varepsilon R\varphi'$ yükünün tesiri altında bulunan topraklanmış iletken probleminin çözümü bilinirse φ' potansiyelindeki envers yüzey probleminin çözümünü, merkezi q yükünün bulunduğu yerde alınan enversiyonla elde etmek kabil olur. $\varphi'=1/R$ alınırsa $q=-4\pi\varepsilon$ olacaktır.

Örnekler :

1 — Noktasal yük karşısındaki topraklanmış levhanın yoğunluğu enversiyonla bulunacaktır, şek. 174.



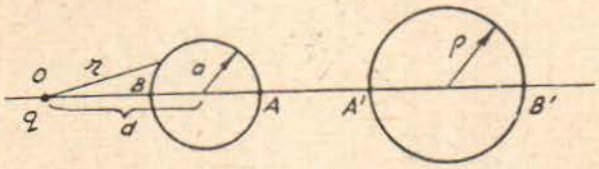
Şek. 174

Düzlemin, merkezi 0 da bulunan $R=a$ yarıçaplı küreye göre enversi düzleme teğet olan ve 0 noktasından geçen $a/2$ yarıçaplı küredir. Kürenin potansiyeli φ_0 ile gösterilirse yoğunluk $\sigma_0=2\varepsilon\varphi_0/a$ olur. Diğer taraftan $q=-4\pi\varepsilon a\varphi_0$ olduğundan $\sigma_0=-q/4\pi a^2$ elde edilir. Böylece düzlemdeki yoğunluk için

$$\sigma=\sigma_0\left(\frac{a}{r}\right)^3=-\frac{qa}{2\pi\varepsilon r^3}$$

bulunur. Bu sonuç daha önce imaj yardımiyle bulunmuştur.

2 — Noktasal yük karşısındaki topraklanmış kürenin yük yoğunluğu enversiyonla bulunacaktır. şek, 175.



Şek. 175

Yarıçapı a olan kürenin diğer bir kürenin enversiyonu ile bulunduğunu düşünebiliriz. Diğer kürenin yarıçapı ρ ile ve potansiyeli φ_0 ile gösterilirse yoğunluğu $\sigma_0=\varepsilon\varphi_0/\rho$ olur. $q=-4\pi\varepsilon R\varphi$ olduğunu gözönüne alarak (R=enversiyon yarıçapı) $\sigma_0=-q/4\pi R\rho$ yazabiliriz. Böylece q yükünün tesiri altında bulunan sıfır potansiyelindeki a yarıçaplı kürenin üstündeki yoğunluk için

$$\sigma=-\frac{qR^2}{4\pi\rho r^3}$$

bulunur. Diğer taraftan A,A′ ve B,B′ envers çiftleri için yazılabilecek geometrik transformasyon denklemleri yardımiyle $R^2/\rho=d^2-a^2$ bulunacağından yoğunluk ifadesi

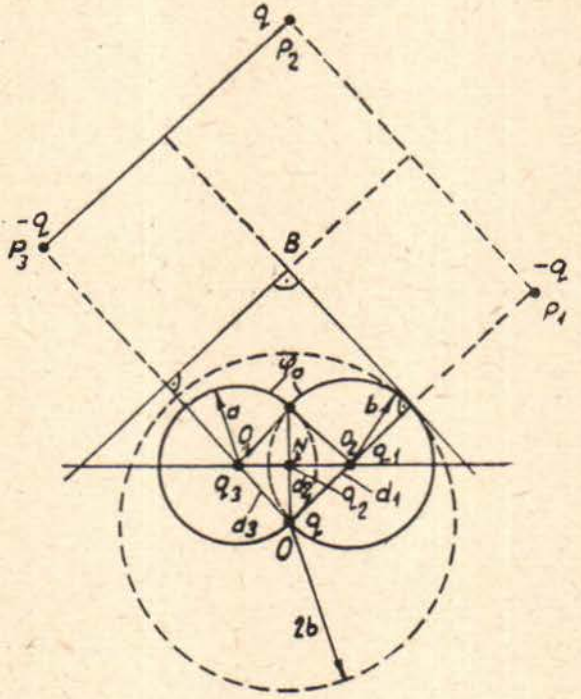
$$\sigma=-\frac{q\ (d^2-a^2)}{4\pi a r^3}$$

şekline girer. Bv sonuç da daha önce imaj yardımiyle bulunmuştur.

3 — Ortogonal olarak kesişen iki kürenin meydana getirdiği iletkenin kapasitesi bulunacaktır, şek. 176.

Enversiyon merkezi 0 kesişme noktasında ve enversiyon yarıçapı da meselâ $2b$ olarak alınırsa, A kesişme noktasının enversi olan B noktasında ortogonal olarak kesişen yarısonsuz düzlem şeklindeki envers yüzeyler elde edilir. Bu suretle envers problemin, topraklanmış ortogonal iki düzlem arasında bulunan $q=-8\pi\varepsilon b\tau_0$ yükü problemi olduğu anlaşılır. Bu problem ise imajlar yardımiyle kolayca çözülebilir. Envers sistemde imajlar yardımiyle potansiyel fonksiyonu bulunduktan sonra Kelvin transformasyonu yardımiyle orijinal sistemin potansiyel fonksiyonu elde edilir. Keza imaj yüklerinin enverslerini alarak problemi doğrudan doğruya orijinal sistemin geometrisinde de çözebiliriz. Envers

geometride P_1, P_2, P_3 noktalarında bulunan imaj yüklerinin enversleri enversiyon merkezinden sıra ile



Şek. 176

$$d_1=(2b)^2/4b=b \quad (0_2 \text{ noktasında}) \,,$$

$$d_2=\frac{(2b)^2}{2\sqrt{4b^2+\frac{4b^4}{a^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (\text{N noktasında}) \,,$$

$$d_3=\frac{(2b)^2}{4b^2/a}=a \quad (0_1 \text{ noktasında})$$

uzaklıklarındadır. Envers imaj yükleri ise

$$q_1=-q\frac{2b}{4b}=-\frac{q}{2} \,,$$

$$q_2 = q\,\frac{2b}{2\sqrt{4b^2+\dfrac{4b^4}{a^2}}} = \frac{q}{2\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

$$q_3 = -q\,\frac{2b}{2.\dfrac{2b^2}{a}} = -q\,\frac{a}{2b}$$

olur. Kesişen kürelerin toplam yükü bu imaj yüklerinin toplamına eşit olacağından

$$Q_0 = q_1+q_2+q_3 = \frac{q[ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}]}{2b\sqrt{a^2+b^2}}$$

bulunur. İletkenin φ_0 potansiyeli ile q yükü arasındaki bağıntı yardımiyle potansiyel için

$$\varphi_0 = -\frac{q}{8\pi\varepsilon b}$$

yazılabilir. Bu ifadeyi üç envers imaj yükünün meselâ iletken üstündeki noktalardan biri olan A noktasında meydana getirecekleri potansiyelleri toplayarak da bulabiliriz.

İletkenin yüzey yoğunluğu, düzlemlerdeki yoğunlukların Kelvin transformasyonu yardımiyle bulunur.

İletkenin kapasitesi için

$$C = \frac{Q_0}{\varphi_0} = 4\pi\varepsilon\,\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

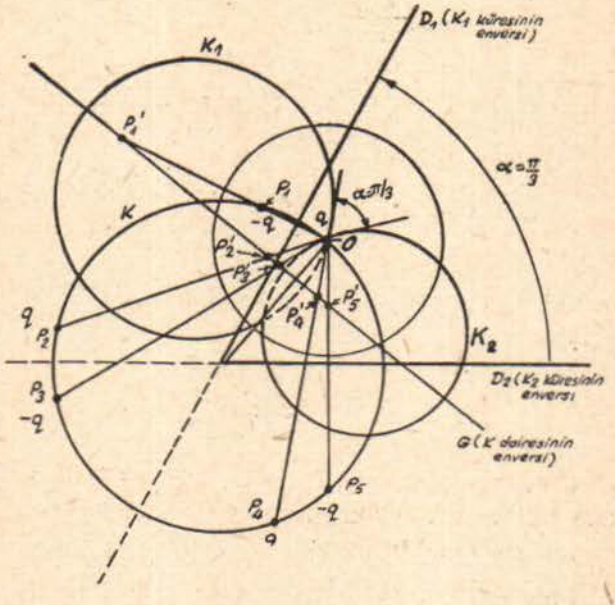
bulunur. $b/a=k$ koyarak bu ifade

$$C = 4\pi\varepsilon\left(\frac{1+k}{k} - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

şekline sokulabilir. $k\to\infty$ için ifade b yarıçaplı büyük kürenin kapasitesini verir ($C\approx 4\pi\varepsilon b$).

Şayet kürelerin kesişme açısı $\alpha=\pi/n$ (n=tam sayı) olursa problem benzer şekilde incelenir. Şek. 177 de $\alpha=\pi/3$ için takip edilecek yol görülmektedir.

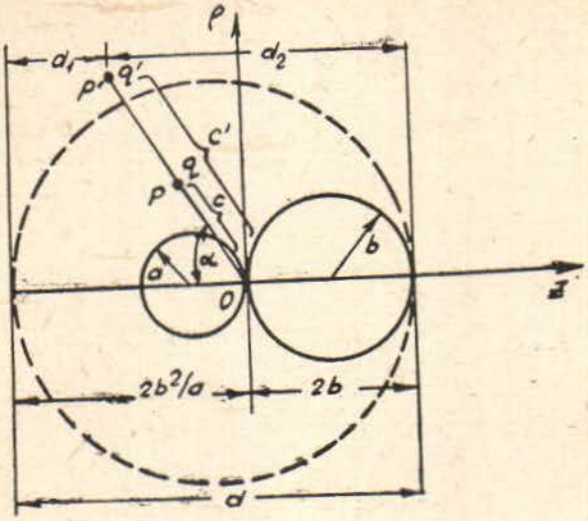
Verilen iletken şek. 176 da kesik çizgi ile belirtilen küresel kepler-den meydana geliyorsa (küresel mercek) bunun enversiyonu yine kesik çizgi ile belirtilen düzlemleri verir. Böylece problem, 0 noktasında bulunan q yükü ile bu iki düzlemden meydana gelen sistemin problemine transforme edilmiş olur. Bu problemi imaj yardımiyle çözemeyiz.



Şek. 177

Şayet izole ve nötr olan iletken bir q_0 noktasal yükünün tesiri altında bulunursa problem şu şekilde çözülebilir : q_0 yükünün q_0' enversinin kesişen düzlemlere göre imajları bulunduktan sonra bunların enversiyonu yapılarak kesişen kürelerin içindeki envers imaj yükleri elde edilir. İletken izole ve nötr olduğundan toplam yükü sıfırdır. Bu sebeple bu envers imajlar ile yukarıda nasıl bulunacağı açıklanan $q_1, q_2, \ldots$ envers imajlarının ($\alpha = \pi/2$ için üç yük) toplamı sıfır olacaktır. Buradan enversiyon merkezine getirilen q yükü hesaplanır. Orijinal sistemin potansiyeli iletken içindeki envers imajların meydana getirecekleri potansiyelleri süperpoze ederek bulunur.

4 — Yekdiğerine değen topraklanmış iki küre q noktasal yükünün tesiri altında bulunduğuna göre sistemin alanı enversiyonla incelenecektir, şek. 178.



Şek. 178

Kürelerin, merkezi değme noktasında bulunan meselâ $2b$ yarıçaplı küreye göre enversleri paralel iki düzlemdir. q yükünün enversi, enversiyon merkezinden $c'=4b^2/c$ uzaklığında bulunan $q'=2bq/c$ noktasal yüküdür. Paralel levhalar arasındaki uzaklık $d=2b+2b^2/a$ ve envers yükün levhalardan uzaklığı $d_1=2b^2/a-4b^2\cos\alpha/c$ ve $d_2=d-d_1=2b+4b^2\cos\alpha/c$ dir.

$a=b=R$ ve $\alpha=90°$ için $d=4R$, $d_1=d_2=2R, c'=4R^2/c$ olacaktır. Çözüm simetriktir.

Problem envers sistemde sonsuz sayıda imaj yardımiyle çözülür. Meselâ simetrik halde P' deki potansiyel

$$\varphi_P'=-\frac{q'}{8\pi\varepsilon R}\ln 2$$

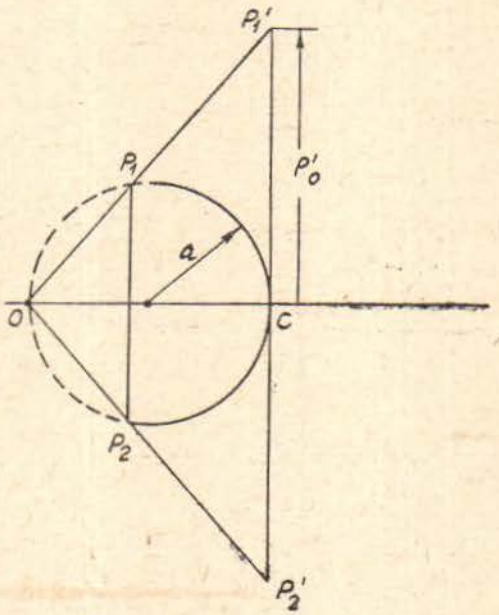
dir. $q'=2Rq/c$ koyarak P deki potansiyel için

$$\varphi_P=\frac{2R}{c}\varphi_P'=-\frac{Rq}{4\pi\varepsilon c^2}\ln 2$$

bulunur.

5 — Noktasal yükün tesiri altında bulunan sıfır potansiyelindeki küresel kepin (kâse) yük yoğunluğu bulunacaktır.

Küresel kep bir dairesel diskin enversiyonu ile elde edilebilir. Meselâ şek. 179 da a yarıçaplı kürenin, merkezi 0 noktasında bulunan



Şek. 179

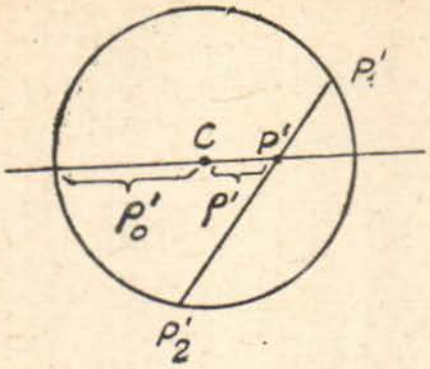
$2a$ yarıçaplı küreye göre enversiyonu ile elde edilen sonsuz düzlemin üstündeki ρ_0' yarıçaplı dairesel disk şekilde dolu çizgi ile belirtilen kepin enversinden ibarettir.

Diskin potansiyeli φ_0' ile gösterilirse merkezinden ρ' uzaklığında bulunan P′ noktasındaki yoğunluk için

$$\sigma' = \frac{2\varepsilon\pi_0'}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho_0'^2 - \rho'^2}}$$

yazılabilir. Şek. 180 de disk üstünde P′ noktasından geçen her hangi bir kiriş görülmektedir. Geometride görülen bir teoreme göre

$$\rho_0'^2 - \rho_0^2 = (\rho_0' + \rho')(\rho_0' - \rho') = (P'P_1')(P'P_2')$$

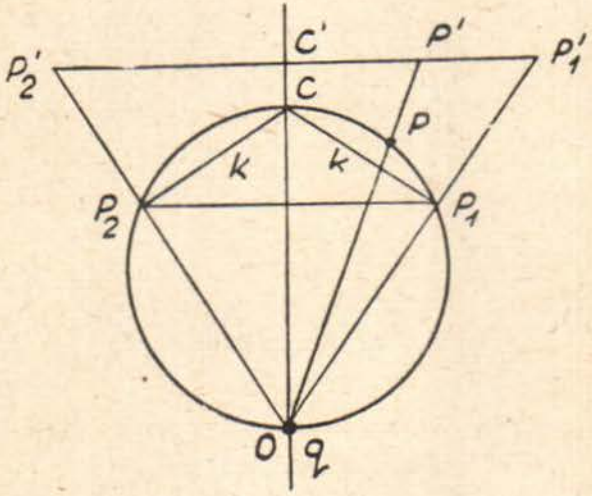


Şek. 180

yazılabileceğinden yoğunluk ifadesi

$$\sigma' = \frac{2\varepsilon\varphi_0'}{\pi} \frac{1}{(P'P_1')\,(P'P_2')}$$

şekline girer.



Şek. 181

Şek. 181 de a yarıçaplı kepin, merkezi küre üstündeki 0 noktasında bulunan $2a$ yarıçaplı küreye göre enversiyonu ile elde edilen dairesel disk üzerindeki kiriş görülmektedir. C noktası kepin kutbudur ve P ise kep üstündeki her hangi bir noktayı göstermektedir. OCP den geçen düzlem küreyi tam bir daire boyunca ve dairesel diski $P_1'P_2'$ kirişi boyunca keser. Şayet σ' yoğunluğunun Kelvin transformasyonu ya-

pılırsa 0 noktasındaki q noktasal yükünün tesiri altında bulunan sıfır potansiyelindeki kepin yük dağılışı elde edilir.

$C'P_1'O$ ve P_1CO üçgenlerinin benzerliğinden faydalanarak

$$C'P_1' = C'P_2' = \frac{4a^2k}{OC\sqrt{(OC)^2 - k^2}}$$

yazılabilir. $C'P'O$ ve PCO üçgenlerinin benzerliği yardımiyle de

$$C'P' = \frac{4a^2(CP)}{OC\sqrt{(OC)^2 - (CP)^2}}$$

bulunur. Disk üstündeki kirişin $P'P_1'$ ve $P'P_2'$ parçaları ise

$$P'P_1' = C'P_1' - C'P' = \frac{4a^2}{OC} \frac{k\sqrt{(OC)^2-(CP)^2} - CP\sqrt{(OC)^2 - k^2}}{\sqrt{(OC)^2 - k^2}\ \sqrt{(OC)^2-(CP)^2}},$$

$$P'P_2' = C'P_2' + C'P' = \frac{4a^2}{OC} \frac{k\sqrt{(OC)^2-(CP)^2} + CP\sqrt{(OC)^2 - k^2}}{\sqrt{(OC)^2 - k^2}\ \sqrt{(OC)^2-(CP)^2}}$$

olacaktır. Böylece

$$\sigma' = \frac{\varepsilon\varphi_0'}{2\pi a^2} \sqrt{(OC)^2 - k^2}\ \frac{\sqrt{(OC)^2-(CP)^2}}{\sqrt{k^2 - (CP)^2}}$$

yazabiliriz. Transformasyon yapılırsa kep üstünde bulunan P noktasındaki yoğunluk için

$$\sigma = \sigma'\left(\frac{2a}{OP}\right)^3 = \frac{4\varepsilon\varphi_0' a}{\pi(OP)^2}\sqrt{\frac{(OC)^2 - k^2}{k^2-(CP)^2}}$$

bulunur. Diğer taraftan $q = -8\pi\varepsilon a\varphi_0'$ alduğu gözönüne alınırsa

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi^2(OP)^2}\sqrt{\frac{(OC)^2 - k^2}{k^2-(CP)^2}}$$

yazlabilir.

Şayet kep, q yükü yerine kepin işgal etmediği küre yüzeyi bölgesinde bulunan üniform yük dağılışının (σ_0) tesiri altında bulunursa problem şu şekilde çözülür :

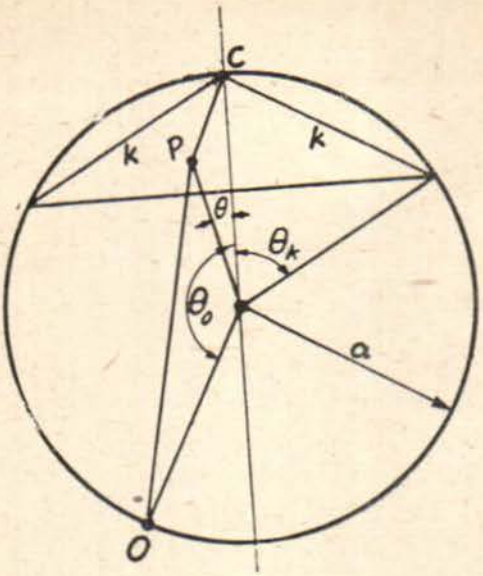
Şek. 182 de $O(a,\theta_0,\phi_0)$ ve $P(a,\theta,\phi)$ noktaları arasındaki uzaklık için

$$(OP)^2 = 2a^2[1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \phi_0)]$$

yazılabilir. $\phi_0 = 0$ almak mahzurlu olmayacağından

$$(OP)^2 = 2a^2(1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos\phi)$$

alabiliriz. O daki $dF = a^2\sin\theta\, d\theta d\phi$ yüzey elemanının yükü $dq = \sigma_0 dF = \sigma_0 a^2 \sin\theta_0 d\theta_0 d\phi$ olacaktır. Bu yük P de tesirle



Şek. 182

$$d\sigma = -\frac{\sigma_0}{4\pi^2}\frac{\sin\theta_0\, d\theta_0 d\phi}{1-\cos\theta\cos\theta_0-\sin\theta\sin\theta_0\cos\phi}\sqrt{\frac{(OC)^2-k^2}{k^2-(CP)^2}}$$

yoğunluğunu meydana getirir. Bu ifadeyi $\phi=0$ ile $\phi=2\pi$ ve $\theta_0=\theta_k$ (kep açısı) ile $\theta=\pi$ arasında integre ederek

$$\sigma = -\frac{\sigma_0}{4\pi^2}\int_{\theta_k}^{\pi}\sin\theta_0\, d\theta_0 \int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{1-\cos\theta\cos\theta_0-\sin\theta\sin\theta_0\cos\phi}\sqrt{\frac{(OC)^2-k^2}{k^2-(CP)^2}}$$

$$= -\frac{\sigma_0}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}}\right)$$

bulunur.

Şimdi uzayda serbest bulunan kepin yük dağılışını araştıralım. Şayet bütün küre yüzeyi boyunca $\sigma_z=-\sigma_0$ üniform dağılışının bulunduğu farzedilirse bu dağılış için potansiyel

$$\varphi_k = \frac{4\pi a^2\sigma_z}{4\pi\varepsilon a} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon}a$$

olacaktır. Bu yük dağılışı kepin işgal etmediği küre yüzeyi kısmındaki dağılışı kompanze eder. Kepin iç yüzeyi üstüne küresel simetrik yük dağılışının bir tesiri olmayacağından bu kısımdaki yoğunluk $\sigma_i=\sigma$ olur. Kepin dış yüzeyi ise ayrıca σ_z yoğunluğunu da taşıyacağından

$$\sigma_a = -\frac{\sigma_0}{\pi}\left(\pi + \sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}}\right)$$

bulunur. Kep potansiyeli yardımiyle σ_i ve σ_a ifadeleri

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon\varphi_k}{\pi a}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}}\right),$$

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon\varphi_k}{\pi a}\left(\pi + \sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}}\right)$$

şekline girerler.

Kepin iç ve dış yüzeylerindeki Q_i ve Q_a yükleri şöyle bulunur: Genişliği $d\theta$ olan bölgedeki yük (iç yüzeyde)

$$dQ_i = 2\pi a^2\sigma_i \sin\theta\, d\theta$$

olacağından $\theta=0$ ile $\theta=\theta_k$ arasında integre ederek

$$Q_i = 2\varepsilon a\varphi_k\left[\sin\theta_k + \theta_k - \frac{\pi}{2}(1-\cos\theta_k)\right]$$

bulunur. Kepin yüzeyi $2\pi a^2(1-\cos\theta_k)$ olduğundan üniform yük dağılışına tekabül eden yük

$$Q_z = 2\pi a^2\sigma_z\,(1-\cos\theta_k) = 2\pi\varepsilon a\varphi_k(1-\cos\theta_k)$$

olacaktır. Dış yüzeyin yükü Q_a ile gösterilirse $Q_a = Q_z + Q_i$ olacağını gözönüne alarak

$$Q_a = 2\varepsilon a\varphi_k\left[\sin\theta_k + \theta_k + \frac{\pi}{2}(1-\cos\theta_k)\right]$$

bulunur. $\theta_k \to \pi$ (yani bütün küre) için $Q_i = 0$ ve $Q_a = 4\pi\varepsilon a\varphi_k$ olacağı kolayca görülebilir. Kepin toplam yükü ise

$$Q_k = Q_a + Q_i = 4\varepsilon a\varphi_k\,(\sin\theta_k + \theta_k)$$

olacaktır. Kapasite

$$C_k = \frac{Q_k}{\varphi_k} = 4\varepsilon a\,(\sin\theta_k + \theta_k)$$

formülü yardımiyle hesaplanır. $\theta_k \to \pi$ için $C_k = 4\pi\varepsilon a$ olacaktır (tam kürenin kapasitesi).

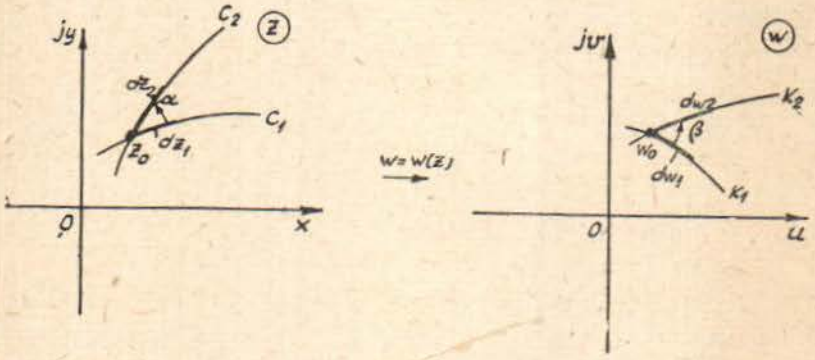
34. İki boyutlu enversiyon.

İki boyutlu enversiyon bir silindire göre yapılır. Bir silindirin enversi genel olarak yine bir silindirdir. Bu enversiyonda çizgisel yoğunluklar ayni kalır. Analitik olarak $\varphi(\rho, \phi)$ bir potansiyel fonksiyonu ise $\varphi(R^2/\rho', \phi)$ nin de potansiyel fonksiyonu olduğu kolayca gösterilebilir ($\rho\rho' = R^2$). İki boyutlu problemler için konform tasvir metodu çok daha elverişli olduğundan bu enversiyon üstünde fazla durulmayacaktır.

IX. KONFORM TASVİR METODU

35. Konform tasvirin esası.

Konform tasvir metodu iki boyutlu potansiyel problemlerinin çözümü için elverişli bir metoddur. Metodun esasını analitik fonksiyonlar teorisi teşkil eder. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden bilindiği gibi $w=w(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ fonksiyonu vasıtasiyle z— düzlemindeki noktalar w— düzlemine tasvir edilir, şek. 183. Ters tasvir $z=z(w)=x(u,v)+jy(u,v)$ ters fonksiyonu ile elde edilir. Şayet $w(z)$ fonksiyonu analitikse tasvir konform olur. Tasvirin konform oluşu,



Şek. 183

z— düzleminde kesişen C_1,C_2 eğrileri arasındaki açının w—düzlemindeki K_1,K_2 tasvir eğrileri arasındaki açıya yön ve değerce eşit olduğunu ve ikinci düzlemdeki sonsuz küçük uzunluklar arrsındaki oranın sabit olduğunu ifade eder. Bu iki özellik $dw=w'(z)dz$ diferansiyeli yardımiyle elde edilir ve

$$|dw|=|w'(z)|\,|dz| \quad , \quad \arg(dw)=\arg(dz)+\arg[w'(z)] \qquad (171)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemler yardımiyle $\alpha=\beta$ ve $|dw_1/dz_1|=|dw_2/dz_2|=|w'(z)|$ yazılabilir. $|w'(z)|$, tasvir modülü adını alır ve her hangi bir noktadaki türevin modülüne eşittir.

Her hangi bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımları

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{172}$$

şeklindeki Cauchy— Riemann diferansiyel denklemlerini sağlarlar. Analitik fonksiyonun türevi için

$$w'(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial x}=-j\frac{\partial w}{\partial y} \tag{173}$$

yazılabilir. Konformluk özelliği $w'(z)=0$ veya $z'(w)=0$ olan noktalarda yoktur. Bu çeşit noktalara singüler (tekil) nokta denilir.

Şayet $w=w(z)$ fonksiyonunda bir z değerine bir tek w değeri tekabül ederse fonksiyon ve tasvir bir değerli olur. $z=z(w)$ ters tasviri de bir değerli olan tasvire birebir tasvir adı verilir. Çok değerli tasvirleri birebir tasvir haline getirmek için Riemann yüzeyi kavramından faydalanılır. İleride çok değerli tesvirlerin celenirken bu konu gözden geçirilecektir.

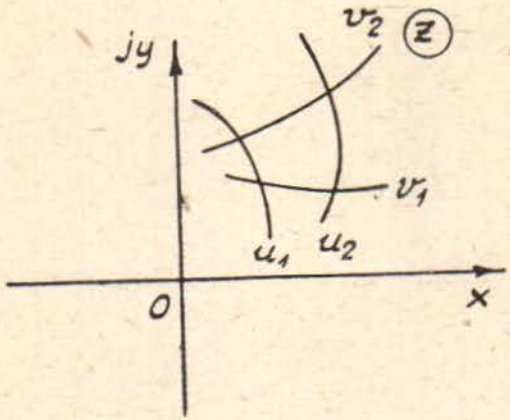
Cauchy—Riemann denklemleri yardımiyle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0(\Delta u=0)\,,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ (\Delta v=0)$$

bulunur. Böylece analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımlarının iki boyutlu Laplace denklemini sağladıkları ve dolayısiyle harmonik fonksiyonlar oldukları anlaşılır. u ve v ye eşlenik harmonik fonksiyonlar denilir. Ancak buradaki eşlenik terimini bir kompleks sayının eşleniği ile karıştırmamalıdır.

w—düzleminde u=sab. ve v=sab. paralel doğruları dik olduğundan z—düzlemindeki $u(x,y)$=sab. ve $v(x,y)$=sab. eğrileri de dik olurlar, şek. 184. Bu sebeple meselâ u ya potansiyel gözüyle bakılırsa $u(x,y)$=sab. eşpotansiyel çizgilerin denklemini ve $v(x,y)$=sab. ise alan çizgilerinin denklemini gösterir. Alan iki boyutlu olduğundan bütün paralel düzlemlerde ayni şekildedir ve bu sebeple düzlemsel alan adını da alır. Düzlemdeki eşpotansiyel çizgiler teorik olarak sonsuz uzunluktaki silindirik eşpotansiyel yüzeylerin izlerinden ibarettir. Böyle bir alan elde edebilmek için alanın kaynağı olan iletkenlerin (elektrodların) teorik

olarak sonsuz uzun ve paralel olmaları veya uzunluklarının aralarındaki uzaklık yanında çok büyük olması gerekir.



Şek. 184

36. Kompleks potansiyel, kompleks alan şiddeti, akı ve kapasite.

Yukarıdaki açıklamardan iki boyutlu potansiyel alanlarının $w=u+jv$ analitik fonksiyonu yardımiyle tam olarak karakterize edilebileceği anlaşılmaktadır. w ye kompleks potansiyel ve alan çizgilerini gösteren eşlenik fonksiyona (u veya v den biri) akı fonksiyonu denilir.

u potansiyel fonksiyonu olarak alınırsa alan şiddetinin bileşenleri $E_x=-\partial u/\partial x$ ve $E_y=-\partial u/\partial y$ olur. z—düzlemindeki kompleks alan şiddeti

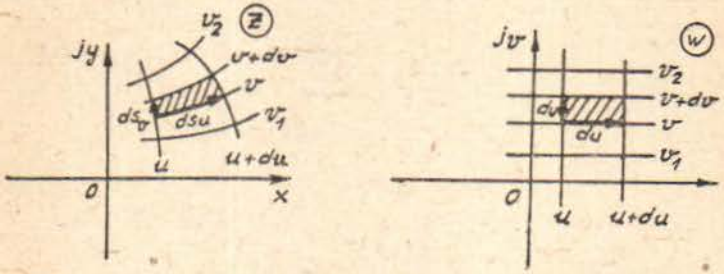
$$\dot{E}=E_x+jE_y=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

şeklinde tarif edililir. Cauchy–Riemann denklemlerinden faydalanarak

$$\dot{E}=-\overline{w'(z)}=-\frac{1}{\overline{z'(w)}} \qquad (174)$$

yazılabilir. Türevdeki çizgi eşlenik işaretidir. Kompleks alan şiddeti iki boyutlu alanda yön ve değer bakımından $\vec{E}$ vektörünün yerine geçer. Alan şiddetinin her hangi bir noktadaki mutlak değeri komp'eks alan şiddetinin bu noktadaki modülüne eşittir.

Şek. 185 de görülen sonsuz küçük ds_u ve ds_v uzunlukları için konformluk özelliğinden faydalanarak $ds_u/ds_v = du/dv$ yazılabilir. Zira sonsuz küçük olan taranmış dikdörtgenler benzer şekillerdir. Diğer taraftan v ve $v+dv$ ile işaretlenen alan çizgileri arasından eksenel doğrultuda



Şek. 185

birim uzunluk boyunca geçen deplasman akısı için

$$d\bar{\psi} = \varepsilon E_u \, ds_v$$

yazılabilir. Çizgi, deplasman aksının birim uzunluk boyunca hesaplandığını belirtmektedir. $E_u = -du/ds_u$ ve $ds_v/ds_u = dv/du$ koyarak

$$d\bar{\psi} = -\varepsilon dv$$

elde edilir. Bu diferansiyel ifadeyi v_1 ve v_2 arasında integre ederek bu iki çizgi arasından geçen akı bulunur. Böylece

$$\bar{\psi} = -\varepsilon \int_{v_1}^{v_2} dv = \varepsilon (v_1 - v_2) \qquad (175)$$

formülü bulunur. Bu suretle akı fonksiyonunun yalnız alan çizgilerinin şeklini tayin etmekle kalmayarak akının hesabına da yaradığı anlaşılır.

v_1 ve v_2 değerleri iki elektrod arasındaki akıyı tam olarak ölçtükleri takdirde $\bar{\psi} = \varepsilon(v_1 - v_2)$ akısı Gauss teoremine göre elektrodların birim uzunluğundaki $\bar{Q}$ yükünü göstereceğinden birim uzunluktaki kapasite için

$$\overline{C}=\frac{\overline{Q}}{u_1-u_2}=\varepsilon\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2} \qquad (176)$$

formülü bulunur. u_1 ve u_2 elektrodların potansiyellerini ve u_1-u_2 ise potansiyel farkını göstermektedir.

37. Potansiyel problemlerinin transformasyonu.

Potansiyel problemlerini konform tasvirle çözmek için iki metoddan faydalanılabilir. Birinci metodda probleme tersten başlanır ve her hangi bir analitik fonksiyon seçilerek eşlenik fonksiyonların problemin sınır şartlarını sağlayıp sağlamadıkları incelenir. İkinci metodda ise z—düzlemindeki problem uygun bir $w(z)$ fonksiyonu vasıtasiyle w—düzleminde daha basit bir probleme transforme edilir. w—düzlemindki çözüm z— düzlemine transforme edilerek orijinal problemin çözümü bulunur. w— düzlemindeki çözüm yani kompleks potansiyel $P(w)$ şeklinde gösterilirse z—düülemindeki kompleks potansiyel

$$P(z)=P[w(z)] \qquad (177)$$

olur. Yani aranan çözümü bulmak için $P(w)$ ifadesinde w yerine z cinsinden krrşılığını koymak gerekir. Eğer transformasyonla w—düzleminde elde edilen alan üniformsa $P(w)=w=u+jv=\varphi+j\psi$ yazılabilir. φ ve ψ potansiyel ve akı fonksiyonlarını göstermektedir. z—düzlemindeki kompleks potansiyel ise $P(z)=w(z)$ olacaktır. w—düzlemindeki eşpotansiyel çizgiler ve alan çizgileri dik paralel doğrulardır. z—düzlemindeki eşpotansiyel çizgileri ve alan çizgilerini $z=z(w)$ yardımiyle kolayca çizebiliriz.

Şayet w—düzlemindeki problemi çözmek için bir transformasyon daha yapmak gerekirse yeni düzlemi ζ ile ve bu düzlemdeki kompleks potansiyeli $P(\zeta)$ ile göstererek w— ve z— düzlemlerindeki kompleks potansiyeller için

$$P(w)=P[\zeta(w)]\ , \qquad P(z)=P[w(z)]=P\{\zeta[w(z)]\} \qquad (178)$$

yazılabilir.

Potansiyel problemlerini transforme ederken genel olarak sınır şartlarını da transforme etmek gerekir. Bazı sınır şartları transformasyonda değişmezler. Meselâ potansiyelin z - düzleminde bir sınır eğrisi boyunca aldığı değer w—düzlemindeki sınır eğrisi boyunca aldığı değerin aynıdır.

$w-$ ve $z-$düzlemlerindeki kompleks alan şiddetleri için

$$\dot{E}_w = -\left(\overline{\frac{dP}{dw}}\right) \quad , \quad \dot{E}_z = -\left(\overline{\frac{dP}{dz}}\right) = -\left(\overline{\frac{dP}{dw}\,\frac{dw}{dz}}\right)$$

yazılabileceğinden

$$E_z = E_w \left|\frac{dw}{dz}\right| \tag{179}$$

bulunur. Böylece iki kompleks düzlemdeki alan şiddetleri arasındaki oranın tasvir modülüne eşit olduğu anlaşılır. $w-$düzleminde alan üniformsa $E_w=1$ olacaktır. $z \to w \to \zeta$ transformasyonu için

$$E_z = -\left(\overline{\frac{dP}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dw}\,\frac{dw}{dz}}\right)$$

olacağı kolayca görülebilir. $P(\zeta)=\zeta$ için $dP/d\zeta=1$ olur.

$z-$ ve $w-$düzlemlerinde hacim elemanlarındaki enerjiler birim uzunluk için

$$d\overline{W}_z = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, E_z^2\, ds_u\, ds_v \quad , \quad d\overline{W}_w = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, E^2{}_w\, du\, dv$$

olacaktır. Diğer taraftan $ds_u ds_v = |z'(w)|^2\, du dv$ olduğu gözönüne alınırsa (179) yardımiyle $d\overline{W}_z = d\overline{W}_w$ bulunur. Böylece iki düzlemdeki enerjilerin ayni olacağı anlaşılır.

Birim uzunluk için iki düzlemde ds_v ve dv elemanlarından geçen akılar

$$d\overline{\psi}_z = \varepsilon E_z ds_v \quad , \quad d\overline{\psi}_w = \varepsilon E_w\, dv$$

olacağından $ds_v = |z'(w)|\, dv$ olduğunu gözönüne alarak (179) yardımiyle $d\overline{\psi}_z = d\overline{\psi}_w$ bulunur. Elektrodların yüzeylerindeki yükler için $d\overline{Q}_z = d\overline{Q}_w$ olacaktır. Bununla beraber yüzey yoğunlukları

$$\sigma_z = \frac{d\overline{Q}_z}{ds_v} \quad , \quad \sigma_w = \frac{d\overline{Q}_w}{dv}$$

olacağından

$$\sigma_z = \sigma_w \frac{dv}{ds_v} = \sigma_w |w'(z)| \tag{180}$$

bulunur. Bu sonucu (179) yardımiyle doğrudan doğruya da görebilirdik.

İki düzlemdeki kapasiteler için

$$\overline{C}_z = \frac{\overline{Q}_z}{u_1 - u_2}, \qquad \overline{C}_w = \frac{\overline{Q}_w}{v_1 - u_2}$$

yazılabileceğinden $\overline{Q}_z = \overline{Q}_w$ olduğunu gözönüne alarak $\overline{C}_z = \overline{C}_w$ bulunur.

Aşağıdaki incelemelerde orijinal sistemin z—düzleminde bulunduğu farzedilecek ve w—düzlemi transformasyon için kullanılacaktır.

Konform tasvirde önemli olan diğer bir husus boyut problemidir. Zira tasvirde rastlanan değerler boyutsuz sayılardır. z düzlemindeki birim taksimatın a (cm) ve w—düzlemindeki birim taksimatın A(volt) değerlerine tekabül ettiği farzedilirse gerçek değerleri $*$ ile işaretliyerek $z^* = az (x^* = ax,\ y^* = ay)$ ve $w^* = Aw (u^* = Au,\ v^* = Av)$ yazılabilir. Keza

$$E^* = \frac{A}{a} E, \qquad \overline{\psi}^* = A\overline{\psi}, \qquad \overline{C}^* = \overline{C}$$

olacağı kolayca görülebilir.

Her hangi bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısmlarının rollerini değiştirerek iki alan şekli elde edilebilir. Yukarıdaki sonuçlar u yu potansiyel olarak almak suretiyle elde edilmiştir. Bu sonuçları değişirmemek yani u nun potansiyeli ve v nin akı fonksiyonunu göstemekte devam etmesini istersek $\zeta = jw = -v + ju$ şeklinde bir ara tasvir yapmak gerekir. Bu suretle w—düzlemi pozitif yönde 90° dönmüş olacağından u ile v nin rolleri değişmiş olur.

