



**TMMOB**  
**ELEKTRİK MÜHENDİSLERİ ODASI**



**EMO**  
**E-KİTAP**

# **İLETİŞİM KURAMI**

**modülasyon**  
**yöntemleri**



**haluk derin**  
**murat aşkar**



**odtü**

ISBN: 978-605-01-0302-1  
EMO YAYIN NO: EK/2012/2



**TMMOB**  
**Elektrik Mühendisleri Odası**

1954

# **İLETİŞİM KURAMI**

## **Modülasyon Yöntemleri**

**Murat Aşkar**  
**Haluk Derin**

E-kitap (Baskı), Ankara-Şubat 2012

ISBN:978-605-01-0302-1

EMO Yayın No: EK/2012/2

**TMMOB Elektrik Mühendisleri Odası**

**İhlamur Sokak No:10 Kat:2 06640 Kızılay Ankara**

**Tel: (312) 425 32 72 Faks: (312) 417 38 18**

**<http://www.emo.org.tr> E-Posta: [emo@emo.org.tr](mailto:emo@emo.org.tr)**

Kütüphane Katalog Kartı

**004,65 AŞK 2012**

İletişim Kuramı; Elektronik Yayına Hazırlayan: Elektrik Mühendisleri Odası, --1.bs.--Ankara. Elektrik Mühendisleri Odası, 2012

489 s.:24 cm (EMO Yayın No:EK/2012/2; ISBN:978-605-01-0302-1)

**İletişim--Ağlar**

# ÖNSÖZ

Bu kitap Orta Doğu Teknik Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü Lisans programının 4.yılında okutulan EE 435 ve EE 436 İletişim Kuramı derslerinde kullanılan ders notlarının derlenmesiyle hazırlanmıştır. Bu derslerde işlenen konulardan bazılarını, örneğin olasılık kuramı, rasgele süreçler, gürültü ve iletişim dizgelerinde gürültünün etkileri gibi konulara, bu kitapta yer verilmemiştir. Bu konular İletişim Kuramının önemli konuları olmakla beraber kitabın kapsamını sınırlı tutma zorunluluğu ve işlenen konuların kendi içinde bir bütün oluşturduğu düşünülerek bu yola gidilmiştir.

Bu kitabın hazırlanmasında kullanılan ders notları aynı zamanda Kara Harp Okulu Elektrik Bölümünün 4.sınıf İletişim Kuramı derslerinde de kullanılmaktadır.

Kitabın 1.Bölümünde iletişim kuramına giriş yapılmakta, iletişim dizgelerinin temel öğelerinden, modülasyonu gerekli kılan nedenlerden, modülasyon türlerinin sınıflandırılmasından ve iletişim dizgelerini etkileyen kısıtlamalardan söz edilmektedir.

2. ve 3. Bölümlerde ise iletişim kuramını anlayabilmek için gerekli temel kavramlar ve araçlar geliştirilmiştir. 2. Bölümde Fourier serisi ve Fourier dönüşümü kullanılarak işaretlerin frekans bölgesi gösterimleri incelenmiştir. 3.Bölümde ise elektriksel işaretlerin doğrusal dizge-

lerden geçişleri ile ilgili kavramlar geliştirilmiştir. Burada geliştirilen yöntemler ilerideki bölümlerde elektriksel işaretlerin iletişim dizgelerinden geçişleri sırasında oluşan istenen ve istenmeyen değişimlerin çözümlenmesinde kullanılmıştır. Yine bu Bölümde erke ve güç görünge yoğunluğu kavramları geliştirilmiş ve işaretlerin dizgelerden geçişlerinde oluşan değişimler incelenmiştir. İletişim kuramının incelenmesi için gerekli önbilgilerin geliştirildiği 2. ve 3. Bölümlerde bu amaç için ayrılan yer çok görülmemelidir, çünkü iletişim dizgelerinin anlaşılmasında bu araç ve kavramların önemi büyüktür.

Kitabın 4. ve 5. Bölümlerinde değişik genlik modülasyonu türleri incelenmiştir. Taşıyıcılı genlik modülasyonu ve (taşıyıcısı bastırılmış) çift yan bant genlik modülasyonu 4. Bölümde ; tek yan bant ve artık yan bant diye adlandırılan genlik modülasyonu türleri ise 5. Bölümde incelenmiştir. Her modülasyon türünün incelenmesinde ilk olarak modüle edilmiş işaretin çözümlenmesi yapılmış ve işaretin özellikleri çıkartılmıştır. Daha sonra o tür modülasyon işaretlerini üretme yöntemleri ve son olarak da modüle edilmiş işaretlerin demodülasyon yöntemleri işlenmiştir. Ayrıca değişik genlik modülasyonu türlerinin karşılaştırılması da bu bölümlerde yapılmıştır.

6. Bölümde yine çok yaygın kullanılan bir modülasyon türü olan frekans modülasyonu işaretinin çözümlenmesi, üretimi ve demodülasyonu anlatılmıştır. Frekans modülasyonu, evre modülasyonu ile birlikte açılı modülasyonu diye bilinen modülasyon türünü oluşturur. Uygulamada daha yaygın kullanıldığı için bu Bölümde frekans modülasyonu ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Evre modülasyonu için benzer sonuçların, evre modülasyonu ile frekans modülasyonu arasındaki yakın benzerlik kullanılarak elde edilebileceği düşünülmüş ve bu nedenle evre modülasyonunun ayrıntılarına girilmemiştir. Bu Bölümde ayrıca stereo FM dizgelerinin işleyişi anlatılmıştır.

Kitabın 7. Bölümünde iletişim kuramında yaygın olarak kullanılan frekans bölme ilkesi ve tüm radyo ve televizyon alıcılarında kullanılan süperheterodin almaç ilkesi anlatılmıştır. Yine bu Bölümde televizyon işaretleri, televizyon dizgeleri ve renkli televizyon dizgeleri incelenmiştir.

8. Bölümde sürekli işaretleri kesikli biçime dönüştürmeye yarayan ve çok yaygın bir kullanım alanı olan örnekleme teoremi ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bu Bölümde vuruş modülasyonu diye adlandırılan bir modülasyon sınıfının vuruş genliği, vuruş süresi, vuruş yeri, vuruş kod modülasyonu adlı türleri incelenmiştir. Yine vuruş modülasyonunun türleri olan delta modülasyonu ve türevsel vuruş kod modülasyonu da bu Bölümde incelenmiştir. Vuruş modülasyon türlerinde kullanılan zaman bölme ilkesi de burada anlatılmıştır. Ayrıca 8. Bölümde artık klasik sayılabilecek bazı ikili iletişim dizgeleri incelenmiştir. Çok hızlı bir gelişim içinde olan sayısal iletişim dizgelerinden yeni örnekler bu kitapta yer verilmemiştir. Sayısal iletişim dizgeleri bugün kendi başına bir çalışma gerektirecek kapsam ve önemde bir konudur.

Kitabın arkasında yer alan eklerde iletişim kuramında gereken, ancak 2. ve 3. Bölümlerde yer almayan matematiksel araçlar, çizelgeler ve bağıntılara yer verilmiştir. Ek A'da dürtü işlevi ve özellikleri, Ek B'de bazı özel işlevler ve Fourier dönüşüm çiftleri, Ek C'de ise Fourier dönüşüm çiftlerinin özellikleri incelenmiştir. Ek D'de Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü arasındaki önemli sayılan ilişki ayrıntılı olarak işlenmiştir. Ek E'de Laplace dönüşüm çiftleri ve özellikleri, Ek F'de çizimsel katlanma yöntemi ve Ek G'de yararlı olabilecek bazı matematiksel bağıntılar yer almıştır.

Yukarıda da belirtildiği gibi olasılık kuramı, rasgele süreçler, gürültü ve iletişim dizgelerine gürültünün etkilerine bu kitapta yer verilmemiştir. Bunun başlıca nedeni bu kitabın kapsamının sınırlı tutulmasıdır. Dışarıda bırakılan bu konuların incelendiği bir çalışma bu kitabın doğal bir devamı olarak düşünülebilir.

Kitabın 1. Bölümünün dışındaki tüm bölümlerin sonunda çok sayıda alıştırma bulunmaktadır. Konuların bölümlerdeki işlenişini tamamlaması ve hatta bazı konuların yalnızca alıştırılarda incelenmiş olması nedeniyle, alıştırma kitabın ayrılmaz bir parçası olarak görülmelidir. Alıştırılardan bazıları iletişim kuramı kitaplarında çok rastlanan türden olmakla beraber bazıları bu kitaptaki yaklaşımı yansıtan türden alıştırılardır.

Ülkemizde, pek çok teknik konuda olduğu gibi, iletişim kuramı konusunda da gelişmiş ve köklü bir teknik dil henüz bulunmamaktadır. Bu nedenle bu kitapta kullanılan dil üzerinde tartışma açılması çok doğaldır. Türkçe teknik dil konusunda uzmanlık savı taşımadığımızı ve kimi kez yanlış ya da tutarlı olmayan yaklaşımlar ve sözcük seçimleri yapmış olabileceğimizi şimdiden kabul ederek bu konuda okuyucuların hoşgörüsüne sığınırız. Genellikle yerleşme olasılığı olan sözcük ve deyimlerin kullanılmasına çaba harcanmıştır. Ancak bazı durumlarda içinde yaşadığımız hızlı değişim ortamının verdiği çekingenlikle bazı kavramlar için önerilen öz Türkçe sözcükler bulunmasına karşın batı dilleri kökenli sözcükler kullanılmıştır. Örneğin modülasyon yerine bindirme, frekans yerine sıklık sözcükleri kullanılmamıştır. Öte yandan spektrum yerine görünge sözcüğü kullanılmıştır. Bu farklı tutum için mantıksal bir açıklama yapmak zordur. Ancak tam doğrunun ne olduğuna karar vermenin çok güç olduğu teknik dil konusunda, ortaya koyduğumuz bu çalışmanın eleştiriyeye açık bir denemeden ibaret olduğunu ve asıl amacımızın iletişim kuramının temel kavramlarını okuyucuya anlaşılır bir biçimde aktarmak olduğunu belirtmekle yetineceğiz.

Kullanılan teknik dil konusunda okuyucuya yardımcı olmak amacıyla kitabın sonundaki Dizin'de sözcüklerin yanına İngilizce karşılıkları verilmiştir. Ayrıca Dizin'den sonra yanlarında Türkçe karşılıkları olan İngilizce küçük bir Sözlük de sunulmuştur.

Bu kitabın hazırlanmasında doğrudan ya da dolaylı olarak yardımları dokunmuş tüm öğrencilerimize ve meslektaşlarımıza, ilk manuscripti yazan Sayın Aynur Aliefendioğlu'na ve kitaptaki tüm şekilleri çizen Sayın Remzi Kaplan'a teşekkürlerimizi sunarız. Bu kitabın hazırlanması için maddi ve manevi destek veren Orta Doğu Teknik Üniversitesi ve Kara Harp Okulu yetkililerine şükranlarımızı sunarız. Ve son olarak gösterdikleri sabır ve özveriyle bu kitabın hazırlanmasına yardımcı olan ailelerimize teşekkürü borç biliriz. Saygılarımızla.

Aralık 1979  
Ankara

Haluk Derin  
Murat Aşkar

# İÇİNDEKİLER

Bölüm 1. İLETİŞİME GİRİŞ	1
1.1. Giriş	1
1.2. İletişim Dizgelerinin Öğeleri	2
1.3. Modülasyon	3
1.4. Modülasyon Türleri	8
1.5. İletişimdeki Kısıtlamalar	9
Bölüm 2. İŞARET ÇÖZÜMLEMESİ	13
2.1. Giriş	13
2.2. Trigonometrik Fourier Serisi	15
2.3. Karmaşık Fourier Serisi	20
2.4. Fourier Dönüşümü	27
2.5. Fourier Dönüşümünün Varlığı	32
2.6. Dönemli İşlevlerin Fourier Dönüşümleri	35
ALİŞTİRMALAR	38

<b>Bölüm 3. ELEKTRİKSEL İŞARETLERİN DOĞRUSAL DİZGELERDEN İLETİMİ</b>	<b>51</b>
3.1. Doğrusal Dizgeler	51
3.2. Dürtü Tepkisi ve Katlanma Tümlevi	54
3.3. Frekans Bölgesinde Tepke	57
Doğrusal Dizgenin Sinüzoidale Tepkisi	60
Dönemli $f(t)$ Girdisine Tepke	61
Süzme ve Dizge Bantgenişliği	62
3.4. Bozulmasız İletim	69
3.5. Düşüncel Süzgeçler	71
3.6. Zaman-Bantgenişliği Arasındaki Ters Orantılı İlişki	74
3.7. Erke Görünge Yoğunluğu	79
3.8. Güç Görünge Yoğunluğu	81
Çıktının Güç Görünge Yoğunluğu	83
Güç Görünge Yoğunluğunun Fiziksel Anlamı	83
$c(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ nin Güç Görünge Yoğunluğu	84
3.9. Dönemli İşaretlerin Güç Görünge Yoğunluğu	86
<b>ALİŞTİRMALAR</b>	<b>91</b>
<b>Bölüm 4. GENLİK MODÜLASYONU</b>	<b>104</b>
4.1. Giriş	104
4.2. Taşıyıcılı Genlik Modülasyonu	107
Genliği Modüle Edilmiş Dalgabiçimlerinin Frekans Görüngesi	112
Genliği Modüle Edilmiş Dalgabiçimlerinde Güç	118
Evreoku (Fazör) Çizimi Gösterimi	120
4.3. GM Modülatörleri	121
Örneksel Çarpma	121
Kıyıcı Modülasyonu	123
Doğrusal Olmayan Aygıt Modülasyonu	128
Doğrudan Akortlu Devre Modülasyonu	132
4.4. GM Demodülatörleri	133
Eşzamanlı Demodülasyon	133
Ortalama Zarf Sezici	139
Zarf Sezici	140



