Grafik Çiziminde Matematik Metodu

Çeviren: Emel **BAYKAL**
T. Müh. E.İ.E.

Muhtelif tecrübe, ölçü ve müşahedeler neticesi elde edilen nümerik değerleri, uygun bir eğri ile temsil etmek, mühendislikte çok sık rastlanan problemlerden biridir. Bulunmuş noktalar ekseriya tam olarak belirli bir geometrik eğri üzerine düşmeyip,, böyle bir eğrinin civarında bulunurlar. Hesap yapmaksızın, bu noktalardan hareket ederek çizilebilecek muhtelif eğriler bulunabilir ki, bu makalenin gayesi, bu variyantlar arasında hakikate en yakın olanını matematik metotla bulmaktır. Umumiyetle mühendisler tam ve matematiksel bir eğri çizjminin çok kanşık ve zaman alan bir iş olduğu düşüncesine kapılarak, noktalan elle birleştirmek suretiyle lalettayin bir eğri elde etmeği tercih ederler. Halbuki problemlerin pek çoğunda doğru, eksponansiyel (üstel), hiperbolik, parabolik ve logaritmik eğriler, verilen npktalar topluluğunu kp[1] aylıkla ifade ektiğinden, herşeyden evvel bu basit bağıntıların araştırılması lâzımdır. Aşağıda verilen noktaların bu şekildeki geometrik eğrilerden herhangi birine uygun olup olmadığının matematik y.oldan nasıl araştırılacağı gösterilmiştir.

Doğru hali:

Ekseri haUerde eldeki noktalar bir doğru civannda butyınurlar. Fakat noktalân Jşaretledikten sonrp cetveli alıp ortalama b|r doğru çizmeğe çalışmak ta çok zaman hatalara sebebiyet vereceğinden, bu doğrunun matematik metotla denkleminin elde edilmesi -lâzımdır. Genel bir doğru 'denklemi Y = a + bX şeklindedir, a ve b sabitelerinin tâyini için cebirsel yolla şu iki denklem elde g$&g *&i§-*lür:

N.a + (ŞX).b = ÇY (A)
(£X) .a + (£X²) .b = gXY (B)

Burada:

£X : Bütün mevcut noktaların apsisleri toplamı
£X² : Bütün ŞıeYeuJ npktalâ^n apsislerinin kareleri toplamı

NOT : *t* İle toplamlar İfade edilmiştir.

£Y : Bütün mevcut noktaların ordinattan toplamı
£XY : Bütün noktaların apsis ve ordinatlannın çarpından toplamı ve
N : Bilinen noktalann sayısını göstermektedir.

Hesabı kolaylaştırmak için, bu faktörlere göre bir tablo hazırlanabilir. (Tablo I).

TABLO I

NÜ W	*X*	*r*	*X**	*xr*
Σ				

(A) ve (B) eşitliklerinden a ve b yi bulmak için aşağıdaki sıra takip edilir :

1) Bilinen değerler (A) ve (B) de yerlerine konur.
2) (A) denklemini $\frac{(\Sigma X)}{N}$ ile çarparak yeni bir (C) denklemi elde edilir.
3) (B) denkleminden (C) yi çıkanp (a) lı terim yokedilir ve (D) denklemi elde edilir.
4) (D) denklemi (b) ye göre çözülür.
5) (b) değeri (A) denkleminde yerine konulup (a) çözülür.
6) Genel denklemde a ve b yerine konulur.

Bu şekilde a ve b değerlerini hesaplayıp doğruyu çizdikten sonra, bu doğrunun mevcut noktalar topluluğunu hakikaten temsil edip etmediğini araştırmak lâzımdır.

İntibak kriteri :

Mevcut noktaları temsil edecek en uygun eğrinin çizilmesinde,, bu noktalarla eğri üzerinde bunlara tekabül eden noktalar arasındaki farkların kareleri toplamının minimum olması şartı gerçekleştirilmelidir. Bu şekilde elde edilecek R korelasyon (mütekabil münasebet) katsayısı, eğrinin uygunluk derecesi için bir ölçü teşkil eder.

$$R = \sqrt{1 - \frac{\frac{\Sigma(Y - Yc)^2}{N}}{\frac{(\Sigma Y^2)}{N} - \left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}}$$