38. Basit tasvir fonksiyonları ve tatbikatı.

Aşağıda bazı tasvir fonksiyonları ve tatbikatı gözden geçirilmiştir.

a) w=az+b tasviri.

Bu lineer tasvir fonksiyonunda a sabiti bir dönme ile bir homotesiye ve b sabiti ise bir kaymaya tekabül eder. Meselâ pozitif reel eksen yönündeki E_0 üniform alanının kompleks potansiyeli $w = -E_0 z$ şeklinde ifade edilebilir.

b) $w=\frac{1}{z}$ tasviri.

$w=re^{j\theta}$ ve $z=\rho e^{j\phi}$ koyarak $r=1/\rho$ ve $\theta=-\phi$ bulunur. Bu, birim daireye göre bir kompleks enversiyondur. Reel ve imajiner kısımları ayırarak

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\phi}{\rho}\,,\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\phi}{\rho}$$

bulunur. u=sab. ve v=sab. için merkezleri reel ve imajiner eksenler üstünde bulunan ve hepsi orijinden geçen daireler elde edilir. Dairelerin denklemleri

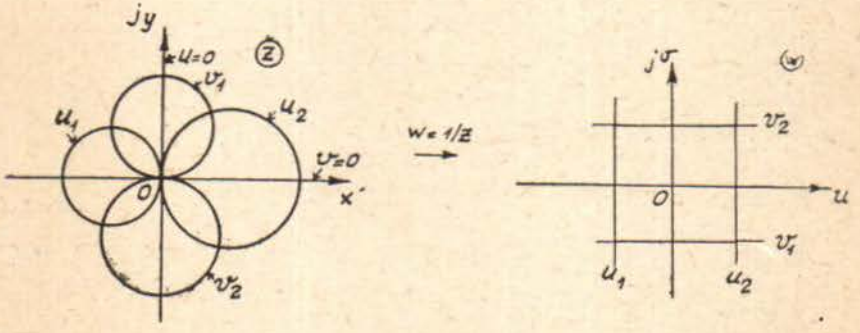
$$\left(x-\frac{1}{2u}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2u}\right)^2\,,\quad x^2+\left(y+\frac{1}{2v}\right)^2=\left(\frac{1}{2v}\right)^2$$

şeklinde yazılabilir.

Ters tasvir $z=1/w$ dir. $w=u+jv$ koyarak

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\,,\quad y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

bulunur ve u ile v yi elimine ederek yine ayni daire denklemleri elde edilir. Şek. 186 da $w=1/z$ tasviri görülmektedir.



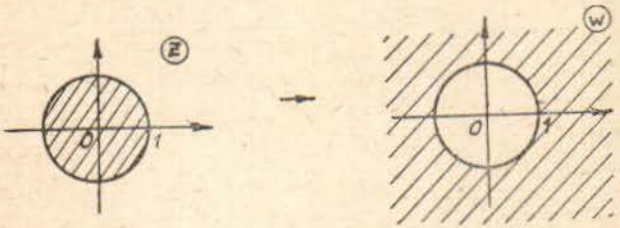
Şek. 186

u ya potansiyel gözüyle bakılırsa

$$w=\frac{m}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{z}$$

orijindeki çizgisel dipolün kompleks potansiyelini gösterir. m, birim uzunluk için dipol momentini göstermektedir.

$w=1/z$ vasıtasiyle z—düzlemindeki birim daire w—düzlemindeki birim daireye tasvir edilir. Şek. 187 de yekdiğerine tekabül eden bölgeler görülmektedir.



Şek. 187

Genel olarak bu fonksiyon vasıtasiyle z—düzleminde orijinden geçmiyen dairelerin ve doğruların w—düzleminde dairelere ve orijinden geçenlerin ise doğrulara tasvir edileceği kolayca gösterilebilir. z—düzlemindeki daire ve doğruların denklemi genel olarak

$$a(x^2+y^2)+b\,x+c\,y+d=0$$

şeklindedir. Bu denklem $a=0$ için doğruyu ve $a\neq 0$ için daireyi gösterir. $d=0$ için daire ve doğrular orijinden geçerler. $B=(b+ja)/2$ koyarak denklem

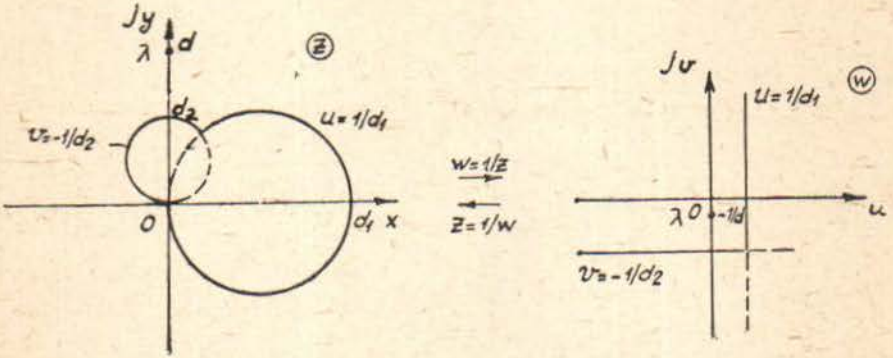
$$a\,z\,\bar{z}+B\,z+\bar{B}\,\bar{z}+d=0$$

şekline sokulabilir. Bu ifadede $z=1/w$ koyarak

$$d\,w\,\bar{w}+\bar{B}\,w+B\,\bar{w}+a=0$$

bulunur. Bu ise $d\neq 0$ için w—düzlemindeki daireleri ve $d=0$ için doğruları gösterir.

Bu tasvir fonksiyonundan faydalanarak teğet veya ortogonal silindirler için potansiyel problemleri kolayca çözülebilir. Meselâ şek. 188 de görülen ve sıfır potansiyelinde tutulan iki ortogonal silindirle paralel üniform çizgisel yükün potansiyel problemi $w = 1/z$ yardımiyle



Şek. 188

w—düzlemine transforme edilerek çok daha basit bir probleme irca edilir. Silindirlerin çapları d_1 ve d_2 ile gösterilirse $u=1/d_1$ ve $v=-1/d_2$ bulunur. $z=jd$ noktasındaki çizgisel yük w—düzleminde $w=1/jd=-j/d$ noktasına transforme edilir. Böylece z—düzlemindeki problem w—düzleminde ortogonal iki düzlem karşısındaki çizgisel yük problemine irca edilmiştir. w—düzlemindeki problem ise imajlar yardımiyle kolayca çözülebilir. Şayet çizgisel yükün çok küçük yarıçaplı bir tel şeklinde olduğu farzedilirse sistemin kapasitesi de kolayca hesaplanabilir. Telin yarıçapı ρ ile ve tasvirinin yarıçapı δ ile gösterilirse çok küçük uzunluklar için cari olan bağıntı yardımiyle

$$\delta=\rho|w'(z)|_{z=jd} = \frac{\rho}{d^2}$$

bulunur. w—düzlemindeki telin $\phi\delta$ potansiyeli, kenarları $a=2/d_1$ ve $b=2(d-d_2)/dd_2$ olan dikdörtgenin köşelerinde bulunan dört çizgisel yükün potansiyellerini birleştirerek bulunur. Bu yüklerden ikisi λ ve diğer ikisi $-\lambda$ dır. z—düzlemindeki orijinal telin φ_ρ potansiyeline eşit olan bu değer hesaplanırsa

$$\varphi_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a\,b\,d^2}{\rho\sqrt{a^2+b^2}}$$

ve birim uzukluktaki kapasite için

$$\overline{C} = \frac{\lambda}{\varphi_\rho} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{a\,b\,d^2}{\rho\sqrt{a^2+b^2}}}$$

elde edilir.

c) $w = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$ tasviri.

Bu tasvire bilineer tasvir denilir. Bölme işlemi yapılırsa

$$w = A + \frac{B}{z+C}$$

bulunur ($A=a/c$, $B=\Delta/c^2$, $\Delta=bc-ad$, $C=d/c$). $c\neq 0$ ve $\Delta\neq 0$ olmalıdır. Bu ifadeye göre tasvir dört kademede elde edilebilir:

$\zeta_1=z+C$ (kayma), $\zeta_2=1/\zeta_1$ (kompleks enversiyon), $\zeta_3=B\zeta_2$ (homotesi ve dönme), $w=A+\zeta_3$ (kayma).

Bu tasvirde z—düzlemindeki her noktaya w—düzleminde yalnız bir nokta tekabül eder. $z=-d/c$ noktasına $w=\infty$ noktası tekabül eder. Tasvir bir değerlidir. Keza

$$z = \frac{d\,w-b}{-c\,w+a}$$

ters tasviri de bir değerlidir. Yani w—düzlemindeki her noktaya z—düzleminde yalnız bir nokta tekabül eder. $w=a/c$ noktasına $z=\infty$ noktası tekabül eder. Bu sonucu $w=w(z)$ ifadesinde $z=\infty$ koyarak da görebiliriz. Böylece bilineer tasvirin birebir olduğu anlaşılır.

$w=w(z)$ ifadesinde pay ve paydayı meselâ c ye bölerek

$$w = \frac{\alpha z+\beta}{z+\gamma}$$

yazılabileceğinden ($\alpha=a/c$, $\beta=b/c$, $\gamma=d/c$) bilineer fonksiyon üç bağımsız parametre ihtiva eder. Bu sebeple bu parametreleri z—düzlemindeki üç nokta, w—düzlemindeki üç noktaya tekabül edecek şekilde tayin etmek kabil olur. Mütekabil noktaları (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3) ile göstererek hesaplar yapılırsa

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

bulunur.

Sabitler reel olduğu takdirde

$$v=\frac{\Delta y}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$

olacağından $\Delta>0$ için z—düzleminin üst yarısının $(y>0)$ w—düzleminin üst yarısına $(v>0)$ tasvir edileceği anlaşılır.

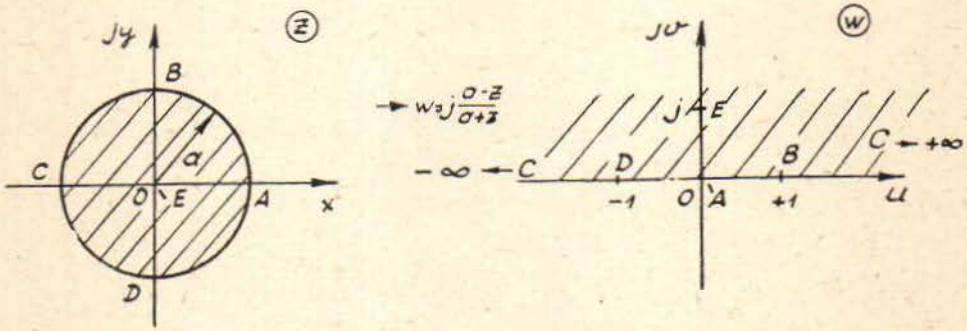
z—düzlemindeki a yarıçaplı daire içindeki bölgenin w—düzleminin üst yarısına tasviri

$$w=j\frac{a-z}{a+z}$$

fonksiyonu vasıtasiyle yapılır. Zira

$$v=\frac{a^2-(x^2+y^2)}{(a+x)^2+y^2}$$

olduğundan $x^2+y^2\leqq a^2$ için $v>0$ olur. Dairenin çevresi w—düzleminin reel eksenine tasvir edilir. Şek. 189 da yekdiğerine tekabül eden bölge ve noktalar görülmektedir.



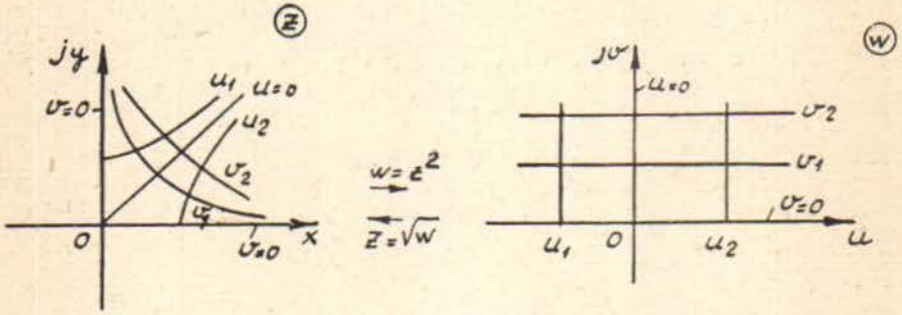
Şek. 189

d) $w=z^2$ tasviri.

Tasvir bir değerlidir. $w=re^{j\theta}$ ve $z=\rho e^{j\phi}$ koyarak $r=\rho^2$ ve $\theta=2\phi$ elde edilir. z—düzleminin üst yarısı bütün w—düzlemine tasvir edilir. z—düzleminin alt yarısındaki noktaların tasvirleri üst yarısındaki noktaların tasvirleri ile üst üste geleceğinden bir w değerine iki z değeri tekabül eder. $z=\sqrt{w}$ ters tasviri w—düzleminde iki değerlidir. Yani bir

w değerine iki z değeri tekabül eder. Tasviri birebir yapmak için w—düzlemi üst üste konmuş iki yapraktan ibaret farzedilir. z— düzleminin üst yarısındaki noktalar alttaki yaprağa ve alt yarısındaki noktalar ise üstteki yaprağa tasvir edilir. Yapraklar pozitif reel eksen boyunca kesilip, kesilen kenarları çaprazlama olarak yapıştırmak suretiyle iki yaprak arasındaki süreklilik sağlanır. w—düzleminde üst üste gelen noktalardan biri alttaki yaprakta ve diğeri üstteki yaprakta bulunur. İki yapraklı düzleme Riemann yüzeyi adı verilir.

$u=x^2-y^2$ ve $v=2xy$ olduğundan $u=$sab. ve $v=$sab. için ortogonal hiperboller elde edilir. Şek. 190 da w—düzleminin üst yarısının z—düzlemindeki ilk dörtde bir bölmeye tasviri görülmektedir. Ortogonal iki



Şek. 190

levha karşısındaki paralel çizgisel yük problemi bu tasvirden faydalanarak kolayca çözülebilir. Zira z—düzlemindeki $v=0$ sınır yüzeyleri $w=z^2$ tasviri vasıtasiyle w—düzleminde $v=0$ sonsuz düzlemine transforme edilir. Böylece problem w—düzleminde sonsuz levha karşısındaki paralel çizgisel yük problemine irca olunur. Keza iki hiperbolik silindir arasındaki veya 90° lik bir köşe ile bir hiperbolik silindir arasındaki alan bu tasvirle elde edilir (v ye potansiyel gözüyle bakarak).

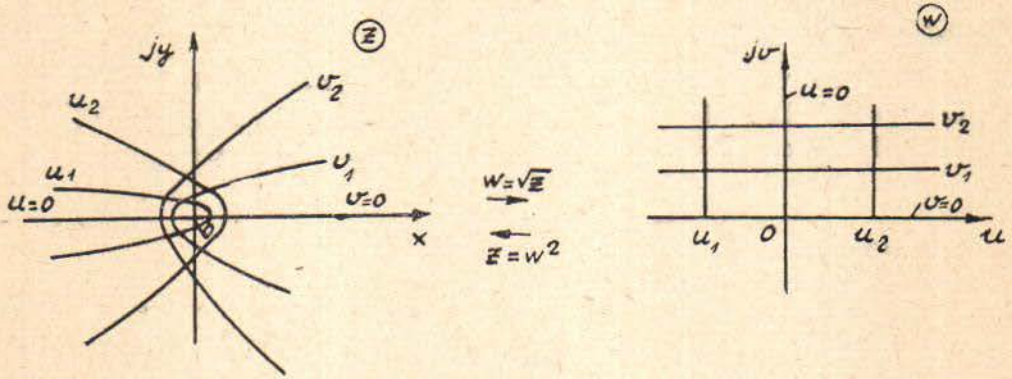
e) $w=\sqrt{z}$ tasviri.

Tasvir z—düzleminde iki değerlidir. Yani bir z değerine iki w değeri tekabül eder. Tasviri birebir yapmak için ($z=w^2$ ters tasviri bir değerlidir) iki yapraklı z-düzlemi kullanılır. w düzleminin üst yarısı birinci yaprağa ve alt yarısı ikinci yaprağa tasvir edilir.

$x=u^2-v^2$ ve $y=2uv$ olduğundan u ve v yi elimine ederek

$$y^2=4u^2(u^2-x)\ ,\quad y^2=4v^2(v^2+x)$$

denklemleri bulunur. u=sab. ve v=sab. için odakları orijinde bulunan ortogonal paraboller elde edilir, şek. 191. İki parabolik silindir arasındaki veya bir yarı sonsuz düzlemle parabolik silindir arasındaki alan bu tasvirle elde edilebilir. Keza bir yarı sonsuz düzlem karşısındaki çizgisel yük problemi bu tasvirden faydalanarak bir sonsuz düzlem karşısındaki çizgisel yük problemine irca olunur.



Şek. 191

f) $w=z^n$ tasviri (n pozitif tam sayı).

Bu tasvir w—düzleminde n değerlidir ($z=\sqrt[n]{w}$). $\theta=n\phi$ olduğundan z—düzlemindeki ϕ tepe açılı sektör w—düzleminde $n\phi$ tepe açılı sektöre tasvir edilir. $\phi=2\pi/n$ sektörü ise bütün w— düzlemine tasvir edilir. Tasviri birebir yapmak için n yapraklı w—düzlemi kullanılır. $z=\sqrt[n]{w}$ değerleri

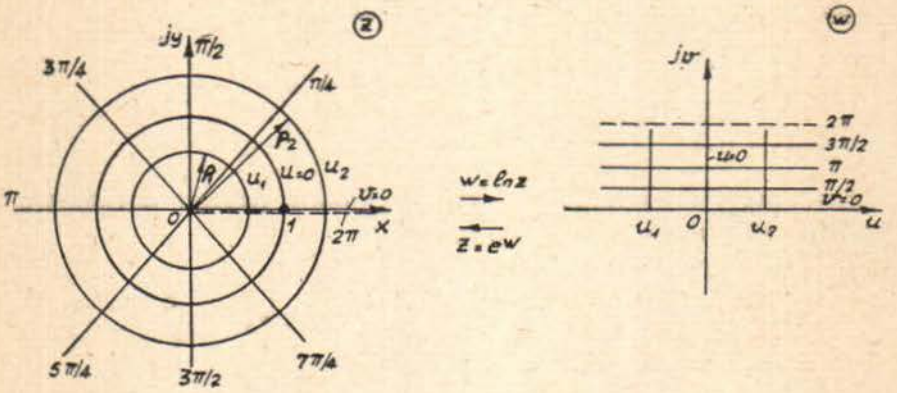
$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

şeklinde hesaplanır ($0\leqq\theta\leqq2\pi$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$).

g) $w=\ln z$ tasviri.

$w=\ln\rho+j(\phi+2k\pi)$ olduğundan tasvir z—düzleminde sonsuz değerlidir ($0\leqq\phi\leqq2\pi$, $k=0,1,2,\ldots$). $k=0$ için $w=\ln\rho+j\phi$ ye esas değer denilir. z—düzlemi w—düzleminde 2π genişliğindeki yatay şeride tasvir edilir, şek. 192. Tasviri birebir yapmak için sonsuz yapraklı z— düzlemi kullanılır. Her yaprak bir yatay şeride tekabül eder. Bir yaprakla çalışmak istenirse $0\leqq\phi\leqq2\pi$ sınırları arasında kalmak için pozitif re-

el eksen boyunca bir baraj düzlemi koymalıdır. Bu barajın üst kenarı $v=0$ değerine ve alt kenarı ise $v=2\pi$ değerine tekabül eder. Ters fonksiyon $z=e^w$ periyodiktir ve periyodu $2\pi j$ dir.



Şek. 192

$u=\ln\rho$ ve $v=\phi$ olduğundan $u=$sab. için ortak merkezli daireler ve $v=$sab. için yarı sonsuz doğrular elde edilir, şek. 192.

u ya potansiyel gözüyle bakılırsa bu tasvir fonksiyonu yardımiyle ortak eksenli iki dairesel silindir arasındaki alan elde edilir. $u_1=\ln\rho_1$ ve $u_2=\ln\rho_2$ olduğunu gözönüne alarak birim uzunluktaki kapasite için

$$\bar{C}=\varepsilon\frac{0-2\pi}{\ln\rho_1-\ln\rho_2}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{\rho_2^*}{\rho_1^*}}$$

bulunur. $\rho_1^*=a$ ve $\rho_2^*=b$, silindirlerin gerçek yarıçaplarıdır.

Orijindeki üniform çizgisel kaynağın potansiyeli için

$$\varphi=u=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\rho+k$$

yazılabilir. Böylece kompleks potansiyelin

$$w=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln z+K$$

şeklinde gösterilebileceği anlaşılır. K, reel kısmı k ya eşit olan bir kom-

pleks sabiti göstermektedir. Şayet $z=z_0$ için $w=0$ seçilirse $K=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln z_0$ olur.

Çizgisel yük her hangi bir z_0 noktasında bulunduğu takdirde kompleks potansiyel

$$w=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(z-z_0)+K$$

olacaktır.

$z_1,z_2,\ldots,z_n$ noktalarında bulunan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ çizgisel kaynaklarının kompleks potansiyeli için süperpozisyonla

$$w=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln(z-z_i)+K$$

bulunur. Meselâ z_1 ve z_2 noktalarındaki λ ve $-\lambda$ yükleri için

$$w=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z-z_1}{z-z_2}+K$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonu

$$u(x,y)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|+k=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_1}{R_2}+k$$

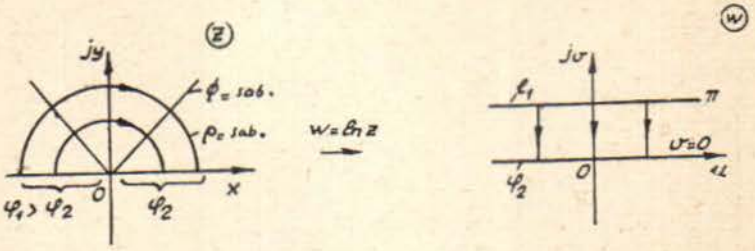
olacaktır. R_1 ve R_2, potansiyelin hesaplandığı z noktasının z_1 ve z_2 den uzaklığını göstermektedir.

Şimdi bazı potansiyel problemlerini $w=\ln z$ tasvirinden faydalanarak çözelim.

Şek. 193 de görülen levhaların potansiyel fonksiyonunu bulalım. Levhalar arasında z—ekseni boyunca sonsuz ince bir aralık bulunduğu farzedilmektedir. $w=\ln z$ yardımiyle z—düzleminin üst yarısı w— düzleminde π genişliğindeki yatay şeride tasvir edilir. Bu suretle z—düzlemindeki problem w - düzleminde φ_1 ve φ_2 potansiyellerindeki iki sonsuz paralel levha problemine irca edilmiştir. Paralel levhalar arasındaki üniform alanın potansiyeli için $\phi=Av+B$ yazılabileceğinden kompleks potansiyel

$$P(w)=-jAw+B$$

şeklindedir. Sınır şartları yardımiyle ($v = \pi$ için $\phi = \varphi_1$ ve $v = 0$ için $\phi = \varphi_2$)



Şek. 193

$$P(w) = -j \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} w + \varphi_2$$

bulunur. $w = \ln z$ koyarak z—düzlemindeki kompleks potansiyel için

$$P(z) = -j \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} \ln z + \varphi_2$$

elde edilir. Potansiyel ve akı fonksiyonları

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} \phi + \varphi_2, \quad \psi = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi} \ln \rho$$

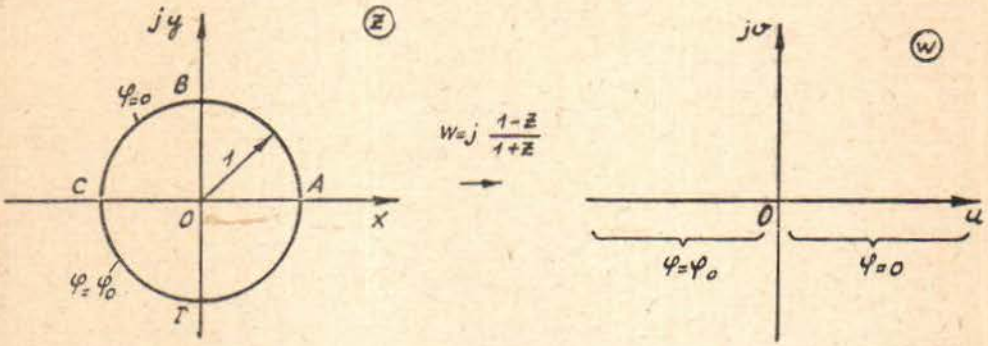
dır ($\phi = \text{arc tg} \frac{y}{x}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Eşpotansiyel çizgiler $\phi = \text{sab.}$ yarı sonsuz doğrularından ve alan çizgileri ise $\rho = \text{sab.}$ yarım dairelerinden ibarettir

Şek. 194 de görülen silindirin üst yarısı topraklanmış olup alt yarısının potansiyeli φ_0 dır. Yarım silindirler arasında A ve C noktalarında z—ekseni boyunca sonsuz ince aralıklar vardır. Sistemin kompleks potansiyelini, yani silindir içindeki potansiyel ve akı fonksiyonlarını bulalım. Birim daireyi

$$w = j \frac{1 - z}{1 + z}$$

yardımiyle w—düzleminin üst yarısına tasvir edebiliriz. w—düzlemindeki çözüm

$$P(w)=-j\,\frac{\varphi_0}{\pi}\ln w$$



Şek. 194

olacağından

$$P(z)=-j\,\frac{\varphi_0}{\pi}\ln\left(j\,\frac{1-z}{1+z}\right)=-j\,\frac{\varphi_0}{\pi}\ln\frac{1-z}{1+z}+\frac{\varphi_0}{2}$$

bulunur. Reel ve imajiner kısımları ayırarak potansiyel ve akı fonksiyonları için

$$\varphi(x,y)=\frac{\varphi_0}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x^2-y^2}{2y}\,,\quad \psi(x,y)=-\frac{\varphi_0}{\pi}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$$

elde edilir. Eşpotansiyel çizgilerin denklemi

$$x^2+y^2+2y\operatorname{tg}\frac{k\pi}{\varphi_0}=1\quad[\varphi(x,y)=k]$$

şeklinde olup A ve C noktalarından geçen daire yaylarını gösterir. $k=\varphi_0/2$ için $y=0$ olacağından AC doğrusu $\varphi=\varphi_0/2$ eşpotansiyel çizgisidir. Alan çizgilerinin denklemi $\psi(x,y)=c$ yazarak bulunur ve merkezleri reel eksen üstünde bulunan daire yayları elde edilir. BD doğrusu da bir alan çizgisidir.

Şimdi

$$w=\ln\frac{z+1}{z-1}$$

tasviri vasıtasiyle çözülebilen bazı problemleri gözden geçirelim. Daha önce de görüldüğü gibi bu fonksiyon yardımiyle $z=-1$ ve $z=+1$ noktalarındaki $-2\pi\varepsilon$ ve $2\pi\varepsilon$ çizgisel yüklerinin alanı elde edilir.

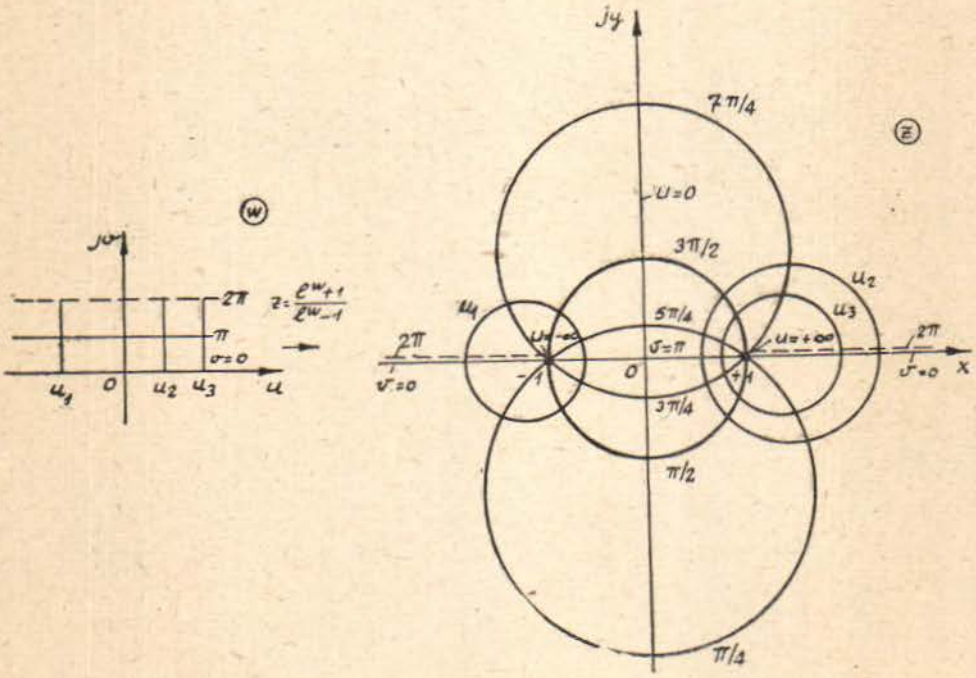
Ters fonksiyon için

$$z=\frac{e^w+1}{e^w-1}=\operatorname{Cth}\frac{w}{2}$$

veya

$$z=\frac{2}{e^w-1}+1$$

elde edilir. $w\to z$ tasviri şu sırayla yapılabilir: $\zeta_1=e^w$, $\zeta_2=\zeta_1-1$, $\zeta_3=1/\zeta_2$, $z=2\zeta_3+1$. Şek. 195 de $w\to z$ tasviri görülmektedir. Ara tasvirler çizilmemiştir.



Şek. 195

ζ—düzleminde $\xi=0$ düzlemi ile intibak eden sıfır potansiyelindeki

levha karşısına ve $\xi_0=a$ noktasına λ çizgisel yükü getirildiğine göre kompleks potansiyel için imaj yardımiyle

$$P(\zeta)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(\zeta-a)+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(\zeta+a)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\zeta-a}{\zeta+a}$$

bulunur. Şimdi bir $\zeta=\zeta(z)$ fonksiyonu vasıtasiyle ζ— düzlemindeki imajiner eksenin z—düzlemindeki C eğrisine transforme ediidiğini farzedelim. Bu esnada $\xi_0=a$ noktası da $z=z_0$ noktasına tasvir edllecek yani $a=\zeta(z_0)$ olacaktır. Böylece

$$P(z)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\zeta(z)-\zeta(z_0)}{\zeta(z)+\zeta(z_0)}$$

fonksiyonu z - düzleminde C eğrisi karşısına ve $z=z_0$ noktasına getirilen çizgisel yük probleminin çözümünü verecektir.

Alan şiddeti için

$$E=\frac{1}{|z'(w)|}=\mathrm{Ch}\,u-\cos v$$

bulunur.

w—düzleminde $u_1,0,u_2,u_3$ gibi dört u değerini gözönüne alarak 2π genişliğindeki çeşitli dikdörtgenleri z—düzlemine tasvir ederek aşağıdaki potansiyel alanları elde edilir :

$u_2\leqq u\leqq u_3$ için içiçe iki silindir arasındaki alan elde edilir ve birim uzunluk için kapasite

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{u_3-u_2}$$

olur ($v_1=0,v_2=2\pi$).

$0\leqq u\leqq u_2$ için sonsuz düzlem ile paralel silindir arasındaki alan elde edilir ve

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{u_2}$$

dir.

$u_1\leqq u\leqq u_2$ için iki paralel silindir arasındaki alan elde edilir ve

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{u_2-u_1}$$

dir.

$z=z(w)$ de reel ve imajiner kısımları ayırarak

$$x=\frac{\text{Sh } u}{\text{Ch}u-\cos v}\ , \quad y=-\frac{\sin v}{\text{Ch } u-\cos v}$$

bulunur. u ve v elimine edilerek

$$(x-\text{Cth } u)^2+y^2=\frac{1}{\text{Sh}^2 u}\ ,$$

$$x^2+(y-\text{ctg } v)^2=\frac{1}{\sin^2 v}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler, merkezleri reel ve imajiner eksen üstünde bulunan daireleri gösterirler. $u=$sab. daireleri $u>0$ için sağda ve $u<0$ için solda bulunurlar. $u=0$ için $x=0$ olacağından daireler imajiner eksene dejenere olurlar. $u=+\infty$ için $x=+1$, $y=0$ ve $u=-\infty$ için $x=-1$, $y=0$ olur. $v=$sab. daireleri $x=\mp 1$ noktalarından geçerler. v nin değişme sınırı $0\leqq v\leqq 2\pi$ dir. $v=0,\pi,\ 2\pi$ için $y=0$ olur ve $v=$sab. daireleri $v=\pi$ için -1 ile $+1$ arasındaki doğruya ve $v=0$ ve 2π için -1 noktasının solundaki ve $+1$ noktasının sağındaki yarı sonsuz doğrulara dejenere olurlar.

Tasvir fonksiyonu

$$z=c\frac{e^w-1}{e^w+1}=c\ \text{Cth}\frac{w}{2}$$

şeklinde alınırsa ± 1 noktalarının yerine $\pm c$ noktaları gelir ve meselâ $u=$sab. dairelerinin denklemi

$$(x-c\ \text{Cth } u)^2+y^2=\left(\frac{c}{\text{Sh } u}\right)^2$$

şekline girer.

Şimdi yarıçapları ve eksenleri arasındaki uzaklık verilen iki paralel silindir arasındaki kapasiteyi hesaplayalım. Silindirlerin yarıçapları için

$$R_1=\frac{c}{|\text{Sh } u_1|}\ , \quad R_2=\frac{c}{|\text{Sh } u_2|}$$

ve d uzaklığı için

$$d=c\,|\mathrm{Cth}\,u_1|+c\,|\mathrm{Cth}\,u_2|$$

yazılabilir. Bu denklemler yardımiyle

$$\mathrm{Ch}\,(u_2-u_1)=\frac{d^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}$$

bulunacağından birim uzunluktaki kapasite için

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{d^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}}$$

formülü elde edilir.

h) $z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{c^2}{w}\right)$ tasviri.

c pozitif bir sabiti göstermektedir. $w=re^{j\theta}$ koyarak

$$x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)\cos\theta=a\cos\theta\quad,\quad y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{c^2}{r}\right)\sin\theta=b\sin\theta$$

bulunur. r ve θ yı elimine ederek

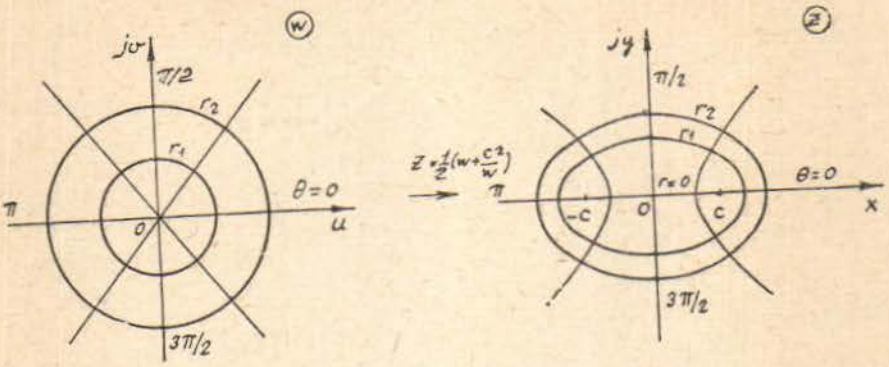
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad,\quad\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1$$

denklemleri elde edilir. Birinci denkleme göre w—düzlemindeki r=sab. daireleri z—düzleminde yarı eksenleri a ve b olan ortak odaklı elipslere ve ikinci denkleme göre θ=sab doğruları ortak odaklı elipslere ve ikinci denkleme göre θ=sab. doğruları ortak odaklı hiperbollere tasvir edilir, şek. 196. Elipslerin ve hiperbollerin odakları $z=\pm c$ noktalarındadır. w—düzleminde yarıçapı c olan daire için $x=c\cos\theta$, $y=0$ olacağından bu daire odakları birleştiren doğruya tasvir edilir. Odaklar arasındaki doğruya dejenere olmuş bir elips gözüyle bakılabilir.

Ters fonksiyon

$$w=z\pm\sqrt{z^2-c^2}$$

olduğundan bir z değerine iki w değeri tekabül eder. Tasvir z— düzleminde iki değerlidir ve birebir tasvir için iki yapraklı z—düzlemi kullanmak gerekir. w—düzlemindeki $r=c$ dairesi dışındaki noktalar bü-



Şek. 196

tün z—düzlemine tasvir edilir. $r=c$ dairesinin içindeki noktalar ise ikinci Riemann yaprağına tasvir edilir. Bu sebeple $r=c$ dairesine baraj gözüyle bakılabilir.

z—düzlemindeki iki eliptik silindir arasındaki alanı veya $2c$ genişliğindeki levha ile bir eliptik silindir arasındaki alanı bu tasvir yardımiyle indeleyebiliriz. Örnek olarak iki eliptik silindirin birim uzunluk için kapasitesini bulalım. Yarı eksenleri a_1,b_1 ve a_2,b_2 olan elipsler r_1,r_2 yarıçaplı dairelerin tasvirleri olduğundan

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

dir. Her hangi bir elips için $a^2-b^2=c^2$ dir ve meselâ A noktası için yazılan

$$x=a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{c^2}{r}\right)\qquad (y=0)$$

denklemi yardımiyle $r=a+\sqrt{a^2-c^2}=a+b$ bulunur. $r>c$ olduğundan kare kök için pozitif işaret alınmıştır. Böylece kapasite için

$$\overline{C}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}$$

elde edilir.

i) $z = \mathrm{Ch}\, w$. $z = \mathrm{Sh}\, w$, $z = \cos w$, $z = \sin w$ tasvirleri.

$\zeta = e^w$ koyarak $z = \mathrm{Ch}\, w$ için

$$z = \mathrm{Ch}\, w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

yazılabilir. Bu tasvir yukarıda incelenmiştir ($c=1$). $\zeta = e^w$ yardımiyle w— düzlemindeki yatay şerit ζ— düzlemine tasvir edilir. $\zeta \to z$ tasviri yardımiyle de z—düzlemindeki elipsler ve hiperboller elde edilir. Odaklar $z = \pm 1$ noktalarındadır. $u = 0$ için birinci yaprak ve $u=0$ için ikinci yaprak kullanılır.

$z = c_1\, \mathrm{Ch}\frac{w}{c_2}$ tasviri de benzer şekilde incelenir. c_1 ve c_2 reel sabitleri göstermektedir. $\zeta = e^{w/c_2}$ koyarak

$$z = \frac{c_1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

yazılabilir ve tasvir $w \to \zeta \to z$ şeklinde elde edilir.

Reel ve imajiner kısımları ayırarak

$$x = c_1\, \mathrm{Ch}\frac{u}{c_2} \cos\frac{v}{c_2} \quad , \quad y = c_1\, \mathrm{Sh}\frac{u}{c_2} \sin\frac{v}{c_2}$$

bulunur. Elipslerin yarı eksenleri

$$a = c_1\, \mathrm{Ch}\frac{u}{c_2} \quad , \quad b = c_1\, \mathrm{Sh}\frac{u}{c_2}$$

ve yarı odak uzaklığı $c = c_1$ dir. u_1 ve u_2 potansiyellerindeki iki eliptik silindir arasındaki gerilim için

$$U = u_1 - u_2 = c_2 \ln\frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$$

bulunur. Pozitif reel eksen üstünde $v = v_1 = 0$ ve pozitif imajiner eksen üstünde $v = v_2 = c_2\pi/2$ olacağından birim uzunluktaki yük için $\bar{Q} = -2\,\pi\varepsilon c_2$ bulunur. Buradan birim uzunluktaki kapasite için daha önce bulunan formül çıkarılır.

Alan şiddeti için

$$E = \frac{c_2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \frac{v}{c_2} + b^2 \cos^2 \frac{v}{c_2}}}$$

elde edilir. $v=0$ için $E=E_{max}=c_2/b$ ve $v=c_2\pi/2$ için $E=E_{min}=c_2/a$ olacağı kolayca görülebilir. c_2 yi silindirler arasındaki potansiyel farkı yardımıyle hesaplayabiliriz.