4.5. Çift Yan Bant (ÇYB) Modülasyonu	143
4.6. ÇYB İşaretinin Üretimi	145
Kare-Kuralı Modülatörü	145
Dengeli Modülatör	146
4.7. ÇYB İşaretlerinin Demodüle Edilmesi	148
4.8. GM ve ÇYB'nin Karşılaştırılması	150
ALİŞTİRMALAR	151
Bölüm 5. TEK YAN BANT MODÜLASYONU VE ARTIK YAN BANT MODÜLASYONU	161
5.1. Tek Yan Bant (TYB) Modülasyonu	161
5.2. TYB Modüle Edilmiş Dalgabiçiminin Üretimi	163
Süzgeç Yöntemi	164
Evre Kaydırma (Hilbert Dönüşümü) Yöntemi	164
5.3. TYB Modüle Edilmiş İşaretin Demodüle Edilmesi	172
Büyük Taşıyıcılı TYB'nin Demodülasyonu	175
5.4. Artık Yan Bant (AYB) Modülasyonu	176
AYB İşaretinin Zaman Bölgesi Gösterimi	180
Büyük Taşıyıcılı Bir AYB İşaretinin Zarf Sezici Kullanılarak Demodülasyonu	182
TYB ve AYB Modülasyonunun Diğer Genlik Modülasyonu Türleri ile Karşılaştırılması	183
5.5. Çeşitli GM Türleri' için Eşzamanlı Demodülasyonda Evre ve Frekans Kaymasının Etkileri.	184
ÇYB	184
TYB	185
Taşıyıcısı Bastırılmış İşaretlerin Seziminde Sonradan Taşıyıcı Ekleme Yöntemi	187
ALİŞTİRMALAR	188
Bölüm 6. FREKANS MODÜLASYONU	197
6.1. Frekans Modüle Edilmiş Dalgabiçimi	197
Darbant FM	202
Genişbant FM	207
Genel Durum	209

Evresi Sıfır Olmayan Bir Sinozoidalle Modüle Edilmiş FM	221
İki Sinozoidal Toplamı ile Modüle Edilmiş FM	222
Dönemli ve Sıfır Ortalamalı Bir $f(t)$ ile Modüle Edilmiş FM	223
Woodward Teoremi	226
FM Dalgabıçımlerinde Güç	226
Evresi Modüle Edilmiş İşaretin Frekans Görünüşü	228
6.2. FM İşaretlerinin Üretimi	229
Dolaylı FM	230
Frekans Çarpımı	231
Doğrudan FM	236
Reaktans Tüpü Kullanan Modülatör	239
Değişken Sığa Diyodu Kullanan Modülatör	241
Değişken Endüktans Kullanan Modülatör	243
FM İşaretinin Üretiminde Diğer Yöntemler	243
FM Türevsel Denklemi	243
Üçgen Dalga FM	245
Kare Dalga FM	247
6.3. FM İşaretlerinin Demodülasyonu	249
Sınırlandırıcı	250
FM Ayırtaçları	251
Tam Türev Alma	252
Akortlu Devre Demodülatörü	253
RL Demodülatörü	254
Foster-Seeley Ayırtacı	255
Oran Sezici	258
FM Ayırtaçlarındaki GM Demodülatörleri	260
Vurum Sayıcı FM Demodülatörü	264
6.4. Stereo FM Yayını	265
6.5. FM ve Gürültü	270
ALİŞTIRMALAR	273

Bölüm 7. SÜPERHETERODİN ALMAÇLAR VE TELEVİZYON DİZGELERİ	284
7.1. Frekans Bölmeli Çoklama	284
7.2. Süperheterodin Almaç	287
7.3. Televizyon Dizgeleri	291
Görüntünün Elektriksel İşarete Dönüştürülmesi	292
Görüntü İşaretinin Bantgenişliği ve Dalgabiçimi	294
TV'de Bilgi İşaretinin Modülasyonu	297
7.4. Televizyon Alıcıları	300
Ayrı Ses ve Görüntü Alıcıları	300
Taşıyıcılararası Alıcı	303
7.5. Renkli Televizyon Dizgeleri	305
ALİŞTİRMALAR	309
Bölüm 8. VURUM MODÜLASYONU VE SAYISAL İLETİŞİM DİZGELERİ	313
8.1. Giriş	313
8.2. Örneklemeye Teoremi	315
8.3. Vurum Modülasyonu	334
Vurum Genliği Modülasyonu (VGM)	335
VGM İşaretlerinin İletimi	337
Vurum Süresi Modülasyonu (VSM)	338
Vurum Yeri Modülasyonu (VYM)	340
8.4. Vurum Kod Modülasyonu (VKM)	342
Sıkıştırıcı-Genleştirici	345
Nicemleme Gürültüsü	349
Delta Modülasyonu (DM)	353
Türevsel Vurum Kod Modülasyonu (TVKM)	356
8.5. Zaman Bölmeli Çoklama	359
8.6. İkili İletişim Dizgeleri	363
İkili İletişim İşaretlerinin Dalgabiçimleri ve Görüngeleri	364
Var-yok Anahtarlama (VYA)	364
Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (FKA)	365
Evre Kaydırmalı Anahtarlama (EKA)	367

<b>İkili İletişim İşaretlerinin Sezilmesi</b>	<b>368</b>
<b>Türevsel Evre Kaydırmalı Anahtarlama</b>	<b>371</b>
<b>İkili İletişim Dizgelerinin Başarımlarının Karşılaştırılması</b>	<b>372</b>
<b>Temelbant İletişimi</b>	<b>375</b>
<b>ALIŞTIRMALAR</b>	<b>377</b>
<b>EK A. DÜRTÜ İŞLEVİ</b>	<b>390</b>
<b>EK B. BAZI ÖZEL İŞLEVLER VE FOURIER DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ</b>	<b>395</b>
B.1. Bazı Özel İşlevler	395
B.2. Fourier Dönüşüm Çiftleri	396
<b>EK C. FOURIER DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ</b>	<b>398</b>
C.1. Fourier Dönüşüm Çiftlerinin Bazı Özellikleri	398
C.2. Fourier Serisi Gösteriminin Özellikleri	403
<b>EK D. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE BUNUN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE İLİŞKİSİ</b>	<b>405</b>
D.1. İki-yanlı Laplace Dönüşümü	405
D.2. Evrik Dönüşüm	409
D.3. Laplace Dönüşümü	409
D.4. Varlık Bölgesi	410
D.5. Fourier ve Laplace Dönüşümleri Arasındaki İlişki	414
D.6. Doğrusal Dizgelerden İletilen İşaretlerin Dönüşüm Çözümlemesi	417
D.7. Özet	417
<b>EK E. LAPLACE DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ VE ÖZELLİKLERİ</b>	<b>419</b>
E.1. Laplace Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri	419
E.2. Laplace Dönüşüm Çiftleri	420
<b>EK F. KATLANMA ÜZERİNE ÇİZİMSSEL YÖNTEMLER</b>	<b>423</b>
F.1. Tanım	423
F.2. Bazı Katlanma Bağıntıları	423
F.3. Katlanmanın Çizimsel Yollarla Açıklanması	424
F.4. Bir İşlevi Dürtü İşlevi ile Katlama	429
<b>EK G. YARARLI MATEMATİKSEL BAĞINTILAR</b>	<b>431</b>
G.1. Trigonometrik Ödeşlikler	431

G.2. Seri Açınımları	433
G.3. Hiperbolik İşlevler	434
G.4. Seri Toplamları	434
G.5. Belirli Tümlevin Türevi	434
G.6. Bazı Belirsiz Tümlevler	434
G.7. Bazı Belirli Tümlevler	438
G.8. Birinci Tür Bessel İşlevleri Çizelgesi	441
G.9. Yanılgı İşlevi Çizelgesi	441
KAYNAKÇA	442
DİZİN	443
SÖZLÜK	456



# BÖLÜM 1

## İLETİŞİME GİRİŞ

### 1.1 GİRİŞ

İletişimin amacı, herhangi bir biçimdeki bilginin zaman ve uzay içinde *kaynak* olarak adlandırılan bir noktadan *kullanıcı* denilen başka bir noktaya aktarılmasıdır. Bugün telefon, radyo, televizyon gibi elektriksel iletişimin çeşitli örnekleri günlük yaşantımızın vazgeçilmez birer parçası olmuşlardır. Elektriksel iletişimin diğer bazı önemli örnekleri şu şekilde sıralanabilir: Radar, telemetre dizgeleri, tıpkıbasım (faksimile), bilgisayarlar arası bilgi aktarımı, askeri amaçlar için kullanılan telsiz. Bu liste istenildiği kadar genişletilebilir. Elektronik devre öğeleri teknolojisindeki yeni ilerlemelere bağlı olarak günümüzdeki yıllarda iletişim dizgelerinde de önemli gelişmelerin olması kaçınılmazdır.

İletişim dizgeleri istenilen iletişim türüne göre tasarlanırlar. Değişik iletişim türlerine şu örnekleri verebiliriz:

1. Birbirlerinden birkaç ile birkaç bin kilometre arası uzaklıkta olan A ve B kişileri, birbirlerine bir mesaj göndermek istediklerinde telefon dizgesi kullanabilirler. Bir başka deyişle, bilgi aktarımı kablolar üzerinden yapılabilir.
2. Eğer birbirleri ile konuşmak isteyebilecek binlerce kişi varsa, bir ya da birkaç merkezi anahtarlama istasyonu olan bir telefon dizgesi kullanılabilir.
3. Oldukça kısa uzaklıklar içinde birbirlerine bilgi iletmek isteyen az sayıda kullanıcı varsa ve özellikle bunlar sürekli yer değiştiriyorlarsa, bir çeşit radyo iletişimi gereklidir (göndermeç-almaç).
4. Çok sayıda kullanıcıya bilgi göndermek isteyen tek bir kaynak varsa bir radyo ya da bir televizyon vericisi kullanılabilir. Bu durumda, iletişim dizgesi tek bir göndermeç ve çok sayıda almaçtan oluşur.

Kullanılacak iletişim dizgesini belirleyen çeşitli koşulları (örneğin, kaynak sayısı, kullanıcı sayısı, uzaklık, kullanıcıların hareket edip etmedikleri, güvenilirlik gibi koşulları) sağlayan başka örnekleri kolayca bulabiliriz.

Bu kitapta, bütün iletişim uygulamaları ya da bir iletişim dizgesini oluşturan devreler ve bu devrelerin öğeleri ele alınmayacaktır. Eğer alınmış olsaydı, bu kitap yalnızca iletişim dizgeleri ile bileşenlerinin bir kataloğu olacak ve bir süre sonra güncelliğini yitirecekti. Burada konu daha geniş anlamda ele alınacak ve ana ilkeler ile birçok iletişim dizgesinde ortak olan sorunlara ağırlık verilecektir. Bu yolla okuyucu iletişim dizgelerinin ana türleri üzerinde genel bir bilgi edinecek; bütün elektriksel iletişim türlerine uygulanabilen başlıca çözümleme ve tasarım yöntemlerini anlar duruma gelecektir.

## 1.2 İLETİŞİM DİZGELERİNİN ÖGELERİ

Çeşitli koşulları sağlayan birçok iletişim dizgesi tasarımılanabilir, ancak bütün bu dizgelerin tek bir ortak amacı vardır: Herhangi bir biçimdeki bilginin iletilmesi. Bu nedenle, bütün iletişim dizgelerinde şu ortak öğeler vardır:

1. İletilecek bilgi (kaynak)
2. Göndermeç
3. İletim ortamı (kanal)
4. Almaç
5. Yeniden elde edilen bilgi (kullanıcı)

Bir iletişim dizgesinin öbek çizimi Şekil 1.1 de verilmiştir.



Şekil 1.1 Bir iletişim dizgesinin öbek çizimi.

Daha sonra açıklanacağı gibi, Şekil 1.1'deki iletişim dizgesi gösteriminin bazı öğeleri gerçekte birden çok işlemsel altöbektен oluşur. Kaynaktan gönderilecek bilgi genellikle bir elektriksel işaret değildir. O halde bilginin iletiminde ilk basamak, onu zamanla değişen bir elektriksel niceliğe (örneğin akım ya da gerilime) dönüştürmektir. Bu dönüşümü yapan işlemsel birimlere değiştirgeç adı verilir. Bu nedenle, bir göndermeçin ilk altöbeği büyük bir olasılıkla bir değiştirgeçtir. Benzer biçimde, alınan işareti istenilen bilgi biçimine sokmak için almaçta da bir değiştirgeç gerekebilir. Başka bir deyişle, almaçın bileşenlerinden birisi bir değiştirgeç olabilir. Örneğin sesi elektriksel işarete çeviren mikrofon bir değiştirgeçtir; elektriksel işaretleri ses dalgalarına çeviren hoparlör ise bir başka değiştirgeçtir.



Buradaki anlatım, iletişim dizgelerinin yalnızca elektriksel bölüme sınırlandırılacak ve değiştirgeçler ile uğraşılmayacaktır. O halde, bundan sonra göndermeci girişindeki bilgi işareti ve almanın çıkışında yeniden elde edilen bilgi işareti elektriksel işaret olarak varsayılacaktır. Bir başka deyişle, yukarıdaki değiştirgeç örnekleri düşünülürse, anlatımda mikrofon çıkışı ve hoparlör girişi arasındaki dizgeler ve bunların işlevleri üzerinde durulacaktır.