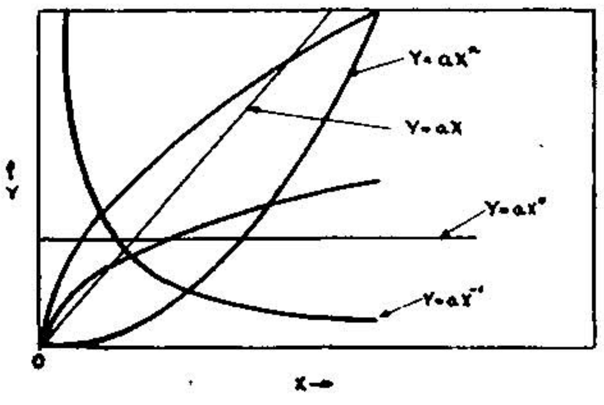
Burada

Y : Bilinen noktanın ordinatı
Ye: Eğri üzerinde, bilinen noktaya tekabül eden noktanın ordinatıdır.

Hesaplan kolaylaştırmak için Tablo I. in sağ tarafına beş sütun daha [Y^2; bX; Ye; (Y—Ye) ve $(Y — Ye)^2$] ilâve etmelidir.

R değeri mutlaka + 1 den küçük olacaktır. R' in 0,94 ile 1,00 arasında kalması, eğrinin verilen noktalan kâfi bir hassasiyetle lemsıl ettiğini gösterir. R, 0,75 ile 0,94 arasında ise, başka bir eğri şeklini denemek veya ilâve birkaç nokta elde etmek yoluna gitmelidir. Eğer karekok içinde negatif bir değer kalıyorsa, noktalann yatay bir doğru üzerinde bulunması icabettiği anlaşılmalıdır.

ŞEKİL I



Üstel bir eğri hali :

Böyle bir eğrinin genel denklemi Y = aX" şeklindedir, a ve n değerlerine bağlı olarak bu fonksiyonun muhtelif eğrileri şekil 1. de verilmiştir. Meselâ n = 0 için eğri bir yatay doğrudur; n = 1 için orijinden geçen ve eğimi a olan bir doğrudur; n = — 1 için eşkenar hiperboldür; n'in diğer değerleri için muhtelif eğri şekilleri elde edilir. Dikkat edilirse, birçok hallerde eğriler ya orijinden geçmekte veya eksenleri asimtot almaktadır.

Bu sınıftaki eğrilerin avantajı, a ve n hesaplanırken, önceden en uygun eğri şeklinin bilinmesine lüzum hasıl olmayışıdır. Hesaplar bu sınıfa ait en uygun eğrinin a ve n değerlerini otomatikman verecektir.

a ve n'i bulmak için kulalnılacak eşitlikler şunlardır:

£log (Y) = n . { log X + N.loga (A)
£(logY.logX) = n,£(logX)^2 + (loğa) .£logX (B)

Hesaplara başlarken X; Y; logX; logY; $(logX)^2$ ve log X logY başlıklı sütunlardan ibaret bir tablo hazırlanır. Bundan sonra :

1) Bu tablodaki değerler (A) ve (B) eşitliklerinde yerlerine konur.
2) (A) denklemi loğa ile bölünüp (A') denklemi; (B) denklemi loğa ile bölünüp (B) denklemi elde edilir.
3) (A') denkleminden (B*) çıkarılıp n'e göre çözülür.
4) n değeri (A') eşitliğinde yerine konup (log a) çözülür.
5) (loğa) dan a bulunur ve a ile n genel denklemde yerlerine konulur.
6) R korelasyon katsayısı hesaplanır

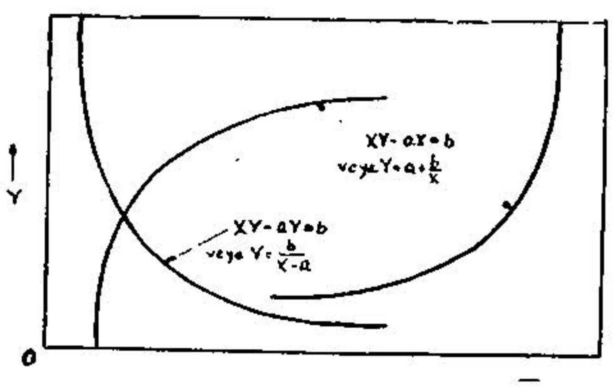
Hiperbol hali:

Üstel fonksiyonun hususî bir hali, ekseni değışmeksizin hareket edebilen fakat dönemeyen eşkenar hiperboldür. Genel hiperbol eğrisi ise, eksenler yerine, herhangi bir doğruyu asimtot kabul edebilir. Bu eğrinin en çok kullanılan iki şekli:

XY — aY = b
XY — aX = b

denklemleriyle ifade edilir. Bu sınıftaki eğriler Şekil 2. de gösterilmiştir.