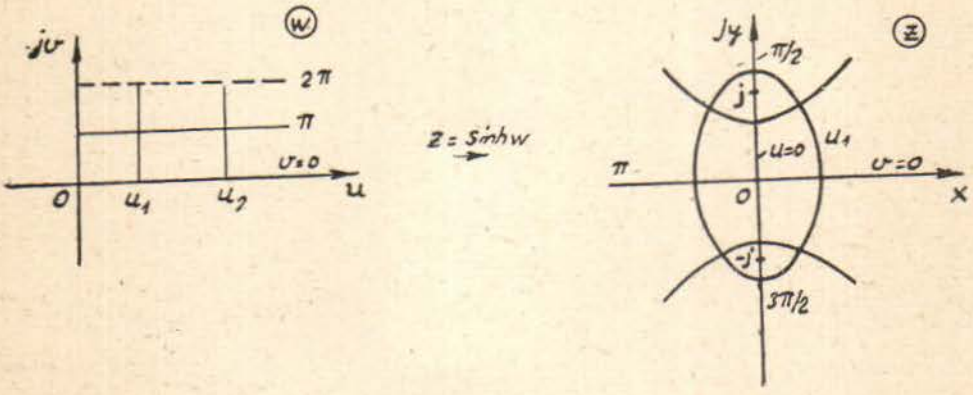
$z=$ Sh w fonksiyonunda $\zeta=e^w$ koyarak

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)$$

bulunur. $\zeta=Re^{j\alpha}$ koyarak

$$x = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)\cos\alpha \ , \quad y = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\sin\alpha$$

elde edilir. ζ—düzlemindeki birim daire $z=\pm j$ noktaları arasındaki düşey doğruya tasvir edilir. $u \gtrless 0$ yarım şeridinin tasviri şek. 197 de görülmektedir. $u \lesseqgtr 0$ için diğer Riemann yaprağı kullanılır.



Şek. 197

$z=\cos w$ fonksiyonunda $\zeta_1=jw$ koyarak

$$z = \cos w = \mathrm{Ch}\, jw = \mathrm{Ch}\, \zeta$$

ve $\zeta_2 = e^{\zeta_1}$ koyarak

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta_2 + \frac{1}{\zeta_2}\right)$$

yazılabilir ve $w \to \zeta_1 \to \zeta_2 \to z$ tasviri yapılır. w— düzleminde 2π genişliğindeki $u \geqq 0$ düşey şeridi birinci z yaprağına ve $u \leqq 0$ düşey şeridi ise ikinci z yaprağına tasvir edilir. Reel ve imajiner kısımları ayırarak

$$x = \cos u \operatorname{Ch} v \ , \quad y = -\sin u \operatorname{Sh} v$$

bulunur. $u =$ sab. için hiperboller ve $v =$ sab. için elipsler elde edilir. Elipslerin ve hiperbollerin odakları aynidir.

$z = \sin w$ fonksiyonu $z = -j \operatorname{Sh} jw$ şeklinde yazılabilir. $\zeta_1 = jw$ ve $\zeta_2 = e^{\zeta_1}$ koyarak

$$z = -j\frac{1}{2}\left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_2}\right)$$

bulunur. Tasvir $w \to \zeta_1 \to \zeta_2 \to z$ sırasına göre yapılır. Reel ve imajiner kısımları ayırarak

$$x = \sin u \operatorname{Ch} v \ , \quad y = \cos u \operatorname{Sh} v$$

bulunur. $u =$ sab. için hiperboller ve $v =$ sab. için elipsler elde edilir. Odaklar aynidir

j) $z = \operatorname{tg} w$, $z = \operatorname{ctg} w$, $z = \operatorname{Th} w$, $z = \operatorname{Cth} w$ tasvirleri.

$z = \operatorname{tg} w$ fonksiyonu

$$z = -j\frac{e^{i2w}-1}{e^{i2w}+1}$$

şekline sokulabilir ve $\zeta_1 = 2jw$, $\zeta_2 = e^{\zeta_1}$, $\zeta_3 = \frac{\zeta_2 - 1}{\zeta_2 + 1}$, $z = -j\zeta_3$

tasvirleri yapılır.

$z = \operatorname{ctg} w = 1/\operatorname{tg} w$ tasviri $\zeta = \operatorname{tg} w$ ve $z = 1/\zeta$ şeklinde elde edilebilir.

$z = \operatorname{Th} w$ fonksiyonu $w = j\zeta_1$ koyarak $z = j \operatorname{tg} \zeta_1$ şekline sokulabilir ve sonuç $\zeta_2 = \operatorname{tg} \zeta_1$ tasvirini j ile çarparak elde edillir.

$z = \operatorname{Cth} w$ fonksiyonu $w = j\zeta_1$ koyarak $z = j \operatorname{ctg} \zeta_1$ şekline girer ve sonuç $\zeta_2 = \operatorname{ctg} \zeta_1$ tasvirini j ile çarparak bulunur.

39. Unicursal eğriler.

Bir iletkenin sınır eğrisinin $x=x(p)$, $y=y(p)$ şeklinde yani bir p parametresine bağlı olarak ifade edilebildiği farzedilirse eğrinin kompleks denklemi

$$z(p)=x(p)+j\,y\,(p)$$

olur. Bu denklemde p yerine $-jw=v-ju$ koyarak

$$z(w)=x(-jw)+j\,y(-jw) \tag{181}$$

bulunur. Şayet $u=0$ alınırsa son denklem

$$z\,(v)=x\,(v)+j\;y(v)$$

şekline girer. Bu ise sınır eğrisinin parametrik denklemidir ve aradaki fark p yerine v gelmesinden ibarettir. Böylece parametrik olarak ifade edilebilen (unicursal) eğri bir $u=0$ sınır eğrisi için kompleks potansiyelin doğrudan doğruya bulunabileceği anlaşılır. Zira $z(w)$ fonksiyonunun tersi z—düzlemindeki $w(z)$ kompleks potansiyelini verecektir.

Sınır eğrisinin denklemi poler koordinatlar cinsinden $\rho=\rho(p)$, $\phi=\phi(p)$ şeklinde ifade edilirse

$$z(w)=\rho(-\,jw)e^{j\,\phi\,(-jw)} \tag{182}$$

olacağı kolayca görülebilir.

Bu metod yalnız parametrik olarak ifade edilebilen eğrilere (unicursal eğriler) tatbik edildiğinden kullanma alanı çok dardır. Aşağıda bazı örnekler gözden geçirilmiştir.

Yarıçapı a olan iletken silindirin parametrik denklemleri $x=a\cos\phi$, $y=a\sin\phi$ olduğundan

$$z(w)=a\cos(-jw)+ja\sin(-jw)=ae^{w}$$

ve kompleks potansiyel için

$$w(z)=\ln\frac{z}{a}$$

bulunur. $x=ae^{u}\cos v$, $y=ae^{u}\sin v$ olduğundan eşpotansiyel çizgilerin denklemi $x^2+y^2=a^2e^{2u}$ olur.

Yarı eksenleri a,b olan eliptik silindirin parametrik denklemleri $x=a\cos p$, $y=b\sin p$ olduğundan

$$z(w)=a\cos(-jw)+j\,b\sin(-jw)$$

veya $b/a=\mathrm{Th}\,\alpha$ koyarak

$$z(w)=\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{Ch}(w+\alpha)$$

bulunur. Kompleks potansiyel

$$w(z)=\mathrm{Ch}^{-1}\frac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}-\mathrm{Th}^{-1}\frac{b}{a}$$

dir. Reel ve imajiner kısımları ayırıp v yi elimine ederek eşpotansiyel çizgilerin denklemini gösteren

$$\left[\frac{x\,\mathrm{Ch}\,\alpha}{a\,\mathrm{Ch}\,(u+\alpha)}\right]^2+\left[\frac{y\,\mathrm{Sh}\,\alpha}{b\,\mathrm{Sh}\,(u+\alpha)}\right]^2=1$$

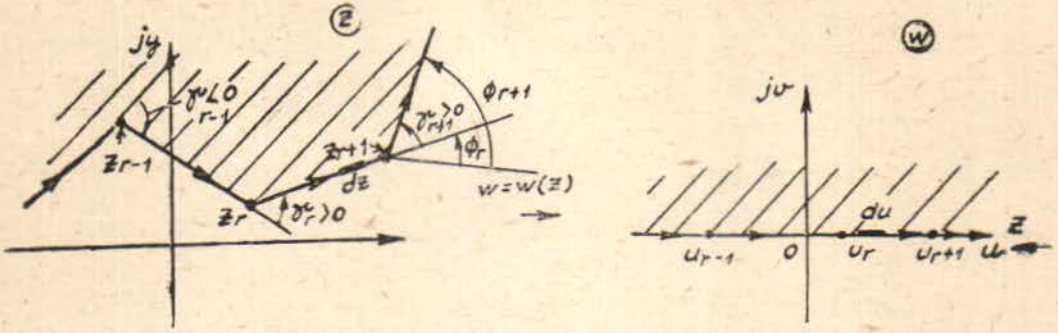
bulunur. u = sab. için elipsler elde edilir.

40. Schwarz—Christoffel tasviri.

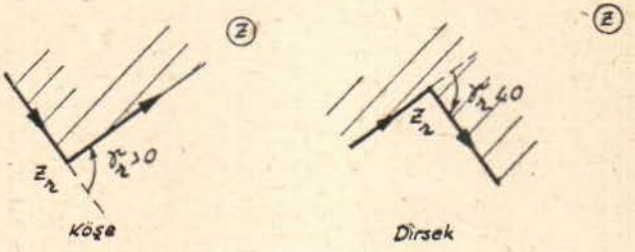
Schwarz—Christoffel tasvir fonksiyonu vasıtasiyle z—düzlemindeki bir poligonun içi w—düzleminin üst yarısına ve poligonun sınırı ise u—eksenine tasvir edilir. Bu önemli tasvir fonksiyonu

$$\frac{dz}{dw}=A(w-u_1)^{-\frac{\gamma_1}{\pi}}(w-u_2)^{-\frac{\gamma_2}{\pi}}\ldots(w-u_n)^{-\frac{\gamma_n}{\pi}}=A\prod_{r=1}^{n}(w-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}} \quad (183)$$

denklemini integre ederek bulunur. Bu ifadede A bir kompleks sabiti, γ_r ler poligonun dış açılarını ve u_r ler ise u—ekseni üstündeki noktaları gösterir, şek. 198. Poligonun z_r noktalarına tekabül eden u_r noktaları için $u_{r-1}>u_r>u_{r+1}$ dir. Poligonun yönü tasvir edilecek olan bölge solda kalacak şekildedir. γ_r açıları poligon yönünde ilerlerken rastlanan yön değişmelerini gösterir. u_r noktasında $\pi>\gamma_r>0$ için bir köşe ve $\gamma_r<0$ için bir dirsek vardır, şek. 199. $\gamma_r=\pi$ için köşe sonsuza gider ve $\gamma_r=-\pi$ için dirsek sonsuz ince olur, şek. 200. Sonsuzdaki noktaya iki

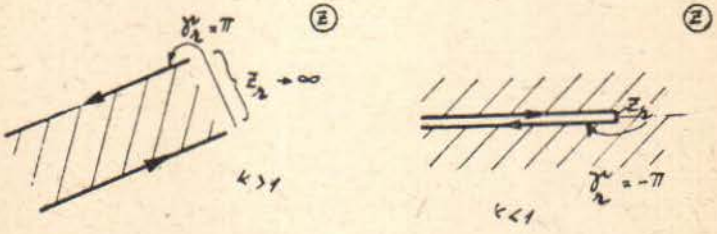


Şek. 198



Şek. 199

paralel doğrunun kesişme noktası gözüyle bakılabilir.



Şek. 200

Poligonun sınırının u—eksenine tasvir edileceğini şöylece görebiliriz: dz/dw nin argümanı

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right)=\arg A-\frac{\gamma_1}{\pi}\arg(w-u_1)-\ldots-\frac{\gamma_n}{\pi}\arg(w-u_n)$$

dir. $dw=du$ için $\arg(dz/dw)=\phi$ olacaktır. Bu ise du elemanının tasviri olan dz nin pozitif reel eksenle yaptığı açıdır, şek. 198. Şayet w reelse ve u_r ile u_{r+1} noktaları arasında bulunuyorsa $(w-u_1),\ldots,(w-u_r)$ faktörleri hep pozitif reel sayılar olacağından argümanları sıfırdır. Buna karşılık negatif reel sayılar olan $(w-u_{r+1}),\ldots,(w-u_n)$ faktörlerinin argümanları π ye eşit olur. Böylece dz nin argümanı için

$$\phi_r = \arg A - (\gamma_{r+1}+\ldots+\gamma_n)$$

bulunur. z_r ile z_{r+1} arasındaki dz elemanları pozitif reel eksenle ϕ_r açısı yapan poligon kenarını meydana getirirler. Benzer şekilde z_{r+1} ile z_{r+2} arasındaki kenar için

$$\phi_{r+1} = \arg A - (\gamma_{r+2}+\ldots+\gamma_n)$$

açısı bulunur. Bu iki doğru arasındaki açı $\phi_{r+1}-\phi_r=\gamma_r$ dir. Bu suretle poligonun iki kenarı elde edilmiş olur. Diğer kenarlar benzer şekilde elde edilir.

Alan şiddetinin bir köşede sıfır ve bir dirsekte sonsuz olacağını gözönüne alarak tasvir edilen bölgeye göre dış açıların doğru tarafta alındığını kolayca görebiliriz. Gerçekten $E=1/|z'(w)|$ olduğundan $\gamma_r>0$ için $E\to\infty$ ve $\gamma_r<0$ için $E\to 0$ değerini alır.

(183) denklemini integre ederek $z(w)$ için

$$z=A\int\prod_{r=1}^{n}(w-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}\,dw+B \qquad (184)$$

bulunur. A ve B nin nasıl tayin edileceği örnekler incelenirken görülecektir. Homotesiye ve dönmeye tekabül eden A sabiti poligonun z—düzlemindeki durumunu ve kenar boyutlarını tayin eder. Kaymaya tekabül eden B sabiti ise poligonun köşe ve direseklerinden birinin yerini tesbit eder. Schwarz integrali

$$z=A\int_0^w\prod_{r=1}^{n}(w-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}\,dw+B$$

şeklinde yazılırsa $w=0$ için $z=B$ olur.

Schwarz—Christoffel tasvir fonksiyonunu araştırırken aşağıdaki noktalar gözönünde tutulur:

a) z—düzlemindeki dirsek ve köşelerin sırası u—ekseni üstündeki noktaların sırasına uymalıdır. Bu sıra tasvir edilecek bölge solda kalacak şekilde yapılan ilerlemeye (ok yönü) göre tesbit edilir.

b) Dış açılar için pozitif yön saat yönünün tersidir.

c) Şayet γ_r dış açıları yerine α_r iç açıları alınırsa

$$\alpha_r+\gamma_r=\pi \tag{185}$$

olduğundan (183) denklemi

$$\frac{dz}{dw}=A\prod_{r=1}^{n}(w-u_r)^{\frac{\alpha_r}{\pi}-1} \tag{186}$$

şekline girerer.

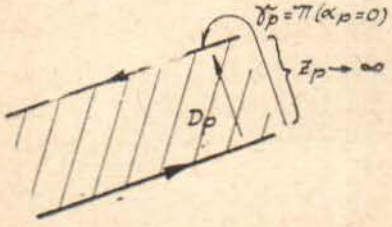
d) u_r noktalarından üçü gelişi güzel seçilebilir. Ancak bu noktaları seçerken integralin kolay kesaplanabilen tiplere benzemesine çalışılır. Şayet noktalardan biri sonsuzda seçilirse bu noktaya tekabül eden faktör integralde bulunmaz.

e) Dış açıların cebrik toplamı 2π dir. Bundan açıların doğru alınıp alınmadığını kontrol etmek için faydalanılır.

f) Şayet w—düzlemindeki u_p noktası z—düzlemindeki $\gamma_p=\pi$ köşesine tekabül ederse paralel doğrular arasındaki uzaklık

$$D_p=-j\pi A\prod_{r\neq p}(u_p-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}=-j\pi\left[(w-u_p)^{\frac{\gamma_p}{\pi}}\frac{dz}{dw}\right]_{w=u_p} \tag{187}$$

olur, şek. 201. $u=\pm\infty$ noktası $\gamma_p=\pi$ köşesine tekabül ettiği takdirde



Şek. 201

$$D_p=j\pi A \tag{188}$$

olur.

Yukarıdaki formülleri şöylece çıkarabiliriz. z—düzleminde paralel doğruların arasındaki uzaklık

$$D_p = \int_{z_p'}^{z_p''} dz = z_p'' - z_p'$$

dir. Diğer taraftan bu integrasyon w—düzleminde $w = u_p$ tekil noktası etrafında çizilen küçük bir yarım daire boyunca integrasyona tekabül eder. u_p ye çok yakın olan noktalar için $w - u_r \approx u_p - u_r$ yazılabileceğinden ($r \neq p$) $w - u_p = Re^{j\theta}$ koymak ($dw = jRe^{j\theta} d\theta$) ve integrasyon sınırlarının π ve 0 olduğunu gözönüne almak suretiyle

$$D_p = A \prod_{r \neq p} (u_p - u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}} \int_{\pi}^{0} j d\theta$$

yazılabilir ($\gamma_p = \pi$). İntegral hesaplanırsa (187) formülü elde edilir. dz/dw yi $-j\pi(w-u_p)^{\gamma_p/\pi}$ ile çarpıp $w = u_p$ koyarak ayni sonucun bulunacağı kolayca görülebilir.

(188) formülü de benzer şekilde çıkarılır. w—düzlemindeki integrasyon $u_p = \pm\infty$ noktalarını birleştiren çok büyük yarıçaplı bir daire boyunca yapılır. Sonsuzdaki u_p ye çok yakın noktalar için $w - u_r \approx Re^{j\theta}$ alınabileceğinden ($R \to \infty$)

$$D_p = A \int_0^{\pi} (Re^{j\theta})^{-1} jRe^{j\theta} d\theta = j\pi A$$

bulunur. $\sum_r \gamma_r = 2\pi$ olduğundan ve $(w - u_p)^{-\gamma_p/\pi}$ faktörü integralde bulunmadığından üslerin toplamı -1 dir.

Şayet $\gamma_p \neq \pi$ ise (183) diferansiyel denklemini integre ederek birinci ve ikinci hal için

$$z = A \prod_{r \neq p} (u_p - u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}} \int (Re^{j\theta})^{-\frac{\gamma_p}{\pi}} jRe^{j\theta} d\theta \quad , \qquad (a)$$

$$z=A\int (Re^{j\theta})^{-\left(2-\frac{\gamma_p}{\pi}\right)} jRe^{j\theta}d\theta \qquad (b)$$

yazılabilir. İntegraller hesaplanırsa

$$z=\left[\frac{A}{1-\frac{\gamma_p}{\pi}}R^{1-\frac{\gamma_p}{\pi}}\prod_{r\neq p}(u_p-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}\right]e^{j\left(1-\frac{\gamma_p}{\pi}\right)\theta}+B \quad , \quad (c)$$

$$z=\left[\frac{A}{-\left(1-\frac{\gamma_p}{\pi}\right)}R^{-\left(1-\frac{\gamma_p}{\pi}\right)}\right]e^{-j\left(1-\frac{\gamma_p}{\pi}\right)\theta}+B \qquad (d)$$

bulunur. (*c*) denklemi $-\pi\leqq\gamma_p<\pi$ sınırları arasındaki her hangi bir γ_p açısı için merkezi $z=z_p=B$ de bulunan daireyi gösterir ve $R\to 0$ için daire kaybolur. w−düzleminde θ açısı 0 ile π arasında değişince $z-z_p$ nin argümanı 0 ile $\pi-\gamma_p=\alpha_p$ arasında değişir. $\gamma_p=+\pi$ için (*a*) integrali yardımiyle

$$z=\left[\prod_{r\neq p}(u_p-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}\right]j\,\theta+B \qquad (e)$$

bulunur. Bu ise poligon yönüne z_p den önce ve sonra dik olan bir doğrudur. z_p' de $\theta=\pi$ ve z_p'' de ise $\theta=0$ olduğundan $D_p=z_p''-z_p'$ yardımiyle (187) bulunur.

(*d*) denklemi $-\pi\leqq\gamma_p<\pi$ sınırları arasındaki her hangi bir γ açısı için merkezi $z=z_p=B$ de bulunan bir daireyi gösterir ve $R\to\infty$ için daire kaybolur. w−düzleminde θ açısı π ile 0 arasında değişince $z-z_p$ nin argümanı $-(\pi-\gamma_p)$ ile 0 arasında değişir. $\gamma_p=+\pi$ için (*b*) integrali yardımiyle

$$z=Aj\,\theta+B \qquad (f)$$

bulunur. Bu denklem poligon yönüne z_p den önce ve sonra dik olan bir doğruyu gösterir. Bu sefer z_p' de $\theta=0$ ve z_p'' de ise $\theta=\pi$ olacağından $D_p=z_p''-z_p'$ yardımiyle (188) bulunur.

g) u_r değerlerinden üçü gelişi güzel seçilebildiğinden ve sabitlerin sayısı $n+2$ olduğundan (A,B sabitleri ve n tane u_r değeri) tasvir fonksiyonunu bulmak için $(n+2)-3=n-1$ bağımsız denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler yekdiğerine tekabül eden noktalardan faydalanılarak elde edilir.

41. Schwarz—Christoffel tasvirinin tatbikatı.

Aşağıda çeşitli poligon tipleri için tasvir fonksiyonları ve teknik tatbikatı gözden geçirilmiştir.

1 — Bir açılı poligonlar.

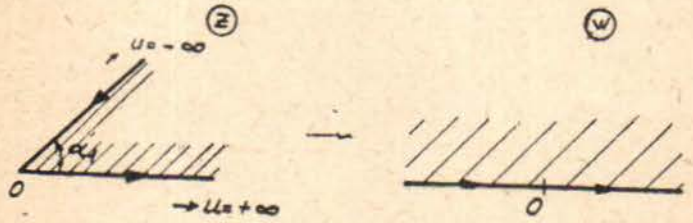
$n=1$ için inteğrasyonla

$$z=\frac{\pi A}{\alpha_1}(w-u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}}+B$$

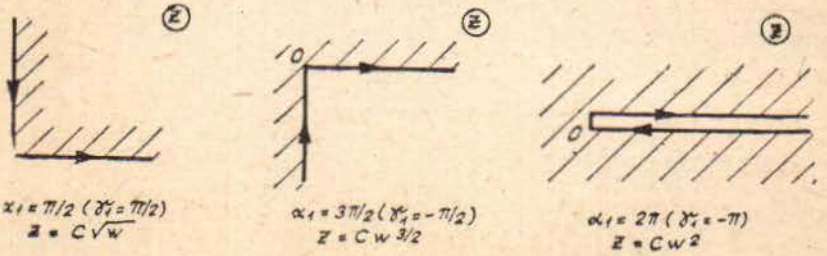
bulunur. $u_1=0$ ve $B=0$ alınırsa

$$z=C w^{\frac{\alpha_1}{\pi}}$$

yazılabilir. $z=0$ noktası $w=0$ noktasına tekabül eder. C nin reel olduğu kabul edilirse z—düzlemindeki sektör w—düzleminin üst yarısına tasvir edilir, şek. 202. Şek. 203 de $\alpha_1=\pi/2,3\pi/2,2\pi$ için poligonlar ve tasvir fonksiyonları görülmektedir.

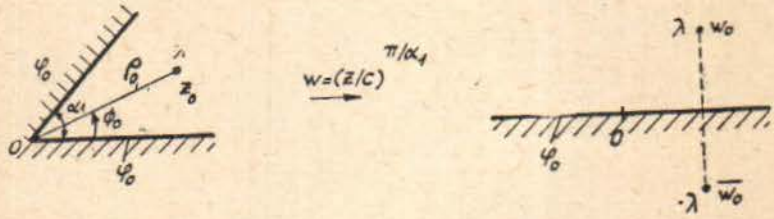


Şek. 202



Şek. 203

Bu tasvir yardımiyle çeşitli potansiyel problemleri kolayca çözülebilir. w—düzlemindeki sonsuz levhanın üniform alanı z—düzlemine transforme edilerek yüklenmiş bir köşenin, bir dirseğin veya bir yarı sonsuz levhanın alanı elde edilebilir. Keza farklı potansiyellerdeki iki yarı sonsuz levhanın alanı da w—düzleminde izleri pozitif ve negatif reel eksenlere intibak eden iki yarı sonsuz levhanın alanını z— düzlemine transforme ederek bulunabilir. Bir köşe veya dirsek ile paralel üniform çizgisel yük problemi de w— düzleminde imaj yardımiyle çözülerek z— düzlemine transforme edilebilir. Örnek olmak üzere şek. 204 de φ_0 potansiyelindeki yarı sonsuz levhalar arasına getirilen paralel çizgisel yük problemini



Şek. 204

çözelim. Sistem $w=(z/C)^{\pi/\alpha_1}$ vasıtasiyle z—düzlemine transforme edilerek problem φ_0 potansiyelindeki sonsuz levha karşısına getirilen çizgisel yük problemine irca edilir. Çizgisel kaynak w—düzleminde $w_0=(z_0/C)^{\pi/\alpha_1}$ noktasındadır. w—düzlemindeki problem imaj yardımiyle çözülerek kompleks potansiyel için

$$P(w)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{w-w_0}{w-\bar{w}_0}+\varphi_0$$

bulunur. z—düzlemindeki kompleks potansiyel ise

$$F(z)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z^{\pi/\alpha_1}-z_0^{\pi/\alpha_1}}{z^{\pi/\alpha_1}-(\bar{z}_0)^{\pi/\alpha_1}}+\varphi_0$$

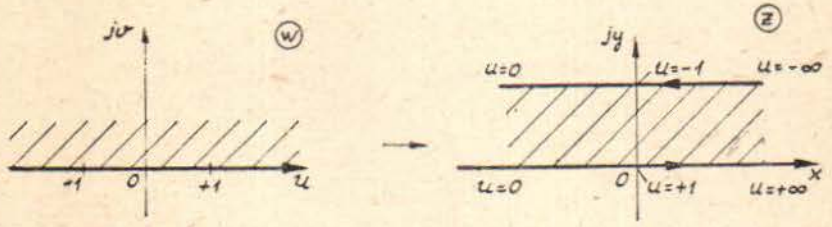
olacaktır. Reel ve imajiner kısımları ayırarak potansiyel ve akı fonksiyonları bulunur.

2— Sıfır açılı poligon.

$\alpha_1=0(\gamma_1=\pi)$ için $u_1=0$ ve $B=0$ alarak

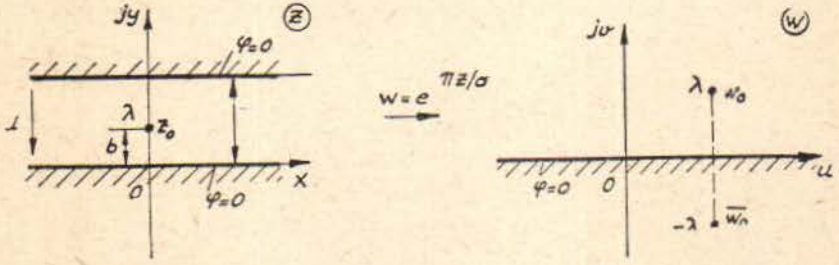
$$z=A\int\frac{dw}{w}=A\ln w$$

bulunur. A nın reel olduğunu kabul edelim. $w=1$ için $z=-\infty$ dır. $w=re^{j\theta}$ koyarak $\theta=0$ için $x=A\ln r$, $y=0$ ve $\theta=\pi$ için $x=A\ln r$, $y=\pi A$ elde edilir. Böylece w—düzlemindeki pozitif reel eksenin z—düzleminin reel eksenine ve negatif reel eksenin $y=\pi A$ olan yatay doğruya tekabül ettiği anlaşılır, şek. 205. w—düzleminin üst yarısı z—düzleminde πA genişliğindeki yatay şeride tasvir edilir.



Şek. 205

Sıfır potansiyelindeki iki paralel levha arasına getirilen çizgisel yük problemi bu tasvir vasıtasiyle kolayca çözülebilir, şek. 206. $a=\pi A$ olduğundan $A=a/\pi$ bulunur. z—düzlemindeki sistem $w=e^{\pi z/a}$ vasıtasıyle



Şek. 206

w—düzlemine transforme edilerek sonsuz levha karşısındaki çizgisel kaynak problemi elde edilir. w—düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{w-w_0}{w-\overline{w_0}}+P_0$$

dır. P_0 ı bulmak için $P(+1)=0$ koyarak $P_0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(-w_0)$ ve

$$P(w)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{w-w_0}{1-w\,w_0}$$

bulunur. Bu ifadede $w=e^{\pi z/a}$ ve $w_0=e^{\pi z_0/a}=e^{j\pi b/a}$ koyarak z–düzlemindeki kompleks potansiyel için

$$P(z)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{e^{\pi z/a}-e^{j\pi b/a}}{1-e^{\pi(z+jb)/a}}$$

bulunur. Hiperbolik fonksiyonlardan faydalanarak

$$P(z)=-j\frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{Th}\frac{\pi z}{2a}\operatorname{ctg}\frac{\pi b}{2a}\right)$$

yazılabilir. Şayet levhalar arasına ayrıca bir U gerilimi tatbik edilirse yukarıdaki kompleks potansiyele bu gerilim tarafından meydana getirilecek olan üniform alanın kompleks potansiyelini eklemek icap eder. Üniform alanın kompleks potansiyeli

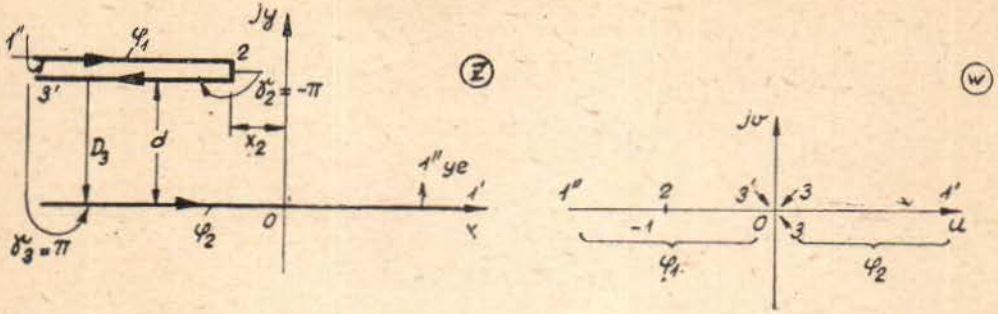
$$P_0(z)=-j\frac{U}{a}z$$

dir.

3 — Paralel kenarlı poligonlar.

Aşağıda paralel levhalardan meydana gelen bazı önemli tertiplerin tasvir fonksiyonları ve tatbikatı gözden geçirilmiştir.

İlk önce sonsuz ve yarı sonsuz iki paralel levhanın tasvir fonksiyonunu bulalım. Tertip şek. 207 de görülmektedir. $n>1$ olduğu vakit tasvir fonksiyonunu araştırırken bir cetvel hazırlamak elverişlidir. $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=0$ seçerek hazırlanan cetvel aşağıda verilmistir. u_r değerlerini seçerken şu hususlar gözönünde tutulmuştur: 1 noktasında $\gamma_1/\pi=2$ en yüksek değer olduğundan $u_1=\pm\infty$ seçerek integrali sadeleştirmek düşünülmüştür. 3 noktasında $\gamma_3=\pi$ dir ve sonsuzda bir köşe



Şek. 207

z—düzlemi	1	2	3
z_r	$1'$ $+\infty$ $1''$ $-\infty+jd$	x_2+jd	$3'$ $-\infty+jd$ $3''$ $-\infty$
γ_r	2π	$-\pi$	π
γ_r/π	2	-1	1
u_r	$1'$ $+\infty$ $1''$ $-\infty$	-1	$3'$ 0 $3''$ 0

vardır. Bu köşe iki eşpotansiyel çizgiyi, yani üstteki ve alttaki levhalara tekabül eden çizgileri, ayırdığından $u_3=0$ seçerek w—düzleminde standart bir problem tipi elde edilmiştir (orijinde ayrılan yarı sonsuz levhalar). 2 dirseği 1 ile 3 arasında bulunduğundan $u_2=-1$ seçilmiştir. Böylece

$$\frac{dz}{dw} = A\frac{w+1}{w}$$

denklemini integre ederek

$$z = A(w + \ln w) + B$$

bulunur. 3 noktası için (187) formülü yardımiyle $D_3=-j\pi$ $A=-jd$ yazarak $A=d/\pi$ elde edilir. 2 noktası için yazılan

$$z_2=x_2+jd=\frac{d}{\pi}\left[-1+\ln(-1)\right]+B$$

denklemi yardımiyle de

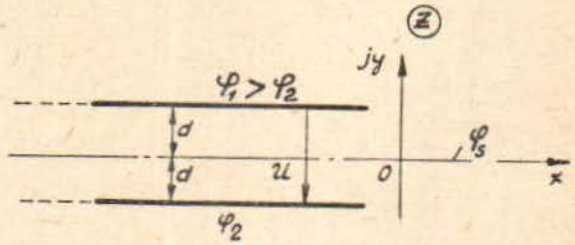
$$B=x_2+\frac{d}{\pi}$$

bulunur. B nin değeri x_2 ye bağlıdır ve $x_2=-d/\pi$ alınırsa $B=0$ olur. Tasvir fonksiyonu

$$z=\frac{d}{\pi}(w+\ln w)$$

şekline girer.

Bu tasvir yardımiyle paralel levhalı kondansatörün kaçak alanını yani kenar tesirini inceleyebiliriz, şek. 208. Kondansatörün iç taraflarında alan üniformdur ve $E_0=U/d$ dir. Kenarlara yaklaşılınca üniformluk bo-



Şek. 208

zularak kenar tesiri kendini gösterir. Kenar tesirini hesaplamak için sistemdeki simetriyi gözönüne alarak yalnız bir levha ile simetri düzlemi arasındaki alanı incelemek kâfidir. Bu sureele şek. 207 deki tip elde edilir. Simetri düzleminin potansiyeli $\varphi_s=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$ dir. $\varphi_1=-\varphi_2=U/2$ alınırsa $\varphi_s=0$ olur.

Üstteki levha w—düzleminde negatif reel eksene ve simetri düzlemi pozitif reel eksene transforme edileceğinden w—düzlemindeki kompleks potansiyel için daha önce görüldüğü gibi

$$P(w)=-\mathrm{j}\frac{U}{2\pi}\ln w$$

yazılabilir. z—düzlemindeki kompleks potansiyeli bulmak için $w=w(z)$ ifadesini çıkarmak gerekir. Fakat ekseriya olduğu gibi burada da w yi z cinsinden ifade edemeyiz. Bununla beraber $z(w)$ yi reel ve imajiner kısımlara ayırarak bulunan

$$x = \frac{d}{\pi}(r\cos\theta + \ln r) \quad , \quad y = \frac{d}{\pi}(\theta + r\sin\theta)$$

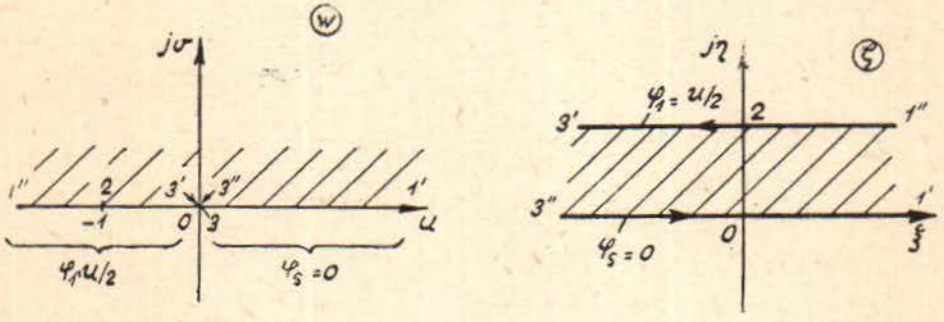
ifadeleri yardımiyle eşpotansiyel çizgileri ve alan çizgilerini çizebiliriz.

$P(w)$ yi Schwarz tasviri yardımiyle bulmak için w—düzleminin üst yarısı $\zeta = \ln w$ yardımiyle ζ—düzleminde π genişliğindeki yatay şeride tasvir edilir, şek. 209. ζ—düzlemindeki paralel levhaların üniform alanı için kompleks potansiyel

$$P(\zeta) = -j\frac{U}{2\pi}\zeta$$

olacaktır Bu ifadede $\zeta = \ln w$ koyarak $P(w)$ denklemi bulunur.

$w = e^{\zeta}$ olduğundan



Şek. 209

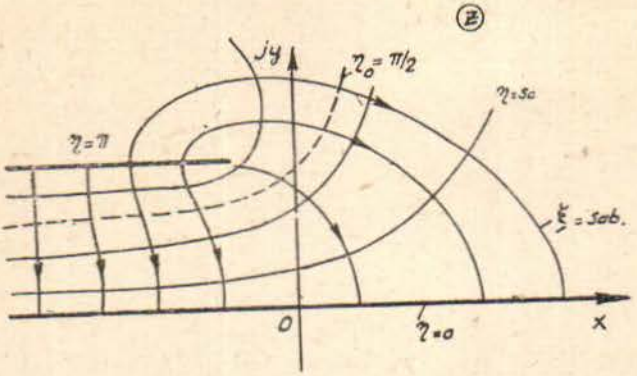
$$z = \frac{d}{\pi}\left(e^{\zeta} + \zeta\right)$$

yazılabilir. Reel ve imajiner kısımlara ayırarak

$$x = \frac{d}{\pi}\left(\xi + e^{\xi}\cos\eta\right) \quad , \quad y = \frac{d}{\pi}\left(\eta + e^{\xi}\sin\eta\right)$$

bulunur. η=sab. için ξ yi $-\infty$ ile $+\infty$ arasında değiştirerek eşpotansiyel çizgileri ve ξ=sab. için η yı sıfırla π arasında değiştirerek alan çizgilerini çizebiliriz, şek. 210.

Kompleks alan şiddeti için



Şek. 210

$$\dot{E} = -\left(\overline{\frac{dP}{dw}} \Big/ \frac{dz}{dw}\right) = -j\frac{E_0}{w+1} = -j\frac{E_0}{1+e^{\zeta}}$$

bulunur. Alan şiddetinin mutlak değeri ise

$$E = \frac{E_0}{|w+1|} = \frac{E_0}{|1+e^{\zeta}|} = \frac{E_0}{\sqrt{1+e^{2\xi}+2e^{\xi}\cos\eta}}$$

dır. Simetri düzleminde $\eta=0$ olduğundan

$$E = \frac{E_0}{1+e^{\xi}}$$

olacaktır. ξ–ekseni simetri düzlemine tekabül ettiğinden kenara doğru yaklaştıkça ξ büyüyecek ve dolayısiyle alan zayıflayacaktır. Üstteki levha için $\eta=\pi$ olduğundan

$$E = \frac{E_0}{1-e^{\xi}}$$

bulunur. 2 dirseğine doğru yaklaşıldığı takdirde ξ negatif değerler alarak küçüleceğinden e^{ξ} terimi gittikçe büyür ve dolayısiyle alan şiddeti yükselir. $\xi=0$ için yani 2 dirseğinde $E\to\infty$ olur. Alanın dirsek civarında çok yüksek değerler alması izolasyon maddelerinin delinme deneyleri için mahzurludur. Bu mahzuru önlemek için düzlem biçimindeki elektrod yerine, uygun bir eşpotansiyel yüzeyle intibak eden bir iletkeni elektrod olarak kullanmak düşünülmüştür. Bu eşpotansiyel yüzey üs-

tündeki noktalarda alan şiddetinin E_0 üniform alanının üstüne çıkmaması gerekir. Şimdi bu eşpotansiyel çizgiyi bulalım. Her hangi bir η=sab. çizgisi üstünde alan şiddeti $\partial E/\partial\xi$ parsiyel türevini sıfır yapan ξ değeri için maksimum olacağından

$$e^{\xi}+\cos\eta=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi ξ ye göre çözerek

$$\xi=\ln(-\cos\eta)$$

bulunur. Negatif sayıların logaritması olmadığından ancak $\eta>\pi/2$ şartını sağlayan eşpotansiyel çizgiler üstünde alan şiddeti maksimum değer alabilecektir. Şek. 210 da $\eta=\eta_0=\pi/2$ sınır çizgisi kesik çizgi ile belirtilmiştir. $\eta=\eta_0$ için

$$E=\frac{E_0}{1+e^{2\xi}}$$

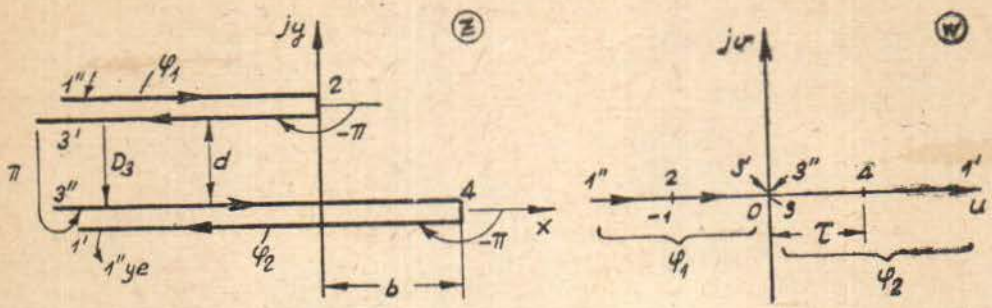
olacağından ξ sabiti $-\infty$ ile $+\infty$ arasında değişince E alanı sıfırla E_0 arasında değişir ve hiç bir noktada E_0 dan yüksek olan bir değere çıkmaz. ξ_0 eşpotansiyel yüzeyine intibak eden elektroda Rogowski elektrodu adı verilir.