### 1.3 MODÜLASYON

Daha önce söz edildiği gibi kullanılacak iletişim dizgesi istenilen dizge koşullarına bağlı olarak saptanır. Bu arada, iletişim dizgesinde kullanılacak iletim ortamı da (elektriksel işaretler için kablolar, elektromanyetik dalgalar için atmosfer ya da uzay) belirlenir. Bilgi elektriksel işaret biçiminde olsa bile, iletim için uygun bir biçimde olmayabilir. Zamanla değişen elektriksel işaretlerin hepsi belli bir iletim ortamında verimli bir biçimde iletililemeyebilir. Bu nedenle gönderilecek bilgi işareti, elimizdeki iletim kanalında verimli bir iletme uygun bir biçime sokulmalıdır. Bu işlem modülasyon olarak adlandırılır. Genellikle eldeki iletim ortamına uygun olan bir taşıyıcı dalga vardır. Modülasyon işlemi, taşıyıcı dalganın çeşitli değiştirgenlerini (parametrelerini) bilgi işaretine bağlı olarak düzenli bir biçimde değiştirmektir.

Almaçta ise bilgi işaretini yeniden elde etmek için demodülasyon denilen bir işleme gerek vardır. Modülasyon işleminin yararlı olabilmesi için, bunun karşı yönünün de olması (tersinir olması) gereklidir. Bir başka deyişle, düşüncel koşullarda, modüle edilmiş işaretten demodülasyon işlemi yoluyla bilgi işaretini aslına yakın bir biçimde geri elde edebilmeliyiz. Çok kullanılan bazı modülasyon biçimlerinde (örneğin vum-kod modülasyonu) düşüncel koşullar altında bile, bilgi işaretinin aslını olduğu gibi geri elde edemeyiz. Bu nedenle, yukarıda bilgi işaretinin "aslı" yerine "aslına yakın bir biçimi" deyiimi kullanılmıştır.

Modülasyonun çeşitli yararlarını ve değişik modülasyon türlerini tartışmadan önce, modülasyonun gereğini açıklamak için şu örneği vereceğiz. Frekans bandında 300 Hz ile 3 KHz arasında kapsadığını varsayabileceğimiz insan konuşmasını ileten bir radyo vericisi düşünelim. Bir başka deyişle konuşma işareti bileşenlerinin frekans bölgesinde 300 Hz ile 3 KHz arasında olduğu varsayılabilir. (Konuşma işaretlerinin çoğunda 300 Hz'den düşük ve 3 KHz'den yüksek frekans bileşenleri vardır, ancak bunlar konuşmanın anlaşılabilirliğine bir katkıda bulunmazlar. Bu nedenle birçok uygulamada, bu frekans bileşenleri atılır ve konuşma işareti 300 Hz ile 3 KHz arasındaki banda sınırlandırılmış olarak varsayılır.) Konuşma işaretini elektromanyetik dalgalar ile iletmek için gereken dalgaboyları  $c = \lambda f$  bağıntısından saptanabilir. Burada  $c = 3 \times 10^8$  m/sn (ışık hızı),  $\lambda$  metre biriminde dalga boyu ve  $f$  ise Hertz ( $hz = 1/\text{san}$ ) biriminde frekanstır. Bu frekans bölgesi için dalgaboyu  $\lambda$ ;

$\frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^3} = 10^5$  m ile  $\frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^6} = 10^2$  m arasında başka bir deyişle 100 km ile 1000 km arasında değişir.

Elektromanyetik dalgalar antenlerle ışınım (radyasyon) yoluyla gön-

derilir. İyi bir iletim için anten boyunun dalga boyu ile aynı derecelerde olması gereklidir (örneğin  $\lambda/4$ ). O halde, bu radyo vericisi için anten boyu 25 km ile 250 km arasında olmalıdır. Bunun ise uygulama açısından olanaksızlığı açıktır. Buradan şu sonuç çıkarılabilir: Konuşma işareti elektromanyetik dalgalarla ilettime uygun bir biçimde değildir.

Bir an için böyle büyük bir anteni kurduğumuzu ve işlediğini varsayalım. O zaman ortaya şu sorun çıkar: İkinci bir radyo vericisi kurulmak istenirse ne olacak? İkinci büyük bir antenin dikildiğini de varsayalım. Her ikisi de aynı 300 Hz - 3 KHz frekans bandını kullandıkları için, bu iki antenden çıkan dalgalar birbirleriyle karışacaklardır. Kısaca, ikinci bir radyo vericisi olası görünmemektedir.

Modülasyon işlemi bu iki kısıtlamayı (anten boyu ve dalgaların birbiriyle girişim yapmaması kısıtlamalarını) sağlamalıdır. Anten boyu kısıtlaması, gönderilecek işaretin yüksek frekans bileşenleri içermesi gerektiğini önerir. Birden çok gönderme için ise, göndermeçlerin kullandıkları frekans bantlarının birbirleriyle çakışmaması gerekir. Daha sonra görüleceği gibi, modülasyon işlemi bu koşulları sağlar.

Aşağıdaki örnek, biraz erken olmakla birlikte, bazı kavramların anlaşılmasında yararlı olabilir. Uzun dalga frekans bölgesinde yayım yapan Ankara TRT 1 radyo vericisi taşıyıcı frekansı  $f_0 = 200$  KHz dolayında 195 KHz ile 205 KHz arasındaki frekans bandını kaplar. Bu yayım frekansının dalgaboyu 1500 metredir ve anten boyu  $\lambda/4 = 375$  metredir. Bu ise büyük olmakla birlikte gerçekleştirilebilir bir antendir.

Öte yandan, gene uzun dalgada yayım yapan Ankara TRT 2 radyo vericisinin taşıyıcı frekansı  $f_0 = 182$  KHz'dir ve 177 KHz ile 187 KHz arasındaki bandı kaplar.

Bu radyo vericilerinin her ikisi de genlik modülasyonu ("GM" = "AM") kullanır ve birbiriyle çakışmayan 10 KHz genişliğindeki frekans bantlarını kaplarlar.

Değişik modülasyon türlerinde değişik frekans bantları kullanılır ve her kullanıcı için değişik bantgenişlikleri belirlenir. Değişik kullanıcıların, değişik ve birbirleriyle çakışmayan frekans bantlarını kullanma ilkesi *frekans bölmeli çoklama* diye adlandırılır.

Eğer değişik işaretler birbirleriyle çakışmayan frekans bantlarını kaplarsa, istenilen işaret almaçta bantgeçiren süzgeçler ve demodülatör (demodülasyon işlemi yapan birim) yardımı ile geri elde edilir.

Çizelge 1.1 de TRT radyo vericilerinin, Çizelge 1.2 de TRT televizyon vericilerinin frekansları ve anten çıkış güçleri verilmiştir. Çizelge 1.3 de ise elektriksel iletişim için kullanılan elektromanyetik görüngen bölümleri ve bunlar için kullanılan terminoloji ile iletim ortamları gösterilmiştir. Ayrıca değişik elektromanyetik görüngen bölümlerinin uygulama alanlarından bazıları da bu çizelgede verilmiştir.

<u>İstasyon Adı</u>	<u>Frekansı</u>	<u>Gücü (kw)</u>
<b>TRT I</b>		
Ankara (UD)	200 kHz	120
Erzurum (UD)	245 kHz	200
İzmir (OD)	927 kHz	200
Diyarbakır (OD)	1062 kHz	300
Antalya (OD)	891 kHz	600
İstanbul (OD)	1017 kHz	1200
Çukurova (OD)	630 kHz	300

**TRT II**

İstanbul (OD)	702 kHz	150
Ankara (UD)	182 kHz	1200

**İL RADYOLARI**

Gaziantep (OD)	1215 kHz	2
Kars (OD)	1161 kHz	2
Van (OD)	1179 kHz	2
Hakkari (KD)	7650 kHz	1

**BÖLGE RADYOLARI**

Doğu Karadeniz (OD)	954 kHz	300
Ankara (OD)	1485 kHz	2

**FM RADYOLARI**

İstanbul	88.2 MHz	60
İzmir	88.0 MHz	60
Eskişehir	94.4 MHz	30
Ankara	91.2 MHz	60
Edirne	91.0 MHz	30
Bursa	97.6 MHz	60
Adana	89.2 MHz	30
Gaziantep	95.2 MHz	30
Denizli	90.0 MHz	30
Konya	87.6 MHz	30
Aydın-Muğla	95.8 MHz	30
Antalya	91.6 MHz	30
Çanakkale	96.4 MHz	30
Sivas	94.4 MHz	30
Isparta-Burdur	99.2 MHz	30

**YURT DIŞI YAYINLAR**

Ankara KD I
Ankara KD II
Ankara KD III
Ankara KD IV

UD: Uzun Dalga, OD: Orta Dalga, KD: Kısa Dalga

Not: Sıralamalar yayına başlayış tarihine göre dir.

*Çizelge 1.1 Türkiye Radyoları*

<u>İstasyon Adı</u>	<u>Kanal no.</u>	<u>Kapladığı frekans bölgesi (MHz)</u>	<u>Gücü (kw)</u>
İstanbul	5	174-181	100
İzmir	10	209-216	60
Eskişehir	7	188-195	100
Adana	6	181-188	30
Eğirne	9	202-209	30
Samsun	7	188-195	30
Bolu	8	195-202	5
Diyarbakır	9	202-209	100
Gaziantep	10	209-216	30
Trabzon I	9	202-209	30
Bursa I	6	181-188	100
Çanakkale	8	195-202	30
Ankara (Elmadag)	5	174-181	100
Erzurum	6	181-188	100
Konya	10	209-216	100
Kars	9	202-209	100
Van	7	188-195	30
Aydın-Muğla	7	188-195	30
Denizli	8	195-202	100
Kayseri	8	195-202	30
Antalya	5	174-181	30
Ordu-Giresun	5	174-181	30
Zonguldak	9	202-209	30
İzmit-Adapazarı	10	209-216	30
Kastamonu	6	181-188	30
Sivas	10	209-216	30
Hatay	8	195-202	20
Elazığ-Malatya	7	188-195	100
Amasya	9	202-209	100
Silifke	7	188-195	30
İsparta-Burdur	6	181-188	30

Not: Sıralama yayına başlayış tarihine göredir.

Çizelge 1.2 Türkiye Televizyonları



Modülasyonun gereği üzerindeki tartışmayı şöylece özetleyebiliriz: İşareti iletim ortamına uydurmak için modülasyon gerekir. Verimli bir yayım için de modülasyon gereklidir ve modülasyonun kullanımı birçok yayımın aynı anda yapılmasına olanak sağlar. Modülasyonun önemli bir başka yararı ise gürültü ve girişimin etkilerini azaltmasıdır. Değişik modülasyon türleri gürültü ve girişimin azaltılmasında değişik özellikler gösterirler.

#### 1.4 MODÜLASYON TÜRLERİ

Modülasyon türünün seçimi bir iletişim dizgesinin tasarımında ilk yapılması gereken iştir. Değişik modülasyon türlerinin çeşitli özellikleri düşünülerek uygun bir seçim yapılabilir. Çeşitli modülasyon türleri, kullanılan taşıyıcı dalgaya göre sınıflandırılabilir. Bu tür sınıflandırmada başlıca iki anasınıf vardır.

- i. Burada taşıyıcı bir sinuzoidal dalgadır ve bu anasınıftaki modülasyon türleri *sürekli dalga (SD)* modülasyonu olarak adlandırılır. Eğer taşıyıcı sinuzoidal dalganın genliği bilgi işaretine bağlı olarak değiştirilirse, elde edilen modülasyon *genlik modülasyonu (GM)* (Amplitüd modülasyonu - AM) diye adlandırılır. Genlik modülasyonunun kendi arasında çeşitli türleri vardır ve bunlar Bölüm 4 ile Bölüm 5 de anlatılacaktır. Taşıyıcı dalganın frekansı bilgi işaretine bağlı olarak değiştirilirse, elde edilen modülasyon türüne *frekans modülasyonu (FM)* denir. Taşıyıcı dalganın evresi (fazı) değiştirilirse *evre modülasyonu (EM)* - (faz modülasyonu) elde edilir. Frekans modülasyonu ve evre modülasyonu, ikisi birlikte *açı modülasyonu* olarak adlandırılır.
- ii. Bu anasınıfta taşıyıcı dalga bir dönemli vurum dizisidir. Bu sınıfa giren modülasyon türleri *vurum modülasyonu* diye adlandırılır. Vurum modülasyonunun çeşitli türleri vardır, örneğin *vurum genliği modülasyonu (VGM)*, *vurum yeri modülasyonu (VYM)*, *vurum süresi modülasyonu (VSM)*, *vurum kod modülasyonu (VKM)*. Bunlar ve başka vurum modülasyon türleri Bölüm 8'de incelenmiştir.

Vurum modülasyonu yapısı nedeniyle sürekli değildir, bu nedenle bilgisayar giriş ve çıkışı, teleks gibi yapıları sürekli olmayan bilgi işaretlerine daha uygun bir modülasyon biçimidir. Ancak örnekleme teoremi kullanılarak sürekli dalgalar önce kesintili duruma getirilip sonra vurum modülasyonu kullanılabilir. Örnekleme teoremi yoluyla örneklemiş değerlerden sürekli dalganın aslını yeniden elde edebiliriz.

Modülasyon türlerini sınıflandırmanın başka yolu onları örneksel ya da sayısal modülasyon olarak ayırmaktır.

- i. Eğer taşıyıcı dalganın modüle edilen değiştirgeni bilgi işaretine bağlı olarak sürekli değişiyorsa, bu modülasyon türü *örneksele modülasyon* olarak adlandırılır.
- ii. Öte yandan modüle edilen değiştirgen bilgi işaretine bağlı olarak kesintili bir biçimde değişiyorsa, ortaya çıkan modülasyon *sayısal modülasyon* olarak belirlenir. Sayısal modülasyonda bilgi işareti ya kesintili bir biçimde ya da modülasyondan önce kesintili duruma getirilir.