ŞEKİL 2



Bu denklemde yine iki bilinmeyen sabite olduğun'dan iki eşitliğe ihtiyaç vardır.

$XY - aY = b$ için

$$\Sigma X.Y - a.\Sigma Y = N.b \qquad (A)$$

$$\Sigma X^2 Y - a.\Sigma XY = b.\Sigma X \qquad (B)$$

ve $Y = a + \dfrac{b}{X}$ için

$$\Sigma Y = a.N + b.\Sigma\left(\frac{1}{X}\right) \qquad (A)$$

$$\Sigma\left(\frac{Y}{X}\right) = a.\Sigma\left(\frac{1}{X}\right) + b.\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)^2 \qquad (B)$$

denklemleri kullanılır. Bunların çözümünde :

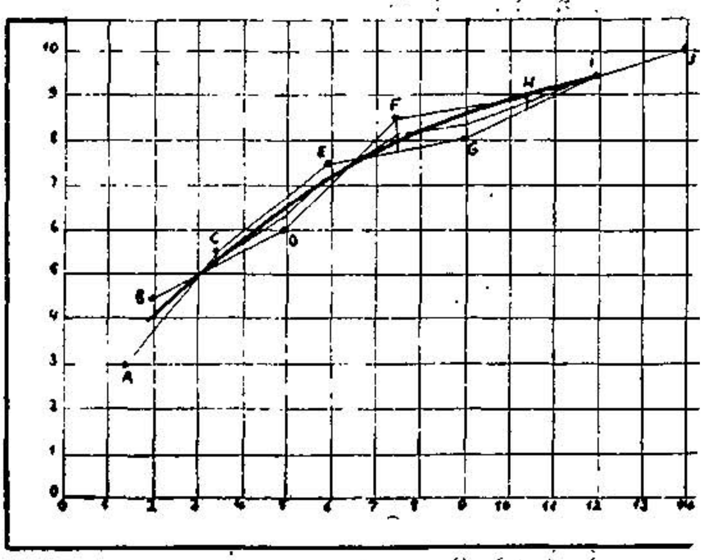
1) Eşitliklerde kulanılan faktörleri ihtiva eden bir tablo hazırlanır.
2) Tablodaki' değerler eşitliklerde yerlerine konur.
3) (A) denklemi b ile bölünüp (A') denklemi elde edilir.
4) (B) denklemi b ile bölünüp (B") denklemi elde edilir.
5) (A') denkleminden (B") çıkarılıp, kalan denklem a'ya göre çözülür.
6) a' nın bu değeri (A') denklemine konarak b çözülür.
7) a ve b genel denklemde yerlerine konur.
8) R korelasyon katsayısı hesaplanır.

Geometrik metodla eğri çizimi :

Elde bulunan nümerik değerler tablosu, her zaman bilinen eğrilerle gerektiği kadar hassas olarak temsil edilemez. Bu gibi hallerde, bilhassa eğri denkleminin de bilinmesine lüzım yoksa, geometrik metotlarla kompleks bir eğri çizimi yoluna gidilir ve aşağıdaki sıra takip edilerek neticeye varılır.