Şek. 211 de görülen iki yarı sonsuz paralel levha için $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=0$ seçerek aşağıdaki cetvel hazırlanır.

z—düzlemi	1	2	3	4
z_r	$1'\ -\infty$ $1''\ -\infty+jd$	jd	$3'\ -\infty+jd$ $3''\ -\infty$	b
γ_r	3π	$-\pi$	π	$-\pi$
γ_r/π	3	-1	1	-1
u_r	$1'\ +\infty$ $1''\ -\infty$	-1	$3'\ 0$ $3''\ 0$	τ

4 noktası $3''$ ile $1'$ arasında bulunduğundan $\tau>0$ dır. $4-1'$ yönünü $1''-2$ yönüne getirmek için 3π açısı kadar dönmek gerektiğinden $\gamma_1=3\pi$

alınmıştır. Zira 2π kadar dönme ayni yönü verecektir. w—düzleminde



Şek. 211

yalnız üç nokta seçilebildiğinden 4 noktası için $u_4=\tau$ alınmıştır ve bu değer tayin edilecektir. Tasvir fonksiyonu için

$$\frac{dz}{dw}=A\frac{(w+1)(w-\tau)}{w}$$

yardımiyle

$$z=A\left[\frac{w^2}{2}+(1-\tau)w-\tau\ln w\right]+B$$

bulunur. A,B ve τ yı bulmak için üç denkleme ihtiyaç vardır. Bir denklem 3 noktası için (187) yardımiyle ve diğer iki denklem de yekdiğerine tekabül eden z_2, w_2 ve z_4, w_4 noktalarından faydalanarak yazılır. Böylece

$$D_3=-j\pi A\prod_{r\neq 3}(u_3-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}=j\pi\tau A=-jd\quad,$$

$$z_2=jd=A\left[\frac{1}{2}-(1-\tau)-j\pi\tau\right]+B$$

$$z_4=b=A\left[\frac{\tau^2}{2}+(1-\tau)\tau-\tau\ln\tau\right]+B\quad,$$

$A=-\frac{d}{\pi\tau}$

bulunur. Birinci denklemden $A=-d/\pi\tau$ telde edilir. Bunu son iki denklemde yerine koyarak diğer sabitler bulunur. Son iki denklem yardımiyle τ yı bulmaya yarayan

$$\frac{b}{d}\pi = \ln\tau + \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)$$

denklemi bulunur. Bu denklem ancak grafik veya nümerik bir metod yardımiyle çözülebilir.

Levhaların potansiyelleri φ_1 ve φ_2 ile gösterilirse w—düzlemindeki kompleks potansiyel için

$$P(w) = -\mathrm{j}\,\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\pi}\ln w + \varphi_2$$

bulunur. Kompleks alan şiddeti ise

$$\dot{E} = \mathrm{j}\,\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\,\tau\,\frac{1}{(w+1)(w-\tau)}$$

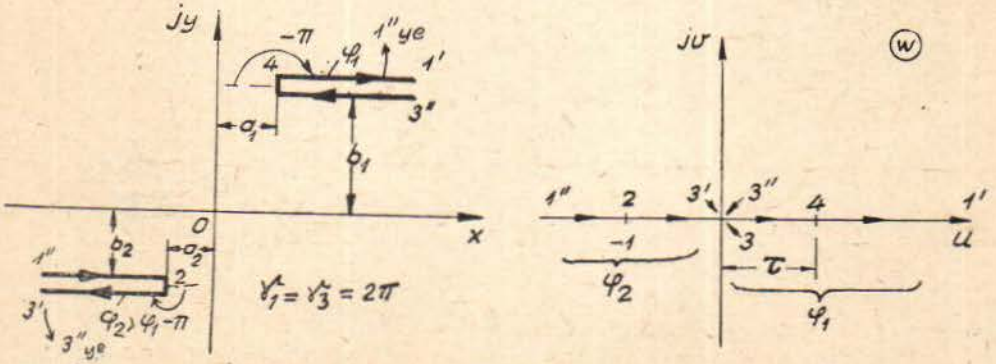
olacaktır. 2 ve 4 dirseklerinde $w_2 = -1$ ye $w_4 = \tau$ olduğundan alan şiddeti sonsuz olur.

Şek. 212 de görülen paralel levhalar için $u_1 = \pm\infty$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$ seçerek yazılan

$$\frac{dz}{dw} = A\,\frac{(w+1)(w-\tau)}{w^2}$$

denklemini integre ederek

$$z = A\left[w + \frac{\tau}{w} + (1-\tau)\ln w\right] + B$$



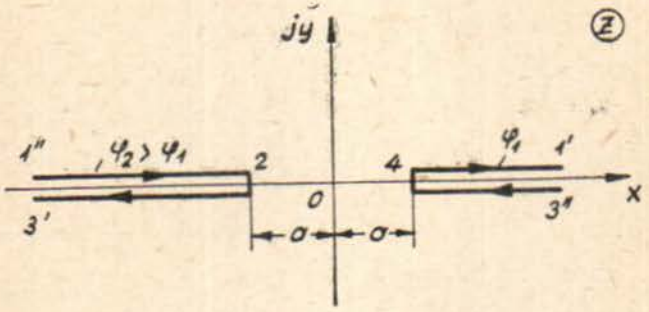
Şek. 212

bulunur. A,B,τ sabitleri 2 ve 4 noktaları için yazılan denklemler yardımiyle hesaplanır.

Şek. 213 de görülen tertip için $a_1=a_2=a$ ve $b_1=b_2=0$ olduğundan hesaplar yapılırsa $A=a/2$, $B=0$, $\tau=1$ bulunur. Tasvir fonksiyonu

$$z=\frac{a}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$$

dir. Levhaların potansiyellerini φ_1 ve φ_2 ile göstererek w—düzleminde-



Şek. 213

ki kompleks potansiyel için

$$P(w)=-\mathrm{j}\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\ln w+\varphi_1$$

bulunur. $z=z(w)$ denkleminden

$$w=\frac{z}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2-1}$$

bulunur. Bu denklemde $z=0$ koyarak $w=\pm\mathrm{j}$ elde edilir. $z=0$ noktasının tasviri w—düzleminin üst yarısında bulunacağından kare kök için $+$ işaretini alarak z— düzlemindeki kompleks potansiyel için

$$P(z)=-\mathrm{j}\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\,\mathrm{Ch}^{-1}\frac{z}{a}+\varphi_1$$

yazılabilir. Bu ifadede $z=\pm a$ koyarak sınır şartlarının sağlandığını ko-

layca görebiliriz. Eşpotansiyel çizgiler ortak odaklı elipslerden ve alan çizgileri ayni odaklı hiperbollerden ibarettir.

Alan şiddetinin mutlak değeri hesaplanırsa

$$E=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\,\frac{1}{|\sqrt{z^2-a^2}|}$$

bulunur. $z=\pm a$ için $E\to\infty$ olur. Alan şiddeti reel eksen boyunca

$$E=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\,\frac{1}{|\sqrt{x^2-a^2}|}$$

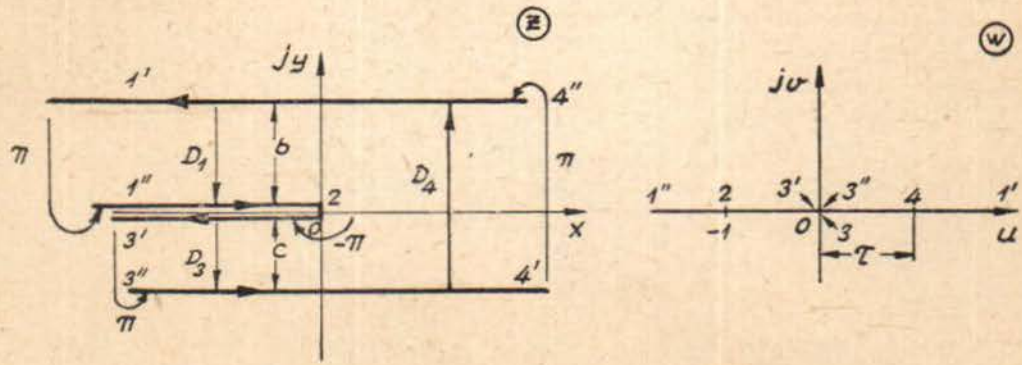
şeklinde değişir ve orijinde $E=U/\pi a$ değerini alır ($U=\varphi_1-\varphi_2$). Bu ise, levhalarının uzaklığı a olan paralel levhalı kondansatörde ayni gerilim altında elde edilen alandan π defa küçüktür.

Şek. 214 de görülen iki sonsuz ve bir yarı sonsuz levha sisteminde $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=0$ seçerek

$$z=\frac{A}{\tau}\ln\frac{(w-\tau)^{\tau+1}}{w}+B$$

bulunur. (187) ve (188) formülleri yardımiyle $D_1=j\pi A=-jb$ ve

$$D_3=-j\pi A\prod_{r\neq 3}(u_3-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}=-\frac{jb}{\tau}=-jc$$



Şek. 214

yazarak $A=-b/\pi$, $\tau=b/c$ bulunur. $D_4=-(D_1+D_3)$ olduğundan 4 noktası için yazılacak denklem bağımsız değildir. B yi bulmak için 2 noktasından faydalanarak

$$B=\mathrm{j}b+\frac{b+c}{\pi}\ln\frac{b+c}{c}$$

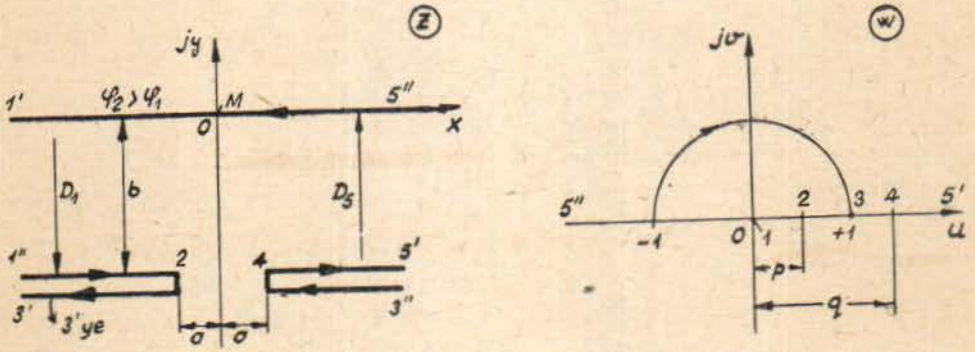
elde edilir. Eğer $b=c$ alınırsa tasvir fonksiyonu

$$w=-\frac{2b}{\pi}\ln\frac{w-1}{w}+\mathrm{j}b+\frac{b}{\pi}\ln 4$$

olur.

Şek. 215 de görülen iki yarı sonsuz ve bir sonsuz levha sisteminde $u_1=0$, $u_3=+1$, $u_5=\pm\infty$ seçerek

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}=A\frac{(w-p)(w-q)}{w(w-1)^2}$$



Şek. 215

diferansiyel denklemi elde edilir. Tasvir fonksiyonunda p ve q gibi iki parametre vardır. $D_1=-\mathrm{j}\pi Apq=-\mathrm{j}b$ ve $D_5=\mathrm{j}\pi A=\mathrm{j}b$ ifadeleri yardımiyle $A=b/\pi$ ve $pq=1$ bulunur. Diferansiyel denklemi integre ederek

$$z=\frac{b}{\pi}\left[\ln w-\frac{2-(p+q)}{w-1}\right]+B$$

bulunur. B, p, q değerleri 2 ve 4 noktaları için yazılan

$$z_2=-(a+\mathrm{j}b)=\frac{b}{\pi}\left[\ln p-\frac{2-(p+q)}{p-1}\right]+B \quad ,$$

$$z_4=a-jb=\frac{b}{\pi}\left[\ln q-\frac{1-(p+q)}{q-1}\right]+B$$

denklemleri yardımiyle hesaplanır. w—düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w)=-j\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\ln w+\varphi_1$$

olduğundan kompleks alan şiddeti için

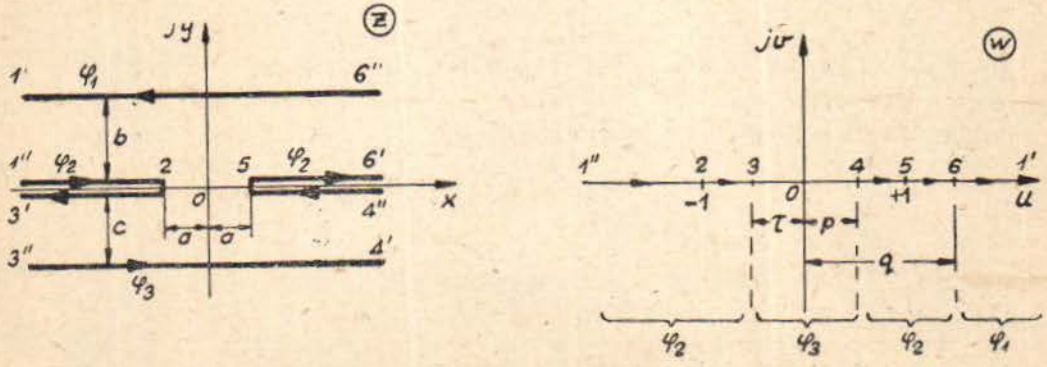
$$\dot{E}=-\left(\frac{dP}{dw}\Big/\frac{dz}{dw}\right)=-j\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{b}\left[\frac{(w-1)^2}{(w-p)(w-q)}\right]$$

bulunur. z—düzlemindeki negatif imajiner eksen w—düzleminde $r=1$ yarıçaplı yarım daireye tasvir edilir. $\dot{E}$ ifadesinde $w=e^{j\theta}$ koyarak simetri ekseni üstündeki değerler elde edilir. Meselâ $\theta=\pi$ için (M noktası) $y=0$ olacağından bu noktada

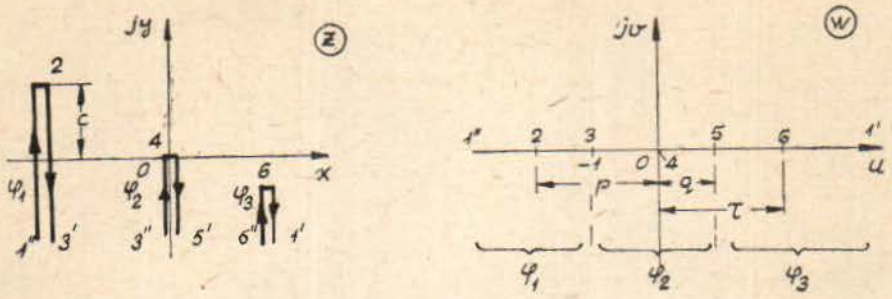
$$E=\frac{4p}{(p+1)^2}E_0$$

dır. $E_0=(\varphi_2-\varphi_1)/b$, aralarındaki uzaklık b olan levhalar arasındaki üniform alandır. Böylece bir paralel levhalı kondansatörde levhalardan birinin iki parçaya ayrılması halinde M noktasında alanın üniform alandan zayıf olacağı anlaşılır.

Şek. 216 ve şek. 217 deki tertiplerin tasvir fonksiyonları da benzer şekilde bulunur. Bu sistemlerde bilinmiyen parametre sayısı üçtür. Şek. 216 da $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_5=+1$ seçerek



Şek. 216



Şek. 217

$$\frac{dz}{dw} = A\frac{w^2-1}{(w+\tau)(w-p)(w-q)}$$

ve şek. 217 de $u_1=\pm\infty$, $u_3=-1$, $u_4=0$ seçerek

$$\frac{dz}{dw} = A\frac{w(w+p)(w-\tau)}{(w+1)(w-q)}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Levhalara çeşitli potansiyeller tatbik ederek w—düzleminde hepsi ayni düzlemde bulunan ($x-z$ düzlemi) çeşitli potansiyelde olan levhalar elde edilir. w—düzleminde kompleks potansiyelin nasıl hesaplanacağı bir az sonra görülecektir.

4—Dik açılı poligonlar.

Şek. 218 de görülen tertipte (sonsuz düzlem karşısında 90° lik dirsek) $u_1=0$, $u_2=+1$, $u_3=\pm\infty$ seçerek yazılan

$$\frac{dz}{dw} = A\frac{\sqrt{w-1}}{w}$$

diferansiyel denklemini integre ederek

$$z = 2A\left(\sqrt{w-1} - \text{arc tg}\sqrt{w-1}\right) + B$$

bulunur. 1 noktası için $D_1=\pi A=a$ olacağından $A=a/\pi$ dir. z_2 ve w_2 nokta çifti yardımiyle de $B=a$ bulunacağından tasvir fonksiyonu

$$z = 2\frac{a}{\pi}\left(\sqrt{w-1} - \text{arc tg}\sqrt{w-1}\right) + a$$

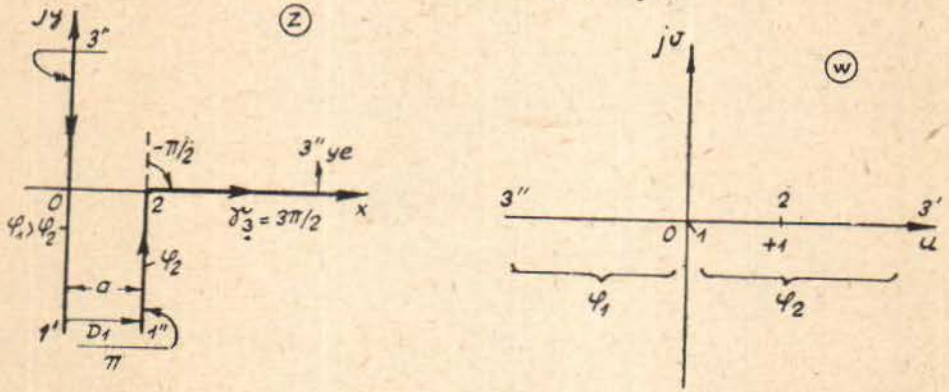
şeklini alır. w —düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w) = -\mathrm{j}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\pi}\ln w + \varphi_2$$

olduğundan

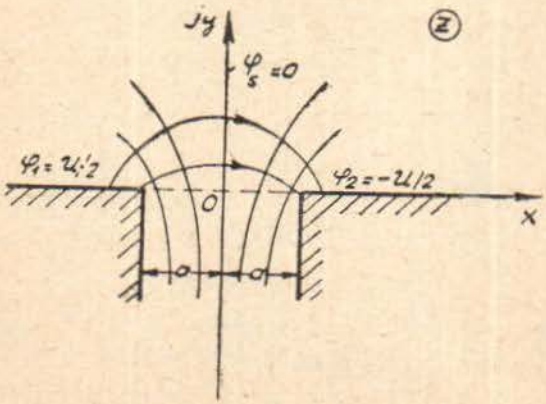
$$E = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-w}}$$

bulunur. $w\to 0$ için yani 1 noktasına yaklaşınca $E=(\varphi_1-\varphi)/a$ bulunacağından iç tarafta alanın üniform olacağı anlaşılır.



Şek. 218

Şek. 219 da simetriden dolayı yalnız simetri düzlemi ile bir dirsek arasındaki alanı inceleyebiliriz. Simetri çizgisi bir alan çizgisidir.



Şek. 219

Şek. 220 de görülen tertip (yarı sonsuz levha karşısındaki dirsek) için $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=0$ seçerek

$$z=A\left(2\sqrt{w+1}+\tau\ln\frac{\sqrt{w+1}+1}{\sqrt{w+1}-1}\right)+B$$

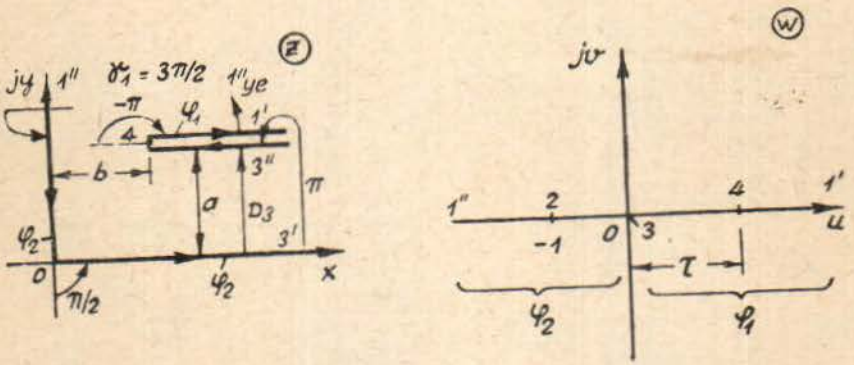
bulunur. 3 noktası için $D_3=j\pi\tau A=ja$ yazarak $A=a/\pi\tau$ ve 2 noktası için $z_2=0$, $w_2=-1$ olduğunu gözönüne alarak $B=ja$ bulunur. Tasvir fonksiyonu

$$z=\frac{a}{\pi}\left(\frac{2}{\tau}\sqrt{w+1}+\ln\frac{\sqrt{w+1}+1}{\sqrt{w+1}-1}\right)+ja$$

dır. 4 noktası için yazılan denklem yardımiyle τ yı bulmaya yarayan

$$\frac{b}{a}\pi=\frac{2}{\tau}\sqrt{\tau+1}+\ln\frac{\sqrt{\tau+1}+1}{\sqrt{\tau+1}-1}$$

denklemi elde edilir.

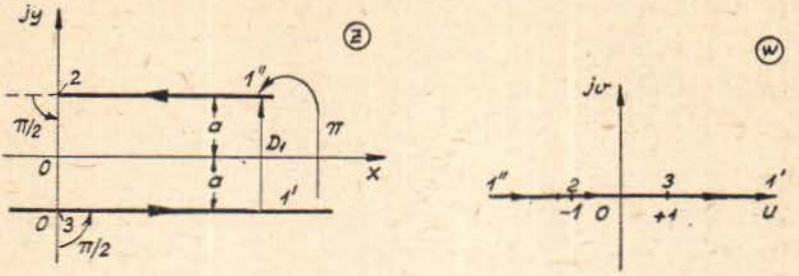


Şek. 220

Şek. 221 de görülen iki dik açılı yatay şerit için $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=+1$ seçerek

$$z=A\,\mathrm{Ch}^{-1}w+B$$

bulunur. 1 noktası yardımiyle $A=2a/\pi$ ve 3 noktası yardımiyle $B=0$ bulunur. $w=\mathrm{Ch}(\pi z/a)$ dır.

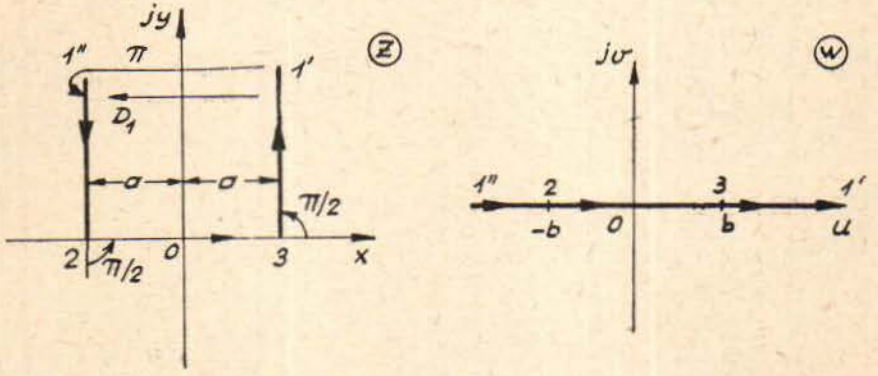


Şek. 221

Şek. 222 deki düşey şerit için $u_1=\pm\infty$. $u_2=-b$, $u_3=b$ seçerek

$$z=jA \arcsin\frac{w}{b}+B$$

bulunur. 1 noktası yardımiyle $A=-j2a/\pi$ ve 2 noktası yardımiyle $B=0$ elde edileceğinden tasvir fonksiyonu

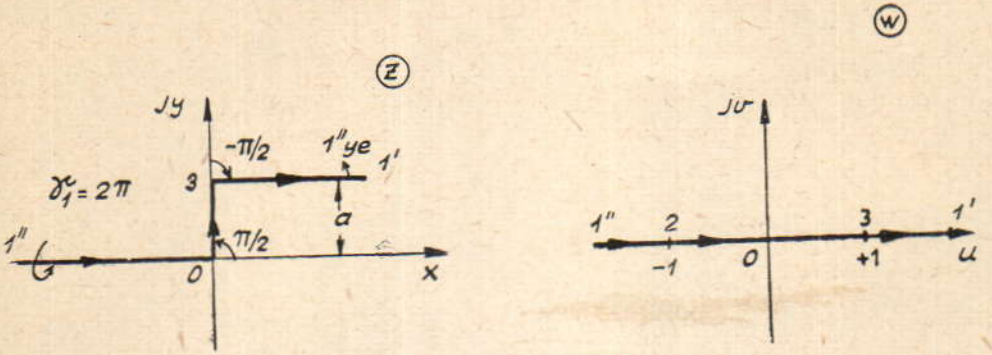


Şek. 222

$$w=b\sin\frac{\pi z}{2a}$$

dır.

Şek. 223 de görülen basamak biçimindeki tertip için $u_1=\pm\infty$, $u_2=-1$, $u_3=+1$ seçerek



Şek. 223

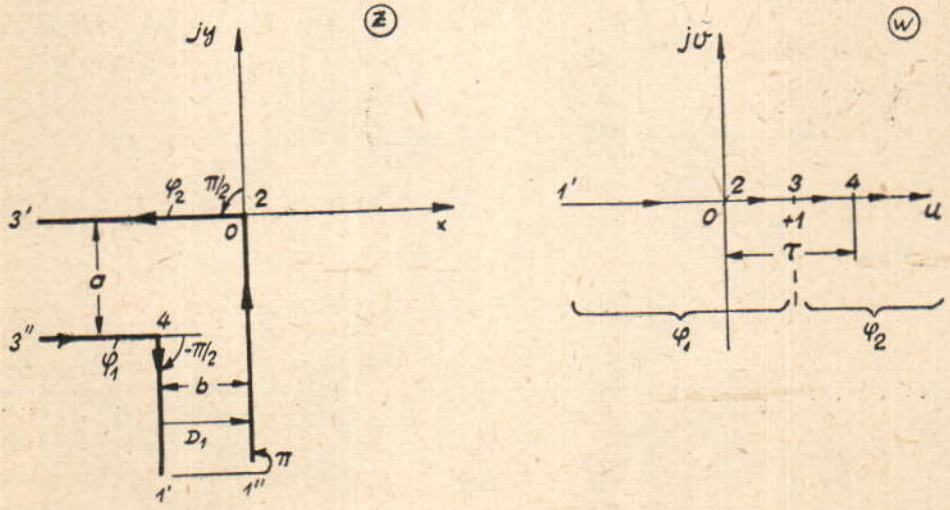
$$z = A(\sqrt{w^2-1} - \mathrm{Ch}^{-1}w) + B$$

bulunur. 2 ve 3 noktaları yardımiyle $A=a/\pi$ ve $B=ja$ elde edilir. Tasvir fonksiyonu

$$z = \frac{a}{\pi}\sqrt{w^2-1} - \mathrm{Ch}^{-1}w) + ja$$

dır.

Şek. 224 deki tertip için $u_1 = \pm\infty$, $u_2 = 0$, $u_3 = +1$ seçerek



Şek. 224

$$z=-2jA\left[\arcsin\sqrt{\frac{w}{\tau}}+\frac{\sqrt{\tau-1}}{2}\ln\frac{\sqrt{\tau-w}+\sqrt{(\tau-1)w}}{\sqrt{\tau-w}-\sqrt{(\tau-1)w}}\right]+B$$

bulunur. 1,2 ve 3 noktaları yardımiyle $A=-jb/\pi$, $B=0$ ve

$$\tau=1+\frac{a^2}{b^2}$$

elde edilir. Tasvir fonksiyonu

$$z=-\frac{2}{\pi}\,b\left(\arcsin\sqrt{\frac{w}{1+\frac{a^2}{b^2}}}+\frac{a}{2b}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}w}+\frac{a}{b}\sqrt{w}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}w}-\frac{a}{b}\sqrt{w}}\right)$$

dir. w—düzlemindeki kompleks potansiyel

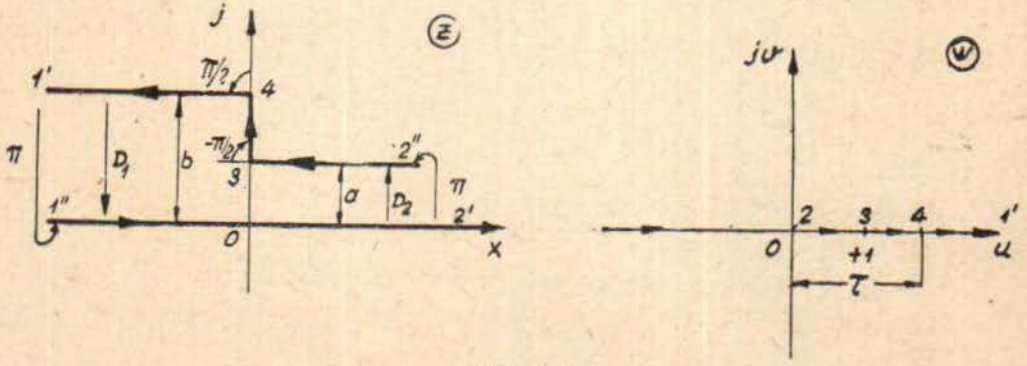
$$P(w)=-j\,\frac{\varphi_1-\varphi_2}{b}\ln(w-1)+\varphi_2$$

olacaktır. Buradan kompleks alan şiddeti için

$$E=-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{b}\left(\sqrt{\frac{w}{w-\tau}}\right)$$

bulunur. 4 noktasında $w=\tau$ olduğundan alan şiddetinin $E\to\infty$ (dirsek) ve 2 noktasında $w=0$ olduğundan $E\to 0$ (köşe) değerini aldığı görülmektedir.

Şek. 225 deki tertip için $u_1=\pm\infty$, $u_2=0$, $u_3=+1$ seçerek



Şek. 225

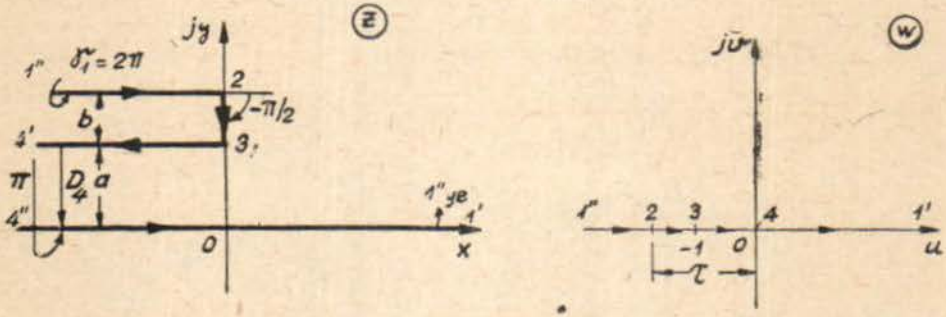
$$z = A\left[\mathrm{Ch}^{-1}\frac{2w-(\tau+1)}{\tau-1} - \frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{Ch}^{-1}\frac{(\tau+1)w-2\tau}{(\tau-1)w}\right] + B$$

bulunur. 1,2 ve 4 noktaları yardımiyle $A=-b/\pi$, $B=jb$ ve $\tau=b^2/a^2$ elde edilir.

Şek. 226 daki tertip için $u_1=\pm\infty$, $u_3=-1$, $u_4=0$ seçerek

$$z = A\left[(\tau+1)\mathrm{Th}^{-1}R+(\tau-1)\frac{R}{1-R^2}+\sqrt{\tau}\,\ln\frac{R-\sqrt{\tau}}{R+\sqrt{\tau}}\right]+B\left(R=\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right)$$

bulunur. 2,3 ve 4 noktaları yardımiyle $A=-b/\pi\sqrt{\tau}$, $B=0$ ve $a+b=a(\tau+1)/2\sqrt{\tau}$ denklemi bulunur. Bu denklemi τ ya göre çözerek



Şek. 226

$\tau=2k^2-1+2k\sqrt{k^2-1}$ elde edilir ($k=1+b/a$). $\tau>1$ olduğundan kare kök için + işareti alınmıştır. Levha kalınlığı ihmal edilemeyen kondansatörde kenar tesirini incelemek için bu tasvirden faydalanılır.

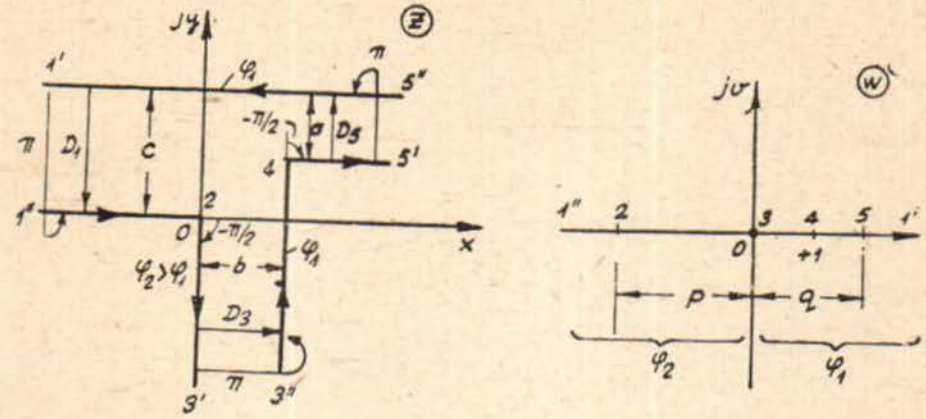
Şek. 227 deki tertip için $u_1=\pm\infty$, $u_3=0$, $u_4=+1$ seçerek

$$\frac{dz}{dw}=A\frac{\sqrt{(w+p)(w-1)}}{w(w-q)}$$

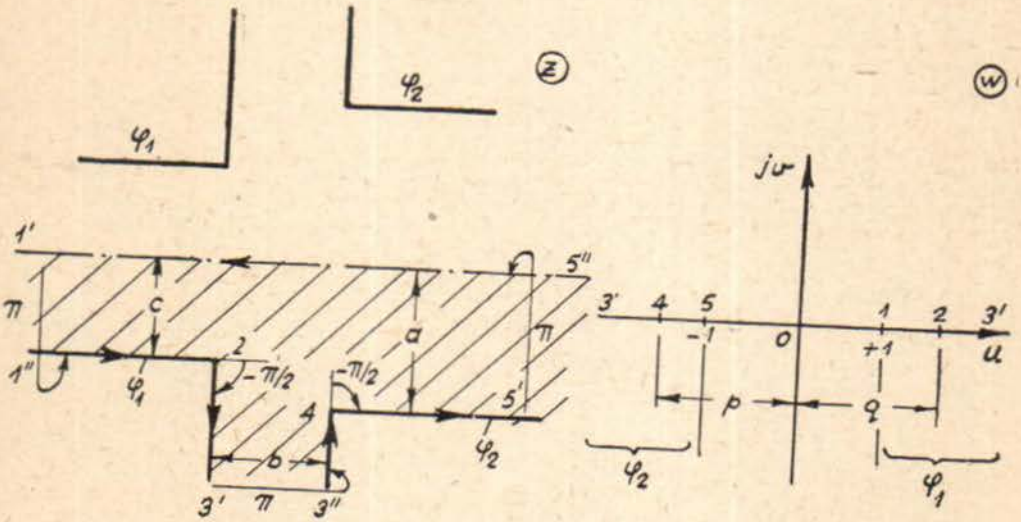
diferansiyel denklemi elde edilir. $\gamma=\pi$ olan üç köşe bulunduğundan integrasyonu yapmadan A,p,q sabitlerini bulabiliriz.

Şek. 228 de simetriyi gözönüne alarak meselâ yalnız alt taraftaki bölgeyi inceleyebiliriz. $u_1=+1$. $u_3=\pm\infty$, $u_5=-1$ seçerek

$$\frac{dz}{dw}=A\frac{\sqrt{(w+p)(w-q)}}{w^2-1}$$



Şek. 227



Şek. 228

diferansiyel denklemi elde edilir. A, p, q değerlerini integrasyon yapmadan bulabiliriz. w—düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w)=-j\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\,\mathrm{Ch}^{-1}w+\varphi_1$$

dir. 5—1 çizgisi (z—düzlemindeki simetri çizgisi) bir alan çizgisidir. Kompleks alan şiddeti

$$\dot{E}=-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{b}\left[\sqrt{\frac{w^2-1}{(w+p)\,(w-q)}}\right]$$

dir. Bu tasvirden elektron optiğinde faydalanılır.

5 — İkiden fazla dik açılı poligonlar (eliptik integraller).

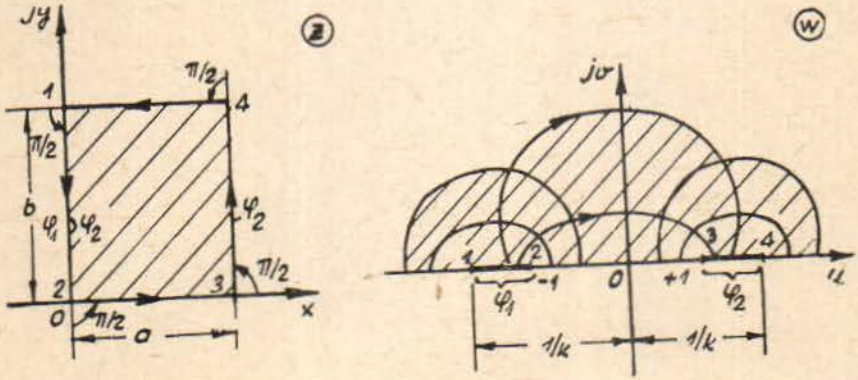
Her dik açı dz/dw ifadesine bir kare kökün girmesine sebep olduğundan w—düzleminin üst yarısını z—düzlemindeki dikdörtgenin içine tasvir eden fonksiyon

$$z=A\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w-u_1)\,(w-u_2)\,(w-u_3)\,(w-u_4)}}+B$$

şeklinde olacaktır. Simetriyi gözönüne alarak $u_1=-1/k$, $u_2=-1$, $u_3=+1$, $u_4=1/k$ alınırsa

$$z=kA\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\,(1-k^2w^2)}}+B$$

elde edilir, şek. 229. İntegral, birinci nevi bir eliptik integraldir. (Legendre standart tipi). Eliptik integral $F(k,w)$ şeklinde gösterildiğinden



Şek. 229

$$z = k\,A\,F\,(k,w) + B$$

bulunur. $F(k,w)$ değerleri reel w değerleri için cetvellenmiştir. $z_3 - z_2 = a$ yazarak $A = a/2kF(k,1)$ bulunur. $F(k,1) = K(k)$, birinci nevi komple eliptik integrali gösterir. $z_3 = kAF(k,1) + B$ yardımiyle $B = a/2$ bulunur. Tasvir fonksiyonu

$$z = \frac{a}{2K(k)}\,F(k,w) + \frac{a}{2}$$

dir. $z_4 - z_3 = jb$ den faydalanarak

$$\frac{a}{2b} = \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} = \frac{K(k)}{K'(k)}$$

yazılabilir. $K(k)$ ve $K'(k)$, k modülünün fonksiyonu olarak hesaplanabileceğinden $K/K' = f(k)$ eğrisini çizerek verilen bir kenar oranı için modülü bulmak kabil olur. $F(k,0) = 0$ olduğundan $w = 0$ için $z = a/2$ bulunur. Üst kenarın ortası $w = \pm\infty$ noktasına tekabül eder. Şayet $B = 0$ alınırsa dikdörtgenin düşey kenarları $z = \pm a/2$ noktalarında bulunur. Eliptik integralin hesabı için literatüre müracaat tavsiye edilir.

z—düzleminde düşey kenarlar arasındaki üniform alanın kompleks potansiyeli

$$P(z) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a}\,z + \varphi_1$$

dir. Yatay kenarlar alan çizgilerini gösterir. w—düzlemindeki şeritlerin kompleks potansiyeli ise

$$P(w) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2K(k)}\,F(k,w) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

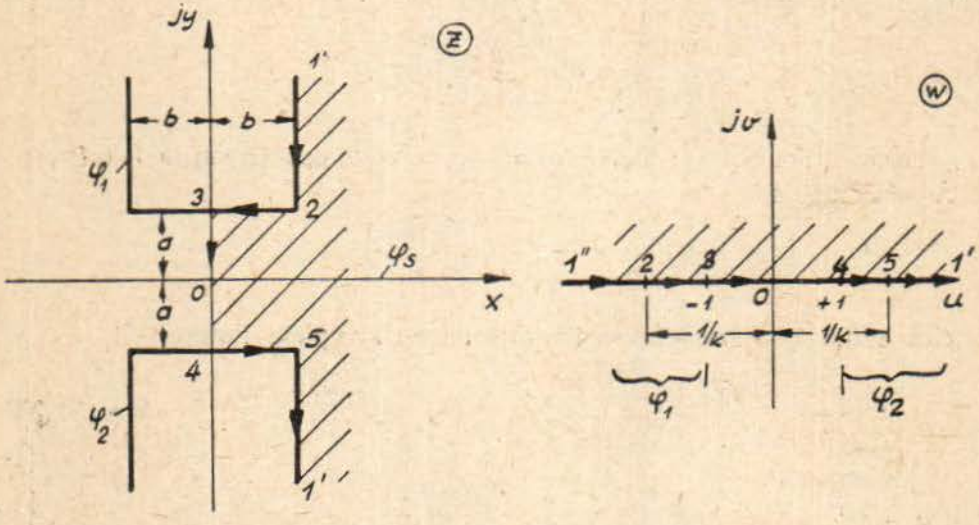
olacaktır. Çizgilerin rolleri değiştirilirse w—düzleminde ayni potansiyelde tutulan iki yarı sonsuz levha arasındaki şeridin alanı elde edilir. z—düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(z) = -j\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{b}\,z + \varphi_1$$

dir.