Bu iki tür sınıflandırmanın birbirleriyle aynı olması gerekmez. Taşıyıcı olarak bir sinüs dalgası kullanan ve bunun sonucu sürekli dalga modülasyonu olarak sınıflandırılan sayısal modülasyon yöntemleri vardır. İkili (binari) iletişim dizgeleri, örneğin frekans kaydırıcı anahtarlar, evre kaydırıcı anahtarlar ve var-yok anahtarlar, bu tür modülasyon yöntemlerine örnek olarak verilebilir. Ancak, bu sınıflandırmaların fazla bir önem taşımadığı belirtilmelidir.

Bugünlerde sayısal modülasyon yöntemleri daha çok önem kazanmaktadır. Bunun nedeni tümleşik devre (tümdevre) yapımındaki son gelişmeler ve bunun sonucu olarak sayısal devre tasarımında ortaya çıkan kolaylıklardır. Bilgisayarların veri işlemede geniş ölçüde kullanımı bu nedenler arasında katılabilir.

Bazı uygulamalarda birden çok modülasyon yöntemi ardarda kullanılmaktadır. Örneğin, genliği modüle edilmiş bir taşıyıcı daha sonra başka bir taşıyıcının frekansını modüle edebilir. Vurum modülasyonu elektromanyetik dalgalarla iletme uygun değildir. Bu nedenle, eğer iletişim elektromanyetik dalgalarla yapılacaksa, vurum modülasyonunu genellikle bir sürekli dalga modülasyonu izler. Örneğin VGM-FM şu anlama gelir: Bilgi işaretine önce vurum genliği modülasyonu uygulanmış ve bu modüle edilmiş işaret bir sinüzoidal taşıyıcının frekansını modüle etmiştir.

## 1.5 İLETİŞİMDEKİ KISITLAMALAR

Herhangi bir iletişim dizgesinde amaç, kaynaktaki bilgi işaretini alıcı uçta olduğu gibi geri elde etmektir. Ancak, bu amaca genellikle erişilemez. Bir başka deyişle, gönderilmiş olan bilgiyi, bazı kısıtlamalar nedeniyle, olduğu gibi geri elde edemeyiz. Bu kısıtlamalar bazı kaçınılmaz doğa olayları ya da iletişim tasarımını yapan mühendis tarafından saptanır. O halde, almaçta bilgiyi aslına olabildiğince yakın bir biçimde elde etmek daha gerçekçi ve uygulanabilir bir amaçtır. Birçok uygulamada, asıl bilgi işaretinden bazı sapmalara hoşgörü gösterilir.

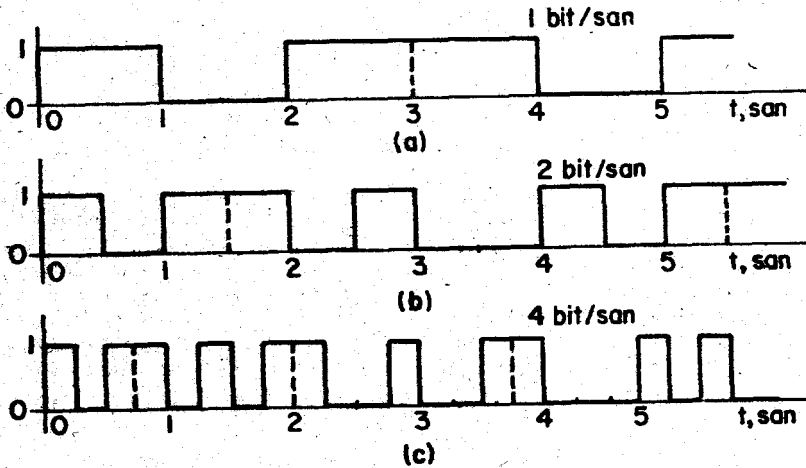
İletişim dizgelerindeki ana kısıtlamaların bir bölümünü gürültü ve girişim oluşturur. Modüle edilmiş işaret iletim ortamında istenilmeyen bir bozulmaya uğrar. Bu bozulmanın nedenleri elektrik fırtınaları, şimşek, yıldırım gibi atmosfer olayları olabileceği gibi elektrik aygıtları ya da başka işaretler nedeniyle oluşan girişim gibi insan-yapısı kaynaklar olabilir. Bozulmanın başka bir kaynağı ise iletişim dizgesinin kendi içinde ürettiği gürültüdür. Gürültü ve girişimin etkilerini azaltmak için çeşitli önlemler alınır. Gürültü düzeyi, kullanılan modülasyon türüne bağlıdır. Gürültü etkisinin az olduğu modülasyon türlerinde genellikle dah çok bantgenişliği kullanılır.

İletişim dizgeleri için başka önemli bir sınırlama ise bantgenişliği kısıtlamasıdır ve bu kısıtlama uluslararası iletişim kuruluşlarınca belirlenir. Elektromanyetik görüğe birçok kullanıcı tarafından paylaşıldığı için, her kullanıcıya belirli bir bantgenişliği verilir ve daha fazlasını kullanmasına izin verilmez. İzin verilen bantgenişliği kullanılan frekans bandına ve modülasyon türüne bağlıdır. Örneğin GM yayımında her kullanıcı 10 KHz'lik bantgenişliği kullanır; oysa FM yayımında 200 KHz'lik bantgenişliği kullanımına izin verilir. Daha çok bantgenişliği

kullandığı için, FM'nin gürültü ve girişimi bastırma özelliklerinin daha iyi olması beklenebilir.

Gürültünün azaltılması için bantgenişliğinin arttırılması birbirleriyle çelişen iki kavramdır. Ancak, diğer kullanıcılar nedeniyle bantgenişliği istenildiği gibi arttırılamaz. Bu nedenle iyi bir iletişim dizgesi, bu kısıtlamalar arasında kurulan dengeğin sonucunda ortaya çıkar. Bu arada, ekonomik etmenlerin de gözönüne alınması gereklidir. Bazı modülasyon türlerinde (örneğin vurum-kod-modülasyonu) düşüncel koşullar altında bile bir ölçüde bozulma kaçınılmazdır. Bunun nedeni bu modülasyon türünün tersinir olmamasıdır.

Bir kanal üzerinden gönderilebilecek bilgi miktarı kanal sığası olarak adlandırılır ve dizgenin bantgenişliğine bağlıdır. Belirli bir bantgenişliği kaplayan bir işaret, bantgenişliği daha dar olan bir dizgeden geçerse bozulmaya uğrar. Dizgenin bantgenişliği azaldıkça bozulma daha artar. Bozulmanın artması sonucu bilginin güvenilir bir biçimde iletilme hızı azalır. Dizgenin bantgenişliği işaretin bantgenişliğinden daha genişse bozulma olmaz. Bu nedenle herhangi bir işaretin bir dizgeden bozulmaya uğramadan geçebilmesi için, dizgenin bantgenişliği sonsuz olmalıdır. Bunun işe uygulamada gerçekleşmesi olanaksızdır. Bu kitapta bilgi kavramı tanımlanmayacaktır. Ancak bilgi iletim hızının, işaretin zamanla değişme hızıyla ilintili olduğu söylenebilir. Şekil 1.2a'da verilen 0-1 dizisini düşünün. Birçok sayısal modülasyon dizgelerinde modüle eden işaret bir 0-1 dizisidir (ikili dizidir). Şekil 1.2a bir miktar,



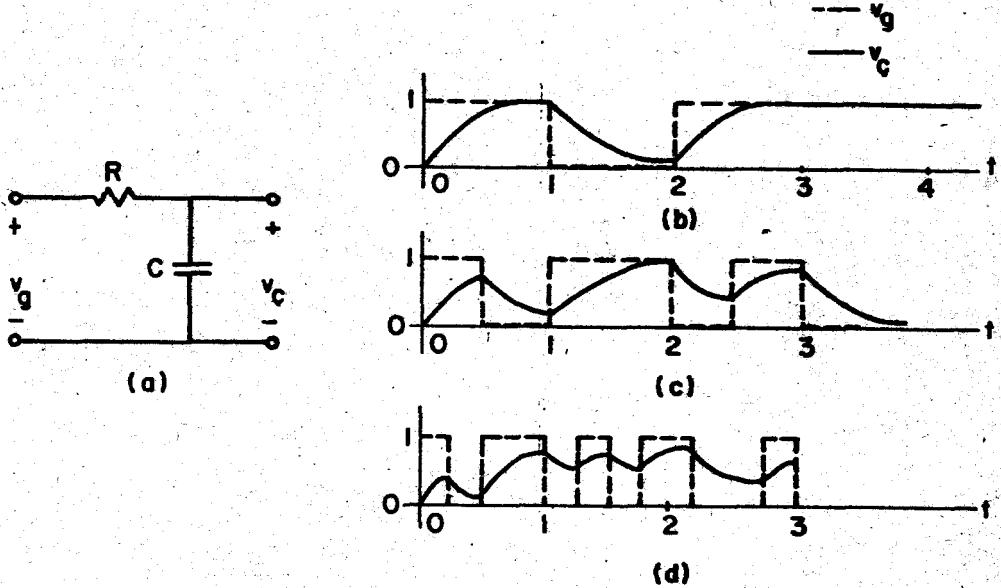
Şekil 1.2 Değişik hızlarda gönderilen 0-1 dizileri

tam olarak söylemek gerekirse 1 bit/san'lik (saniyede bir ikili basamağı) bilgi taşır. (Birim zamanda gönderilen bilgi -0 ya da 1- bir bit olarak adlandırılır.) Şekil 1.2b'deki dizi Şekil 1.2a'dakine göre iki kat hızla değişir, bu nedenle bilgi iletim hızı iki kat artar (2 bit/san). Şekil 1.2c'de verilen 0-1 dizisinde ise bilgi iletim hızı 4 bit/san'dir.



0-1 dizisini sıkıştırarak bilgi iletim hızını istenildiği kadar arttırmak olası gibi görünmektedir. Bu anda akla şu sorular gelebilir: Bu sıkıştırma işlemi nereye kadar sürdürülebilir? Bu işlemde ortaya ne gibi sorunlar çıkar?

Belirli bir ölçüde sıkıştırmadan sonra, dizge (göndermeç ve almaç devreleri) işaretteki ansâl değişimleri izleyemez. Bunun nedeni, bu devrelerdeki erke saklayan öğelerin işaret değişimlerini izleyememesidir. Bir alçakgeçiren RC devresinin Şekil 1.2'de verilmiş olan 0-1 dizilerine tepkisi Şekil 1.3'de gösterilmiştir. Dizinin hızı arttıkça, dizge işa-



Şekil 1.3 Bir alçakgeçiren RC devresinin 0-1 dizilerine tepkisi

reti izleyemez ve bunun sonucu olarak işaret bozulur. Dizgenin yarattığı bu bozulmaya bir de gürültü eklenirse, sezicide (0 ya da 1 gönderildiğini saptayan birim) yanlış yapma olasılığı artar. 1 ya da 0 gönderildiğini (bir durumun varlığı ya da yokluğunu) anlamak için, Şekil 1.3c'deki işaretin kullanılmasıyla yapılan yanlış Şekil 1.3a'daki işaret kullanıldığında yapılan yanlışla göre daha çok olur.

Bu nedenle gönderilen işaretin geri elde edilebilmesi için bilgi iletim hızına bir üst sınır konulmalıdır. 'Dizge işareti izleyemez' ile 'dizgenin bantgenişliği yeterince geniş değil' aşağı yukarı aynı anlamdadır. Bir başka deyişle, dizge bantgenişliği sınırsız olsaydı, dizge çok küçük genişlikteki durumları izleyebilecekti. O halde şu sonuca varabiliriz: Bilgi iletim hızı dizge bantgenişliği ile doğru orantılıdır. Ancak aynı iletim kanalı başka kullanıcılar tarafından da kullanıldığı için, dizge bantgenişliğinin sınırlı olduğu unutulmamalıdır.

Yukarıda açıklananlar dışında bilgi iletim hızını etkileyen başka bir etmen daha vardır ve bu etmen işaret gücüdür (ya da işaret-gürültü oranıdır). Bu etmen şu biçimde açıklanabilir. Dizge bandgenişliği değiştirilmeden, işaret gücü arttırılarak bilgi iletim hızı arttırılabilir. Ancak uygulama açısından ve ekonomik nedenlerle işaret gücünü istenildiği kadar arttırmak olanaksızdır. O halde, dizge bantgenişliği ya da işaret gücü arttırılarak bilgi iletim hızı arttırılabilir. Ancak bu nicelikler yukarıda söz edilen nedenlerden dolayı rasgele arttırılamaz. Bir iletişim mühendisinin görevi ise, bu birbiriyle çelişen etmenlere en iyi (ya da iyi) ve ekonomik bir çözüm bulmaktır.

# BÖLÜM 2

## İŞARET ÇÖZÜMLEMESİ

### 2.1 GİRİŞ

Bir önceki bölümde bir işaretin taşıdığı bilgi miktarının o işaretin zaman içindeki değişme hızı ile ilişkili olduğundan söz edilmişti. Doğal olarak, işaretin zaman içindeki değişme hızı da o işaretin değişik frekans bileşenleri ile yakından ilgilidir. Buna ek olarak, dizge bantgenişliği ve dizgenin işareti izleyememesi kavramları da önceki bölümde tartışılmıştı. Bütün bu kavramlar, işaretin frekans bileşenleri ve dizgenin frekans tepesi ile ilgilidir. Dizgeler değişik frekanslardaki işaretlere değişik tepkeler gösterir. Değişik frekanslardaki işaretlerin büyüklükleri (genlikleri) değişik oranlarda azaltılır ve evreleri de değişik miktarlarda kaydırılır.