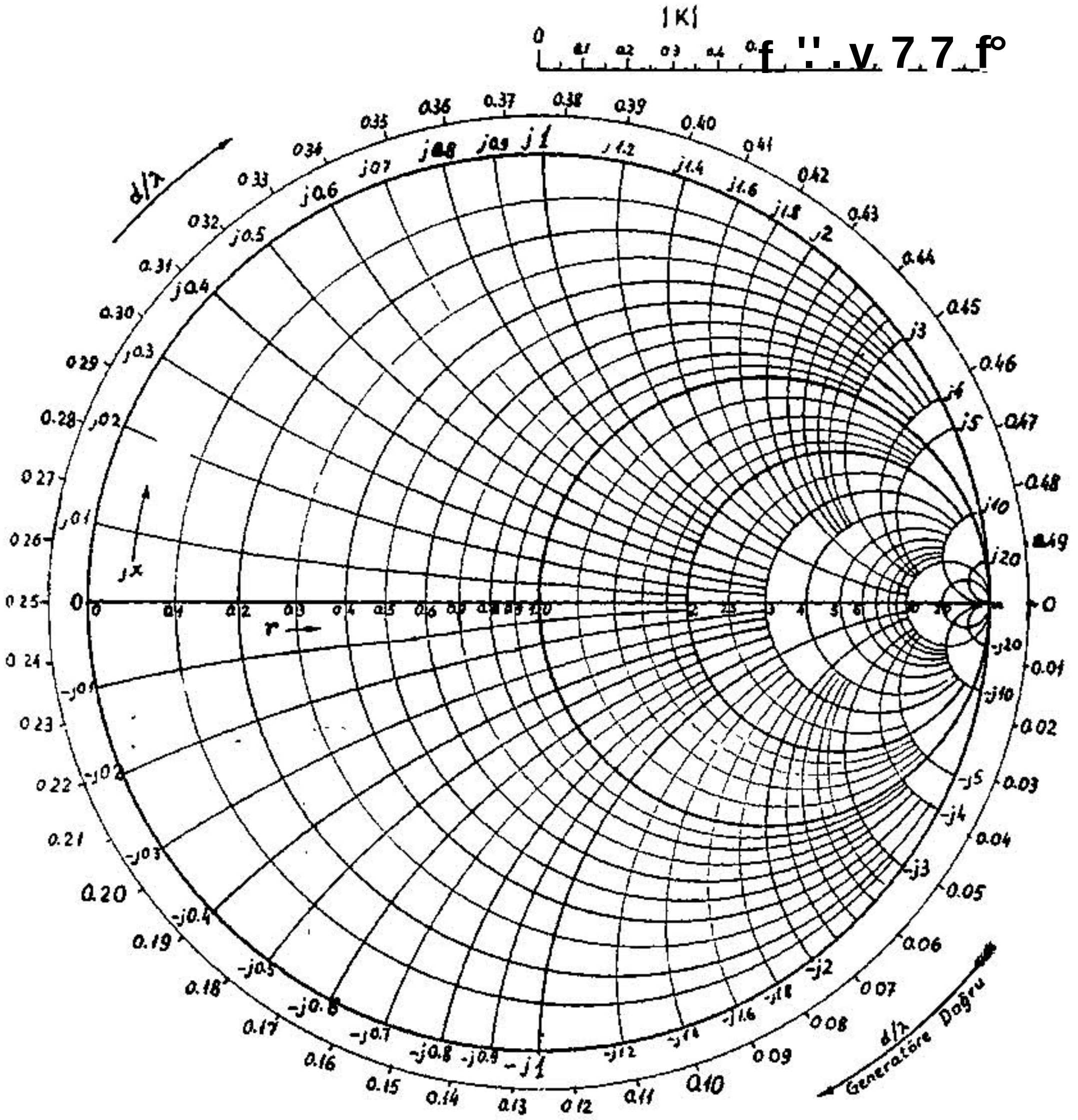
1) Grafik kâğıdı üzerinde noktalar işaretlenir.
2) Grafiğin sol tarafından başlıyarak noktalar A, B ,C, D, v.s. şeklinde işaretlenir.
3) Noktalar birer atlıyarak (AC, CE, EG, BD, DF v.s. şeklinde) doğru çizgilerle birleştirilir.
4) Noktaların her birinden dikler çizilerek (3) teki iki sıra kırık çizgi ile kesiştirilir.
5) Bu dik doğru parçalarının orta noktaları işaretlenir.
6) Bu orta noktalar doğru çizgilerle birleştirilerek bir kırık çizgi elde edilir.
7) Bu kırık hat,, eğriye tahvil edilir. (Şekil 3. e bakınız).

ŞEKİL 3



Bu eğri baştan ve sondan ikinci noktalar arasındaki tablo değerleri için muayyen bir takribiyet verebilir. Böyle elle çizilen bir geometrik eğri için korelâsyon katsayısı hesaplanırsa, umumiyetle fazlaca yüksek bir değer bulunacaktır.

Bir alternatif akım magnetinin çekme karakteristikleri, doğru, üstel veya hiperbolik eğrilerden herhangi biri İle temsil edüebUecek bir tablo haline ait tipik bir misal teşkil eder. Bu eğrilerin her biri mükemmel bir korelâsyon vereceği için, tabloya ait bilinen karakteristikler daima gözönünde bulundurulmalı ve hiçbir nokta ihmal edilmemelidir. Şekil 3. te, aşağıda verilen tablolara tekabül eden ve geometrik metotla çizilmiş bir eğri; şekil 4. te ise yine bu tabloları temsil eden diğer eğriler (doğru, üstel ve hiperbolik eğriler) verilmiştir. Tabloların yanında hesaplanmış bulunan R korelâsyon katsayıları mukayese edilirse, $Y = aX^n$ eğrisinin en iyi korelâsyonu verdiği, dolayısiyle bu üç eğri arasında bu tablodaki değerleri en iyi temsil etme kabiliyetini haiz olduğu görünmektedir. Bu sistematik tekniğin tatbiki ile, denemelerin ve ölçülerin neticeleri daha faydalı hale gelecek ve bunlan temsil eden eğriler daha emniyetle kullanılabilecektir.