Dikdörtgenin sınırı boyunca her hangi bir potansiyel dağılışında problemi çözmek için dikdörtgen yukarıdaki fonksiyon vasıtasiyle w—düzleminin üst yarısına tasvir edilir. Şayet w—düzlemindeki problem bilinen standart tiplerden birine uyuyorsa çözüm kolayca bulunur. Eğer w—düzlemindeki problem standart tiplere uymuyorsa bunu sağlamak için yeni bir tasvir veya gerekirse tasvirler yapılır. Şüphesiz z—düzlemindeki her hangi bir problemi arka arkaya yapılan tasvirlerle bir üniform alana kadar götürmek kabildir.

Şek. 230 daki sistemde, simetriyi gözönüne alarak yalnız sağdaki bölgeyi inceleyebiliriz. Tasvir fonksiyonu



Şek. 230

$$z = \frac{A}{k} \int_0^w \frac{\sqrt{1-k^2w^2}}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{A}{k} E(k,w) + B$$

şeklindedir. $E(k,w)$, ikinci nevi standart eliptik integrali (Legendre tipi) göstermektedir. A,B ve k değerleri yukarıdakine benzer şekilde bulunur. Simetri düzleminin potansiyeli $\varphi_s=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ dir. w - düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w) = -j \frac{\varphi_1-\varphi_2}{\pi} \mathrm{Ch}^{-1}w + \varphi_2$$

standart tipidir.

Şek. 231 deki sistemde, simetriyi gözönüne alarak, meselâ yalnız soldaki bölgeyi incelersek daha önce şek. 224 deki tertip için bulunan tasvir fonksiyonunu elde ederiz. Ancak burada simetri çizgisinin bir alan çizgisi olmasına karşılık şek. 224 de bu çizgi bir eşpotansiyel çizgidir. w—düzlemindeki kompleks potansiyeli bulmak için bu düzlemin üst yarısını ζ—düzlemindeki düşey şeride tasvir edelim. Diferansiyel denklem

$$\frac{d\zeta}{dw} = A\frac{1}{\sqrt{w}(w-1)}$$

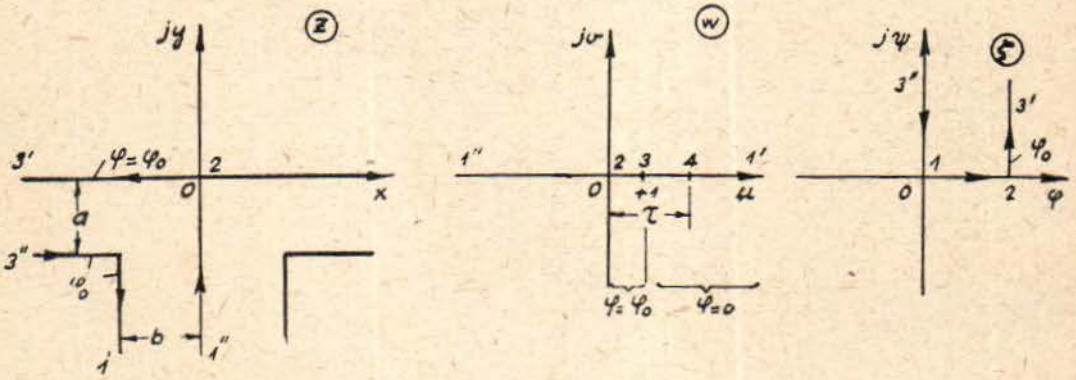
şeklinde olacağından tasvir fonksiyonu için

$$\zeta = A \ln \frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1} + B$$

buluruz. 3 noktası yardımiyle $A = -j\varphi_0/\pi$ ve 2 noktası yardımiyle $B=0$ bulunacağından

$$z = -j\frac{\varphi_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}$$

elde edilir. ζ—düzlemindeki üniform alanın kompleks potansiyeli



Şek. 231

$$P(\zeta) = \zeta = \varphi + j\psi$$

dir ($\xi=\varphi$, $\eta=\psi$). $\zeta=\zeta(w)$ yardımiyle

$$\frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1} = e^{j\pi\zeta/\varphi_0}, \quad \sqrt{w} = \frac{1+e^{j\pi\zeta/\varphi_0}}{1-e^{j\pi\zeta/\varphi_0}}$$

yazılabileceğinden bunları $z(w)$ fonksiyonunda yerine koyarak eşpotansiyel çizgiler (φ=sab.) ve alan çizgileri (ψ=sab.) çizilebilir.

Alan şiddetinin mutlak değeri için $E\zeta=1$ olduğunu gözönüne alarak yazılan

$$E=\left|\frac{d\zeta/dw}{dz/dw}\right|$$

yardımiyle

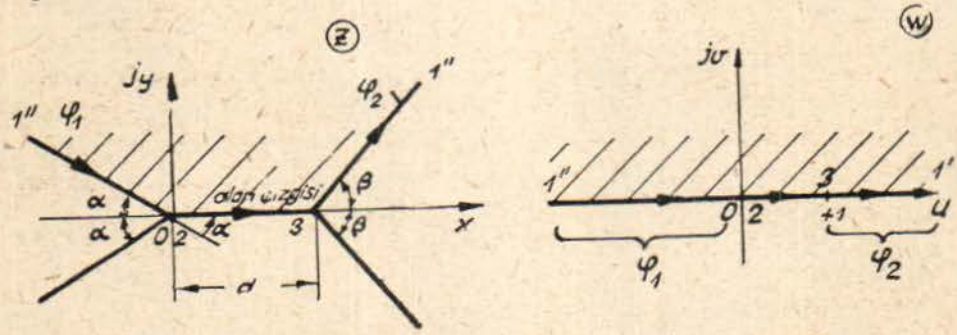
$$E=\frac{\varphi_0}{b}\left|\frac{1}{\sqrt{w-\tau}}\right|$$

bulunur.

Dik açı sayısı dördü geçtiği takdirde hipereliptik integraller ile karşılaşılır.

6 — π ve $\pi/2$ den farklı açılı poligonlar.

Şek. 232 de keskin kenarlı iki elektrod görülmektedir. Simetriyi gözönüne alarak yalnız üstteki bölgeyi gözden geçirelim. z—düzleminde sınır eğrisinin 2 ile 3 arasındaki kısmı bir alan çizgisidir. $u_1=\pm\infty$, $u_2=0$, $u_3=+1$ seçerek yazılan



Şek. 232

$$\frac{dz}{dw}=Aw^{-\frac{\alpha}{\pi}}(w-1)^{-\frac{\beta}{\pi}}$$

denklemini integre ederek

$$z=A\int w^{-\frac{\alpha}{\pi}}(w-1)^{-\frac{\beta}{\pi}}\,dw+B$$

bulunur. Bu integral, ikinci nevi Euler integralidir (Beta fonksiyonu). A sabiti

$$d=z(1)-z(0)=A\int_0^1 w^{-\frac{\alpha}{\pi}}(w-1)^{-\frac{\beta}{\pi}}dw$$

belirli integrali yardımiyle hesaplanabilir. Bu integral Gamma fonksiyonu yardımiyle ifade edilebileceğinden

$$A=d\frac{\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{\pi}\right)}$$

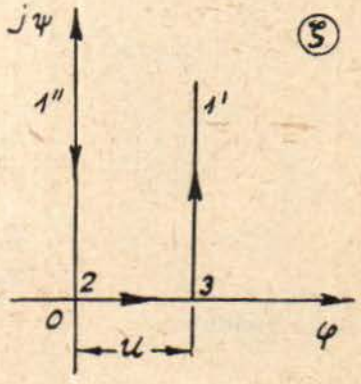
elde edilir.

w—düzlemindeki kompleks potansiyeli daha önce şek. 213 deki tertip için bulunan standart tipe irca edebiliriz. İmajiner ekseni 1/2 kadar kaydırmak ve a yerine 1/2 almak suretiyle

$$P(w)=-j\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\pi}\,\mathrm{Ch}^{-1}(2w-1)+\varphi_2$$

bulunur.

w—düzlemindeki kompleks potansiyeli Schwarz tasvirinden faydalanarak da bulabiliriz. w—düzlemindeki problem karışık (3. nevi) bir sınır değeri problemidir. Zira 2—3 çizgisi bir alan çizgisidir ve bu çizgi boyunca sınır şartı $\partial\varphi/\partial n=0$ dır (alan çizgisi boyunca alan şiddetinin normal bileşeni sıfırdır). w—düzleminin üst yarısını ζ—düzlemindeki düşey şeride transforme ederek problem paralel levhalar arasındaki üniform alan problemine irca edilir, şek. 233. Elektrodlar arasındaki gerilimi U ile gösterelim. w—düzleminde $u_1=\pm\infty$, $u_2=0$, $u_3=+1$ olduğundan



Şek. 233

$$\frac{d\zeta}{dw}=A\frac{1}{\sqrt{w}\sqrt{w-1}}$$

denklemini integre ederek

$$\zeta=2A\arcsin\sqrt{w}+B$$

bulunur. $\zeta(1)=U$ ve $\zeta(0)=0$ şartları yardımiyle $A=U/\pi$ ve $B=0$ bulunacağından

$$\zeta=\frac{2U}{\pi}\ \text{arc sin}\ \sqrt{w}$$

yazılabilir. w—düzlemindeki kompleks potansiyel

$$P(w)=\zeta(w)=\frac{2U}{\pi}\ \text{arc sin}\ \sqrt{w}$$

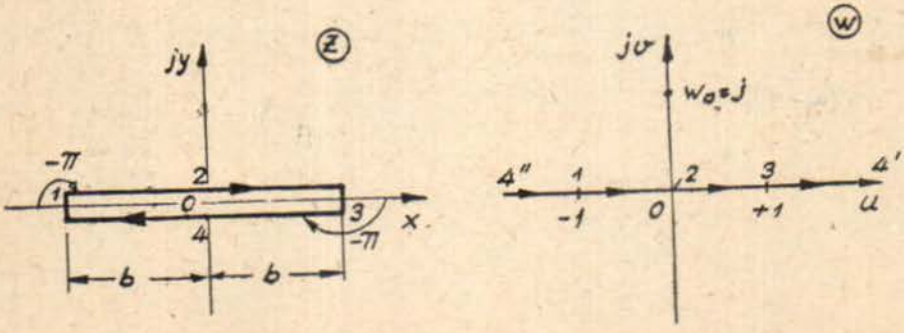
dir. $\alpha=\pi/2$ için sonsuz levha karşısındaki keskin kenarlı elektrod sisteminin alanı elde edilir.

7 — Poligon dışının tasviri.

Poligon dışındaki bölgeyi w-düzleminin üst yarısına tasvir etmek için poligon yönünü değiştirmek lâzımdır. Tasvir fonksiyonu

$$z=A\int\prod_{r=1}^{n}(w-u_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}}\frac{dw}{(w-w_0)^2(w-\bar{w}_0)^2}+B \qquad (189)$$

dir. w_0, $z=\infty$ noktasının tasvirini göstermektedir ve istendiği gibi seçilebilir (üst yarı düzlemde). Kapalı bir poligonda dış açıların toplamı $(n+2)\pi$ olduğundan γ_r açılarının toplamı -2π olur. Poligon dışının tasvirine örnek olarak ince yarık için tasvir fonksiyonunu bulalım, şek. 234. $w_0=j$ seçerek (189) yardımiyle



Şek. 234

$$z=A\int(w^2-1)\frac{dw}{(w^2+1)^2}+B=-A\frac{w}{1+w^2}+B$$

bulunur. 1 ve 3 noktaları yardımiyle $A=-2b$, $B=0$ bulunacağından

$$z=\frac{2bw}{1+w^2}$$

elde edilir. Sonsuz ince yarığın, birim uzunlukta λ yükünü taşıyan ince bir şerit olduğu farzedilirse, alan çizgileri sonsuzda son bulacağından burada $-\lambda$ yükünün bulunduğunu kabul etmek gerekir. Diğer taraftan $z=\infty$ noktası $w_0=j$ noktasına transforme edildiğinden bu noktadaki yük $-\lambda$ olacaktır. Böylece imaj yardımiyle w—düzlemindeki kompleks potansiyel için

$$P(w)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{w-j}{w+j}+\varphi_0$$

bulunur. φ_0, şeridin potansiyelini göstermektedir. Kompleks alan şiddeti ise

$$\dot{E}=-\left(\frac{dP}{dw}/\frac{dz}{dw}\right)=j\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon b}\left(\frac{1+w^2}{1-w^2}\right)$$

olacaktır. $w=\pm1$ için, yani 1 ve 3 noktalarında $E\to\infty$ olduğu görülmektedir. $w=u$ koyarak şerit üstündeki alan değerleri hesaplanabilir.

8— Yuvarlak köşeli veya dirsekli poligonlar.

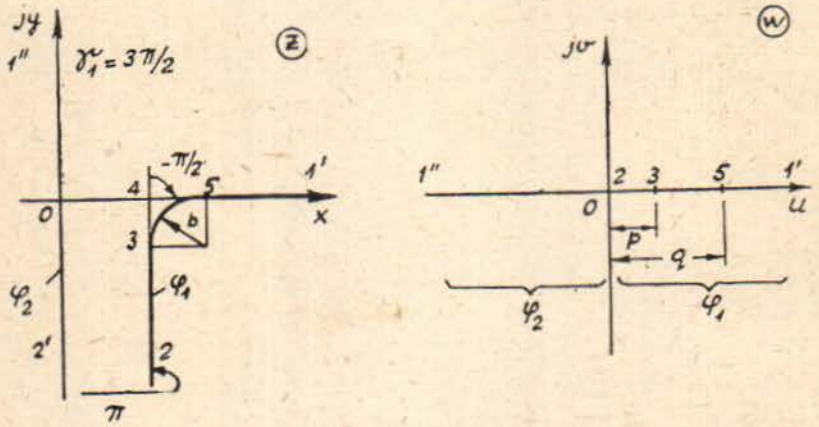
Şek. 235 de keskin olmayan bir köşe görülmektedir. Böyle bir köşe (veya dirsek) için Schwarz formülünde $(w-u_r)^{-\gamma_r/\pi}$ faktörü yerine $[(w-p)^{-\gamma_r/\pi}+\lambda(w-q)^{-\gamma_r/\pi}]$ alınır. Bu faktör kullanılınca A dan B ye

Şek. 235

doğru ilerlerken yön değişiminin γ_r açısı kadar olacağı kolayca gösterilebilir. Ancak bu degişmenin $(w-u_r)^{-\gamma_r/\pi}$ faktöründe birdenbire olması-

na karşılık yeni faktörde değişme tedricidir. Bu faktörün kullanılmasiyle keskin köşe veya direseğin yerini bir eğri almış olur. Bu eğrinin şekli $\lambda(<1)$ parametresini uygun bir şekilde seçerek daire yayına yaklaştırılabilir.

Örnek olarak şek. 236 daki tertibi inceleyelim. $u_1=\pm\infty$ ve $u_2=0$ seçerek yazılan



Şek. 336

$$\frac{dz}{dw}=A\frac{\sqrt{w-p}+\lambda\sqrt{w-q}}{w}$$

diferansiyel denklemini integre ederek

$$z=2A\left[\sqrt{w-p}-\sqrt{p}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{w-p}{p}}+\lambda\left(\sqrt{w-q}-\sqrt{q}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{w-q}{q}}\right)\right]+B$$

bulunur. 2 noktası yardımiyle

$$A=\frac{a}{\pi(\sqrt{p}+\lambda\sqrt{q})}$$

elde edilir. 3 ve 5 noktalarından faydalanarak $(04=a)$

$$a-jb=2j\lambda A(\sqrt{q-p}-\sqrt{q}\,\mathrm{Th}^{-1}\sqrt{\frac{q-p}{q}}+B\quad,$$

$$a+b=2A(\sqrt{q-p}-\sqrt{p}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{q-p}{p}}+B$$

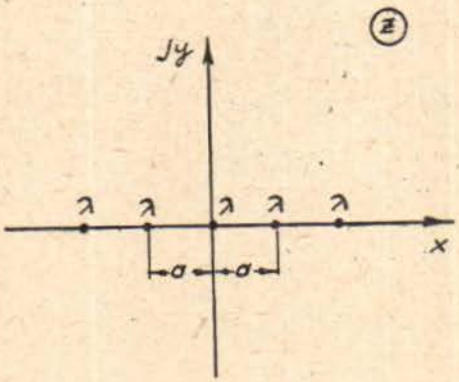
elde edilir. A reel olduğundan bu denklemlerden $B=a$ bulunur. p,q ve λ yı bulmak için ya u—ekseni üstünde üçüncü bir nokta daha seçilebilir veya λ parametresine 0 ile 1 arasında bir değer vererek p ve q değerleri hesaplanır. 3—5 eğrisini daire yayına yaklaştıracak λ değerinin bulunması güç olduğundan meselâ $p+1=q$ alarak yukarıdaki denklemlerden p ve λ değerleri hesaplanır. Bu suretle elde edilecek olan tasvir fonksiyonunun vereceği eğri tam bir daire yayı olmıyacaktır. Daha iyi bir sonuç λ değerlerini deneyerek bulunabilir.

w—düzleminde logaritmik kompleks potansiyel yardımiyle alan şiddetinin mutlak değeri için

$$E=E_0\left|\frac{\sqrt{p}+\lambda\sqrt{q}}{\sqrt{w-p}+\lambda\sqrt{w-q}}\right|$$

bulunur. $E_0=(\varphi_2-\varphi_1)/a$, $w=0$ için yani iç bölgede elde edilen üniform alanı göstermektedir.

İkinci bir örnek olarak paralel çubuklardan meydana gelen bir kafesin alanını inceliyelim. İlk önce çapları, aralarındaki uzaklığa nazaran küçük olan ince teller için alanın nasıl hesaplanacağını görelim. Şek. 237 de görülen ve eşit aralıklı, eşit yüklü sonsuz sayıda telden teşekkül eden kafesin alanı



Şek. 237

$$w=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(2\sin\frac{\pi z}{a}\right)$$

kompleks potansiyeli yardımiyle elde edilebilir. Bu ifadenin reel kısmı

$$u = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln 2 \sqrt{\mathrm{Ch}^2 \frac{\pi}{a} y - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}$$

dir. Büyük y değerlei için $\mathrm{Ch} \frac{\pi}{a} y \approx \frac{1}{2} e^{\pi y/a}$ alınabileceğinden, ikinci terimi ihmal ederek, $u = -\lambda y/2\varepsilon a$ bulunur. u ya potansiyel gözüyle bakılırsa bu ifade imajiner eksen doğrultusundaki üniform alanın potansiyelini gösterir. Böylece yukarıdaki kompleks potansiyelle elde edilen alanın reel eksenden uzak olan noktalarda üniform hale geleceği anlaşılır. Buna karşılık çok küçük x ve y değerleri için

$$\mathrm{Ch} \frac{\pi}{a} y \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a} y\right)^2, \quad \cos \frac{\pi}{a} x \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a} x\right)^2$$

alınabileceğinden

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2\pi}{a} \rho \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

elde edilir. Bu ise, orijin civarındaki alanın bir çizgisel kaynağın alanına idantik olduğunu gösterir. Potansiyel değerleri x yerine $x + ka$ ($k = 0,1,2,...$) almakla değişmiyeceğinden alanın reel eksen boyunca periyodik olduğu anlaşılır. Periyod teller arasındaki a uzaklığıdır.

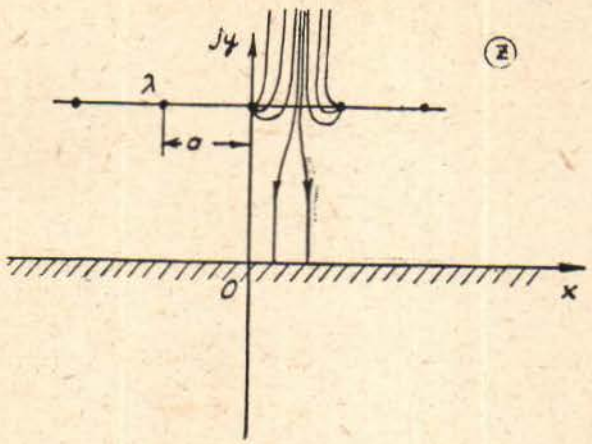
Şek. 238 de görülen sistemde sıfır potansiyelindeki kafes ve iletken düzlem üniform bir alan içindedir. Toprağın varlığını imaj yükleri ile hesaba katarak potansiyel için

$$\varphi = E_0 y - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\mathrm{Ch}^2 \frac{\pi}{a}(y-h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}{\mathrm{Ch}^2 \frac{\pi}{a}(y+h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}$$

elde edilir. $y = 0$ için $\varphi = 0$ olacağı görülmektedir. Tellerin d çapları a ve h uzaklıkları yanında çok küçük olduğu takdirde kafesin potansiyeli için

$$\varphi_k = E_0 h - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\pi d/2a}{\mathrm{Sh} \frac{2\pi h}{a}}$$

yazılabilir. Kafes topraklanmış olduğundan $\varphi_k = 0$ yazarak tesirle meydana gelen yük yoğunluğu için



Şek. 238

$$\lambda = -\frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\left(\frac{\pi d}{2a}/\mathrm{Sh}\frac{2\pi h}{a}\right)} E_0$$

elde edilir. Potansiyel ifadesinde bunu yerine koyarak

$$\varphi = E_0\left[y + \frac{h}{2\ln\frac{\pi d/2a}{\mathrm{Sh}\frac{2\pi h}{a}}} \ln\frac{\mathrm{Ch}^2\frac{\pi}{a}(y-h) - \cos^2\frac{\pi}{a}x}{\mathrm{Ch}^2\frac{\pi}{a}(y+h) - \cos^2\frac{\pi}{a}x}\right]$$

bulunur. Şek. 238 de $k=0$ için alan çizgileri görülmektedir. Potansiyel $x = \frac{a}{2} + ka$ çizgisi boyunca

$$\varphi = E_0\left[y - h\frac{\ln\frac{\mathrm{Ch}\frac{\pi}{a}(y-h)}{\mathrm{Ch}\frac{\pi}{a}(y+h)}}{\ln\left(\frac{2a}{\pi d}\,\mathrm{Sh}\,\frac{2\pi h}{a}\right)}\right]$$

şeklinde değişir. Buradan alan şiddetinin mutlak değeri için

$$|E|=E_0\left[1+\frac{\pi h}{a}\,\frac{\operatorname{Th}\frac{\pi}{a}(y-h)-\operatorname{Th}\frac{\pi}{a}(y+h)}{\ln\left(\frac{2a}{\pi d}\operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{a}\right)}\right]$$

bulunur. $y=0$ için, yani iletken düzlem üstünde alan

$$|E_1|=E_0\left[1-\frac{\pi h}{a}\,\frac{2\operatorname{Th}\frac{\pi h}{a}}{\ln\left(\frac{2a}{\pi d}\operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{a}\right)}\right]$$

minimum değerini alır. $y=h$ için

$$|E_2|=E_0\left[1-\frac{\pi h}{a}\,\frac{\operatorname{Th}\frac{2\pi h}{a}}{\ln\left(\frac{2a}{\pi d}\operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{a}\right)}\right]$$

elde edilir. Bu ifadelerin karşılaştırılmasından $|E_2|$ nin $|E_1|$ den büyük olduğu görülür. Şayet $h\gg a$ ise

$$\operatorname{Th}\frac{\pi h}{a}\approx 1\ ,\qquad \operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{a}\approx\frac{1}{2}\,e^{\frac{2\pi h}{a}}$$

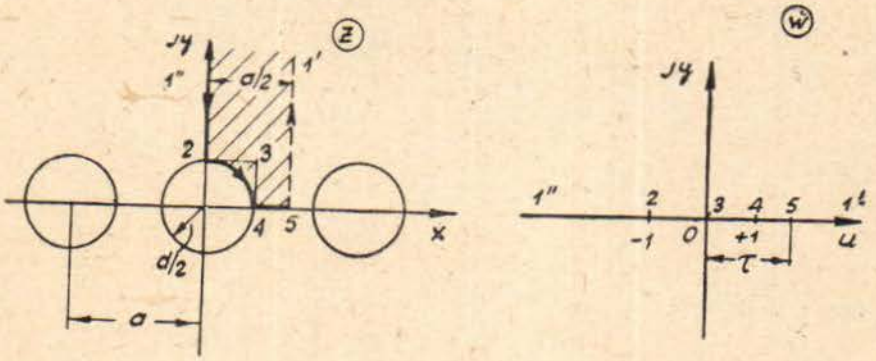
koyarak

$$|E_1|\approx\frac{E_0}{2}\left(1+\frac{a}{2\pi h}\ln\frac{a}{\pi d}\right),\quad |E_2|\approx\frac{a\,E_0}{2\pi h}\ln\frac{a}{\pi d}$$

yazılabilir. Bu suretle kafesin ekran rolünü oynayarak alttaki bölgeyi dış alanın tesirinden koruduğu anlaşılır. Pratikte iletken düzlem meselâ bir duvardır. Son formüllerin incelenmesinden teller arasındaki uzaklık tel yüksekliğinden ne kadar küçük seçilirse, yani kafes ne kadar sık yapılırsa alt taraftaki alanın o kadar zayıf olacağı ve kafes seviyesindeki alanın $E_0/2$ değerine yaklaşarak $a=\pi d$ için bu değeri alacağı anlaşılır.

Yukarıdaki hesaplar ancak tel çapı a ve h ya nazaran küçük olduğu zaman yapılabildiğinden bulunan sonuçlar kalın çubuklardan teşekkül eden bir kafes için kullanılamaz. Şimdi çubuklardan teşekkül eden kafesin kompleks potansiyelini Schwarz formülü yardımiyle bulalım.

Şek. 239 da reel eksen boyunca yerleştirilen çubuklar görülmektedir. Simetriden dolayı yalnız taranmış bölgeyi incelemek yetecektir. $p=-1$, $q=+1$ seçilirse



Şek. 239

$$\frac{dz}{dw} = A\frac{\sqrt{w+1}+\lambda\sqrt{w-1}}{\sqrt{(w^2-1)\,(w-\tau)}}$$

diferansiyel denklemi elde edllir. w—düzlemindeki $R\to\infty$ yarıçapı yarım daire boyunca integrasyon yapılırsa $A=ja/2\pi(1+\lambda)$ bulunur. Diferansiyel denklemi integre ederek

$$z = 2A\left(\mathrm{Th}^{-1}\sqrt{\frac{w-1}{w-\tau}} + \mathrm{Th}^{-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-\tau}}\right) + B$$

elde edilir. 2 ve 4 noktaları yardımiyle

$$j\frac{d}{2} = 2A\ \mathrm{Th}^{-1}\sqrt{\frac{2}{1+\tau}} + B,$$

$$\frac{d}{2} = 2A\ \mathrm{Th}^{-1}\sqrt{\frac{2}{1-\tau}} + B$$

yazılabilir. Buradan $B=0$ bulunur. İki denklem arasında τ yı elimine ederek

$$\mathrm{Cth}\ \frac{\pi d(1+\lambda)}{2a\lambda} = \mathrm{csc}\ \frac{\pi d(1+\lambda)}{2a}$$

bulunur. csc/Cth oranını λ ya bağlı olarak çizip oranın 1 değerine tekabül eden λ yı grafikle bulmak kabildir. λ bulunduktan sonra τ parametresi

$$\tau = \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi d(1+\lambda)}{2a\lambda} + \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi d(1+\lambda)}{2a}$$

denklemi yardımiyle hesaplanır. w—düzlemindeki çözüm problemin sınır şarlarına bağlıdır.

9 — Poligonun birim daireye tasviri.

w—düzleminin üst yarısının

$$\zeta = \frac{j-w}{j+w}$$

analitik fonksiyonu vasıtasiyle ζ—düzlemindeki birim dairenin içine tasvir edileceğini daha önce görmüştük. Bu tasvirde u—ekseni üstündeki $u_1, \ldots, u_n$ noktaları dairenin çevresi üstündeki $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ noktalarına tekabül ederler. Ters fonksiyon

$$w = j \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$$

olduğundan

$$w - u_r = \frac{-2j}{1+\zeta_r} \frac{\zeta-\zeta_r}{1+\zeta}, \quad dw = \frac{-2j}{1+\zeta_r} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2}$$

bulunur. Bunlar Schwarz integralinde yerine konulursa

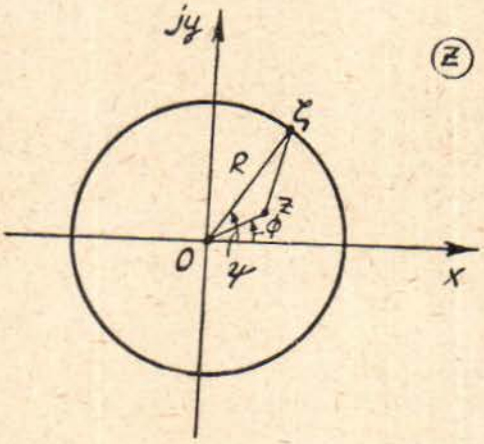
$$z = A \int \prod_{r=1}^{n} (\zeta - \zeta_r)^{-\frac{\gamma_r}{\pi}} d\zeta + B \qquad (190)$$

elde edilir. Bu formül $|\zeta|=1$ şartiyle birlikte z—düzlemindeki poligonu w—düzlemindeki birim daireye tasvir eder.

42. Poisson integrali.

Riemann tasvir teoremine göre basit irtibatlı bir bölge bir analitik fonksiyon vasıtasiyle birim dairenin içine konform olarak tasvir edilebilir. Yukarıda bir poligonu birim daireye tasvir eden fonksiyon

görülmüştür. Keza bir yarı düzlemin birim daireye nasıl tasvir edileceğini de biliyoruz. Şimdi bir bölgenin z—düzlemindeki birim daireye her hangi bir şekilde tasvir edildiğini farzederek z—düzlemindeki çözümü arayalım. Daire çevresindeki potansiyel dağılışı bilindiği takdirde bir Dirichlet problemi bahis konusu olacaktır. Şek. 240 da z—düzlemindeki R yarıçaplı dairenin çevresindeki noktayı $\zeta = Re^{j\psi}$ ile gösterelim.



Şek. 240

Bölge içindeki her hangi bir nokta $z = \rho e^{j\phi}$ dir. Cauchy—integral formülüne göre basit kapalı eğri tarafından sınırlanan basit irtibatlı bölgede analitik olan $w(z)$ fonksiyonu için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

dir. Burada C, bölgenin sınır eğrisidir. Bu integral vasıtasiyle $w(z)$ nin bölgede aldığı değerler sınırdaki değerlerden hesaplanabilir. Formülü R yarıçaplı daireye uygulayarak

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta - z} d\psi$$

bulunur. ($d\zeta = j\zeta d\psi$). Bölge dışında kalan bir z_0 noktası için $\frac{w(z)}{z - z_0}$ fonksiyonu bölge içinde analitik olacağından

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\, w(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\psi = 0$$

ve dolayısiyle

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta w(z)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)d\psi$$

yazabiliriz. Şayet $z_0 = \frac{R^2}{\rho}e^{j\phi}$ alınırsa ($\rho_0 = R^2/\rho$, $\phi_0 = \phi$)

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\phi-\psi)+\rho^2}w(\zeta)\,d\psi$$

bulunur. Bu ifadede $w = u + j\,v$ koyarak reel kısım hesaplanırsa

$$u(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\phi-\psi)+\rho^2}u(\psi)\,d\psi \qquad (191)$$

formülü elde edilir. v için de benzer ifade bulunur. Poisson integrali denilen bu formül daire için Dirichlet probleminin çözümünü gösterir. $R=1$ koyarak birim daire için

$$u(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(\phi-\psi)+\rho^2}u(\psi)\,d\psi \qquad (192)$$

Poisson integrali bulunur. Daire çevresi boyunca $u(\psi)$ dağılışı bilindiği takdirde Poisson integrali yardımiyle daire içindeki noktaların potansiyelini hesaplamak kabil olur.

Daire merkezindeki potansiyel

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\psi)\,d\psi \qquad (193)$$

olacaktır. Böylece $u(0)$ potansiyelinin $u(\psi)$ nin daire çevresi boyunca hesaplanan ortalama değerine eşit olduğu anlaşılır.

R yarıçaplı dairenin kompleks potansiyeli için

$$P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{j\psi}+z}{Re^{j\psi}-z}\varphi(\psi)\,d\psi \tag{194}$$

yazılabilir (u yerine φ konmuştur). Zira bu fonksiyonun reel kısmı $\varphi(\rho,\phi)$ potansiyeline eşittir. Birim daire için

$$P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{j\psi}+z}{e^{j\psi}-z}\varphi(\psi)\,d\psi \tag{195}$$

olacaktır (Schwarz kompleks potansiyeli). Şimdi bir örnek olmak üzere daha önce çözülen bir Dirichlet problemini Poisson integrali yardımiyle çözelim, şek. 194. $0\leqq\psi\leqq\pi$ için $\varphi=0$ ve $\pi\leqq\psi\leqq2\pi$ için $\varphi=\varphi_0$ olduğundan

$$P(z)=\frac{\varphi_0}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{j\psi}+1}{e^{j\psi}-1}\,d\psi=-j\frac{\varphi_0}{\pi}\ln\frac{1-z}{1+z}+\frac{\varphi_0}{2}$$

bulunur.

Potansiyel problemlerini birim daireye transforme edecek yerde w—düzleminin üst yarısına transforme etmekle ekseriya çözümü basitleştirmek kabil olur. z—düzlemindeki birim daire

$$w=j\frac{1-z}{1+z}$$

analitik fonksiyonu vasıtasiyle w—düzleminin üst yarısına transforme edilir. Bu fonksiyonun tersi

$$z=\frac{j-w}{j+w}$$

olduğundan birim daire çevresi üstündeki noktalar için

$$e^{j\psi}=\frac{j-u'}{j+u'}$$

yazılabilir. Burada u' , u—ekseni üstündeki integrasyon değişkenini göstermektedir. z—düzlemindeki değişken ψ açısıdır. Bu ifadenin diferansiyeli

$$d\psi = \frac{2\,du'}{1+u'^2}$$

dir. Schwarz potansiyelinde $z, e^{j\psi}$ ve $d\psi$ yerine yukarıdaki eşitlerini koyarak w—düzlemindeki kompleks potansiyel için

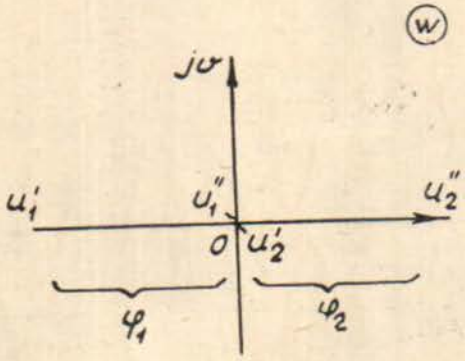
$$P(w) = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+u'w}{(1+u'^2)(w-u')} \varphi(u')du' \qquad (196)$$

integrali elde edilir. $\varphi(u')$, u—ekseni boyunca potansiyel dağılışını gösteren fonksiyondur. w , kompleks potansiyelin hesaplandığı noktadır. Bu ifadenin reel kısmı

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{(u-u')^2+v^2} \varphi(u')du' \qquad (197)$$

dir. (196) formülü Dirichlet probleminin w—düzleminin üst yarısındaki genel çözümünü ve (197) formülü de Poisson integraline eşdeğer olan dotansiyel fonksiyonunu gösterir.

Şimdi örnek olmak üzere şek. 241 de görülen basit tertibin kom-



Şek. 241

pleks potansiyelini bulalım. Soldaki ve sağdaki levhaların kompleks potansiyeldeki payları için

$$P_1(w)=\mathrm{j}\frac{\varphi_1}{\pi}\int_{u'_1}^{u''_1}\frac{1+u'w}{(1+u'^2)(w-u')}\,du'=\mathrm{j}\frac{\varphi_1}{\pi}\left(-\ln\frac{w-u''_1}{w-u'_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+u''^2_1}{1+u'^2_1}\right),$$

$$P_2(w)=\mathrm{j}\frac{\varphi_2}{\pi}\int_{u'_2}^{u''_2}\frac{1+u'w}{(1+u'^2)(w-u')}\,du'=\mathrm{j}\frac{\varphi_2}{\pi}\left(-\ln\frac{w-u''_2}{w-u'_2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+u''^2_2}{1+u'^2_2}\right)$$

bulunur. $u_1''=u_2'$ olduğunu gözönüne alarak süperpozisyon yapılırsa

$$P(w)=P_1(w)+P_2(w)=\mathrm{j}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+u''^2_1}}{w-u''_1}-\mathrm{j}\frac{\varphi_1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+u'^2_1}}{w-u'_1}+j\frac{\varphi_2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+u''^2_2}}{w-u''_2}$$

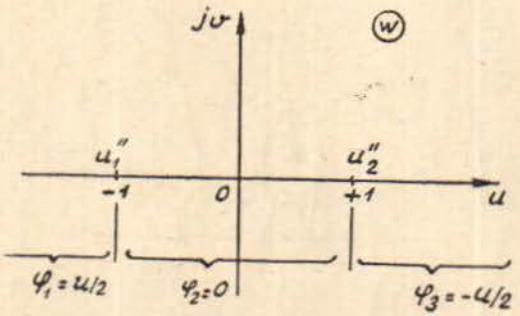
elde edilir. Bu ifadede $u_1''=0$, $u_1'=-\infty$, $u_2''=+\infty$ koyarak

$$P(w)=-\mathrm{j}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\pi}\ln w+\varphi_2$$

bulunur. Bu sonuç daha önce bulunmuştur.

Genel olarak u—ekseni boyunca potansiyelleri sabit olan n parçanın bulunması halinde kompleks potansiyelin

$$P(w)=\frac{j}{\pi}\sum_{r=1}^{n-1}(\varphi_r-\varphi_{r+1})\ln\frac{\sqrt{1+u_r''^2}}{w-u_r''}+\varphi_n \qquad (198)$$



Şek. 242

formülü yardımiyle hesaplanacağı kolayca gösterilebilir. Meselâ şek. 242 de görülen üç levhalı sistem için hesaplar yapılırsa

$$P(w) = \mathrm{j}\frac{U}{2} \ln \frac{2}{w^2-1} - \frac{U}{2}$$

bulunur.

Birim dairenin çevresi boyunca $\partial\varphi/\partial n$ değerlerinin verilmesi halinde bir Neumann problemi ve çevrenin bazı kısımlarında φ değerlerinin ve geri kalan kısımlarda da $\partial\varphi/\partial n$ değerlerinin verilmesi halinde bir karışık sınır değeri problemi bahis konusu olacaktır. Bu problemler için Poisson integrali gibi genel karakterde bir çözüm bulunamaz. Bununla beraber sınır çizgisinin simetriden dolayı kısmen alan çizgilerinden teşekkül etmesi halinde potansiyel problemini konform tasvirle kolayca çözebiliriz. Bu hususlaki örnekler daha önce görülmüştür. Konform tasvirle çözümleri güç olan Neumann tipi ve karışık tip problemleri iki boyutlu harmoniklerle çözmek daha pratiktir.