Bu kısa açıklamadan, frekans görüncesinin (tayfının), bir işaret ya da bir dizgenin bantgenişliğinin ve dizgenin frekans tepkesinin, iletişim kuramının vazgeçilmez kavramları ve araçları olduğu sonucuna varabiliriz. Bir önceki bölümde kısaca açıklanan frekans bölme çoklama (örneğin belirli bir  $f_0$  frekansı dolayında 10 KHz'lik bir banda yerleştirilmiş GM radyo vericileri) durumunda olduğu gibi, bir iletişim dizgesindeki kısıtlamalar ve nitelikler çoğunlukla frekansa bağlı parametreler türünden belirlenir.

Bundan sonraki altbölümlerde zaman dalgabıçimlerinin tek bir

frekans bölgesi gösterimine sahip oldukları gösterilecektir. Ek B'de verilen Fourier dönüşüm çiftlerinin özellikleri kullanılarak, zaman bölgesindeki belirli işlemlere karşı gelen, belirli frekans bölgesi işlemlerinin olduğu görülebilir. Zaman ile frekans arasında bu sıkı ilişki kurulduktan sonra, iletişim dizgelerinin çözümü, hangisi daha uygunsa, ya zaman bölgesinde ya da frekans bölgesinde yapılır. Bu nedenlerle iletişim kuramına girmeden önce, işaretlerin frekans görünüşü, dizgelerin ya da işaretlerin bantgenişliği, dizgelerin frekans tepkisi ve bunlarla ilgili diğer frekans kavramları üzerinde bir önçalışmaya gerek vardır. Bu bölümde, zaman bölgesindeki işaretlerin frekans bölgesi gösterimleri geliştirilecektir.

Anlatımda " $f_0$  Hz frekansında bir işaret" deyişi " $f_0$  Hz frekansında bozulmasız bir sinüzoidal işaret" anlamında kullanılmıştır. Bu işareti tümüyle belirlemek için frekansına ek olarak sinüzoidalın büyüklüğü ve evresi de belirtilmelidir. Kuşkusuz, evre bir referans açısına göre belirtilir. Örneğin  $a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1)$  sinüzoidalı,  $f_1$  Hz frekansında,  $a_1$  büyüklüğünde ve evresi  $\cos 2\pi f_1 t$ 'ye göre  $\theta_1$  olan bir işarettir.  $a_2 \sin 2\pi f_1 t$  ise  $f_1$  Hz frekansında,  $a_2$  büyüklüğünde ve evresi  $\cos 2\pi f_1 t$ 'ye göre  $-\pi/2$  olan bir işarettir. Buna göre büyüklük ve evre bozulmasız bir sinüzoidalı belirler. Büyüklük ve evrenin frekansa karşı belirtilmesi, bu zaman dalgabıçımının frekans bölgesi gösterimi olarak düşünülebilir.

Eğer zaman-dalgabıçımı tek bir sinüzoidal değil de birden fazla sinüzoidalın toplamı ise, zaman-dalgabıçımını tümüyle belirlemek için değişik frekanslardaki sinüzoidallerin büyüklük ve evreleri ayrı ayrı belirlenmelidir.

Örnek 2.1. Sinüzoidal bir işaret ile modüle edilmiş şu GM dalgabıçımını düşünelim.

$$c(t) = A(1 + \cos \omega_m t) \cos \omega_o t$$

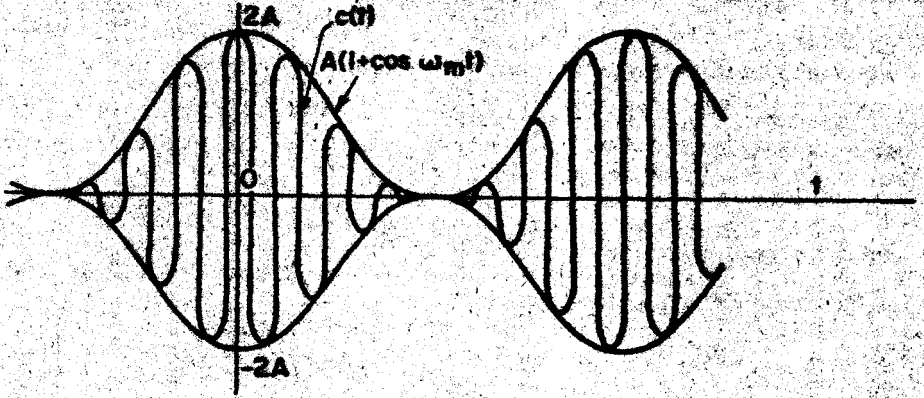
Kosinüs dönüşüm özdeşlikleri kullanılarak, bu eşitlik şu biçimde yazılabilir.

$$c(t) = A \cos \omega_o t + \frac{A}{2} \cos(\omega_o - \omega_m) t + \frac{A}{2} \cos(\omega_o + \omega_m) t$$

Burada  $\omega_o$  ve  $\omega_m$  açısal frekanslardır (yani  $\omega_o = 2\pi f_o$  ve  $\omega_m = 2\pi f_m$ ).

Şekil 2.1'de gösterilen bu  $c(t)$  işareti  $\omega_o$ ,  $\omega_o - \omega_m$  ve  $\omega_o + \omega_m$  rad/sn'de üç frekans bileşeninden oluşur; bunların genlikleri sırasıyla  $A$ ,  $\frac{A}{2}$  ve  $\frac{A}{2}$  dir. Her üçünün evreleri ise o frekansta bir kosinüse göre  $0^\circ$  dir. O halde  $c(t)$  nin üç frekans bileşeninin herbirinin büyüklük ve evresini gösteren bir liste ya da bir çizim,  $c(t)$  nin frekans bölgesi gösterimi olarak düşünülebilir.

Bu örnekten giderek şu sonuca varabiliriz: Eğer bir işaret, sinüzoidallerin toplamı biçiminde ise bu işaretin frekans bölgesi gösterimini kolayca elde edebiliriz. O halde önce bir işareti sinüzoidallerin toplamı olarak göstermek için bir yöntem geliştirilmelidir. Fourier serisi açılımı dönemli (periyodik) işaretlerin sinüzoidallere ayrılmasında kullanılır. Dönemli olmayan işaretler için ise bazı genel koşullar



Şekil 2.1 Sinüzoidal bir dalgaya ile modüle edilmiş GW dalgabıçımı

altında Fourier dönüşümü kullanılarak benzer bir açınım elde edilebilir. Bu bölümün bundan sonraki altbölümlerinde, Fourier serisi gösteriminin ve Fourier dönüşümünün temel tanımları ve özellikleri verilmiştir.

## 2.2 TRIGONOMETRİK FOURIER SERİSİ

$f(t)$  dönemi (periyodu)  $T$  olan dönemli bir işlev olsun. O halde bütün  $t$  değerleri için  $f(t+T) = f(t)$  dir. Fourier serisi kullanılarak bu dönemli  $f(t)$  işlevi şu biçimde yazılabilir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2.1)$$

burada

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.2)$$

ve

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Fourier katsayıları  $a_0$ ,  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$ ,  $t_0$  değerine bağlı değildir.  $t_0$  değeri 0 ya da  $-T/2$  ya da (2.2) deki tümlev (entegral) hesaplarını kolaylaştıracak herhangi bir değer seçilebilir. Açınım  $\sin\omega_0 t$ ,  $\sin 2\omega_0 t$ ,  $\sin 3\omega_0 t, \dots, \cos\omega_0 t$ ,  $\cos 2\omega_0 t$ ,  $\cos 3\omega_0 t, \dots$  gibi trigonometrik işlevlerden oluştuğu için, (2.1) deki Fourier serisi açınımı, *trigonometrik Fourier serisi* olarak adlandırılır.

(2.1)'deki gösterim nokta nokta geçerli olan bir eşitliktir. Bir başka deyişle, eşitliğin sağ tarafı bütün  $t$  değerleri için  $f(t)$  ye eşittir. Ancak  $f(t)$  sürekli değilse, süreksizliğin olduğu noktalarda, sağ taraf süreksizliğin orta noktasına yaklaşır.

Bir dönemli  $f(t)$  işlevinin, (2.1)'deki gibi Fourier serisi ile gösterilebilmesi için, *Dirichlet koşulları* adı verilen aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

- i.  $f(t)$  tek değerlidir.
- ii.  $f(t)$  her yerde sonludur ya da sonsuz değer alıyorsa tümlevi sonludur.
- iii.  $f(t)$  nin bir dönemdeki süreksizliklerin sayısı sonludur.
- iv.  $f(t)$  nin bir döneminde sonlu sayıda maksimum ve minimum vardır.

Uygulamada karşılaşılan dönemli işlevlerin hemen hemen tümü Dirichlet koşullarını sağlar.

Ana frekans  $\omega_0$  ve onun  $n$ 'inci harmoniği şöyle tanımlanır.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ve} \quad \omega_n = n\omega_0 \quad (2.3)$$

Bu tanımlar kullanılarak (2.1) deki Fourier serisi açınımı şu biçimde de yazılabilir.

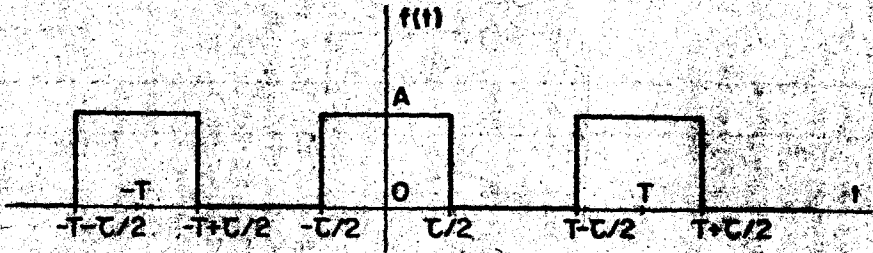
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2.4)$$

Örnek 2.2. Şekil 2.2'de gösterilen  $f(t)$  bir dönemli vuruş dizisidir.

Fourier katsayıları  $a_0$ ,  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  şu biçimde bulunur.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{2A\tau}{T} \quad (2.5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt = \frac{2A}{T} \sin(n \frac{\pi\tau}{T})$$



Şekil 2.2 Dönemli vuruş dizisi

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt = 0$$

Buna göre

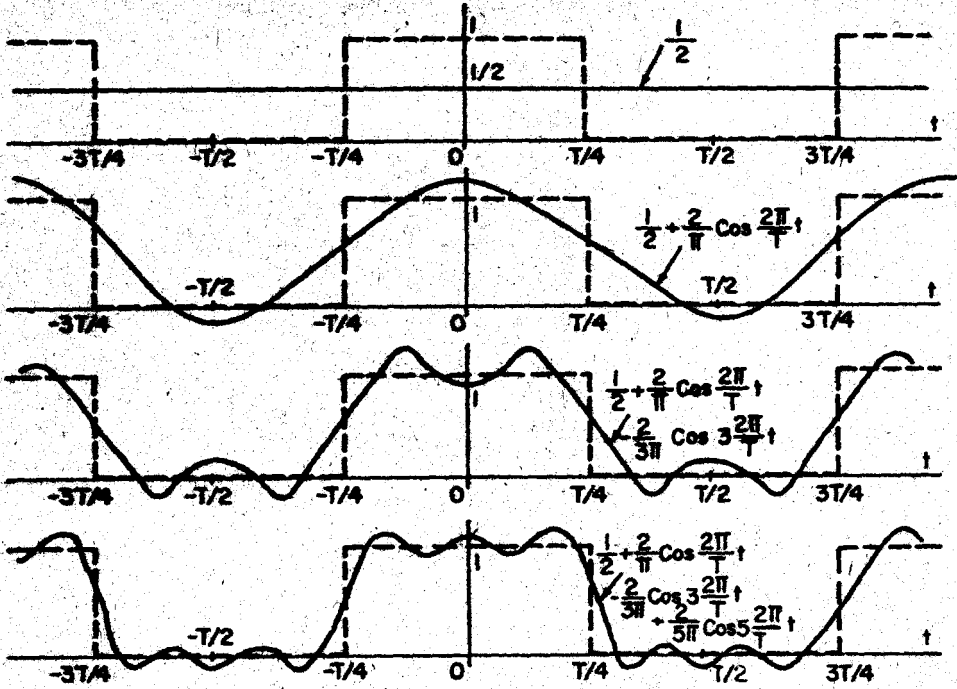
$$f(t) = A \frac{T}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi \frac{T}{T}) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) \quad (2.6)$$

$f(t)$  vuruş dizisini oluşturan frekans bileşenlerinin  $\omega_n = \omega_0 + n \frac{2\pi}{T}$  rad/san, ( $n=0,1,2,\dots$ ) frekanslarında olduğu söylenebilir. Bu vuruş dizisinin frekans bölgesi gösterimi,  $f(t)$  yi oluşturan sinüzoidlerin büyüklükleri ve evre açılarıdır. 0 rad/san'ye karşı gelen büyüklük  $A \frac{T}{T}$ ,  $n \frac{2\pi}{T}$  rad/san'ye karşılık gelen büyüklükler ise  $\frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi \frac{T}{T})$  dir. Her sinüzoidin evre açısı ise  $0^\circ$  dir.