Şekil 4   Smith Diyagramı

y = a + bx

X	y	X^1	xy	V_c	V*	y - Ye	$(Y\sim Y)^x$
1.»	3.00	2 25	*so	U.1K	ê««	— 12<»	iŞi,
3.00	UJto	V'O	9.00	4.50	201S-	- .00	.00
3» o	S.So	«a*	19 îf	s.ir	İO-li	.XI	DS
500	4.00	1100	30. eó	(04	İİ.00	— .Oh	.00
i. 00	7.Î0	3«.oo	4S.no	İ.St	sus	.»2	.ts
7.S0	İŞo„	5<.I*	<J.7«-	7.34	72.ÎS	i .11*	l.3o
9.0O	İ.90	S-(.«o	7İ. 00	t-1«	ftte	— .••¥	• 02
10. S0	6.oo	^0.25	9V.»	İ.9İ	«1.oo	0(	.0^
43.00	,».50	44.<IO0	K4.C0	9.70	90.15	- .10	.0*-
4(^00	40.6b	19(.«#	140.00	10.73	4 00.00	- .73	.53
X 74.00	7I.S0	6İ7.O0	M,o.		SS9'.3(		U.V*

A = .953

Y = 0Xⁿ

X,	Y	/O5X	io₃y	$(Cos\ X)^1$	lo₃ X. JoJ Y	y'	Y_c	$y-y_e$	$cy-yj^1$
V.So	3-.CCT	0.17^1	Ö.S?7'	.08)	.084	9.oo	3 19	- 1 9	osu
3.0O	4.50	O.îoio	t.iSİl	.091	#97	21. İS	3.J4'	.£<	t-it
3 5o	SSe	O.SUtt	0.7^N>	•29<	.483	%0-VS	5*. IS	.31	.1ol
5-OB	6.00	0.4»»o	C.77J1	.4-99	• f*<*	İİ.00	fc.24	—.16	.041
koo	7.S0	0.77*»	0.3751	. <0<	.Afi	SL.lt	6.7«	.74	.Sut
7.5o	S.so	0A7SI	0.929*	•764	.8)1	7 1.W	7.«o	-.4«	• H9o
9.00	g.«0	0.9542	0.9031	.910	.İ7<2	41*.0D	«.4o	- 35	.109
10.50	9.op	1.02 IX	0.9f«	I-Otl	.974	S".oo	9 33	- Sİ	no
«.00	9.te	İ.07»!	«.9777	l.lfcU	ı.orr	90.U*	10.01	-.88	.tts
14oo	• ic.to	i.ltflt	l.«w	t.2V«	I.«M	•İ00.00	10 ti	.70	• ü'io
Σ 7».oo	'71.ffO	7.S7M	S.ISİif	C.4İ4	<.7İ9	659.36			3.JVİ

R = .965

Y = a + b/X

X	y	1/X	Y/X	$\left(\frac{1}{x}\right)^2$	y^1	Y_c	$Y-Y_c$	$CY-Y_{t)}*$
ı.So	3.oo	.U7	J.OO<	•.'*»%	9.0O	" 2 <(fc	.51»	.39
S.oo	45o	.Soo	j . lf«	.5Se	Jo.îr	< 24	•1<4	• M
S.so	f.So	•3tf	/.f7l	.Of»	30.2f	(76	— 1 O1	• •12
î.otf	(.00	.Joo	l.ioo	• 0<»0	I4.oo	7.V9	— ı. <*9	1.11
(.00	7. re	• 147	/.ISo	• CII	»«.ar	7 84	— .3"*	• 12
7.J0	S.îo	./3İ	f./Jİ	• Olf	77'»r	r 30	.3o	• 09
9.oo	S.oo	• 1H	.787	.od	(V.o*	r «<.	— · <*·*	• 1»
tO.fo	9.00	.o9r		•Oo9	»f.o.	ili	.3»	•IH
Il.ee	9.5"0	• on	.7»/	.007	9ojr	(T*	.7İ	.S t
IM.0O	40.00	.»7I	.7/*<	.0»$"	lOAOa	S.17	l.ıS	ı.lf
Σ 7/.«o	71.5"0	a.sn	12.655	. f95	559.25			6.09

ft = .940