X. DİĞER ÇÖZÜM METODLARI

43. Green fonksiyonları metodu.

Potansiyel teorisi için önemli olan birinci ve ikinci Green formülleri uzayda

$$\int_B (\varphi \Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi . \operatorname{grad}\psi)\, dV = \oint_F \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dF \quad , \tag{199}$$

$$\int_B (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV = \oint_F \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dF \tag{200}$$

şeklindedir. φ ve ψ, skaler fonksiyonlardır. B bölgesi F kapalı yüzeyi tarafından sınırlanmıştır ve pozitif normal yönü bölgeden dışarı doğrudur. Şimdi Green formülleri yardımiyle potansiyel teorisinin esaslarını kısaca gözden geçirelim.

Potansiyel teorisinin sınır değeri problemlerinin, potansiyel denkleminin sınırda

$$\varphi = g \quad (a) \, , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \quad (b) \, , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} + h\varphi = g \quad (c)$$

şartlarından birini sağlayan çözümlerini bulmaktan ibaret olduğu daha önce görülmüştür. g ve h bilinen fonksiyonları veya değerleri göstermektedir. Bu şartlar sıra ile 1. nevi (Dirichlet), 2. nevi (Neumann) ve karışık problemleri belirtirler.

Şayet $\varphi=\psi$ ve φ fonksiyonu B bölgesinde harmonikse ($\Delta\varphi=0$) birinci Green formülü yardımiyle

$$\int_B (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = \oint_F \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dF \tag{201}$$

yazılabilir. Ayrıca F sınır yüzeyinde $\varphi=0$ oluyorsa $\operatorname{grad}\varphi=0$ ve dolayısiyle $\varphi =$ sab. bulunur. Diğer taraftan sınırda $\varphi=0$ olduğu kabul edildiğinden bölge içinde de $\varphi=0$ olmak zorundadır. Buradan daha önce görülen teklik teoremleri elde edilir. Potansiyel için iki farklı çözümün

bulunduğu farzedilirse Dirichlet probleminde sınırda $\varphi_1=\varphi_2$ olacağından $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ farkının sınırda sıfır olması gerekir. Yukarıdaki sonuca göre bölge içinde de $\varphi=0$ olacağından $\varphi_1=\varphi_2$ dir.

(201) denkleminin sağ tarafı $\partial\varphi/\partial n=0$ için de sıfır olacağından bu şart yerine geldiği takdirde bölge içinde $\varphi=$sab olur. Neumann probleminde sınır yüzeyinde $\partial\varphi_1/\partial n=\partial\varphi_2/\partial n$ olacağından bölge içinde $\varphi_1-\varphi_2=$sab. olur, yani iki çözüm ancak bir sabit kadar farkedebilir.

Şayet harmonik fonksiyon (c) şartını sağlayacak olursa sınır yüzeyinde

$$\frac{\partial(\varphi_1-\varphi_2)}{\partial n}+h(\varphi_1-\varphi_2)=0$$

olacaktır. (201) formülü $\varphi_1-\varphi_2$ farkı için yazılırsa son bağıntıyı gözönüne alarak

$$\int_B[\operatorname{grad}(\varphi_1-\varphi_2)]^2 dV+h\oint_F(\varphi_1-\varphi_2)dF=0$$

elde edileceğinden $h>0$ olduğu takdirde $\varphi_1=\varphi_2$ olacağı görülür. Zira son denklem ancak bu şartla gerçeklenebilir.

İkinci Green formülünde $\psi=1$ koyarak

$$\oint_F\frac{\partial\varphi}{\partial n}dF=0 \tag{202}$$

bulunur.

Şayet $\psi=1/r$ alınırsa Green formülleri yardımiyle

$$\oint_F\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF-\int_B\frac{1}{r}\Delta\varphi\,dV=k\varphi(P) \tag{203}$$

bulunur. P noktası bölge dışında ise $k=0$ ve bölge içinde ise $k=4\pi$ dir. Eğer φ fonksiyonu B bölgesinde harmonikse

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF \tag{204}$$

elde edilir. Bu formülü daha önce gördüğümüz (165) denkleminde $\rho=0$

koyarak yazabiliriz. Kaynaklar bölge dışındadır. (204) denklemine üçüncü Green formülü denilir. Potansiyelin ve normal türevinin sınırdaki değerleri biliniyorsa bölge içindeki potansiyeli bu integral yardımiyle hesaplamak kabil olur. Bu formülü R yarıçaplı küreye uygulayarak

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_F \varphi \, dF \tag{205}$$

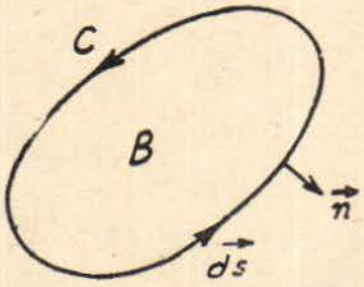
bulunur. Böylece kürenin merkezindeki potansiyelin potansiyel fonksiyonunun küre yüzeyi üzerinden hesaplanan ortalama değerine eşit olduğu görülür. Bu ortalama deger teoremine göre bir bölgede harmonik olan fonksiyonun ekstrem değerlerinin yanlız sınırda bulunacağı anlaşılır.

Düzlemdeki iki boyutlu Green formülleri

$$\int_B (\varphi \Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi . \operatorname{grad}\psi)\, dF = \int_C \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds \quad , \tag{206}$$

$$\int_B (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dF = \int_C \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) ds \tag{207}$$

şeklindedir. B bölgesi C eğrisi ile sınırlanmıştır ve pozitif normal yönü bölgeden dışarı doğrudur, şek. 243. Eğrinin pozitif yönü ise bölgeyi solda bırakacak şekildeder. Teklik teoremleri benzer şekilde elde edilir. (202) ve (205) denklemleri



Şek. 243

$$\oint_C \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = 0 \quad , \tag{208}$$

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi R} \oint_C \varphi ds \tag{209}$$

şeklindedir.

$\psi = \ln \frac{\lambda}{r} = -\ln r$ alarak (203) yerine

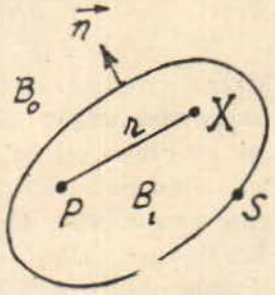
$$\oint_C \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds - \int_B \ln \frac{1}{r} \Delta \varphi \, dF = k \, \varphi(P) \qquad (210)$$

elde edilir. P noktası bölge dışında ise $k=0$ ve bölge içinde ise $k=2\pi$ dir. φ fonksiyonu B bölgesinde harmonikse ve P bölgenin iç noktası ise (204) yerine

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds \qquad (211)$$

bulunur.

Potansiyel teorisinin esasları hakkında verilen bu kısa bilgiden sonra şimdi sınır değeri problemlerinin Green fonksiyonları ile nasıl çözüleceğini görelim. Aşağıdaki incelemelerde bir F yüzeyi veya C eğrisi tarafından sınırlanan iç bölge B_i ile ve dış bölge B_0 ile gösterilecektir, şek. 244. Pozitif normal dış bölgeye doğrudur. Potansiyelin hesaplandığı nokta P ile, sınırdaki nokta S ile ve değişken nokta X ile gösterilecektir. Üç nevi potansiyel problemi için sınır sartları



Şek. 244

$$\varphi(S) = g(S) \,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n}(S) = g(S) \,,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(S) + h(S)\,\varphi(S) = g(S)$$

şeklindedir. Böylece üçü iç problem ve üçü de dış problem olmak üzere 6 farklı potansiyel problemi ile karşılaşılabileceği anlaşılır. İlk önce iç bölge için Dirichlet probleminin Green fonksiyonu ile nasıl çözüleceğini görelim. φ ve ψ fonksiyonları B_i de harmonik oldukları takdirde ikinci Green formülü

$$\oint_F \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dF = 0 \qquad (212)$$

şekline girer. Bunu $1/4\pi$ ile çarpıp (204) den çıkarırsak

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_F \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\psi + \frac{1}{r} \right) - \left(\psi + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dF \qquad (213)$$

buluruz. Bu integral yardımiyle Dirichlet problemini çözebilmek için normal türevi elimine etmek gerekir. Eğer ψ fonksiyonu sınırda

$$\psi + \frac{1}{r} = 0$$

olacak şekilde seçilirse bu sağlanmış olur. $P(x,y,z)$ ve $X(\xi,\eta,\zeta)$ noktaları arasındaki uzaklığı gösteren r

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

dir. ψ fonksiyonu hem P nin ve hem de X in koordinatlarının fonksiyonudur. Sınırda sıfır olan $\psi + \frac{1}{r}$ fonksiyonunu G ile göstererek

$$G(P,X) = \psi(P,X) + \frac{1}{r} \tag{214}$$

yazalım. Böylece potansiyel ifadesi

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi(S) \frac{\partial}{\partial n} G(PS)\, dF \tag{215}$$

şekline girer. (214) denklemi ile tarif edilen G ye birinci nevi Green fonksiyonu adı verilir. Green fonksiyonu X noktasının fonksiyonu olarak şu özellikleri haiz bulunmaktadır: G fonksiyonu B_i bölgesinde $X=P$ noktasından başka her yerde harmoniktir ($\Delta G=0$) ve bu noktada $1/r$ gibi sonsuz olur. Green fonksiyonu sınırda sıfır olur, yani $G(P, S)=0$ dır. Böylece Green fonksiyonunun φ gibi bir sınır değeri probleminin çözümü olduğu anlaşılır. Ancak sınır şartı $G=0$ olduğundan bu problem orijinal problemden daha basittir. $\psi(P, X)$ fonksiyonu bütün iç bölgede harmoniktir ve sınırda

$$\psi(P,S) = -\frac{1}{r}$$

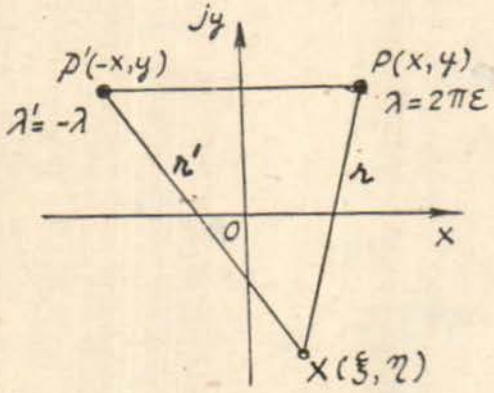
şartını sağlar.

Dış problemin çözümü envers yüzeyin iç problemine irca edilir. Bunun için B_i de bir noktayı orijin seçerek orijinal yüzeyin enversi bulunur. Orijinal yüzeyin dışı envers yüzeyin içine tekabül eder.

Green fonksiyonunu bulmak için her hangi bir P noktasına $q=4\pi\varepsilon$ noktasal yükünün getirildiğini farzederek F sınırının potansiyelini sıfır yapacak imaj yükleri bulunur. q yükü ile imaj yüklerinin potansiyellerini süperpoze ederek Green fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyon bulunduktan sonra potansiyel fonksiyonu (215) integrali yardımiyle hesapla-

nır. Bir potansiyel problemini Green fonksiyonu vasıtasiyle çözmek için orijinal problem kadar güç olmamakla beraber yine bir sınır değeri problemini çözmek ve ayrıca bir integral hesaplamak gerektiğinden metodun knllanıldığı yerler çok fazla değildir. Bununla beraber bir çok birinci nevi Green fonksiyonu bilinmektedir ve bir noktasal yük ihtiva eden her imaj problemine Green fonksiyonu gözüyle bakabiliriz.

Şimdi ilk önce bir düzlem için Green fonksiyonunu bulalım, şek. 245. Green fonksiyonu



Şek. 245

$$G(x,y,z\ ;\ \xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\quad\left(\psi=-\frac{1}{r'}\right)$$

olacaktır. r ve r' uzaklıkları

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\quad,$$

$$r'=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta+z)^2}$$

dir. Düzlem üstünde $\zeta=0$ olacağından $r=r'$ ve $G=0$ olur. Green fonksiyonunun normal türevi sınır yüzeyinde

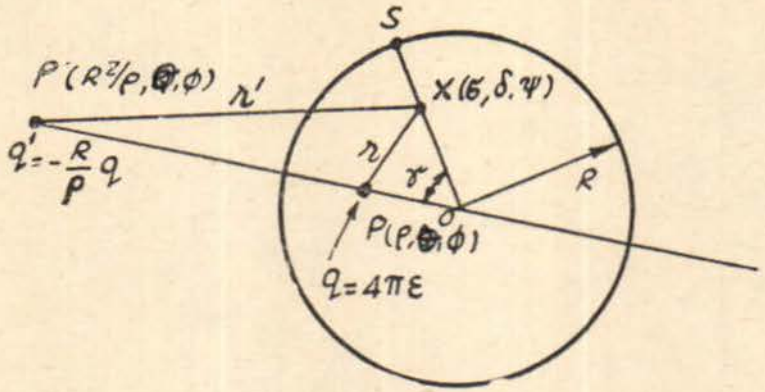
$$\left(\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}=-\frac{2z}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}$$

değerini alır. Böylece $\zeta=0$ düzlemindeki her hangi bir $\varphi(\xi,\eta,0)=g(\xi,\eta)$ potansiyel dağılışı için potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\xi,\eta)d\xi\,d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}$$

integrali yardımiyle hesaplanır.

İkinci bir örnek olarak küre için Green fonksiyonunu bulalım, şek. 246. $P(\rho,\theta,\phi)$ noktasındaki $q=4\pi\varepsilon$ yükü ile $P'(R^2/\rho,\theta,\phi)$ noktasındaki $q'=-Rq/\rho$ imajının $X(\sigma,\delta,\psi)$ noktasında meydana getirecekleri po-



Şek. 246

tansiyel Green fonksiyonuna eşit olacağından

$$G(\rho,\theta,\phi\ ;\ \sigma,\delta,\psi)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}\qquad\left(\psi=-\frac{R}{\rho r'}\right)$$

bulunur. r ve r' uzaklıkları

$$r^2=\rho^2+\sigma^2-2r\sigma\cos\gamma\ ,\quad r'^2=\left(\frac{R^2}{\rho}\right)^2+\sigma^2-2\frac{R^2}{\rho}\sigma\cos\gamma$$

ifadeleri yardımiyle bulunur. $\cos\gamma=\cos\theta\cos\delta+\sin\theta\sin\delta\cos(\phi-\psi)$ dir. X noktası küre yüzeyi ile intibak edince $\rho=R$ olacağından $r/r'=\rho/R$ ve $G=0$ olduğu kolayca görülebilir.

Green fonksiyonunun normal türevi hesaplanırsa $\sigma=R$ için

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=R}=\frac{1}{(R^2+r^2-2Rr\cos\gamma)^{3/2}}\left(-R+\frac{r^2}{R}\right)$$

bulunur. Küre yüzeyindeki $\varphi(R,\delta,\psi) = g(\delta,\psi)$ potansiyel dağılışı için potansiyel fonksiyonu

$$\varphi(\rho,\theta,\phi) = \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R} \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{g(\delta,\psi)\, R^2 \sin\delta \, d\delta \, d\psi}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{3/2}} \qquad (216)$$

dir. Bu ifade küre için Dirichlet probleminin çözümünü gösteren Poisson integralidir. $r=0$ için yani kürenin merkezinde

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_F g(\delta,\psi)\, dF$$

olacaktır (ortalama değer teoremi). $g=\varphi_0 =$ sab. için $\varphi(0) =$ sab. olacağı kolayca görülebilir. (216) ifadesi kürenin içi için çözümü gösterir. Dış problemin çözümü işaret değiştirerek elde edilir.

Poisson denklemi de Green fonksiyonu vasıtasiyle çözülebilir. (203) yardımiyle $k=4\pi$ için

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_B \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV - \frac{1}{4\pi}\oint_F \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dF$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\Delta\psi=0$ için ikinci Green formülü yardımiyle

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int_B \psi\Delta\varphi\, dV - \frac{1}{4\pi}\oint_F \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dF$$

yazılabileceğinden bu iki denklemi toplayarak

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_B \left(\psi+\frac{1}{r}\right)\Delta\varphi\, dV - \frac{1}{4\pi}\oint_F \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\psi+\frac{1}{r}\right) - \left(\psi+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dF$$

bulunur. Normal türevi elimine etmek için yine

$$G(P,X) = \psi(P,X) + \frac{1}{r}$$

koyarak

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_B G\rho\, dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_F \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, dF \qquad (217)$$

elde edilir ($\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$). Sınırda $G(P,S)=0$ dır. Bu denklem Poisson denkleminin Dirichlet problemi için çözümünü gösterir.

Green fonksiyonunun simetrik olduğunu, yani

$$G(P,X) = G(X,P) \qquad (218)$$

özelliğine sahip olduğunu yukarıda bulunan fonksiyonlarda x,y,z ile ξ,η,ζ yı ve r,θ,ϕ ile ρ,δ,ψ yi değiştirerek kolayca görebiliriz.

Neumann problemini Green fonksiyonu vasıtasiyle çözmek için ψ fonksiyonu sınırda

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\psi+\frac{1}{r}\right)=k=\text{sab.}$$

olacak şekilde seçilir. Zira

$$\oint_F \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\ ,\quad \oint_F \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dF=0$$

olduğundan normal türevi sıfıra eşit yazamayız. Böylece

$$N(P,X)=\psi(P,X)+\frac{1}{r} \qquad (219)$$

koyarak potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_F N(P,S)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dF - \frac{k}{4\pi}\oint_F \varphi\, dF \qquad (220)$$

elde edilir. N ye ikinci nevi Green fonksiyonu veya Neumann fonksiyonu adı verilir. Bu ifadede ikinci terim sabit bir değerdir, Neumann fonksiyonu potansiyeli bir sabit farkı ile tâyin eder. Esasen ikinci nevi problemin teklik teoremine göre bu sonuç açıktır. Neumann fonksiyonu B_1 bölgesinde $P=X$ uoktasından başka her yerde harmoniktir ve sınır yüzeyinde $\partial N/\partial n = k$ şartını sağlar. G gibi N fonksiyonu da simetriktir.

Üçüncü nevi sınır değeri problemi de Green fonksiyonu yardımiyle incelenebilir.

İki boyutlu sınır değeri problemlerini Green fonksiyonu vasıtasiyle çözmek için şöyle hareket edilir: φ ve ψ fonksiyonları B bölgesinde harmonikseler iki boyutlu ikinci Green formülü

$$\oint_C \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds = 0 \tag{221}$$

şekline girer. Bunu $1/2\pi$ ile çarptıktan sonra (211) den çıkararak

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\left(\psi + \ln \frac{1}{r}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\psi + \ln \frac{1}{r}\right)\right] \tag{222}$$

bulunur. Dirichlet problemini çözerken birinci terimi elimine etmek için ψ fonksiyonunu sınır eğrisi üstünde

$$\psi + \ln \frac{1}{r} = 0$$

olacak şekilde tâyin etmek icap eder. Böylece

$$G(P,X) = \psi(P,X) + \ln \frac{1}{r} \tag{223}$$

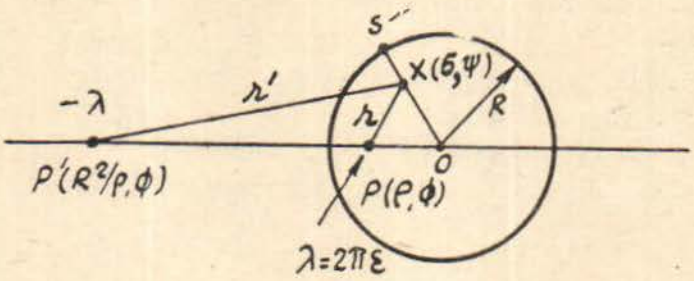
koyarak potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(P) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C \varphi(S) \frac{\partial}{\partial n} G(P,S)\, ds \tag{224}$$

elde edilir. (223) denklemi ile tarif edilen iki boyutlu Green fonksiyonu P noktasından başa her yerde harmoniktir ve bu noktada logaritmik olarak sonsuz olnr. İki boyutlu Green fonksiyonunu P noktasına getirilen $\lambda = 2\pi\varepsilon$ çizgisel yükü ve imajlar yardımiyle hesaplayabiliriz. Meselâ şek. 247 de görülen silindir için G yi bulalım. P noktasına getirilen $\lambda = 2\pi\varepsilon$ çizgisel kaynağı ile $\lambda' = -\lambda$ imajı yardımiyle

$$G(\rho, \phi\ ;\ \sigma, \psi) = \ln \frac{r'}{r} \frac{\rho}{R} \quad \left(\psi = \ln \frac{\rho r'}{R}\right)$$

bulunur. r ve r' uzaklıkları



Şek. 247

$$r^2=\rho^2+\sigma^2-2\rho\sigma\cos(\phi-\psi)\ ,\quad r'^2=\left(\frac{R^2}{\rho}\right)^2+\sigma^2-2\frac{R^2}{\rho}\sigma\cos(\phi-\psi)$$

dir. $\sigma=R$ için $r/r'=\rho/R$ ve $G=0$ olur. Normal türev hesaplanırsa $\sigma=R$ için

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=R}=\frac{1}{R}\,\frac{\rho^2-R^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\phi-\psi)}$$

elde edilir. Çevre üstündeki potansiyel dağılışı $\varphi(R,\psi)=g(\psi)$ olduğuna göre potansiyel için ($ds=Rd\psi$)

$$\varphi(\rho,\phi)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\psi)d\psi}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\phi-\psi)}\qquad(225)$$

bulunur. Bu ise daha önce Cauchy—integral formülü yardımiyle bulunan Poisson integralidir. Dairenin merkezinde

$$\varphi(0)=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}g(\psi)\,ds$$

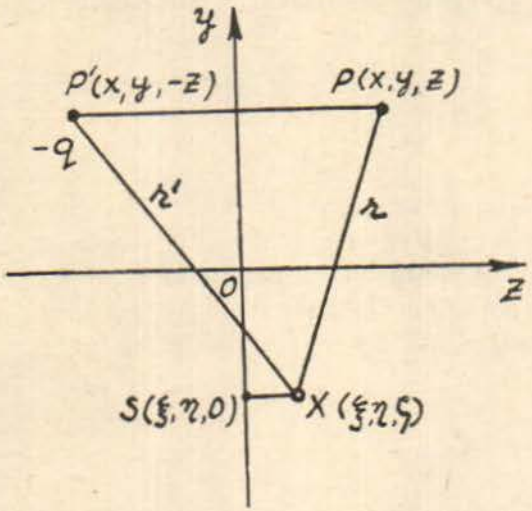
dir.

Dış bölge için (225) in işareti değişir.

Şek. 248 de sağ yarı düzlem için Green fonksiyonu

$$G(x,y\ ;\ \xi,\eta)=\ln\frac{r'}{r}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+)y-\eta)^2}$$

olacaktır. Üst yarı düzlem için Green fonksiyonu



Şek. 248

$$G(x,y\ ;\ \xi,\eta) = \frac{1}{2}\ \ln \frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

dir.

İki boyutlu Green fonksiyonlarını konform tasvir yardımiyle de bulabiliriz. Bir değerli $w(\zeta)$ analitik fonksiyonu B bölgesini, $\zeta=z$ noktas ıw=0 noktasına tekabül edecek şekilde, w — düzleminde birim daireye tasvir ettiği takdirde bu bölgenin Green fonksiyonu

$$G(x,y\ ;\ \xi,\eta) = -\ \ln |w(\zeta)| = \ln \frac{1}{|w(\zeta)|} \qquad (226)$$

olur. Gerçekten $\ln |w(\zeta)|$, $\ln w(\zeta)$ nın reel kısmı olduğundan B bölgesinde $\zeta=z$ noktasından başka her yerde harmoniktir. Bu noktada G logaritmik olarak sonsuza gider. ζ noktası C sınır eğrisine yaklaşınca $|w(\zeta)|\to 1$ olacağından G sınırda sıfır olur. Böylece yukarıdaki ifade yardımiyle hesaplanan G nin Green fonksiyonunun bütün özelliklerine sahip olduğu anlaşılır. Bir örnek olmak üzere sağ yarı düzlemin Green fonksiyonunu bulalım. Sağ yarı düzlemin

$$w(\zeta) = \frac{\zeta - z}{\zeta + z}$$

vasıtasiyle $\zeta=z$ noktası $w=0$ noktasına tekabül edecek şekilde birim dairenin içine tasvir edileceği kolayca görülebilir. Zira $\zeta=z$ için $w=0$ dır ve

$$|w(\zeta)|=\sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x+\xi)^2+(y-\eta^2)}}$$

olduğundan $\xi=0$ için $|w|=1$ ve $\xi>0$ için $|w|<1$ dir. Bu ise $x=0$ ekseninin birim dairenin çevresine ve ζ- düzleminin sağ yarısının birim dairenin içine tasvir edileceğini gösterir. $w(\zeta)$ fonksiyonu aranan şartları sağladığından (226) yardımiyle Green fonksiyonu hesaplanırsa yukarıda bulunan sonuç elde edilir. ζ—düzleminin üst yarısını $\zeta=z$ noktası $w=0$ noktasına tekabül edecek şekilde, w- düzlemindeki birim daireye tasvir eden fonksiyon

$$w(\zeta)=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$$

lineer fonksiyonu ile kolayca bulunur. Yarı düzlemin sınırı reel eksen çevreye tasvir edileceğinden $\eta=0$ için $|w|=1$ yazarak $|a|=|c|$, $|b|=|d|$ ve $\arg(b)-\arg(a)=\pm[\arg(d)-\arg(c)]$ bulunur. $\arg(a)-\arg(c)=\alpha$ ve $\zeta=-|b/a|e^{j(\arg b-\arg a)}$ koyarak ve $-$işaretini alarak ($+$alınırsa $w=$sab. çıkar)

$$w(\zeta)=e^{j\alpha}\frac{\zeta-z}{\zeta-\bar{z}}$$

bulunur. $w(\zeta)$ nin modülü

$$|w(\zeta)|=\frac{|\zeta-z|}{|\zeta-\bar{z}|}$$

dir. Bunun 1 den küçük olabilmesi $Im(\zeta)>0$ için (üst yarı düzlem) $Im(z)>0$ olmasına bağlıdır. $w(\zeta)$ yardımiyle üst yarı düzlem için yukarıdaki Green fonksiyonu elde edilir.

Dairenin Green fonksiyonu

$$w(\zeta)=\frac{\zeta-z}{R-\bar{z}\zeta/R}=\frac{R}{\bar{z}}\frac{\zeta-z}{\frac{R^2}{\bar{z}}-\zeta}$$

analitik fonksiyonu vasıtasiyle elde edilir. Bu fonksiyon $|\zeta|=R$ dairesinin

içindeki bölgeyi $|w|=1$ dairesinin içine tasvir eder ve $\zeta=z$ için $w=0$ olur. Fonksiyon şu şekilde bulunur: $|\zeta|=R$ dairesinin içindeki bölgeyi μ—düzleminin üst yarısına tasvir eden fonksiyon

$$\mu=j\frac{R-\zeta}{R+\zeta}$$

şeklindedir. Diğer taraftan μ—düzleminin üst yarısını w— düzlemindeki $|w|=1$ dairesinin içine tasvir eden fonksiyonun

$$w=e^{j\alpha}\frac{\mu-\mu_0}{\mu-\mu_0}$$

olduδu yukarıda görülmüştür. Bu iki ifade arasında μ yü elimine ederek $|\zeta|=R$ dairesini $|w|=1$ dairesine tasvir eden fonksiyon elde edilir. Böylece

$$w(\zeta)=\frac{a\zeta+bR}{b\zeta+aR}$$

şeklinde bir ifade bulunur. a ve b, $a=(\mu_0+j)e^{j\alpha/2}$, $b=(\mu_0-j)e^{j\alpha/2}$ kısaltmalarını göstermektedir. $\zeta=z$ için $w=0$ olacağını gözönüne alarak ve a nın reel olduğunu kabul ederek $w(z)$ için yukarıdaki ifade bulunur. Dairenin Green fonksiyonu

$$G(x,y\ ;\ \xi,\eta)=-\ln\left|\frac{R}{z}\frac{z-\zeta}{\frac{R^2}{z}-\zeta}\right|$$

olacaktır. Bu ifadede $|z-\zeta|=r$ ve $\left|\frac{R^2}{z}-\zeta\right|=r'$ koyarak

$$G(x,y\ ;\ \xi,\eta)=\ln\frac{1}{r}+\ln\frac{r'}{R}$$

elde edilir, şek. 247. X noktası daire çevresinde bulunduğu vakit OPS ve OSP' üçgenlerinin benzerliği yardımiyle $\rho/R=r/r'$ yazılabileceğinden $\psi=\ln r$ ve $G=0$ olur.

44. İntegral denklemleri.

Bilinmiyen fonksiyon integral işareti altında bulunan bir denkleme integral denklemi adı verilir. Pratik bakımdan önemli olan integral denklemleri

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \quad , \\ \varphi(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

şeklindeki birinci ve ikinci nevi Fredholm integral denklemleridir. $\varphi(x)$, bilinmiyen fonksiyonu ve $K(x,y)$ ile $f(x)$ bilinen fonksiyonları gösterir. $K(x,y)$ fonksiyonuna integral denkleminin çekirdeği denilir. Şayet $K(x,y)=K(y,x)$ ise çekirdek simetriktir. λ, bir parametredir ve integral denklemlerinin çözümünde önemli bir rol oynar. $f(x)$ bozucu fonksiyondur ve $f(x)=0$ için ikinci nevi integral denklemi homogen hale gelir.

Şimdi integral denklemlerinin çözümüne geçmeden önce sınır değeri problemlerinin integral denklemlerine ircaını gözden geçirelim. Yukarıdaki integral denklemler bir değişkenlidir. Aranan fonksiyon iki veya üç değişkenli olabilir. Problemin boyutuna bağlı olmayışı, integral denklemler için büyük bir avantaj teşkil eder.

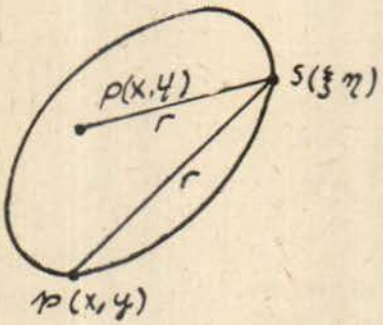
Uzayda bir F kapalı yüzeyi üstündeki basit tabaka dağılışının potansiyeli için

$$\varphi(P)=\oint_F \frac{\sigma(s)\,dF}{r}$$

yazılabilir (yazış tarzlarını basitleştirmek için $4\pi\varepsilon\varphi$ yerine φ konmuştur). Potansiyelin hesaplandığı nokta P ile ve yüzeydeki değişken nokta s ile gösterilmistir, şek. 249. P noktası yüzey üstünde bulunduğu takdirde p ile gösterelim. Böylece

$$\varphi(p)=\oint_F \frac{\sigma(s)\,dF}{r}$$

elde edilir. Bu ifadede $K(p,s)=K(x,y,z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)=1/r$ koyarak



Şek. 249

$$\varphi(p)=\oint_F K(p\ ;\ s)\,\sigma(s)\,dF$$

integral denklemi elde edilir. Sınır yüzeyinde belli bir $\varphi(p)=\varphi_*$ potansiyel dağılışına tekabül eden $\sigma(s)$ yük dağılışı bu integral denklemini çözerek bulunur. Potansiyel fonksiyonu ise yukarıdaki integral yardımiyle hesaplanır ve böylece Dirichlet probleminin çözümü elde edilir. Bu integral denklem üç değişkenli birinci nevi Fredholm integral denklemidir. Dirichlet problemini ikinci nevi Fredholm integral denklemine de irca edebiliriz. Uzayda F yüzeyi üstündeki çift tabaka dağılışının potansiyeli için

$$\varphi(P)=\oint_F \tau(s)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dF$$

yazabiliriz. $\tau(s)$ momentinin, yüzeyde belli bir potansiyel dağılışı meydana gelecek şekilde, tayininin istendiğini farzedelim. Yüzeye içten yaklaşma halinde potansiyelin alacağı değeri $\varphi_-=g$ ile göstererek $g=\varphi_*-2\pi\tau$ yardımiyle

$$\tau(p)=-\frac{1}{2\pi}\,g(p)+\frac{1}{2\pi}\oint_F \tau(s)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dF$$

veya

$$K(p\ ;\ s)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

koyarak

$$\tau(p) = -\frac{1}{2\pi} g(p) + \oint_F K(p\,;\,s)\,\tau(s)\,dF$$

bulunur. Böylece Problem ikinci nevi Fredholm integral denklemine irca edilmiş olmaktadır. İntegral denklemini çözerek $\tau(p)$ fonksiyonu ve buradan da potansiyel fonksiyonu bulunur. Dış problem de benzer şekilde integral denklemine irca edilir.

Neumann problemi basit tabaka dağılışından faydalanarak integral denklemine irca edilebilir. Sınırda $\partial\varphi/\partial n$ normal türevinin verildiğini ve σ yoğunluğunun arandığını farzedelim. İç problem için sınır şartı $(\partial\varphi/\partial n)_- = g$ şeklinde olacağından

$$g = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s + 2\pi\sigma$$

yardımiyle

$$\sigma(p) = \frac{1}{2\pi} g(p) - \oint_F K(p\,;\,s)\,\sigma(s)\,dF$$

integral denklemi elde edilir. Dış problem de benzer şekilde integral denklemine irca edilir.

Karışık sınır değeri probleminde sınır şartı iç problem için

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_- + h\varphi_- = g$$

şeklindedir. Basit tabaka dağılışı yardımiyle

$$g = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s + 2\pi\sigma + h\varphi_s$$

yazarak

$$\sigma(p) = \frac{1}{2\pi} g(p) - \oint_F K(p\,;\,s)\,\sigma(s)\,dF$$

bulunur. Çekirdek

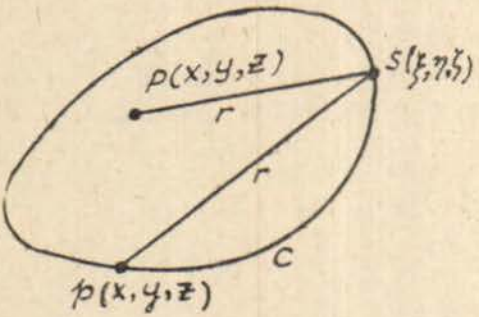
$$K(p\,;\,s) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + h(p)\,\frac{1}{r}\right]$$

dir.

İki boyutlu sınır değeri problemleri de benzer tarzda integral denklemlerine irca edilir. C eğrisi üstündeki çift tabaka dağılışının logaritmik potansiyeli

$$\varphi(P)=-\oint_C \tau(s)\,\frac{\partial}{\partial n}(\ln r)\,ds$$

dir ($2\pi\varepsilon\varphi$ yerine φ koyarak), şek. 250. İç problem için $\varphi_-=g=\varphi_s-\pi\tau$ yardımiyle



Şek. 250

$$\tau(p)=-\frac{1}{\pi}g(p)+\oint_C K(p\,;s)\tau(s)\,ds$$

bulunur. Çekirdek

$$K(x,y\,;\xi,\eta)=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial n}(\ln r)$$

dir.

Basit tabaka dağılışının logaritmik potansiyeli için

$$\varphi(P)=-\oint_C \sigma(s)\ln r\,ds$$

yazılabileceğinden iç problem için

$$\sigma(p)=\frac{1}{\pi}g(p)-\oint_C K(p\,;s)\sigma(s)\,ds$$

integral denklemi bulunur.

Karışık problemin integral denklemi de

$$\sigma(p)=\frac{1}{\pi}g(p)-\oint_C K(p\,;s)\,\sigma(s)\,ds$$

şeklindedir. Çekirdek

$$K(p\,;s)=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}(\ln r)+h(p)\ln r\right]$$

dir.

Üç nevi sınır değeri probleminin integral denklemine ircaı hakkında yapılan bu kısa açıklamadan sonra şimdi kısaca integral denklemlerinin direkt olarak yani diferansiyel denkleme başvurmadan nasıl çözüleceğini gözden geçirelim. Basit ve parsiyel bir diferansiyel denklemin sınır değeri problemi bir integral denkleme irca edebilir ve ayni sınır şartlarını sağlayan problemlerin çözümleri idantik olur

Şayet çekirdek $\alpha(x)\beta(y)$ şeklindeki terimlerin toplamı ise integral denkleminin çözümü bir cebrik denklem sisteminin çözümüne irca edilir. Böyle bir çekirdeğe çarpım çekirdek adı verilir. Çekirdek

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\,\beta_k(y)$$

şeklinde gösterilirse Fredholm denkleminin çözümü

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\,A_k \qquad (228)$$

olur. A_k değerleri

$$\sum_{k=1}^{n}(\delta_{ik}-\lambda a_{ik})A_k=b_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

denklem sistemini çözerek bulunur. δ_{ik}, Kronecker sembolüdür ve $i\neq k$ için sıfır ve $i=k$ için 1 dir. b_i ve a_{ik}

$$b_i=\int_a^b f(x)\,\beta_i(x)\,dx\,,\quad a_{ik}=\int_a^b \beta_i(x)\,\alpha_k(x)\,dx$$

integralleri yardımiyle hesaplanan bilinen değerlerdir. Denklem sisteminin katsayılar determinantını $D(\lambda)$ ile gösterelim. $D(\lambda)=0$ denkleminin köklerine çekirdeğin özel değerleri denilir.

Şayet λ, bir özel değer değilse homogen olmayan ikinci nevi Fredholm integral denkleminin bir çözümü vardır. Buna karşılık homogen integral denkleminin yalnız trivial çözümü vardır.

Eğer λ, bir özel değerse bu takdirde homogen integral denkleminin özel değerlere tekabül eden ve özel fonksiyonlar denilen lineer bağımsız çözümleri vardır. Homogen olmayan integral denkleminin genel olarak çözümü yoktur.

$c_{ik}=\delta_{ik}-\lambda a_{ik}$ koyarak denklem sistemi

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\lambda)A_k=b_i$$

şekline sokulabilir. $c_{ik}(\lambda)$ nın cebrik komplemanı $D_{ik}(\lambda)$ ile gösterilirse çözüm için

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,y,\lambda)f(y)\,dy \tag{229}$$

yazılabilir. Burada

$$\Gamma(x,y,\lambda)=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)}\alpha_k(x)\beta_i(y)$$

dir ve integral denkleminin çözücü çekirdeği adını alır.

İkinci nevi Fredholm integral denklemini cebrik denklemlerin çözümünde kullanılan iterasyon metodu yardımiyle de çözebiliriz. Birinci yaklaşık fonksiyon $\varphi_0(x)=f(x)$ seçilirse bununla integral denkleminin sağına giderek

$$\varphi_1(x)=f(y)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$$

elde edilir. Bu fonksiyonla tekrar integral denkleminin sağına giderek

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy+\lambda^2\int_a^b K_2(x,y)f(y)\,dy$$

yazılabilir. Burada

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,y)K(\eta,y)\,d\eta$$

dır ve $K(x,y)$ nin ikinci iterasyon çekirdeği adını alır. Birinci iterasyon çekirdeği $K_1(x,y)=K(x,y)$ dir. Bu fonksiyonla tekrar integral denkleminin sağına gidilir ve böylece devam edilirse

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \ldots + \lambda^n \int_a^b K_n(x,y)f(y)\,dy$$

bulunur. Her hangi bir iterasyon çekirdeği

$$K_n(x,y) = \int_a^b K_{n-1}(x,\eta)K(\eta,y)\,d\eta$$

şeklinde hesaplanır. $n\to\infty$ için Neumann serisi elde edilir ve

$$\Gamma(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}K_n(x,y)$$

koyarak

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,y,\lambda)f(y)\,dy \qquad (230)$$

yazılabilir. $\Gamma(x,y,\lambda)$, çözücü çekirdektir. Neumann serisinin yakınsaklık kriteryumu

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b [K(x,y)]^2 dx\,dy}}$$

dir.