Örnek 2.3. Bir önceki örnekte bir dönemli vuruş dizisinin Fourier serisi açılımı elde edilmişti. Bu örnekte serideki sıfırdan farklı ilk bir, ilk iki, ilk üç, ya da ilk dört terimin toplamı düşünüldüğünde Fourier serisi açılımının  $f(t)$  ye nasıl yaklaştığını inceleyeceğiz. Şekil 2.4'de (2.6) daki Fourier serisi açılımının ilk bir, ilk iki, ilk üç ve ilk dört teriminin toplamlarının çizimleri, dönemli vuruş dizisinin çizimi ile birlikte, verilmiştir. ( $\tau=T/2$ ,  $A=1$ ). Bir  $f(t)$  işlevine başka bir  $z(t)$  işlevi ile yaklaştırma yaparken yapılan yanılğı belirlemek için en yaygın olarak kullanılan ölçüt karesel ortalama yanılğıdır. Karesel ortalama yanılğı  $f(t)$  ile  $z(t)$  arasındaki farkın karesinin  $f(t)$  nin tanımlandığı bölge (dönemli işlevler için bir dönem) üzerindeki toplamıdır. Bu örnekte karesel ortalama yanılğı şu biçimde verilebilir.

$$\int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - z(t)]^2 dt$$

Burada  $z(t)$  Fourier serisi açılımının sıfırdan farklı ilk bir, ilk iki, ilk üç ya da ilk dört terimi toplamı olabileceği gibi serinin tümü de olabilir.



Şekil 2.3. Dönemli vuruş dizisine Fourier serisi açılımının ilk bir kaç terimi ile yaklaştırma yapılması

Vuruş dizisine değişmez bir değer ile yaklaştırma yapılmak istenirse, en az karesel ortalama yanılığını veren değişmez değer Fourier serisi açılımının ilk terimi olur. Eğer vuruş dizisine bir değişmez ve bir sinüzoidal dalga toplamıyla yaklaştırma yapılırsa, açılımındaki sıfırdan farklı ilk iki terim toplamı en az karesel ortalama yanılığını verir. Benzer biçimde vuruş dizisine, bir değişmez ile frekans ve evreleri değişik  $n$  sinüzoidal toplamıyla yaklaştırma yaparsak (2.6)'daki Fourier serisi açılımının sıfırdan farklı ilk  $(n+1)$  terimi toplamı en az karesel ortalama yanılığını verir. Bütün Fourier serisi açılımını düşünülürse, süreksizlik noktaları dışında, açılım vuruş dizisi ile aynıdır ve karesel ortalama yanılığını sıfırdır.

Şekil 2.3'den de görülebileceği gibi, açılımında ne sayıda terim düşünürsek düşünelim, Fourier serisi açılımı süreksizlik noktalarında süreksizliğin orta değerine yaklaşır. Buna ek olarak süreksizlik noktalarının dolayında asıl değerinin altına ve üstüne taşmalar görülür, terim sayısı arttırılırsa bile bu durum yok edilemez ve bu etki Gibbs olayı diye bilinir.

Elektrik mühendisliğinde,  $f(t)$  nin 0 rad/san frekans bileşeni genellikle DA (doğru akım) bileşeni olarak adlandırılır. Bu frekans bileşeninin büyüklüğüne ise DA değeri denir.



Fourier serisi gösteriminin çok bilinen şu iki özelliği (2.2)'den elde edilebilir:

i.  $f(t)$  başlangıç noktasına göre tek işlev yani

$$f(t) = -f(-t) \text{ ise, } n=0,1,2,\dots \text{ için } a_n = 0 \text{ dır.}$$

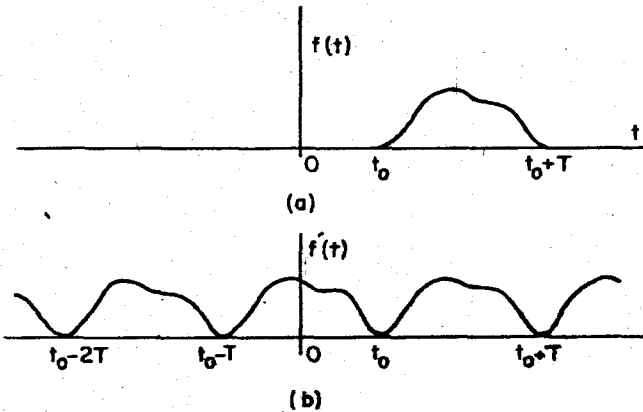
ii.  $f(t)$  çift işlev yani  $f(t) = f(-t)$  ise,  $n = 1,2,\dots$  için  $b_n = 0$  dır.

Trigonometrik kosinüs açınımları kullanılarak, (2.4)'deki Fourier serisi gösterimi şu biçimde de yazılabilir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}) \quad (2.7)$$

Bu Fourier serisi gösteriminden,  $f(t)$  nin frekans bileşenlerinin 0 rad/san ve  $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$  rad/san ( $n=1,2,\dots$ ) frekanslarında olduğu görülmektedir. Bunlara karşılık gelen büyüklükler  $a_0/2$  ve  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ; evre açıları ise 0 ve  $\tan^{-1}(\frac{-b_n}{a_n})$  dir. Fourier serisi gösteriminin bundan başka karmaşık Fourier serisi ya da üstel Fourier serisi olarak adlandırılan çok kullanışlı bir başka biçimi de vardır ve bu gösterim bundan sonraki alt-bölümde ele alınacaktır.

Dönemli olmayan işaretler de Fourier serisi kullanılarak gösterimlenebilir. Bu durumda  $f(t)$  sonlu bir zaman aralığı  $[t_0, t_0+T]$  de tanımlanan herhangi bir zaman dalgabiçimidir ve Fourier serisi açınımları ile ancak bu aralık üzerinde gösterilebilir. Şekil 2.4a'da verilen sonlu zaman aralığı  $[t_0, t_0+T]$  de tanımlanmış  $f(t)$  işlevinin Şekil 2.4b'de



Şekil 2.4. Sonlu bir zaman aralığında tanımlı bir  $f(t)$  ve bunun dönemli uzantısı

gösterilen dönemli uzantısı  $f'(t)$  nin bir Fourier serisi açılımı vardır. Bu Fourier serisi açılımını tüm  $t$  değerleri için dönemli uzantı  $f'(t)$  ye eşittir.  $f(t)$  işlevi  $[t_0, t_0 + T]$  aralığından  $f'(t)$  ye eşit olduğundan,  $f'(t)$  nin Fourier serisi açılımını yalnız  $[t_0, t_0 + T]$  aralığında  $f(t)$  ye eşittir.

Fourier serisi açılımını, dönemli olmayan işaretler için belli bir sonlu aralık üzerinde başka bir zaman bölgesi gösterimi elde edilmesinde de kullanılır. Ancak bu gösterimin dönemli işlevlerin gösterimine benzemeyen yönü, bu gösterimden giderek  $f(t)$ 'nin bileşenlerinin büyüklüklerinin  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ve frekanslarının  $\omega_n$  olduğunun söylenememesidir. Frekansları  $\omega_n$  ve büyüklükleri  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  olan bileşenlerin oluşturduğu işlev, verilen aralık üzerinde  $f(t)$ 'ye eşit olan  $f'(t)$  dönemli işlevidir (Şekil 2.4). Gerçekte kuramsal olarak, yalnız sonlu bir zamanaralığı üzerinde tanımlanan (bilinen) bir işaretin frekans bileşenlerini belirlemek olanaksızdır.

### 2.3 KARMAŞIK FOURIER SERİSİ

Fourier serisinin karmaşık Fourier serisi diye adlandırılan bir başka biçimi de vardır. Dönemi  $T$  olan dönemli bir  $f(t)$  işlevinin karmaşık Fourier serisi açılımını şu biçimdedir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \quad (2.8)$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (2.9)$$

$$\omega_n = n \omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$$

Trigonometrik Fourier serisinde olduğu gibi  $t_0$  ı istediğimiz gibi seçebiliriz ve gösterim  $t_0$  dan bağımsızdır. Bir önceki altbölümde yapılan dönemli olmayan işaretlerle ilgili tartışma, karmaşık Fourier serisi için de geçerlidir. Bir başka deyişle,  $[t_0, t_0 + T]$  aralığında verilen ve dönemli olmayan bir  $f(t)$  işlevi (2.8) kullanılarak açılabilir. Ancak eşitlik yalnız  $[t_0, t_0 + T]$  aralığında geçerlidir ve karmaşık Fourier serisi açılımını kullanarak dönemli olmayan bir  $f(t)$  işlevinin frekans bölgesi gösterimini bulamayız.

(2.8) de verilen karmaşık Fourier serisi gösterimi, aşağıdaki trigonometrik özdeşlikler kullanılarak (2.1) ve (2.2) den doğrudan elde edilebilir.

$$\cos \omega_n t = (e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t})/2$$

$$\sin \omega_n t = (e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t})/2j$$

(2.10)

$$e^{j\omega_n t} = \cos \omega_n t + j \sin \omega_n t$$

Görüldüğü gibi (2.1) ve (2.8) deki Fourier serileri birbirlerinden ayrı iki seri değildir. Bunlar aynı serinin, iki ayrı yolla verilmiş biçimleridir. Bir serideki katsayılar, diğer serideki katsayılar kullanılarak bulunabilir. (2.1), (2.8) ve (2.10) kullanılarak, iki serinin katsayıları arasında şu bağıntı bulunabilir:

$$c_0 = a_0/2$$

$$c_n = (a_n - jb_n)/2 \quad n = 1, 2, \dots$$

(2.11)

$$c_{-n} = (a_n + jb_n)/2 \quad n = 1, 2, \dots$$

$f(t)$  bir gerçel zaman işlevi olmasına karşın Fourier katsayıları  $c_n$  genellikle karmaşık sayılardır. Öte yandan  $a_n$  ve  $b_n$  her zaman gerçeldir. (2.11)'den  $c_n$  nin gerçel olması için  $b_n = 0$  olması gerektiği görülür. Buna göre bütün  $c_n$  değerlerinin gerçel olması için,  $f(t)$  dönemli işlevinin çift ve gerçel olması gerektiği sonucuna varabiliriz.

$c_n$  katsayıları bütün eksi ve artı tamsayılar için tanımlanır; oysa  $a_n$  ve  $b_n$  katsayıları yalnız eksi olmayan tamsayılar için tanımlanmıştır.  $f(t)$  gerçel olduğunda, (2.11) ya da doğrudan  $c_n$  nin tanımlandığı (2.9) kullanılarak, eksi ve artı tamsayılar için  $c_n$  katsayıları arasında şu bağıntının olduğu bulunur.

$$c_n = c_{-n}^* \quad n \text{ tamsayı}$$

(2.12)

Burada \* simgesi karmaşık eşlenik anlamındadır.

Daha önce belirttiğimiz gibi, bu bölümde asıl amacımız işaretler için kullanışlı bir frekans bölgesi gösterimi elde etmektir. Bir işareti oluşturan frekans bileşenlerinin büyüklüğünü ve evresini belirlerken, bunun bir tür frekans bölgesi gösterimi olduğu söylenmişti. Bir başka deyişle, eksi olmayan bütün  $n$  tamsayıları için  $\omega_0$  frekanslarına karşı gelen büyüklük ve evreler (trigonometrik Fourier serisi açılımında  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ve  $\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$ ), kullanışlı bir frekans bölgesi gösterimidir.

Başka bir kullanışlı frekans bölgesi gösterimi ise, bütün  $n$  tamsayı değerleri için  $\omega_0$  frekanslarına karşı gelen  $c_n$  değerlerinden oluşan çizeldir.  $\omega_0$  rad/san'lık sinüzoidalın büyüklük ve evresiyle ilgili tüm bilgiyi taşıdığı için,  $c_n$  Fourier katsayıları frekans bölgesi gösterimine çok uygundur.  $\omega_0$  rad/san'deki sinüzoidalın büyüklük ve evresi, (2.11) deki  $c_n$  nin büyüklük ve açısı kullanılarak bulunabilir.

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(2.13)

$$\angle c_n = \text{açı}(c_n) = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\angle c_{-n} = \text{açı}(c_{-n}) = -\tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bu durumda  $\omega_0$  rad/san'daki sinüzoidalın evresi  $c_n$  nin açısı ile aynıdır; sinüzoidalın büyüklüğü ise  $c_n$  nin büyüklüğünün 2 katına eşittir.

Büyüklikler karşılaştırıldığında ortaya çıkan 2 çarpanının nedeni, karmaşık Fourier serisi gösteriminde büyüklüğü  $|c_{-n}|$  ve açısı  $\text{açı}(c_{-n})$  olan  $-\omega_0$  frekans bileşeninin olmasıdır. Bu eksi frekansın anlamı nedir? Gerçek dünyada karmaşık sayılar olmadığı gibi eksi frekanslar da yoktur. Bu bir matematiksel düşünce, bir araçtır.  $e^{\pm j\omega_0 t}$  işaretlerinin her ikisi de  $\omega_0$  frekansında salınım yaparlar. Bunlar karşıt yönlerde dönen iki evreoku (fazör) olarak düşünülebilir. Bu terimler  $c_n$  ve  $c_{-n}$  katsayıları ile birlikte toplandıklarında bir gerçel işlev oluştururlar.

$$c_n e^{j\omega_0 t} + c_{-n} e^{-j\omega_0 t} = \frac{a_n}{2} \cos \omega_0 t + \frac{b_n}{2} \sin \omega_0 t \quad (2.14)$$

Buna göre, karmaşık Fourier serisi gösteriminde, işaretin  $\omega_0$  rad/san'de iki bileşeni vardır: birisi  $\omega_0$  da öteki ise  $-\omega_0$  dadır. Her iki bileşenin büyüklükleri aynıdır ve  $\omega_0$  daki işaretin büyüklüğünün yarısına eşittir. İki bileşenin açıları ise ters işaretlidir.

Yukarıda anlatılanları şu biçimde özetleyebiliriz: Karmaşık Fourier serisi gösterimindeki  $c_n$  katsayıları oldukça kullanışlı bir frekans bölgesi gösterimi sağlar.  $c_n$  nin yalnız başına fiziksel bir anlamı olmamasına karşın, fiziksel anlam olan nicelikler  $c_n$  den kolayca elde edilir. Eksi frekansları anlamadaki kavramsal güçlüklerle karşın, karmaşık Fourier serisi ve frekans bölgesi gösterimi olarak  $c_n$  katsayıları matematiksel kullanıma çok uygundur. Bütün  $n$  tamsayıları için  $\omega_0$  a karşı  $2\pi c_n$  değerlerinin çizelgesi (ya da çizimi), dönemi  $f(t)$  işlevinin frekans görüngesi (tayfı, spektrum) olarak adlandırılır.  $f(t)$  nin frekans bölgesi gösteriminde kullanılacak asıl nicelik frekans görüngesidir. Şimdiye değin yaptığımız tartışmaların asıl amacı frekans görüngesi kavramını oluşturmaktır.

Genel olarak  $c_n$  katsayıları karmaşık olduğundan frekans görüngesi ( $\omega_0$  a karşı  $2\pi c_n$ ) çizilemez. Frekans görüngesinin çizimi ancak  $c_n$  lerin hepsi gerçel olduğunda olasıdır.  $2\pi c_n$  nin büyüklüğünün çizimi büyüklük görüngesi ve açısının çizimi ise evre görüngesi diye adlandırılır. (2.13)'den büyüklük görüngesinin  $n=0$  a göre çift işlev, evre görüngesinin ise  $n=0$  a göre tek işlev olduğu görülebilir.

Dönemli işaretlerin frekans görünüşü (büyüklük görünüşü ve  $c_n$  ler gerçel değilse evre görünüşü) yalnız  $\omega = \omega_n = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$  frekanslarında (bütün  $n$  tamsayıları için) değer alırlar. Burada  $T$ ,  $f(t)$  işlevinin bir dönem süresidir. Bu durumda frekans görünüşü sürekli bir eğri değil, yalnız  $\omega$  nin kesikli değerlerinde var olan bir çizimdir. Bu nedenle bu görünüşe kesikli görünüşe kimi kez de çizgi görünüşü diye adlandırılır. Görünüş  $\omega = n\omega_0$  da çizilen dik çizgilerle çizimsel olarak gösterilebilir. Bu çizgilerin boyları,  $c_n$  gerçelse  $2\pi c_n$  ile,  $c_n$  karmaşık ise  $2\pi |c_n|$  ile orantılıdır. Buna göre kesikli frekans görünüşü, çizim üzerinde birbirlerine eşit uzaklıkta bir dizi dik çizgiden oluşan bir çizimdir.

Yukarıda da söz edildiği gibi bir dönemli işlevin frekans görünüşü kesikli görünüşüdür. Ancak bunun tersi doğru değildir. Bir başka deyişle, kesikli görünüşe sahip dönemli olmayan işlevler vardır. Dönemli olmayan işlevlerin frekans görünüşünü henüz tanımlamadığımız için, yukarıda söylenen tümcenin kanıtı yapılmayacağı gibi örnek de verilmeyecektir (Alistırma 2.4'e bakınız).

Fourier serileri üzerine yaptığımız bu tartışmayı bitirmeden önce birkaç noktanın da belirtilmesi gereklidir. Dönemi  $T$  olan bir dönemli işlev,  $2T$  ya da  $3T$  ya da daha genel anlamla  $nT$  ( $n$  artı bir tamsayıdır) dönem sürelerine göre de dönemli bir işlevdir. Ancak Fourier serisi gösterimi (trigonometrik ve karmaşık) ve bunlara karşı gelen katsayılar, dönem olarak seçilen  $T$  ya da  $2T$  ya da  $nT$  değerlerine bağlı değildirler. Bu nedenle bir dönemli işlevin bir tek frekans görünüşü vardır ve bu görünüşe dönem süresinin nasıl seçildiğine bağlı değildir. Bu gerçektir, Fourier serilerinin ve Fourier katsayılarının tanımları kullanılarak kanıtlanabilir. (Alistırma 2.13'e bakınız).

Örnek 2.4. Şekil 2.2 de gösterilen dönemli verum dizisinin karmaşık Fourier serisi gösterimini ve frekans görünüşünü saptayalım.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

$$= \frac{A}{n\pi} \sin(n\pi \frac{T}{T}) \quad (2.15)$$

Bütün  $n$  değerleri için,  $f(t)$  çift işlev olduğundan, Örnek 2.1 de bulunduğu gibi,  $b_n = 0$  dır ve sonuçta  $c_n$  katsayıları gerçel olup  $a_n$  katsayıları ile aralardaki bağıntı şu biçimdedir.

$$c_n = \frac{1}{2} a_n \quad n \text{ artı tamsayı}$$

$$c_n = \frac{1}{2} a_{-n} \quad n \text{ eksi tamsayı} \quad (2.16)$$

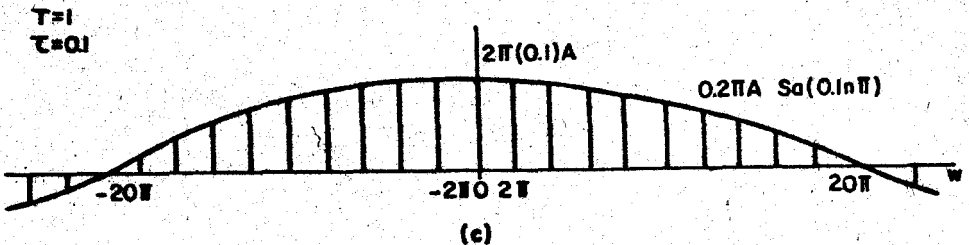
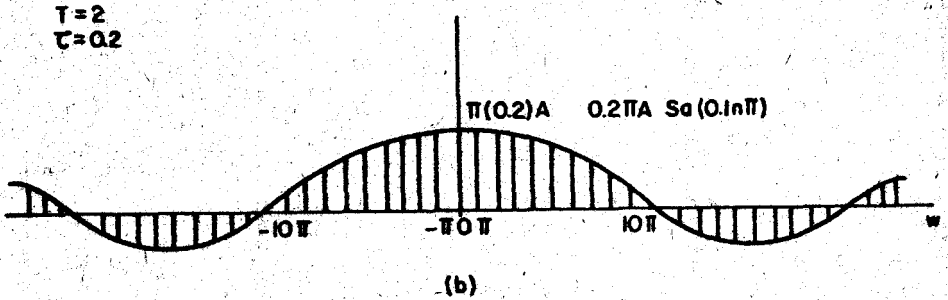
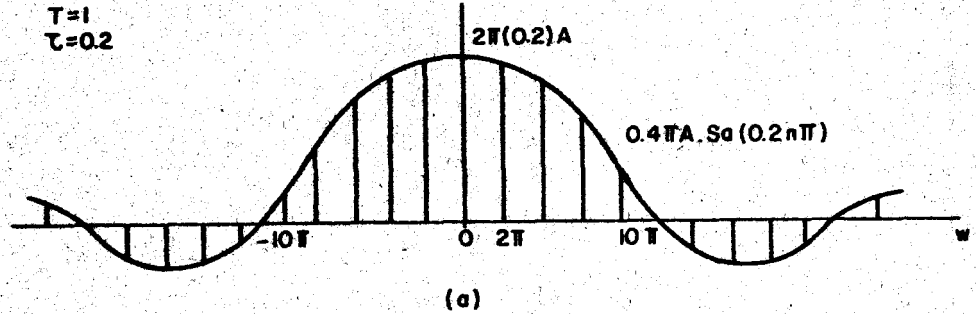
$$c_0 = \frac{a_0}{2} = A \frac{T}{T}$$

$x=0$  için  $\frac{\sin x}{x} = 1$  olduğu bilindiğinden  $c_0$  katsayısı doğrudan (2.15) den elde edilebilir.

Gösterimi kolaylaştırmak için  $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$  olarak tanımlayalım.  $Sa(x)$  işlevi kullanılarak,  $f(t)$  dönemi vuru dizisinin karmaşık Fourier serisi gösterimi şu biçimde ifade edilebilir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{T}{T} Sa(n\pi \frac{T}{T}) e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (2.17)$$

$c_n$  lerin tümü gerçel olduğundan, frekans görünüşü ( $n\omega_0$  ya karşı  $2\pi c_n$ ) doğrudan çizilebilir. Şekil 2.5'de çeşitli  $\tau$  ve  $T$  değerleri için,  $f(t)$  dönemi vuru dizisinin frekans görünüşü çizilmiştir.



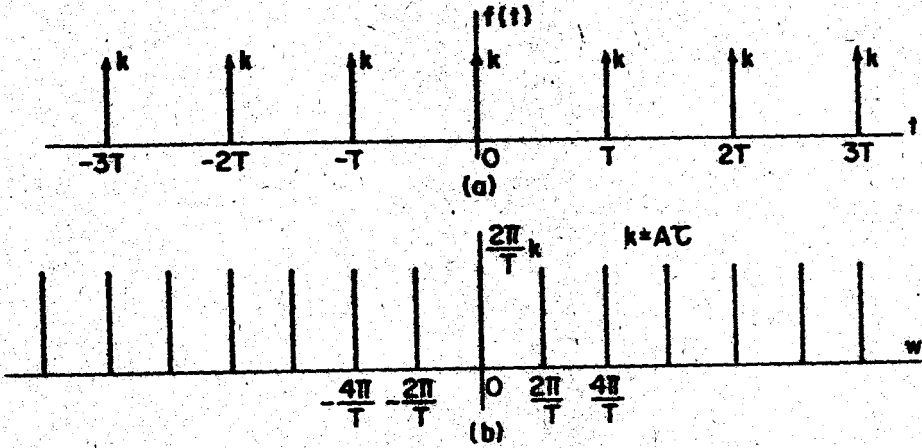
Şekil 2.5 Değişik  $T$  ve  $\tau$  değerleri için bir dönemi vuru dizisinin frekans görünüşü

Değişik  $T$  ve  $\tau$  değerleri için Şekil 2.5'de çizilen vurum dizisinin frekans görünüşü incelenerek şu gözlemler yapılabilir:

- i. Görünge çizgileri birbirlerinden eşit uzaklıktadırlar ve atalarındaki uzaklık  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  rad/san'dır. Bu özellik bütün dönemli işlevlerin frekans görünüşü için doğrudur. Görünge çizgileri arasındaki uzaklık ana frekans olarak adlandırılan  $\omega_0$  dir.
- ii. Bu örnekte incelenen dönemli işlevin frekans görünüşünün zarfı  $2\pi A \frac{\tau}{T} \text{Sa}(n\pi \frac{\tau}{T})$  dir.  $x=0$  için  $\text{Sa}(x) = 1$  dir ve  $\text{Sa}(x)$  işlevinin sıfır geçişleri  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  değerlerindedir. Bu nedenle frekans görünüşünün zarfı olan  $2\pi A \frac{\tau}{T} \text{Sa}(n\pi \frac{\tau}{T})$  işlevi  $\omega=0$  da  $2\pi A \frac{\tau}{T}$  dir. Zarfın sıfır geçişleri  $\omega = \omega_0 = n\omega_0 = \frac{2\pi n}{T}$  dedir, burada  $n = \frac{T}{\tau}, 2 \frac{T}{\tau}, 3 \frac{T}{\tau}, \dots$ . Eğer  $\frac{T}{\tau}, 2 \frac{T}{\tau}, 3 \frac{T}{\tau}, \dots$  tamsayı değil ise, zarfın sıfır geçişleri iki görünge çizgisinin arasına raslar. Eğer  $\frac{T}{\tau}, 2 \frac{T}{\tau}, 3 \frac{T}{\tau}, \dots$  tamsayı ise, zarfın sıfır geçişleri bazı görünge çizgileriyle çakışır ve bunun sonucu olarak bu sıfır geçişlerindeki frekans bileşenleri sıfır olur.
- iii. Vurum genişliği  $\tau$  yi değişmez tutup, dönem süresi  $T$  yi arttıırırsak görünge çizgileri arasındaki uzaklık azalır, görünge zarfının genişliği azalır ancak görünge zarfının sıfır geçişleri değişmez. Bir sonraki altbölümde açıklanacağı gibi  $T$  dönemi sonsuza değin arttırılırsa limitte  $T \rightarrow \infty$  için frekans görünüşü sürekli bir işlev olur ve dalga biçimi zarfa benzer.
- iv. Dönem süresi  $T$  değişmez tutulur ve vurum genişliği  $\tau$  azaltılırsa, görünge çizgileri arasındaki uzaklık değişmeden kalır; ancak zarf değişir. Şekil 2.5c'de görüldüğü gibi zarf yayılır ve genişliği azalır. Kabaca, vurum genişliği azaldıkça frekans görünüşü yayılır denebilir. Zaman ile bantgenişliği arasındaki bu ters ilişki üzerinde Bölüm 3'de daha ayrıntılı bir biçimde durulacaktır.
- v. Dönem süresi  $T$  değiştirilmeden,  $A\tau$  çarpımı değişmez olacak biçimde ( $A\tau = k$ ) vurum genişliği  $\tau$  sıfıra yaklaştırılırsa, Şekil 2.2'de gösterilen vurum dizisi Şekil 2.6a'da gösterildiği gibi bir dürtü dizisine dönüşür. Dürtülerin şiddeti  $k$  olduğundan (2.15)'den bütün  $n$  tamsayıları için  $c_n = A\tau/T$  dir. Sonuç olarak frekans görünüşünün zarfı değişmeden kalır ve  $\frac{2\pi}{T} A\tau$  ya (ya da  $\frac{2\pi}{T} k$ ) eşittir. Dürtü dizisi ve bunun frekans görünüşü Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Dürtü işlevinin tanımı ve bazı özellikleri Ek A'da verilmiştir.

Örnek 2.5. Şekil 2.7a'da verilen ve açısal frekansı  $\omega$  rad/san olan yarı-dalga doğrultulmuş sinüs işaretini düşünelim.