İntegral denklemini Fredholm metodu ile çözmek için, belirli integralin bir toplamın limiti olarak tarif edilebilmesi gerçeğinden faydalanılır. y değişkeninin $a-b$ aralığındaki

$y_1=a\ ,\ y_2=a+\delta\ ,\ldots,\ y_n=a+(n-1)\,\delta\ \left(\delta=\frac{b-a}{n}\right)$ değerleri için

yaklaşık olarak

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy \approx K(x,y_1)\,\varphi(y_1)+\ldots+K(x,y_n)\,\varphi(y_n)$$

yazılabilir. Böylece ikinci nevi Fredholm integral denklemi

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\delta\left[K(x,y_1)\,\varphi(y_1)+\ldots+K(x,y_n)\,\varphi(y_n)\right]$$

şekline girer. x değişkenine de ayni değerleri vererek

$$\varphi_1=f_1+\lambda\delta\,(K_{11}\,\varphi_1+\ldots+K_{1n}\,\varphi_n)\quad ,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\varphi_n=f_n+\lambda\delta\,(K_{n1}\,\varphi_1+\ldots+K_{nn}\,\varphi_n)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Kısaltmalar

$$\varphi_i=\varphi(x_i)\ ,\quad f_i=f(x_i)\ ,\quad K_{ik}=K(x_i,x_k)$$

dır. f_i ve K_{ik} bilinen değerleri ve φ_i ise bilinmiyen değerleri gösterir. Denklem sistemini çözerek bulunan φ_i değerlerine $\varphi(x)$ fonksiyonunun $x=x_i$ için aldığı yaklaşık değerler gözüyle bakılabilir. Katsayılar determinantını sıfırdan farklı yapan λ değerleri için sistem çözülebilir. Denklem sisteminin çözümü

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,y,\lambda)f(y)\,dy \tag{231}$$

şeklindedir. Burada

$$D(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,\lambda^\nu\ ,\quad D(x,y,\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x,y)\,\lambda^\nu$$

ve

$$a_0=1\ ,\quad a_\nu=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1)\ldots K(\xi_1,\xi_\nu)\\ \cdots\cdots\cdots\\ K(\xi_\nu,\xi_1)\ldots K(\xi_\nu,\xi_\nu)\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_\nu\ ,$$

$$A_0(x.y)=K(x,y)\ ,$$

$$A_n(x,y)=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1)\ldots K(\xi_1,\xi_\nu)\,K(\xi_1,y)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(\xi_\nu,\xi_1)\ldots K(\xi_\nu,\xi_\nu)K(\xi_\nu,y)\\ K(x,\xi_1)\ldots K(x,\xi_\nu)\,K(x,y)\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_\nu$$

dır. Bu sonuç $n\to\infty$ limitine geçerek elde edilir. a_ν ve A_n lerin hesabına yarayan formüllere Fredholm formülleri denilir.

Şayet çekirdek simetrikse özel değerler reel olur ve böyle bir çekirdek en az bir özel değeri haizdir. Simetrik çekirdeğin iki farklı özel değerine tekabül eden özel fonksiyonlar ortogonaldir. λ_1 ve λ_2 özel değerlerine tekabül eden özel fonksiyonlar

$$\varphi_1(x)=\lambda_1\int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy\ ,\quad \varphi_2(x)=\lambda_2\int_a^b K(x,y)\,\varphi_2(y)dy$$

olduğuna göre $\lambda_1\neq\lambda_2$ için ortogonallik şartı

$$\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0$$

şeklinde olacaktır.

Yukarıda, integral denklemleri hakkında çok kısa bir bilgi verilmiştir. Konu hakkında daha etraflı bilgi edinmek için kitabın sonunda verilen literatüre müracaat tavsiye edilir.

45. Varyasyon hesabı.

Varyasyon problemlerinde karakteristik olan nokta integralleri ekstremum yapan fonksiyonların aranmasıdır. Şimdi konuyu açıklamak maksadiyle iki basit varyasyon problemini gözden geçirelim.

Düzlemdeki $P_1(x_1,y_1)$ ve $P_2(x_2,y_2)$ noktalarını birleştiren eğrinin uzunluğu minimum olacak şekilde bir $y(x)$ fonksiyonunun bulunması istenmektedir. Eğrinin uzunluğu

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

integrali ile hesaplanır. Varyasyon problemi bu integrali minimum yapan ve $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ sınır şartlarını sağlayan fonksiyonun bulunmasıdır. Sınır şartlarını sağlayan yani P_1 ve P_2 den geçen bir $y_1(x)$ fonksiyonu ile J integraline gidilirse belirli bir J_1 değeri ve yine ayni sınır şartlarını sağlayan diğer bir $y_2(x)$ fonksiyonu ile başka bir J_2 değeri elde edilir. Bu farklı fonksiyonlar arasında integrali minimum yapan fonksiyon problemin çözümü olacaktır. Bu problemin cevabı "doğru„ şeklinde olmakla beraber analitik olarak ifade şekli yukarıdaki gibidir.

P_1 ve P_2 noktalarından geçen eğrinin x—ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzey minimum olacak şekilde $y(x)$ fonsiyonunun bulunması istenmektedir. Varyasyon problemi

$$J=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\text{Min.}$$

şeklindedir ve sınır şartları yukarıdaki gibidir.

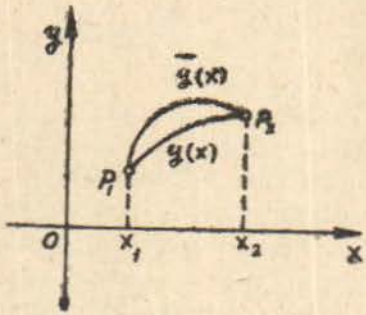
Bu basit örneklerden sonra şimdi varyasyon problemlerini genel olarak ifade ederek çözümlerini araştıralım. En basit bir varyasyon problemi $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ sınır şartlarını sağlayan ve

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx \qquad (232)$$

integralini ekstremum (maksimum veya minimum) yapan $y(x)$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Çözümü gösteren $y(x)$ eğrisine yakın olan ve ayni noktalardan geçen

$$\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$$

eğri ailesini gözönüne alalım, şeki 251. Burada $\eta(x)$, sürekli olarak türetilebilen ve $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ şartlarını sağlayan her hangi bir fonksiyonu ve ε ise x değişkenine bağlı olmayan küçük bir parametreyi göstermektedir. $\bar{y}(x)$ fonksiyonu ile (232) ye gidilirse



Şek. 251

$$J(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y+\varepsilon\eta\ ,\ y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

elde edilir. ε değiştikçe J de değişeceğinden J ye ε değişkeninin fonksiyonu gözüyle bakılabilir. $\varepsilon=0$ için $\bar{y}(x)=y(x)$ olduğundan ve $y(x)$ ise J integralini ekstremum yapan fonksiyonu gösterdiğinden $J(\varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon=0$ için ekstremum olacaktır. Bunun için de

$$J'(0)=\left(\frac{dJ}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$$

olmalıdır. Bu suretle varyasyon problemi bir fonksiyonun ekstremum problemine irca edilmiş olmaktadır. $J'(0)$ hesaplanırsa

$$J'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left(f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right)\eta\,dx=0$$

elde edilir. Bu integralin $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ şartlarını sağlayan herhangi bir $\eta(x)$ fonksiyonu için sıfır olabilmesi, parantez içindeki ifadenin sıfır olmasiyle sağlanabileceğinden

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0 \qquad (233)$$

diferansiyel denklemi elde edilir ($f_y=\partial f/\partial y$, $f_{y'}=\partial f/\partial y'$). Açık olarak

$$f_y-f_{xy'}-f_{yy'}y'-f_{y'y'}y''=0 \qquad (234)$$

şeklinde yazılabilen bu denkleme yukarıdaki varyasyon probleminin Euler (veya Euler-Lagrange) diferansiyel denklemi denilir ve ikinci basamaktan âdi bir diferansiyel denklemdir ($f_{y'y'}\neq 0$ olduğu kabul ediliyor). Euler denkleminin çözümlerine varyasyon probleminin ekstremalleri denilir. Genel çözümde iki integrasyon sabiti bulunacağından ekstremaller iki parametreli bir eğri ailesi teşkil ederler. Varyasyon probleminin her

çözümü bir ekstremal olmak zorunda ise de her ekstremal bir çözüm değildir. Bilindiği gibi bir değişkenli fonksiyonlarda birinci türevin sıfır olması bir ekstremum için gerekli ise de yeterli değildir. Zira $y'(x_0)=0$ için x_0 noktasında bir ekstremum bulunacağı gibi teğeti x— eksenine paralel olan bir boyun noktası da bulunabilir. Bunu belirtmek için x_0 noktasının bir stasyoner nokta olduğu ve bu noktada fonksiyonun $y(x_0)$ stasyoner değerini aldığı söylenir. Burada stasyoner terimi, $y(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasının çok yakınlarında çok az değiştiğini belirt mektedir. Benzer şekilde her ekstremalin (232) integraline bir stasyoner değer verdiği söylenebilir. $J'(0)=0$ şartı bir ekstremum için gerekli bir şart olmakla beraber yeterli değildir.

Varyasyon hesabında $\delta y=\bar{y}(x)-y(x)$ e $y(x)$ eğrisinin varyasyonu denilir. $\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$ için varyasyon $\delta y=\varepsilon\eta(x)$ dir. Keza

$$\delta J=\varepsilon J'(0) \tag{235}$$

J integralinin birinci varyasyonu adını alır. İkinci varyasyon $\delta^2 J=\varepsilon^2 J''(0)$ şeklindedir vs.. Varyasyon problemi $\delta J=0$ şeklinde de yazılabilir.

Euler denklemi özel hallerde sadeleşir. Meselâ f fonksiyonu y ye bağlı değilse $f_{y'}=$sab. denklemi ve x değişkenine bağlı değilse $f-f_{y'}y'=$sab. denklemi elde edilir. Şayet f fonksiyonu yalnız y' ye bağlı ise ekstremal $y(x)=ax+b$ şeklinde olur.

Yukarıda verilen birinci örnekte $f=\sqrt{1+y'^2}$ olduğundan ekstremallerin denklemi $y=ax+b$ dir. a ve b sınır şartları yardımiyle bulunur. İkinci örnekte $f=y\sqrt{1+y'^2}$ olduğundan Euler dedklemini çözerek ekstremaller için

$$y=a\,\mathrm{Ch}\frac{x-b}{a}$$

bulunur. a ve b sınır şartlarından bulunur.

Şayet varyasyon problemi

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} f\,(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})\mathrm{d}x=0 \tag{236}$$

şeklinde ise Euler diferansiyel denklemi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0 \qquad (237)$$

olur. Sınır şartları $y(x_1)=y_1$, $y'(x_1)=y_1', \ldots, y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$ ve $y(x_2)=y_2, y'(x_2)=y_2', \ldots, y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)}$ dir.

Bilinmiyen fonksiyonların sayısı birden fazla olursa varyasyon problemi

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \, dx = 0 \qquad (238)$$

olur. Burada sınır şartı olarak $y_i(x_1)$ ve $y_i(x_2)$ değerleri verilmiştir $(i=1,2,\ldots,n)$. Bu problem için

$$f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y_i'} = 0$$

şeklinde n Euler denklemi elde edilir.

Buraya kadar varyasyon problemlerinde yalnız bir bağımsız değişken bulunmaktadır. Bağımsız değişken sayısı birden fazla olursa iki, üç ve çok katlı integraller elde edilir. İki katlı bir integral için en basit varyasyon problemi

$$\delta \iint_B f(x, y, u, u_x, u_y) \, dx \, dy = 0 \qquad (239)$$

şeklindedir. Burada $u=u(x,y)$, $u_x=\partial u/\partial x$, $u_y=\partial u/\partial y$ dir. Problem, B bölgesini sınırlayan C eğrisi boyunca verilen bir değeri alan ve J integralini ekstremum yapan $u(x,y)$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Varyasyon probleminin Euler diferansiyel denklemi

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0$$

dır. Bu parsiyel diferansiyel denklemin her çözümü varyasyon probleminin bir ekstremalidir. Meselâ Dirichlet varyasyon problemi

$$J = \iint_B (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy = \text{Min.} \qquad (240)$$

dır. Bu problemde sınır eğrisi üstünde verilen bir değeri alan ve J integralini minimum yapan $u(x,y)$ fonksiyonu aranmaktadır. Problemin Euler denklemi

$$u=u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

dır. Böylece iki boyutlu Laplace denkleminin, Dirichlet varyasyon probleminin Euler diferansiyal denklemi olduğu anlaşılır.

Üç katlı integral için en basit varyasyon problemi

$$\delta\int\int\int_B f(x,y,z,u_x,u_y,u_z)\,dx\,dy\,dz=0 \tag{241}$$

dır. $u=u(x,y,z)$ dir. Burada, uzayda B bölgesini sınırlayan F yüzeyi boyunca verilen bir değeri alan ve integrali ekstremum yapan $u(x,y,z)$ fonksiyonu aranmaktadır. Euler diferansiyel denklemi

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}f_{u_z}=0 \tag{242}$$

dir. Maselâ uzaydaki Dirichlet problemi

$$J=\int\int\int_B (u^2_x+u^2_y+u^2_z)\,dx\,dy\,dz=\text{Min.} \tag{243}$$

dir ve Euler denklemi

$$u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

şeklindedir. Böylece üç değişkenli Laplace denkleminin uzaydaki Dirichlet probleminin Euler diferansiyel denklemi olduğu anlaşılır.

Potansiyel teorisinin birinci nevi sınır değeri problemi ile Dirichlet varyasyon problemi eşdeğer problemlerdir.

Sınır şartlarından başka bir takım integral şartlarını da ihtiva eden varyasyon problemlerine isoperimetri problemleri denilir. Basit bir isoperimetri problemi sınır şartlarını ve

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')\,dx = k = \text{sab.}$$

integral şartını sağlayan ve

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx$$

integralini ekstremum yapan $y(x)$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Problemin Euler diferansiyel denklemi

$$h_y - \frac{d}{dx} h_{y'} = 0 \tag{244}$$

şeklindedir. Burada

$$h(x,y,y') = f(x,y,y') + \lambda\, g(x,y,y')$$

dır. λ, bir parametreyi gösterir ve sınır şartlarından bulunur.

Bazen varyasyon problemlerini parametrik olarak ifade etmek elverişli olur. Basit bir varyasyon probleminin parametrik şekli

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt = 0 \tag{245}$$

dir. Burada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$ dir. İntegral değerinin parametrik gösteriş tarzından bağımsız olması için fonksiyonun $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ ye göre birinci basamaktan pozitif homogen olması, yani $k > 0$ olmak üzere

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = k\,F(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

şartının sağlanması gerekir. Meselâ $f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ için bu şart sağlanır. Varyasyon probleminin Euler denklemleri

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \ , \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0 \tag{246}$$

şeklindedir. Bu iki denklem bağımsız değildir.

Aşagıdaki

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx = 0$$

varyasyon problemi için $J''(0)$ hesaplanırsa

$$J''(0) = \int_{x_1}^{x_2} (R\eta'^2 + 2Q\eta\eta' + P\eta^2)dx \qquad (247)$$

bulunur. Burada P,Q ve R

$$P(x) = f_{yy} \quad Q(x) = f_{yy'} , \quad R(x) = f_{y'y'}$$

kısaltmalarını göstermektedir. İkinci varyasyon ise $\delta J = \varepsilon^2 J''(0)$ dır. Minimum kriteryumu bakımından şu soruları cevaplandırmak icap eder: 1) Hangi şartlar altında ikinci varyasyon pozitif olur? 2) İkinci varyasyonun pozitif olması bir minimum teşekkülü için yeterlimidir? İkinci soru ancak bazı sınırlamalar ile pozitif olarak cevaplandırılabilir. Birinci soru ise stabilite problemlerinde önemli bir rol oynar. Elverişli bir minimum kriteryumu elde etmek maksadiyle (247) de parantez içine, x_1 ile x_2 arasındaki integrali sıfır olan,

$$\frac{d}{dx}(\omega\eta^2) = \omega'\eta^2 + 2\omega\eta\eta'$$

terimini ilâve edelim. Burada $\omega(x)$, sürekli olarak türetilebilen her hangi bir fonksiyondur. Böylece $J''(0)$ için

$$J''(0) = \int_{x_1}^{x_2} [R\eta'^2 + 2(Q+\omega)\eta\eta' + (P+\omega)\eta^2]dx$$

elde edilir. Eğer $\omega(x)$, Riccati tipindeki

$$\omega' = -P + \frac{(Q+\omega)^2}{R} \qquad (248)$$

diferansiyel denklemini sağlayacak şekilde seçilirse

$$J''(0) = \int_{x_1}^{x_2} R \left(\eta' + \frac{Q+\omega}{R}\right)^2 dx$$

yazılabilir. Bu ifadenin pozitif olması için $x_1 \leqq x \leqq x_2$ aralığında

$$R(x) = f_{y'y'} \geqq 0 \qquad (249)$$

şartı sağlanmalıdır. Buna Legendre şartı denilir. Bu şart, bir minimum için gerekli fakat yeterli değildir.

Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü $y(x,a,b)$ şeklinde göstererek $u_1(x) = \partial y/\partial a$, $u_2(x) = \partial y/\partial b$ yardımiyle bir

$$\Delta(x,x_1) = u_1(x)\, u_2(x_1) - u_2(x)\, u_1(x_2)$$

fonksiyonu tarif edilirse minimum şartı $x_1' > x_2$ şeklinde belirtilebilir (Jacobi şartı). Burada x_1', Δ fonksiyonunu sıfır yapan ve x_1 den sonra gelen ilk x değerini göstermektedir. x_1' e x_1 in eşlenik değeri ve P_1 ile P_2 den geçen ekstremal üzerinde bulunan x_1' absisli noktaya P_1 in eşlenik noktası denilir. Δ fonksiyonu

$$u_{xx} + \frac{R'}{R} u_x + \frac{Q'-P}{R} u = 0$$

şeklindeki Jacobi diferansiyel denkleminin, $x = x_1$ için sıfır olan bir çözümünü karakterize eder.

Örnek olarak iki nokta arasındaki en kısa yol problemini inceleyelim. $f = \sqrt{1 + y'^2}$ olduğundan

$$R = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

dir ve Legendre şartı gerçeklenir. Ekstremallerin denklemi $y = ax + b$ şeklinde olduğundan $u_1 = x$, $u_2 = 1$ dir. Δ fonksiyonu için $\Delta(x,x_1) = x - x_1$ bulunur. $P = Q = R' = 0$ olduğundan (R=sab. dir) Jacobi diferansiyel denklemi $d^2u/dx^2 = 0$ şeklindedir. Δ fonksiyonunun bu denklemi sağladığını ve $x = x_1$ için sıfır olduğunu kolayca görebiliriz. Δ nın $x = x_1$ den başka sıfır noktası olmadığından Jacobi şartı da sağlanır.

Diğer bir örnek olmak üzere

$$\delta \int (y'^2 - \lambda^2 y^2)\, dx = 0$$

varyasyon problemini inceleyelim. Sınır şartları $y(0)=y(l)=0$ dır. Problemin Euler diferansiyel denklemi $y''+\lambda^2 y=0$ şeklindedir. Ekstremallerin denklemi

$$y(x)=a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$$

dir. $R(x)=2$ olduğundan Legendre şartı sağlanır. $u_1=\sin \lambda x$, $u_2=\cos \lambda x$ olduğundan $\Delta = \sin \lambda x$ olur. $P=-2\lambda^2$, $Q=0$, $R=2$ olduğundan Jacobi diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda^2 u=0$$

dır. Δ, bu denklemin $x=x_1=0$ için sıfır olan çözümüdür. $x_1=0$ ı takip eden sıfır noktası $x_1'=\pi/\lambda$ dır. İntegralin minimum olması için Jacobi şartı $\pi/\lambda>l$ dir.

Varyasyon problemlerini çözmek için Euler diferansiyel denklemini çözmek ve çözümü sınır şartlarına uydurmak gerekmektedir. Çözüm güç olduğu takdirde diferansiyel denklemin sınır değer problemini yaklaşık olarak çözmek yoluna gidilebilir. Keza diferansiyel denklemlere başvurmadan varyasyon problemini yaklaşık olarak çözmek için direkt metodlar da geliştirilmiştir. Şimdi bu direkt metodlardan biri olan Ritz metodunun dayandığı prensibi kısaca açıklayalım. Çözülecek varyasyon problemi

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\, dx=0$$

şeklinde olsun. Aranan fonksiyon belli sınır şartlarını sağlamaktadır. Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde yapıldığı gibi bu fonksiyonu bir seriye açmayı düşünebiliriz. Ancak bu serinin, problemin sınır şartlarına uyan terimlerden teşekkül etmesi gerekecektir. Bu maksadla meselâ

$$y_n(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$$

ikamesini yaptığımızı farzedelim. Burada $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ ler, sınır şartlarına uyan ve bunun dışında istendiği gibi seçilebilen fonksiyonlardır. Bu ifadeyle integrale gidilirse

$$J(c_1,\ldots,c_n)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y_n,y'_n)\mathrm{d}x$$

bulunur. J yi ekstremum yapan c değerleri

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=0,\ldots,\frac{\partial J}{\partial c_n}=0$$

denklemlerini çözerek bulunur. Buradan bulunan c leri y_n ifadesinde yerine koyarak aranan çözüm elde edilir.

Pratikte ekseriya bir sınır değeri problemini çözmeden meselâ kapasite, dalga direnci, özel frekans vs. gibi bir skaler büyüklüğün bulunması arzu edilir. Varyasyon hesabı yardımiyle diferansiyel denklemleri çözmeden bu büyüklükler tayin edilebilir. Bunun için de aranan büyüklüğü, alanı karakterize eden büyüklükleri ve bunların türevlerini ihtiva eden bir fonksiyonun integrali şeklinde ifade etmek icap eder. Keza bir varyasyon probleminin bahis konusu olabilmesi için gerçek alanın bu integrali ekstremum yapması gerekir. Meselâ bir kondansatörün kapasitesi için

$$C=\frac{2W}{U^2}=\frac{\varepsilon}{U^2}\int_B E^2\mathrm{d}V$$

yazılabilir. Burada W, sistemin potansiyel enerjisini ve U ise elektrodlar arasındaki gerilimi göstermektedir. Verilen bir gerilimde gerçek $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$ alanı için

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_B(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\mathrm{d}V=\mathrm{Min.}$$

olacaktır. Zira konservatif bir sistemde kararlı denge durumunda potansiyel enerji minimumdur. Gerçek potansiyel fonksiyonundan farklı olan bir ekstremal için W enerjisi daima φ için alacağı değerden büyük bir değer alır. Aranan büyüklük için varyasyon problemi formüle edildikten sonra, probleme uyan basit fonksiyonlar seçerek direkt metodla büyüklüğün yaklaşık değeri hesaplanabilir.

Varyasyon hesabı hakkında sırf bir fikir vermek maksadiyle kitabın çerçevesi içine alınan bu bahise son vermeden önce fizikteki bazı varyasyon prensiplerini kısaca gözden geçirelim. Bu prensiplere dayanarak varyasyon problemlerini formüle etmek kabil olur. Optiğin Fermat prensibine göre ışık yolu

$$J=\int_{P_1}^{P_2} n\,ds$$

integrali minimum olacak şekildedir. Burada $n=c/v$, kırılma endisini göstermektedir. v ile c, ışığın ortam içindeki ve boşluktaki hızlarıdır. Hamilton prensibine göre bir konservatif mekanik sistemde hareket

$$W=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,dt$$

integrali stasyoner bir değer alacak şekilde gelişir. T ve U, kinetik ve potansiyel enerjileri göstermektedir. Dirichlet prensibine göre de bir konservatif sistemde potansiyel enerji minimum olduğu vakit kararlı denge meydana gelir.

46. Diferens denklemleri.

Daha önce iki küre problemini incelerken

$$\frac{1}{q_{n+1}}+\frac{1}{q_{n-1}}=\frac{k}{q_n}$$

şeklinde bir diferens denklemi ile karşılaşmış ve çözümünü görmüştük (k=sab.). Bir diferens denkleminde bağımsız değişken sürekli olarak değişmez ve aranan fonksiyonun değerleri eşit aralıklarla zuhur eder. Sabit katsayılı lineer diferens denklemi genel olarak

$$y_{x+p}+a_1 y_{x+p-1}+\ldots+a_n y_x=0 \qquad (250)$$

şeklindedir. Bağımsız değişken x ile ve aranan fonksiyon y_x ile gösterilmiştir. Bağımsız değişken yukarıda olduğu gibi n ile gösterilirse bu denklemde x yerine n alınır. $f(x)$, bozucu fonksiyondur ve sıfır olduğu vakit denklem homogen olur. Diferens denkleminin basamağı en

yüksek ve en alçak endisli terimlerin endisleri arasındaki farka eşittir. (250) diferens denklemi p. basamaktandır. Meselâ

$$y_{x+2} - 4\,y_{x+1} + y_x = 0$$

2. basamaktan homogen ve lineer bir diferens denklemidir. x yerine $x-1$ koyarak denklem

$$y_{x+1} - 4\,y_x + y_{x-1} = 0$$

şeklinde de yazılabilir. İlk önce 2. basamaktan

$$y_{x+2} + a_1\,y_{x+1} + a_2\,y_x = 0$$

homogen diferens denkleminin çözümünü görelim. Bu maksadla $y_x = u^x$ ikamesi yapılırsa

$$u^{x+2} + a_1\,u^{x+1} + a_2\,u^x = u^x(u^2 + a_1\,u + a_2) = 0$$

bulunur. $u \neq 0$ olacağından

$$u^2 + a_1\,u + a_2 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri u_1 ve u_2 ile gösterilirse aşağıdaki hallerle karşılaşılır:

1) Kökler reeldir ve $u_1 \neq u_2$ dir. Diferens denkleminin genel çözümü

$$y_x = \mathrm{A}\,u_1^x + \mathrm{B}\,u_2^x$$

dir. A ve B sınır şartları yardımiyle bulunur. Nümerik hesaplar için çözümü hiperbolik fonksiyonlar yardımiyle ifade etmek elverişlidir. Bu maksadla, $u_1 = re^{\lambda}$ ve $u_2 = re^{-\lambda}$ koyarak

$$y_x = r^x\,(a\,\mathrm{Sh}\,\lambda x + b\,\mathrm{Ch}\,\lambda x)$$

bulunur ($a = A - B$, $b = A + B$). r ve λ, $u_1 u_2 = r^2 = a_2$ ve $u_1 + u_2 = 2r\,\mathrm{Ch}\,\lambda = -a_1$ denklemleri yardımiyle hesaplanırlar.

2) Kökler eşlenik kompleksdir, yani

$$u_1 = \alpha + j\beta = re^{j\lambda}\,,\quad u_2 = \alpha - j\beta = re^{-j\lambda}$$

şeklindedir. Genel çözüm

$$y_x = r^x (A e^{j\lambda x} + B e^{-j\lambda x})$$

veya

$$y_x = r^x (\alpha \sin\lambda x + b \cos\lambda x)$$

şeklinde olur $[a = j(A - B),\ b = A + B]$. $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ve $tg\lambda = \beta/\alpha$ dır.

3) Kökler eşittir, yani $u_1 = u_2$ dir. Genel çözüm

$$y_x = u_1^x (A + B x)$$

dir.

Yüksek basamaktan sabit katsayılı, lineer ve homogen diferens denklemleri de benzer şekilde çözülür.

Homogen olmayan sabit katsayılı lineer diferens denkleminin çözümü, homogen denklemin çözümüne denklemin partiküler çözümünü ilâve ederek bulunur. Örnek olarak

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8 y_x = x$$

diferens deklemini çözelim. Karakteristik denklemin kökleri $u_1 = 4, u_2 = 2$ olduğundan homogen denklemin çözümü

$$y = A\,4^x + B\,2^x$$

dir. Partiküler çözüm için $y_p = c_0 + c_1 x$ ikamesi yapılabileceğinden bununla diferens denklemine giderek $c_0 = 2/3, c_1 = 1/3$ bulunur. Genel çözüm

$$y_x = y + y_p = A\,4^x + B\,2^x + \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$$

dir.

Diferens denklem sistemleri de diferansiyel deklem sistemlerinde kullanılan metodlar yardımiyle çözülür. Meselâ

$$y_{x+2} + y_x + z_{x+1} - 2 z_x = 0 \ ,$$

$$y_{x+1} - 2 y_x - z_x = 0$$

sistemini çözelim. İkinciden $z_x = y_{x+1} - 2y_x$ bulunur. x yerine $x+1$ koyarak $z_{x+1} = y_{x+2} - 2y_{x+1}$ yazılabilir. z_x ve z_{x+1} ile birinci denkleme giderek y_x için 2. basamaktan

$$2y_{x+2} - 4y_{x+1} + 5y_x = 0$$

diferens denklemi elde edilir. Bu denklemi çözerek y_x bulunduktan sonra $z_x = y_{x+1} - 2y_x$ yardımiyle z_x bulunur.

Diferens denklemlerinden elektroteknikte bir çok yerlerde faydalanılmaktadır.

İki boyutlu veya eksenel simetrik sınır değeri problemlerinin analitik çözümü güçleştiği veya mümkün olmadığı takdirde yaklaşık çözümü elde etmek için diferens denklemlerinden faydalanılabilir. Metod, parsiyel diferansiyel denklem yerine diferens denkleminin akınmasına dayanır.

İki boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

şeklindedir. $\varphi(x, y)$ fonksiyonunu (x_0, y_0) noktası civarında Taylor serisine çarak

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]_0 \varphi$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]_0 \varphi$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial x}\right]^n_0 \varphi + \cdots \qquad (251)$$

elde edilr. Şek. 252 de görüldüğü gibi, incelenen bölgeyi eşit karelere ayırarak bir şebeke çizelim. Karelerin kenarları h ile gösterilmiştir. Taylor serisinde ikinci basamağa kadar giderek 1,2,3,4 noktalarının potansiyelleri için

$$\varphi_1 = \varphi_0 + h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0, \varphi_2 = \varphi_0 + h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0,$$

$$\varphi_3=\varphi_0-h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0,\ \varphi_4=\varphi_0-h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0$$

bulunur. Zira 1 için $x-x_0=h, y-y_0=0$,2 için $x-x_0=0, y-y_0=h$, 3 için $x-x_0=-h, y-y_0=0$,4 için $x-x_0=0,\ y-y_0=-h$ dır. Bu denklemler yardımiyle

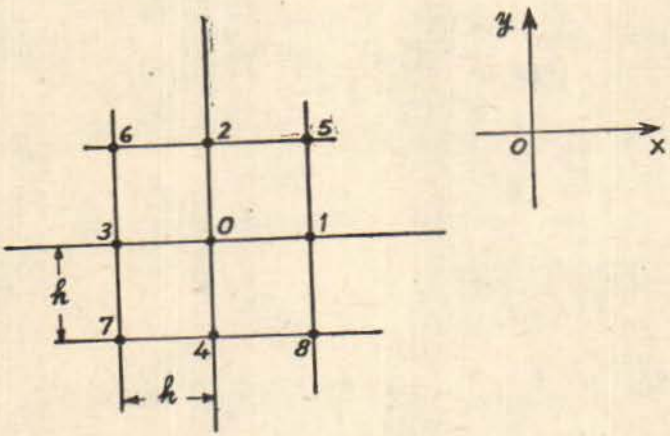
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0=\frac{1}{2h}(\varphi_1-\varphi_3)\quad,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0=\frac{1}{2h}(\varphi_2-\varphi_4)\ ,$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0=\frac{1}{h^2}(\varphi_1-2\varphi_0+\varphi_3),\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0=\frac{1}{h^2}(\varphi_2-2\varphi_0+\varphi_4)\quad(252)$$

elde edilir. Böylece Laplace denklemi

$$\varphi_0=\frac{1}{4}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)\qquad(253)$$

şekline girer. Bu diferens denklemine göre, kenarı $2h$ olan karenin



Şek. 252

ortasındaki potansiyel bu nokta civarındaki dört noktanın potansiyellerinin ortalamasına eşittir. Karenin h kenarı ne kadar küçük ve dolayısiyle şebekedeki kare sayısı ne kadar çoksa bu diferens denklemi de o kadar iyi bir şekilde parsiyel denklemin yerine geçer, yani ona eşdeğer olur. Sistemdeki sınır şartlarını gözönüne alarak şebeke-

deki her nokta için diferens denklemini yazarak n nokta için n lineer denklemden teşekkül eden bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerdeki bilinmiyenler n şebeke noktasının potansiyel değerleridir. Bu sistem iterasyonla çözülebilir.

Taylor serisi 5,6,7,8 noktaları için yazılırsa

$$\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) \tag{254}$$

bulunur. Buradaki potansiyel değerleri $2h$ kenarlı karenin diyagonalleri üstündedir (diyagonal formülü).

Şayet Taylor serisinde 6. basamağa kadar gidilirse

$$\varphi(x,y = \varphi(x_0,y_0) + \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]_0^n \varphi$$

elde edilir. Bu formülü 1,2,3,4 ve 5,6,7,8 noktalarına uygulayarak

$$\sum_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4\varphi_0 + h^2(\Delta\varphi)_0 + \frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)_0$$
$$= \frac{h^6}{6!}(6.\text{ parsiyel türevli terimler}) , \tag{255}$$

$$\sum_2 = \varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8 = 4\varphi_0 + 2h^2(\Delta\varphi)_0 + \frac{h^4}{12}\left(2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 12\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)_0 + \frac{h^6}{6!}(6.\text{ parsiyel türevli terimler}) \tag{256}$$

bulunur. Eğer $0{,}2\sum_1 + 0{,}05\sum_2$ toplamı teşkil edilirse

$0{,}2\sum_1 + 0{,}05\sum_2 = \varphi_0 + 0{,}3h^2(\Delta\varphi)_0 + 0{,}3\frac{h^4}{12}(\Delta^2\varphi)_0 + \frac{h^6}{6!}$(6. parsiyel türevli terimler) elde edilir. Burada

$$\Delta^2\varphi = \Delta\Delta\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}$$

dir. Bu ifade yardımiyle

$$\frac{0{,}2\,\Sigma_1 + 0{,}05\,\Sigma_2 - \varphi_0}{0{,}3\,h^2} = (\Delta\varphi)_0 + \frac{h^2}{12}(\Delta^2\varphi)_0 + \frac{h^4}{216}(6.$$ parsiyel türevli terimler) yazılabilir. $(\Delta\varphi)_0 = 0$ ve dolayısiyle $(\Delta^2\varphi)_0 = 0$ olduğundan yüksek basamaktan terimler ihmal edilirse (255) ve (256) formülleri (253) ve (254) şekillerini alırlar.

Yukarıda görülenlerden Laplace denklemi yerine

$$\varphi_0 = 0{,}2\sum_1 + 0{,}05\sum_2 \qquad (257)$$

diferens denklemi alındığı taktirde hatanın h^4 mertebesinde olacağı anlaşılır. Buna karşılık (253) veya (254) kullanıldığı vakit hatanın mertebesi h^2 dir. Bu suretle, 6. parsiyel türevlerin çok büyük değerler almaması şartiyle, kare sayısı az olsa bile (257) diferens denklemi ile (253) ve (254) den daha az hatalı bir sonuç elde edileceği anlaşılır. Yukarıdaki diferens denklemi ile çalışıldığı vakit de her şebeke noktası için denklemleri yazarak bir denklem sistemi elde edilir.

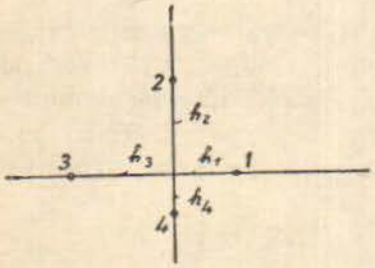
İncelenen sistemde dielektrik sabitleri farklı bölgeler bulunduğu taktirde sınır yüzeylerinde $\varphi_1 = \varphi_2$ ve $\varepsilon_1 \partial\varphi_1/\partial n = \varepsilon_2 \partial\varphi_2/\partial n$ şartlarını sağlamak gerekecektir. Bu çeşit ikinci meri sınır değeri problemlerini de diferens denklemleri metodu yardımiyle çözebiliriz.

Şayet şebekedeki noktalar eşit aralıklı değilse bu takdirde diferens denklemi

$$\left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4}\right)\varphi_0 = \frac{1}{h_1 + h_3}\left(\frac{\varphi_1}{h_1} + \frac{\varphi_3}{h_3}\right) + \frac{1}{h_2 + h_4}\left(\frac{\varphi_2}{h_2} + \frac{\varphi_4}{h_4}\right) \qquad (258)$$

şeklinde olur, şek. 253. Bu formülden karelerin çizilemedığı hallerde faydalanılır.

Birinci nevi sınır değeri problemlerinde sınır eğrisi boyunca potansiyel dağılışı verilmiştir ve bölge içindeki noktaların potansiyelleri aranmaktadır. Sınır eğrisi bir karenin veya dikdörtgenin çevresi olacağı gibi her hangi bir eğri de olabilir ve prensib bakımından hiç bir değişiklik olmaz. Daha kolay anlaşılmasını sağlamak maksadiyle şek. 254 de görülen dikdörtgeni inceleyelim. Diktörtgeni meselâ 12 eşit kareye bölelim. Sınır çizgisi boyunca 1,...,14 noktalarının potansiyelleri bilinmektedir ve I,...,VI noktalarının potansiyelleri aranmaktadır. İterasyon metodunu uygulayabilmek için I,...,VI noktalarının potansiylleri için kaba değerlerin alınması icap eder. Bu kaba değerler alındıktan sonra I den başlayarak



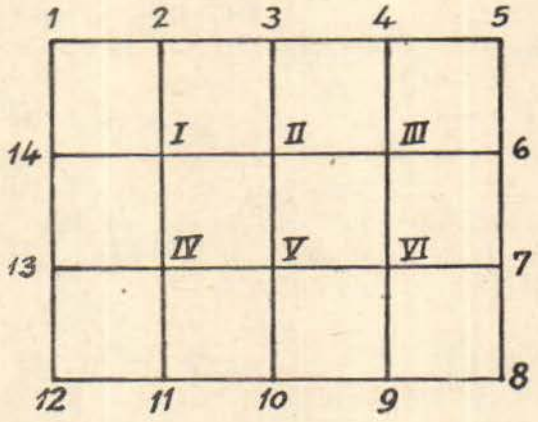
Şek. 253

(253) veya daha sıhhatli olan (258) yardımiyle yeni potansiyeller sıra ile hesaplanır. Her yeni potansiyeli hesaplarken daha önce düzeltilmiş olan potansiyel değerleri hesaba katılır. Yeni değerleri $\varphi_I', \ldots, \varphi'_{VI}$ ile gösterelim. φ_I' için

$$\varphi_I' = \frac{1}{4}(\varphi_{II} + \varphi_2 + \varphi_{14} + \varphi_{IV})$$

elde edilir. Bu değerden faydalanarak

$$\varphi_{II}' = \frac{1}{4}(\varphi_{III} + \varphi_3 + \varphi_I' + \varphi_V)$$



Şek. 254

yardımiyle φ_{II}' bulunur. Bundan faydalanarak

$$\varphi_{III}' = \frac{1}{4}(\varphi_8 + \varphi_4 + \varphi_{II}' + \varphi_{II})$$

yardımiyle φ_{III}' bulunur. Böylece soldan sağa doğru giderek birinci sıradaki noktalar bitince ikinci sıraya geçilir ve φ_{III}' , φ_V' , φ_{VI}' potansiyelleri ayni şekilde hesaplanır. İkinci sıradaki düzeltme de bitince tekrar I den başlıyarak ikinci iterasyonla $\varphi_I'', \ldots, \varphi_{VI}''$ değerleri elde edilir. Böylece potansiyel değerleri değişmeyinceye kadar hesaplara devam edilir.

Eksenel simetrik potansiyel alanında Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

şeklindedir. $\varphi(\rho, z)$ fonksiyonunu (ρ_0, z_0) noktası civarında seriye açarak ve yalnız ikinci basamağa kadar giderek

$$\varphi(\rho,z)=\varphi(\rho_0,z_0)+\left[(\rho-\rho_0)\frac{\partial}{\partial\rho}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]_0\varphi$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(\rho-\rho_0)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+2(\rho-\rho_0)(z-z_0)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}+(z-z_0)^2\frac{\varphi^2}{\partial z^2}\right]_0\varphi$$

elde edilir. $\rho-z$ düzlemindeki bölgeyi yine eşit karelere ayırarak (şek. 252 de x — ekseni yerine z — ekseni ve y — ekseni yerine de ρ — ekseni gelecek) 1,2,3,4 noktaları için yazılan denklemler yardımiyle

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_0=\frac{1}{2h}(\varphi_2-\varphi_4),$$
$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_0=\frac{1}{h^2}(\Sigma_1-4\varphi_0)$$

bulunur. Böylece yukarıdrki parsiyel diferansiyel denklem

$$\varphi_0=\frac{1}{4}\left[\sum_1+\frac{h}{2\rho_0}(\varphi_2-\varphi_4)\right] \tag{259}$$

diferens denklemi şekline girer. Eksen üstündeki noktalarda $\rho=0$ olacağından bu formül kullanılamaz. z—ekseni simetri ekseni olduğundan

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\partial\varphi/\partial\rho}{\rho}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\right)_{\rho=0}$$

bulunur. Böylece eksen üstündeki noktalar için diferansiyel denklem

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

şekline gireceğinden buradan diferens denklemine geçerek

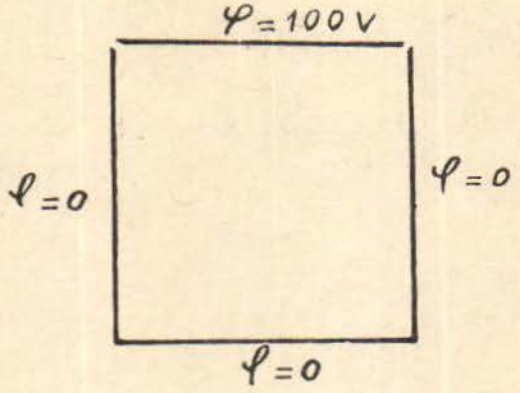
$$\varphi_0=\frac{2\varphi_2}{3}+\frac{1}{6}(\varphi_1+\varphi_3) \tag{260}$$

bulunur.

Aşağıda metodun nasıl kullanılacağını göstermek maksadiyle bazı basit örnekler verilmiştir.

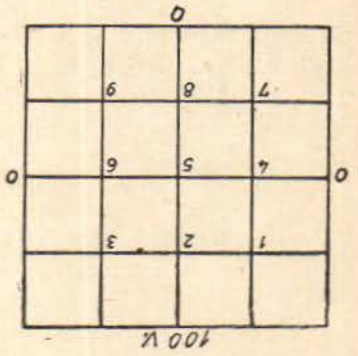
Örnekler:

1 — Şek. 255 deki kare içindeki potansiyel dağılışı bulunacaktır. Üstteki levhanın potansiyeli 100 V olarak alınmış olup diğer levhalar topraklanmıştır.



Şek. 255

Bölgeyi 16 kareye ayırarak şek. 256 daki şebeke elde edilir. İterasyona başlayabilmek için 1, . . . , 9 noktalarının potansiyellerini kaba olarak tahmin etmek gerekir. Bu maksadla ilk önce 5 noktasının potansiyelini tahmin edelim. Bu nokta şeklin merkezi olduğundan $\varphi_1 = \frac{1}{4}(0+100+0+0) = 25$ alınabilir. Bu değer yardımiyle ve diyagonal formülü kullanarak $\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{1}{4}(100+50+0+25) = 43{,}8$ ve $\varphi_7 = \varphi_9 = \frac{1}{4}(25+0+0+0) = 6{,}2$ bulunur. φ_2, φ_4, φ_6, φ_8 için de (253) yardımiyle $\varphi_2 = \frac{1}{4}(43{,}8+100+43{,}8+25) = 53{,}2$, $\varphi_4 = \varphi_6 = \frac{1}{4}(25+43{,}8+0+6{,}2) = 18{,}8$, $\varphi_8 = \frac{1}{4}(6{,}2+25+6{,}2+0) = 9{,}4$ elde



Şek. 256

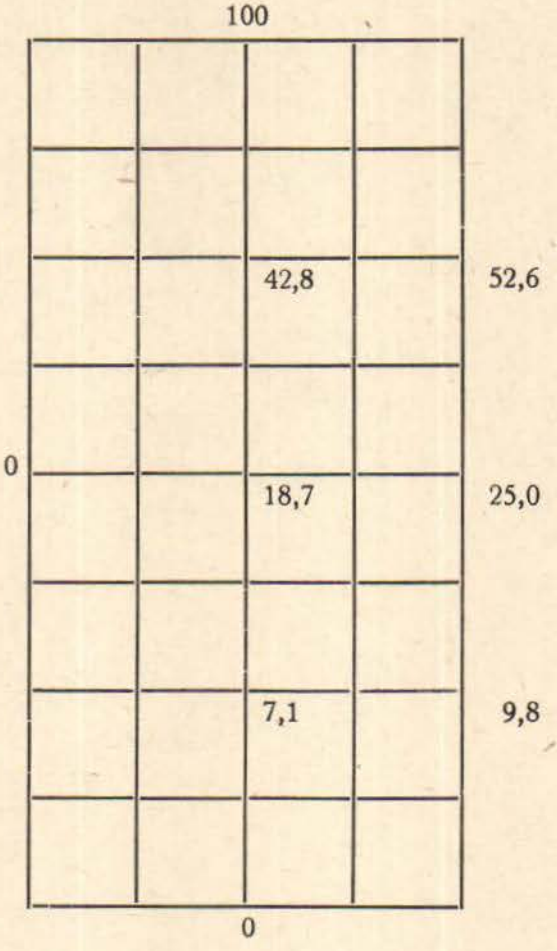
edilir. Bu kaba değerler iterasyon için başlangıç değerleridir. Bunun için 1 noktasından başlayarak ilk sıradaki değerleri düzeltelim. Yeni değerleri $\varphi_1', \ldots, \varphi_6'$ ile gösterirsek $\varphi_1' = \varphi_3' = \frac{1}{4}(53{,}2+100+0+18{,}8) = 43{,}0$, $\varphi_2' = \frac{1}{4}(43{,}0+100+43{,}0+25) = 52{,}8$ bulunur. İkinci sıraya geçerek $\varphi_4' = \varphi_6' = \frac{1}{4}(25+43+0+6{,}2) = 18{,}6$, $\varphi_5' = \frac{1}{4}(18{,}6+52{,}8+18{,}6+9{,}4) = 24{,}8$ elde edilir. Bu suretle birinci iterasyon bittikten sonra tekrar 1 noktasından başlayarak ikinci, üçüncü vs. iterasyonları yapılır ve bu işe potansiyel değerleri değişmeyinceye kadar devam edilir. Dört iterasyon sonucunda bulunan değerler aşağıdaki cetvelde görülmektedir.

100

	43,0	52,8	43,0	
	42,6	52,5	42,6	
	42,8	52,6	42,8	
0	42,8	52,6	42,8	0
	18,6	24,8	18,6	
	18,6	24,8	18,6	
	18,7	25,0	18,7	
	18,7	25,0	18,7	
	7,0	9,7	7,0	
	7,1	9,8	7,1	
	7,1	9,8	7,1	
	7,1	9,8	7,1	

0

Kare sayısını 16 dan 64 e çıkararak ayni işlemler yapılır ve böylece potansiyel dağılışı için gerçeğe daha yakın olan sonuçlar elde edilir. 16 kareli şebeke için bulunan değerler yeni şebeke için başlangıç değerleri olacaktır. Aşağıda yeni şebeke için hazırlanacak cetvel görülmektedir. Simetriden dolayı şebekenin yalnız sol yarısı çizilmiştir.



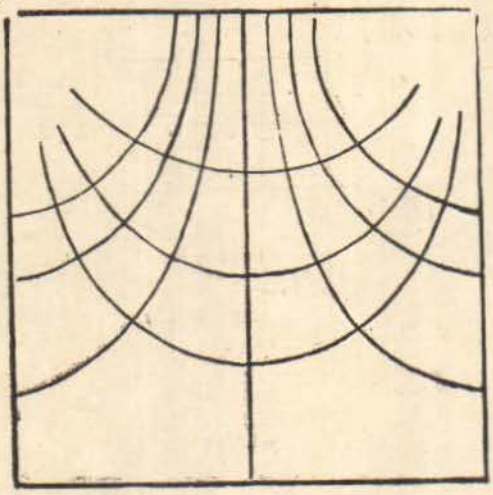
Bu problemin analitik çözümü

$$\varphi(x,y)=\frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{\mathrm{Sh}\,(n\pi x/a)}{\mathrm{Sh}\,(n\pi)}\,\sin\frac{n\pi y}{a}$$

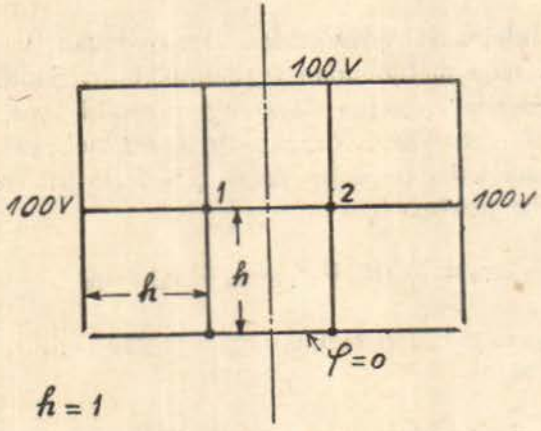
dir. a, karenin kenarıdır. Şek. 257 de eşpotansiyel çizgiler ve alan çizgileri görülmektedir.

2 — Şek. 258 de görülen dikdörtgenin kenarları arasındaki oran 2/3 dür. Potansiyel dağılışı bulunacaktır.

İlk önce $h=1$ için yazılan



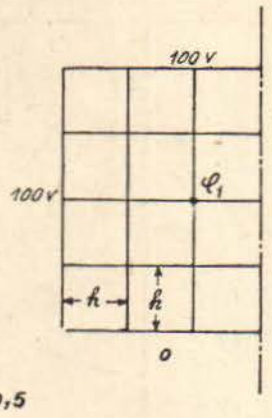
Şek. 257



Şek. 258

$$4\varphi_1 = 200 + \varphi_2 \ , \ 4\varphi_2 = 200 + \varphi_1$$

denklemleri yardımiyle $\varphi_1 = \varphi_2 = 200/3 \approx 66{,}7$ bulunur. $\varphi_1 = \varphi_2$ olacağını simetriden dolayı daha önce de görebilirdik. İkinci bir yaklaşma olarak $h = 0{,}5$ alınırsa şek. 259 daki şebeke elde edilir. Simetriyi gözönüne alarak şeklin yalnız sol yarısı çizilmiştir. Diyagonal değerler yardımiyle



Şek. 259

$\varphi_1 = 92$, $\varphi_3 = 83$, $\varphi_7 = 54$, $\varphi_9 = 33$ bulunur. Bu değerler yardımiyle $\varphi_2 = 85$, $\varphi_4 = 78$, $\varphi_6 = 62$, $\varphi_8 = 39$ elde edilir. İterasyonla, değerler değeşmeyinceye kadar işlemler yapıldıktan sonra $h = 0{,}25$ şebekesine geçilir.

Diferens denklemlerini çözmek için iterasyondan daha çabuk sonuca erişen rölaksasyon metodundan faydalanılabilir. Şimdi pratikte çok kullanılan bu nümerik metodun dayandığı prensibi kısaca gözden geçirelim. Aşağıdaki cetvelde 1. örnekte 16 kareli şebeke için iterasyondan önce bulunan kaba değerler yatay çizgilerin üst tarafına yazılmıştır. Her şebeke noktası için

$$\Delta\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) - \varphi_0$$

farkları hesaplanırsa sıfırdan farklı değerler elde edilir. Bu farkların dört katına eşit olan

$$R_0 = 4\Delta\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0$$

değerleri düşey çizgilerin soluna yazılmıştır. R_0 değerlerine rezidüal adı verilir. Gerçek değerleri elde etmek için rezidüalleri sıfır yapmak gerekir. Pratikte istenen yakınlık derecesine kadar metod uygulanır. Bütün rezialdüalleri sıfıra düşürmek için şu noktaları gözönüne almak icap eder:

1 — Şayet bir şebeke noktasındaki potansiyel $\delta\varphi_0$ kadar artarsa bu noktaya ait rezidüal $4\delta\varphi_0$ kadar azalır ve civardaki dört noktanın

100

	−3,2	43,8		−0,2	53,2		−3,2	43,8	
	0,0	43,0	3	−1,0		3	0,0	43,0	4
	−0,4		5	−1,8		4	−0,4		5
	0,0	42,9	9	−0,2	52,8	5	0,0		10
	−0,1		11	−0,3		9	−0,1		11
				−0,4		10			
				0,0	52,7	11			
	−0,2	18,8		+0,2	25,0		−0,2	18,8	
0	0,6		1	−0,2		5	0,6		2
	−0,2		3	0,2		8	−0,2		4
	0,0		7	0,1		11	0,0		8
	−0,1		9				−0,1		10
	+3,4	6,2		−0,2	9,4		+3,4	6,2	
	0,2	7,0	1	0,6		1	0,2	7,0	2
	0,6		6	1,4		2	0,6		6
	−0,2	7,2	7	−0,2	9,8	6	−0,2	7,2	8
				0,0		7			
				0,2		8			

0

0

rezidüalleri $\delta\varphi_0$ kadar artar. Eğer civardaki nokta sıfır eğrisi üstünde bulunuyorsa böyle bir değişikliğin bahis konusu olmayacağı açıktır.

2 — Tersine olarak bir şebeke noktasındaki rezidüalin δR_0 kadar azalması için bu noktadaki potansiyelin $\delta R_0/4$ kadar ve civardaki noktaların rezidüallerinin $\delta R_0/4$ kadar artması icap eder. Eğer civardaki nokta sınır eğrisi üstünde ise değişiklik bahis konusu değildir. İkinci özellik birinciden daha elverişlidir. Bunu uygularken mutlak değerce en büyük olan rezidüalden başlanır. Bu rezidüali sıfır yapmak için noktanın potansiyeli ve civardaki noktaların rezidüalleri değiştirilir. Bundan sonra diğer en yüksek rezidüale sahip olan nokta için ayni işlemler yapılarak devam edilir. Yukarıdaki cetvelde en yüksek rezidüal $+3{,}4$ dir. Bunu sıfır yapmak için bu noktanın potansiyelini $3{,}4/4 = 0{,}85$ kadar yükseltmek ve civardaki dört noktanın rezidüallerini 0,85 kadar arttırmak icap eder. 0,85 yerine 0,8 alarak bulunan değerler cetvelde görülmektedir. 0,8 değeri alındığı için rezidüal sıfıra düşmez ve $4.0{,}8 = 3{,}2$ kadar azalarak $+0{,}2$ değerini alır. Cetvelde işlem sıraları numaralanmıştır.

47. Grafik metod.

İki boyutlu ve eksenel simetrik tertiplerin alan şeklini grafik metod yardımiyle yaklaşık olarak elde etmek kabildir. Bulunan yaklaşık alan şeklinden kapasite, alan şiddeti gibi büyüklüklerin yaklaşık değerleri elde edilebilir. Grafik metodla çalışırken statik alanın aşağıdaki özellikleri gözönünde tutulur:

1 — İletkenlerin sınır eğrileri eşpotansiyel çizgilerdir.

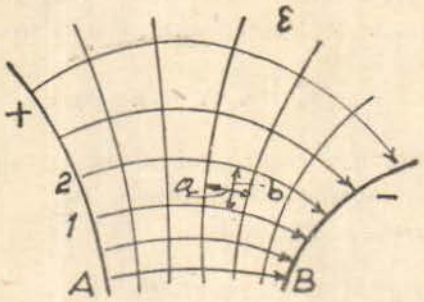
2 — Alan çizgileri eşpotansiyel çizgilere ve dolayısiyle iletkenlere diktir.

3 — Eşpotansiyel çizgiler iletkenlerin civarında sınır eğrisine yaklaşırlar.

Şekil 260 da iki silindirik iletken arasındaki alan görülmektedir. Eşpotansiyel çizgilerin eşit potansiyel farklarına sahip olacak şekilde çizildiklerini farzedelim. Gauss teoremine göre alan çizgilerinin sınırladığı alan tüplerindeki deplasman akısı sabittir. Şekilde 1 ve 2 ile işaretlenen alan çizgileri arasında ve düzleme dik doğrultuda birim uzunluk için deplasman akısı $\Delta\bar{\psi}$ ile gösterilirse yaklaşık olarak

$$\Delta\bar{\psi} = \varepsilon E b$$

yazılabilir. Burada E, kenarları a, b olan dikdörtgenin bulunduğu yerdeki alan şiddetidir. İki eşpotansiyel çizgi arasındaki potansiyel farkı $\Delta\varphi$ ile gösterilirse alan şiddeti için yine yaklaşık olarak



Şek. 260

$$E=\frac{\Delta\varphi}{a}$$

yazılabilir. Buradan $\Delta\varphi=$ sab. için E nin a uzaklığı ile ters orantılı olduğu görülmektedir. Bu iki bağıntıdan

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\bar{\psi}}{\Delta\varphi}$$

bulunur. $\Delta\varphi$ nin sabit olduğu kabul edildiğinden şayet $\Delta\bar{\psi}$ nin de bütün alan tüplerinde ayni değerde kalması istenirse $b/a=k=$ sab. olmalıdır. Bu suretle, $\Delta\varphi=$ sab. ve $\Delta\bar{\psi}=$ sab. şartlarını sağlıyabilmek için alan çizgilerinin bir eşpotansiyel çizgi üstünde ölçülen uzaklığı ile eşpotansiyel çizgilerin bir alan çizgisi üstünde ölçülen uzaklığı arasındaki oranın sabit tutulması gerekeceği anlaşılır. Şayet $k=1$ seçilecek olursa bütün alan kare şeklindeki hücrelerden teşekkül eder. Hiç şüphesiz bunlar geometrik anlamda kare değilse de çizgiler birbirine yaklaştıkça kare şekline yaklaşırlar.

Grafiğe, eşpotansiyel çizgileri kaba olarak çizmek suretiyle başlanır. Şayet sistemde üniform olarak kabul edilebilen bir bölge varsa bu bölgedeki bir doğruyu eşit parçalara bölerek eşpotansiyel çizgiler çizilir. Meselâ şek. 260 da alt tarafta durum böyledir ve AB doğrusunu eşit parçalara bölerek bu noktalardan geçen eşpotansiyel çizgileri yaklaşık olarak çizerek grafiğe başlanabilir. Eşpotansiyel çizgiler çizildikten sonra, 2 de belirtilen esası gözönünde tutarak ve mümkün mertebe $b=a$ olmasını sağlamaya geyret ederek alan çizgileri çizilir. İlk önce kaba bir şekil elde edilir. Fakat gerek eşpotansiyel çizgiler üstünde ve gerekse alan çizgileri üstünde yapılacak bir kaç düzeltmeden sonra gerçeğe yakın bir alan şekli elde edilebilir.

Çizilen alan çizgilerinin sayısı n ile gösterilirse bir elektroddan diğerine giden toplam deplasman akısı (birim uzunluk boyunca) için

$$\overline{Q}=n\,\Delta\overline{\Psi}=n\,\varepsilon\,\Delta\varphi$$

bulunur. Bu ise silindirik elektrodun birim uzunluk boyunca taşıdığı yüktür. Elektrodlar arasındaki gerilim U ile ve çizilen eşportansiyel çizgilerin sayısı m ile gösterilirse

$$U=(m+1)\,\Delta\varphi$$

olacaktır. Yukarıdaki ifadeler yardımiyle $\overline{Q}$ için

$$\overline{Q}=\varepsilon\frac{n}{m+1}U \tag{261}$$

bulunur. Buradan birim uzunluktaki kapasite için

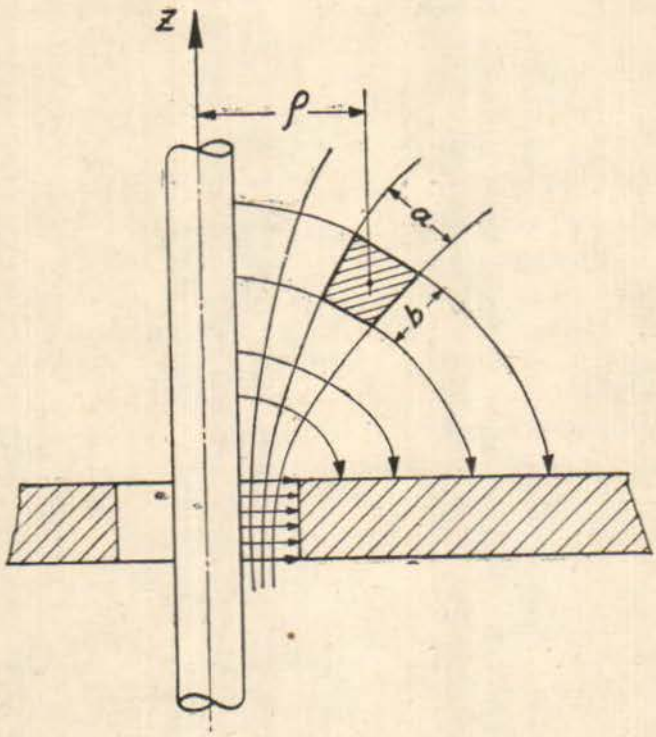
$$\overline{C}=\frac{\overline{Q}}{U}=\varepsilon\frac{n}{m+1} \tag{262}$$

elde edilir. Her hangi bir noktadaki alan şiddeti ise $E=\Delta\varphi/a$ yardımiyle hesaplanır. İletken sayısı ikiden fazla olduğu takdirde alan şekli benzer şekilde bulunur. Bu alan şeklinden de parsiyel yükler ve parsiyel kapasiteler elde edilebilir.

Şayet sistemde dielektrik sabitleri farklı olan ortamlar bulunursa sınır yüzeylerinde alan çizgilerinin kırılma şartını uygulamak ve her ortamda $\varepsilon_r\ b/a=k=$ sab. şartını sağlamak gerekir.

Eksenel simetrik sistemlerin alan şeklini de simetri eksenini ihtiva eden bir düzlem içinde grafik metodla bulabiliriz. Düzlemdeki alan şekli eksen etrafında döndürülerek uzaydaki alan şekli elde edilir. Şek. 261 de bir silindirik çubukla silindirik bir deliği bulunan kapak arasındaki alan görülmektedir. Alan şiddeti yine $E=\Delta\varphi/a$ dır. Alan tübleri rotasyon yüzeyleri tarafından teşkil edildiğinden deplasman akısı için yukarıdaki ifade yazılamaz. Simetri ekseninden ortalama uzaklığı ρ olan bir noktada iki komşu rotasyon yüzeyi arasındaki uzaklık b ile gösterilirse deplasman akısı için

$$\Delta\Psi=2\pi\rho\,b\,\varepsilon\,E$$



Şek. 261

elde edilir. Zira b nin eksen etrafında dönmesinden $2\pi\rho b$ kesiti meydana gelir. Böylece $E = \Delta\varphi / a$ koyarak

$$\rho \frac{b}{a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta\varphi}$$

yazılabilir. $\Delta\varphi = \text{sab.}$ ve $\Delta\Psi = \text{sab.}$ alınırsa

$$\varphi \frac{b}{a} = k = \text{sab.}$$

bulunur. k için her hangi bir değer seçerek alan şekli yukarıda yapıldığı gibi elde edilir.

Çizgi sayılarını yine n ve m ile göstererek yük ve kapasite için

$$Q = 2\pi\varepsilon k \frac{n}{m+1} U \quad , \qquad (263)$$

$$C = 2\pi\varepsilon k \frac{n}{m+1} \tag{264}$$

formülleri bulunur.

48. Statik alanın deneyle bulunması.

Alan şeklini deney yardımiyle de bulmak kabildir. Statik alanı deneysel olarak incelemek için bir çok metod vardır. Bu metodlar hakkında etraflı bilgi edinmek için özel literatüre müracaat edilmesi tavsiye edilir. Aşağıda analojiden faydalanarak alan şeklinin nasıl elde edileceği kısaca gözden geçirilecektir. Bu metodun esası, statik alanla diğer bir fiziksel potansiyel alanı arasındaki analojiden yani temel denklemler arasındaki benzerlikten faydalanarak alan şeklini modeller yardımiyle bulmaktan ibarettir. Meselâ bir iletken ortam içindeki stasyoner elektrik alanı arasındaki analojiden statik alanın şeklini bulmak için faydalanılabilir. Stasyoner alanın temel deklemleri

$$\vec{J} = \varkappa \vec{E} \quad , \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad , \quad \Delta\varphi = 0$$

şeklindedir. Burada $\vec{J}$, akım yoğunluğu vektörünü ve $\varkappa$ ise ortamın öziletkenliğini göstermektedir. Statik alanın temel denklemeleri ile karşılaştırarak $\vec{J}$ ile $\vec{D}$ nin ve ε ile $\varkappa$ nın analojik büyüklükler olduğu söylenebilir. Statik alandaki alan çizgileri stasyoner alanda akım çizgilerine tekabül ederler. Elektrolitik metodda iletkenlerin meselâ bakırdan yapılmış modelleri bir elektrolit içine daldırılır ve elektrodlar arasına bir gerilim tatbik edilir. İletkenlerin öziletkenliği elektrolitinkinden çok büyük olduğundan akım çizgilerinin elektrodların yüzeylerine dik oldukları kabul edilebilir. Elektrolit içinde her hangi bir noktadaki potansiyel ince bir tel sonda yardımiyle ölçülebilir ve bir köprü bağlaması ile ayni potansiyeldeki noktalar tesbit edilir. İncelenen sistemin direnci R ile gösterilirse analojik sistemin kapasitesi

$$RC = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \tag{265}$$

denklemi yardımiyle hesaplanabilir. Böylece iki elektrod arasındaki direnci ölçerek kapasiteyi bulmak kabil olur. Yalnız iki boyutlu alanlara mahsus olmayışı metodun en büyük avantajını teşkil eder. İki boyutlu sistemlerde eşpotansiyel çizgileri sondaya tesbit edilen bir pantograf yardımiyle doğrudan doğruya çizmek kabil olur.

Alan şeklini hidrolik analojiden faydalanarak da bulabiliriz. Burada $\vec{E}$ ile $\vec{v}$ hızı analojik büyüklüklerdir.

İki boyutlu sistemlerde membran metodundan da faydalanılmaktadır. Kenarı bir eğri boyunca tesbit edilen esnek membranın her hangi bir noktadaki sapması $h(x,y)$ ile gösterilirse

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial h^2}{\partial y^2}=0$$

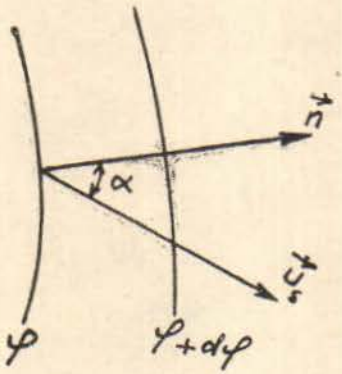
olur, yani sapmalar iki boyutlu Laplace denklemini sağlarlər. Bu metod ve diğer deneysel metodlar hakkında etraflı bilgi edinmek için literatüre müracaat tavsiye edilir.

EK

Vektör analiz formülleri

1. Gradyan.

Gradyan diferansiyel işlemi yardımiyle bir skaler fonksiyondan bir vektör fonksiyonu türetilir. Uzay koordinatlarına bağlı olan skaler fonksiyonu φ ile gösterelim. Şek. 1 de $d\varphi$ kadar farklı olan iki φ=sab. yüzeyi görülmektedir. φ = sab. yüzeyinin, artan φ ler yönündeki birim



Şek. 1

normali $\vec{n}$ ile ve her hangi bir yönü karakterize eden birim vektör $\vec{u_s}$ ile gösterilmiştir. φ nin $\vec{n}$ ve $\vec{u_s}$ yönlerine tekabül eden yön türevleri $\partial\varphi/\partial n$ ve $\partial\varphi/\partial s$ dir ve bunlar arasında

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\alpha \qquad (1)$$

bağıntısı vardır. Böylece yön türevinin, normal yönünde maksimum değer aldığı anlaşılır. $\partial\varphi/\partial s$ yön türevi, $\vec{n}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ vektörünün $\vec{u_s}$ yönündeki bileşenine eşittir. Vektör analizde, her hangi bir yöndeki bileşeni bu yöndeki yön türevine eşit olan vektöre gradyan adı verilir. Böylece

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n} , \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \vec{u}_s \cdot \text{grad } \varphi, \tag{3}$$

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot \vec{ds} \tag{4}$$

yazılabilir. Kartezyen koordinatlarda

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{5}$$

dir ve

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde târif edilen nabla (veya del) vektörel diferansiyel operatörü yardımiyie

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi \tag{6}$$

yazılabilir.

Bir $\vec{A}$ vektör fonksiyonunun $\vec{u}_s$ yönündeki yön türevi

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial s} = \vec{i} \frac{\partial A_x}{\partial s} + \vec{j} \frac{\partial A_y}{\partial s} + \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial s}$$

$$= \vec{i} (\vec{u}_s \cdot \nabla A_x) + \vec{j} (\vec{u}_s \cdot \nabla A_y) + \vec{k} (\vec{u}_s \cdot \nabla A_z)$$

dir ve

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial s} = (\vec{u}_s \cdot \nabla) \vec{A} \tag{7}$$

şeklinde gösterilir. $\vec{u}_s$ yerine bir $\vec{B}$ vektör fonksiyonu alınırsa

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{A} \tag{8}$$

olur.

2. Diverjans.

Diverjans diferansiyel işlemi yardımiyle bir vektör fonksiyonundan bir skaler fonksiyon türetilir. $\vec{A}$ vektör alanında bir P noktasını kuşatan F kapalı yüzeyi gözönüne alınırsa bu noktadaki diverjans

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_F \vec{A} \cdot d\vec{F}}{V} \tag{9}$$

limiti ile târif edilir. V, kapalı yüzeyin sınırladığı hacimdir ve yüzeyin pozitif normali dışarı doğrudur. Kartezyen koordinatlarda

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A} \tag{10}$$

dır.

Diverjansın limit tarifinden faydalanarak nabla operatörü için, koordinatlara bağlı olmayan,

$$\nabla = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_F d\vec{F}}{V} \tag{11}$$

şeklindeki limit târifi elde edilir. Böylece grad φ için

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_F \varphi \, d\vec{F}}{V} \tag{12}$$

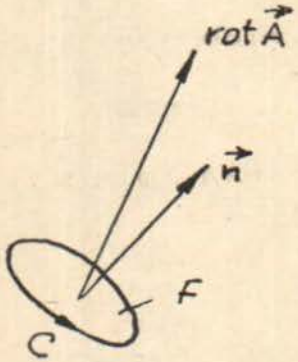
târifi elde edilir.

3. Rotasyonel.

Rotasyonel işlemi yardımiyle bir vektör fonksiyonundan yine bir vektör fonksiyonu türetilir. $\vec{A}$ vektör alanı içinde bir düzlem üstündeki C kapalı eğrisini gözönüne alalım, şek. 2. Eğrinin pozitif yönü, F yüzeyinin pozitif normali ile bir sağ sistem teşkil etsin. Aşağıdaki

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{F \to 0} \frac{\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{s}}{F} \tag{13}$$

limiti, rot $\vec{A}$ vektörünün P noktasındaki normal bileşenini târif eder. Limitin P deki değeri F yüzeyinin durumuna bağlıdır ve normal yönü rot $\vec{A}$ vektörünün yönüne intibak edince maksimum olarak rot $\vec{A}$ nın mutlak değerine eşit olur.



Şek. 2

Kartezyen koordinatlarda

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \nabla \times \vec{A} \qquad (14)$$

dir.

(11) yardımiyle rot $\vec{A}$ için

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_F d\vec{F} \times \vec{A}}{V} \qquad (15)$$

şeklindeki limit târifi elde edilir.

4. Vektörel idantiklikler.

Elektromagnetik alan teorisinde sık sık kullanılan önemli vektörel idantiklikler şunlardır:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(\varphi+\phi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\phi &&,\\
&\operatorname{grad}(\varphi\phi)=\varphi\operatorname{grad}\phi+\phi\operatorname{grad}\varphi &&,\\
&\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B})=\operatorname{div}\vec{A}+\operatorname{div}\vec{B} &&,\\
&\operatorname{div}(\vec{A}X\vec{B})=\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}+\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} &&,\\
&\operatorname{div}(\varphi\vec{A})=\vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\vec{A} &&,\\
&\operatorname{rot}(\vec{A}+\vec{B})=\operatorname{rot}\vec{A}+\operatorname{rot}\vec{B} &&,\\
&\operatorname{rot}(\varphi\vec{A})=\operatorname{grad}\varphi X\vec{A}+\varphi\operatorname{rot}\vec{A} &&,\\
&\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0 &&,\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0 &&.
\end{aligned}
\right\} \qquad (16)
$$

Bu ifadelerde φ, ϕ skaler fonksiyonları ve $\vec{A}, \vec{B}$ ise vektör fonksiyonlarını göstermektedir.

Elektromagnetik alan teorisinde çok rastlanan bir diferansiyel işlem de rot rot $\vec{A} = \nabla X(\nabla X\vec{A})$ dir. Bu işlem için

$$\nabla X(\nabla X\vec{A}) = (\nabla\cdot\vec{A})-(\nabla\cdot\nabla)\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-(\nabla\cdot\nabla)\vec{A} \qquad (17)$$

yazılabilir. Kartezyen koordinatlarda

$$(\nabla\cdot\nabla)\vec{A}=\nabla^2\vec{A}=\Delta\vec{A} \qquad (18)$$

yazılabilir ve

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (19)$$

Laplace operatörüdür. Diğer koordinat sistemlerinde son işlem ancak lineer koordinatlar için uygulanabilir.

Skaler fonksiyonun laplasiyeni

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi \qquad (20)$$

dir.

5. İntegral teoremleri

Diverjans teoremi:

$$\oint_F \vec{A} \cdot d\vec{F} = \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV \tag{21}$$

dir. V yi sınırlayan F kapalı yüzeyi için pozitif normal yönü dışarı doğru alınır.

Stokes teoremi:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{F} \tag{22}$$

dir. C eğrisinin pozitif yönü ile bu eğriye dayanan F yüzeyinin pozitif normali bir sağ sistem teşkil eder.

Diverjans teoreminde $\vec{A} = \varphi \operatorname{grad} \phi$ koyarak

$$\oint_F \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} dF = \int_V (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \phi + \varphi \Delta \phi)\, dV \tag{23}$$

bulunur (1. Green teoremi).

1. Green teoreminde φ ile ϕ nin rollerini değiştirip elde edilen iki denklemi yekdiğerinden çıkararak

$$\oint_F \left(\varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dF = \int_V (\varphi \Delta \phi - \phi \Delta \varphi)\, dV \tag{24}$$

bulunur (2. Green teoremi).

Diverjans teoreminde $\vec{A}$ yerine $\vec{A} X \operatorname{rot} \vec{B}$ koyarak Green teoremlerinin vektörel şekilleri elde edilir.

Diverjans teoreminde $\vec{A} = \vec{u}\varphi$ koyarak ($\vec{u}$ = sabit birim vektör) ve $\operatorname{div}(\vec{u}\varphi) = \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi$ olduğunu gözönüne alarak

$$\oint_F \varphi\, d\vec{F} = \int_V \operatorname{grad} \varphi\, dV \tag{25}$$

bulunur.

Diverjans teoreminde $\vec{A}$ yerine $\vec{u}\vec{X}\vec{A}$ koyarak ($\vec{u}$ = sabit birim vektör)

$$\oint_F d\vec{F}\, X\, \vec{A} = \int_V \text{rot}\ \vec{A}\, dV \tag{26}$$

bulunur.

Stokes teoreminde $\vec{A} = \vec{u}\varphi$ koyarak ($\vec{u}$ = sabit birim vektör)

$$\oint_C \varphi\, d\vec{s} = \int_F d\vec{F}\, X\, \text{grad}\ \varphi \tag{27}$$

bulunur.

6. Vektör bileşenlerinin transformasyonu.

Kartezyen bileşenleri her hangi bir ortogonal bileşene transforme etmek için

$$A_u = \frac{1}{h_u}\left(A_x \frac{\partial x}{\partial u} + A_y \frac{\partial y}{\partial u} + A_z \frac{\partial z}{\partial u}\right) \tag{28}$$

bağıntısından faydalanılır. u yerine v, w alarak diğer bileşenlere ait ifadeler elde edilir. x, y ve z koordinatları ile u, v, w ortogonal koordinatları arasında

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

bağıntıları vardır.

Literatür

1. R. Becker: Theorie der Elektrizitaet; Teubner, Leipzig, 1949.
2. A. Betz: Konforme Abbildung: J. Springer, Berlin, 1948.
3. B. Bleaney: Electricity and Magnetism; Oxford, 1957.
4. A. Bronwell: Advanced Mathematics in Physics and Engineering; McGraw-Hill, New York, 1953.
5. H. Buchholz: Elektrische und magnetische Potentialfelder; J. Springer, Berlin, 1957.
6. F. Dacos: Conception actuelle de l'électricité théorique; Dunod, Paris, 1957.
7. E. Durand: Électrostatique et magnétostatique; Masson et Cie, Paris, 1953.
8. A. Duschek: Vorlesungen über höhere Mathematik; J. Springer, Wien, 1961.
9. J. Fischer: Einführung in die klassische Elektrodynamik; J. Springer, Berlin, 1936.
10. P. Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik; J. Springer, Berlin, 1962.
11. G. P. Harnwell: Principles of Electricity and Elektromagnetism; McGraw-Hill, New York, 1949.
12. G. Hamel: Integralgleichungen; J. Springer, Berlin, 1949.
13. R. F. Harrington: Introduction to Electromagnetic Engineering; McGraw-Hill, New York, 1958.
14. W. H. Hayt: Engineering Electromagnetics; McGraw-Hill, New York, 1958.
15. J. Jeans: Electricity and Magnetism; Cambridge University Press, 1927.
16. J. D. Kraus: Electromagnetics; McGraw-Hill, New York, 1953.
17. K. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik; J. Springer, Berlin, 1951.
18. Landau and Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media; Pergamon Press, Oxford, 1960.
19. R. V. Langmuir: Electromagnetic Fields and Waves; McGraw-Hill, New York, 1961.
20. G. Mie: Lehrbuch der Elektrizitaet und des Magnetismus; Ferdinand Enke, Stuttgart, 1941.
21. F. Ollendorff: Potentialfelder der Elektrotechnik; J. Springer; Berlin, 1932.
22. K. Pöschl: Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik; J. Springer, Berlin, 1956.
23. E. M. Pugh: Principles of Electricity and Magnetism; Addison-Wesley, Massachusetts, 1960.
24. Reitz and Milford: Foundations of Electromagnetic Theory; Addison-Wesley, Massachusetts, 1960.

25. Rothe, Ollendorff, Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendungen in der Technik; J. Springer, Berlin, 1931.

26. W. E. Rogers: Introduction to Electric Fields; McGraw-Hill, New York, 1954.

27. C. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik; Walter de Gruyter, Berlin, 1950.

28. F. Schwank: Sınır değer problemleri; İ.T.Ü. Matbaası, İstanbul, 1957 (Çeviren: Doç. S. Tameroğlu).

29. W. T. Scott: The Physics of Electricity an Magnetism; John Willey, New York, 1959.

30. S. Seely: Introduction to Electromagnetic Fields; McGraw-Hill, New York, 1958.

31. Slater and Frank: Electromagnetism; McGraw-Hill, New York, 1947.

32. W. R. Smythe: Static and Dynamic Electricity; McGraw-Hill, New York, 1950.

33. A. Sommerfeld: Electrodynamics; Academic Press, New York, 1952.

34. J. A. Stratton: Electromagnetic Theory; McGraw-Hill, New York, 1941.

35. E. Weber: Electromagnetic Fields; John Willey, New York, 1950.

36. A. Weigand: Die angenaehrte Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens; Veb Verlag Technik, Berlin, 1953.

37. W. Weizel: Lehrbuch der theoretischen Physik; J. Springer, Berlin, 1949.

38. C. R. Wylie: Advanced Engineering Mathematics; McGraw-Hill, New York, 1951.

İNDEKS

Akı fonksiyonu 313
Alan çizgisi 3
— integrali 9
— şiddeti 1

Basınç kuvveti 146
Bessel fonksiyonları 183
Bilineer tasvir 321
Bipoler koordinatlar 170

Cauchy—Riemann dif. denk. 312

Çift tabaka dağılışı 25
Çizgisel kaynak 9
— kaynağın alanı 15
— dipol 28

Dairesel diskin alanı 20
— halkanın — 17
— silindirik koordinatlar 167
Deplasman 1
— akısı 3
Dielektrik sabiti 1
Diferens denklemleri 421
Dipoler koordinatlar 172
Dirichlet problemi 163
Düşey anten 93

Ekstremal 412
Elektriksel ekranlama 32
Elipsoidal koordinatlar 175
Eliktik integraller 18
— silindirik koordinatlar 168
Euler denklemi 412

Gauss teoremi 3
Gerilim 2
Gradyan 2
Green fonksiyonları 392
— teoremi 40

Hacimsel kuvvetler 147

İmaj metodu 40
İşletme kapasitesi 39

Fourier integrali 179
— serisi 179
Fredholm integral denklemleri 402

Kapasite katsayısı 37
Karışık problem 163
Kelvin transformasyonu 299
Kompleks alan şiddeti 313
— potansiyel 313
Konform tasvir metodu 311
Küresel kondansatör 44
— koordinatlar 171

Laplace denklemi 5
Legendre fonksiyonları 183

Maxwell gerilme tansörü 147
Metrik katsayı 166

Neumann problemi 163
Noktasal dipol 25
— yük 7
Norm 179

Ortogonal fonksiyonlar 178

Paraboloidal koordinatlar 175
Parabolik sillndirik koordinatlar 169
Parsiyel kapasite 38
Poisson denklemi 5
— integrali 381
Polarizasyon 108
— yoğunlukları 109
Potansiyel 2
— denklemi 4
— integrali 8
— katsayısı 34
Rezidüal 434
Riemann yüzeyi 323
Ritz metodu 419
Rölaksasyon metodu 434

Schwarz—Christoffel tasviri 338
Sferoidal koordinatlar 172
Sınır değeri problemleri 163
— şartları 5
Silindirik kandansatör 46
Sturm—Liouville problemi 183

Teklik teoremi 163
Tesir katsayısı 37
Thomson teoremi 140
Toprak kapasitesi 38
Toroidal koordinatlar 177

Üç boyutlu enversiyon 297
Unicursal eğriler 337

Varyasyon 413

Yatay anten 93