Karmaşık Fourier serisi gösterimindeki  $c_n$  katsayıları şu biçimde bulunabilir.



Şekil 2.6 Dürtü dizisi ve frekans görünüşü.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

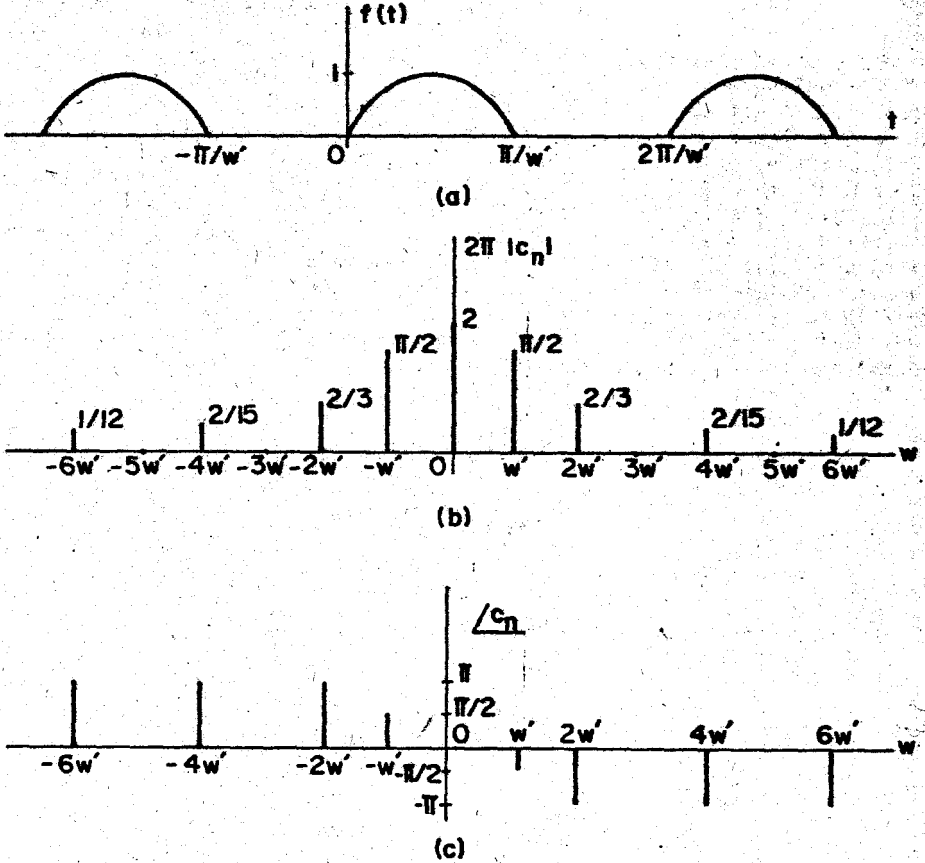
$$= \frac{\omega'}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega'} f(t) e^{-jn\omega' t} dt = \frac{\omega'}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega'} \sin\omega' t e^{-jn\omega' t} dt$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{4j} & n = 1 \\ -\frac{1}{4j} & n = -1 \\ 0 & n \text{ tek sayı ve } \neq 1, -1 \\ -\frac{1}{\pi(n^2-1)} & n \text{ çift sayı} \end{cases} \quad (2.18)$$

Bütün  $c_n$  değerleri gerçel olmadığı için frekans görünüşü ( $2\pi c_n$ ) çizilemez. Bunun yerine Şekil 2.7b ve 2.7c'de gösterildiği gibi büyüklük görünüşü ve evre görünüşü çizilir.

Dalgabıçımının dönem süresi  $T = \frac{2\pi}{\omega'}$  dir ve ana frekans  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  olduğundan  $\omega_0 = \omega'$  bulunur. Eğer dönemli dalgabıçımı yarı-dalga doğrultulmuş kosinüs dalgası olsaydı, katsayıları ve Fourier seri açılımı değişik olacaktı. Ancak bu dalgabıçımlerinden birisi diğerinin kaydırılmış durumu olduğundan, birisinin açılımındaki katsayılar ötekenden elde edilebilir.





Şekil 2.7 Yarı-dalga doğrultulmuş sinüs dalgasının (a) dalgabıçımı (b) büyüklük görünüşü, (c) evre görünüşü.

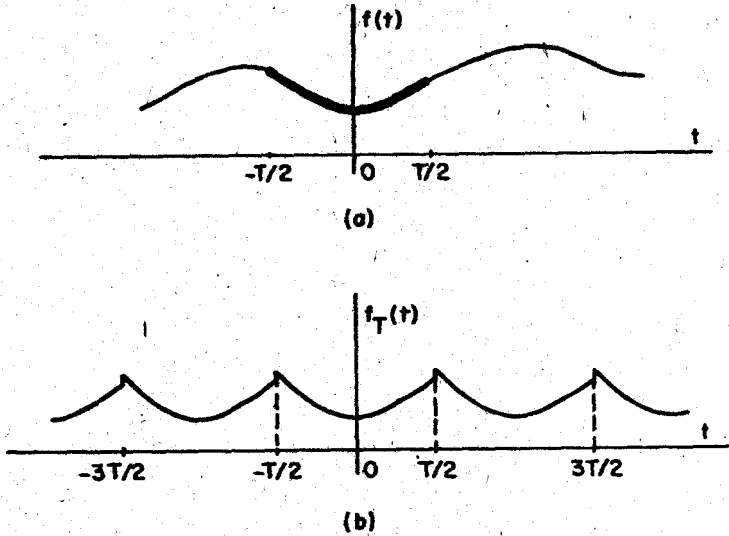
#### 2.4 FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Bundan önceki altbölümde, dönemli işaretler için Fourier serisi açılımını kullanarak, kullanışlı bir frekans bölgesi gösterimi elde edilmişti. Bu gösterimde dönemli işaretler, karmaşık üstel işlevlerin toplamı olarak ifade edilmişti. Üstel işlevlerin herbirisi işaretin değişik frekans bileşenlerini gösteriyordu.

Bu altbölümde ise amacımız herhangi bir işaret için kullanışlı ve uygun bir frekans bölgesi gösterimi geliştirmektir. Burada akla hemen şu soru gelebilir: Benzer bir açınımla bütün  $t$  değerleri için geçerli olacak biçimde, dönemli olmayan bir işareti karmaşık üstel işlevlerin toplamı olarak yazabilir miyiz? Dönemli olmayan işareti, bir dönemli işaretin limitteki durumu olarak düşünersek böyle bir açınım olasıdır.

Limit alınırken işaretin dönem süresi  $T$  sonsuza götürülür.

$f(t)$ , karmaşık üstel işlevlerin toplamı olarak ifade edilecek, dönemli olmayan bir işlev olsun. Bu  $f(t)$  işlevi  $[-T/2, T/2]$  zaman aralığında bir Fourier serisi açılımı ile gösterilebilir. Ancak bu gösterim yalnız bu sonlu zaman aralığında geçerlidir. Burada bir nokta üzerinde çok önemle durulmalıdır. Açınımdaki  $c_n$  Fourier katsayıları  $f(t)$  için değil de,  $f_T(t)$  olarak adlandırılan bir dönemli işlevin frekans bölgesi gösterimini oluşturur.  $f_T(t)$  işlevi dönemli bir işlevdir ve  $[-T/2, T/2]$  zaman aralığında  $f(t)$  ye eşittir. Bir  $f(t)$  işlevi ve buna karşı gelen  $f_T(t)$  işlevi Şekil 2.8'de gösterilmiştir. Dönem süresi  $T$  arttırıldıkça Fourier serisi ile gösterilen dönemli  $f_T(t)$  işlevi daha geniş bir aralıkta  $f(t)$  işlevine eşit olur.  $T$  sonsuza giderken  $f_T(t)$  işlevi  $f(t)$  ye yaklaşır ve  $f_T(t)$  nin frekans bölgesi gösterimi olarak yorumladığımız Fourier serisi açılımı ise Fourier tümlevi olarak adlandırılan bir tümleve yaklaşır. Sonuçta bu tümlev dönemli olmayan  $f(t)$  işlevinin frekans bölgesi gösterimini oluşturur.



Şekil 2.8 Bir  $f(t)$  işlevi ve buna karşı gelen  $f_T(t)$  işlevi

Dönemli işaretlerin üstel işlevlerin toplamı olarak açılımı, bir başka deyişle Fourier serisi gösterimi; kesikli bir toplamdır. Oysa dönemli olmayan işlevlerin buna karşı gelen açılımı üstel işlevlerin sürekli bir toplamıdır (tümlevidir). Bir başka deyişle, dönemli işaretlerin frekans bileşenleri  $n$  tamsayıları için  $n \cdot 2\pi/T$  rad/san'dedir. Dönemli olmayan işaretlerin ise frekans bileşenleri kesikli değer almaz, sürekli- dir. Hatırlanacağı gibi, bir önceki altbölümde dönemi  $T$  olan bir dönemli işlevin görüğe çizgileri arasındaki uzaklığın  $2\pi/T$  rad/san olduğu belirtilmişti.  $T$  sonsuza giderken görüğe çizgileri birbirlerine yaklaşır ve sonuçta görüğe bir kesikli görüğe olmaktan çıkar, sürekli bir işlev ve dönüştür.

Şimdi dönemli olmayan  $f(t)$  işlevine ve dönemli olup da  $[-T/2, T/2]$  aralığında  $f(t)$  ye eşit olan  $f_T(t)$  işlevine bakalım.  $f_T(t)$  dönemli işlevinin Fourier serisi gösterimi şu biçimdedir.

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (2.19)$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

ya da

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (2.20)$$

$T$  sonsuza giderse,  $f_T(t)$  işlevi  $f(t)$  ye yaklaşır. Görünge çizgileri arasındaki uzaklık  $\Delta\omega$  olarak tanımlanırsa

$$\Delta\omega = \frac{\Delta}{T} = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad (2.21)$$

ve  $T$  sonsuza götürülürse (sonuçta  $\Delta\omega$  sıfıra gider), (2.19) şöyle olur

$$f(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \Delta\omega \quad (2.22)$$

(2.22) deki limit alınırca,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.23)$$

Burada

$$F(\omega_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} T c_n \quad \text{dir} \quad (2.24)$$

(2.20) ve (2.24) kullanılarak

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.25)$$

bulunur.

(2.23), işaretin karmaşık üstel işlevlere ayrıştırılabileceğini gösterir.  $F(\omega)$  ise rad/san'deki frekans bileşeninin büyüklüğünü verir. Bir yoğunluk olarak düşünebileceğimiz  $F(\omega)$  yi (2.25)'i kullanarak  $f(t)$  den elde edebiliriz.

(2.25)'de tanımlanan  $F(\omega)$  işlevi  $f(t)$ 'nin Fourier dönüşümü diye adlandırılır. (2.23)'deki gibi  $F(\omega)$  verildiğinde  $f(t)$ 'nin bulunması  $F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü'nün alınması diye adlandırılır. (2.23) ve (2.25) ile birbirlerine bağlı  $f(t)$  ve  $F(\omega)$  işlevleri ise Fourier dönüşüm çiftleridir.

Fourier dönüşümünü Fourier serisinin limitteki durumu olarak tanımamak gerekmez. (2.23) ve (2.25)'deki ifadelerin verilmesiyle Fourier dönüşümü ve evriği doğrudan tanımlanabilir. Bu tür bir aksiyomatik yaklaşımı kullanmakta hiçbir yanlış olmasına karşın, Fourier serisi yoluyla verilen tanım, yapılan işe ve  $F(\omega)$  işlevine bir fiziksel anlam getirir.

Her işlevin tek bir Fourier dönüşümü vardır; bunun evrik Fourier dönüşümü de tektir. Bir başka deyişle, bir işlev ve bunun Fourier dönüşümünün oluşturduğu Fourier dönüşüm çifti, tektir. Bu nedenle, bir işaretin Fourier dönüşümü o işarete ilişkin tüm bilgiyi taşır.

Fourier dönüşüm çiftlerinin bir çizelgesi Ek B'de verilmiştir. Fourier dönüşüm çiftlerinin ortak özelliklerinden bazıları ise Ek C'dedir.

$f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  işaretinin  $\omega$  frekansındaki bileşenin genliği olduğundan,  $F(\omega)$  işlevi  $f(t)$  nin frekans görüngesi olarak adlandırılır. Altbölüm 2.6'da gösterileceği gibi frekans görüngesinin Fourier dönüşümü olarak tanımlanması, önemli işlevler için yapılan frekans görüngesi tanımı ile tutarlıdır. Buna göre elde etmek istediğimiz kullanışlı frekans bölgesi gösterimi, frekans görüngesi diye adlandırdığımız Fourier dönüşümüdür.

Bir gerçel  $f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  genellikle karmaşık değerli bir işlevidir. (2.25) kullanılarak şu sonuç elde edilebilir.

$$F(\omega) = F^*(-\omega) \quad (2.26)$$

Genellikle Fourier dönüşümü (frekans görüngesi)  $F(\omega)$  karmaşık olduğundan, olduğu gibi çizilemez.  $f(t)$  çift işlev ise,  $F(\omega)$  gerçeldir.  $F(\omega)$  gerçel değilse,  $F(\omega)$  nin büyüklüğü  $|F(\omega)|$  ile açısı ayrı ayrı çizilir ve bunların çizimleri sırasıyla büyüklük görüngesi ve evre görüngesi diye adlandırılır. Büyüklük görüngesi çift işlev ve evre görüngesi ise tek işlevidir. Fourier dönüşüm çiftlerinin tek olması nedeni ile, bir işlev ve onun frekans görüngesi birbirlerini tümüyle tanımlarlar. 'Bir işaretin frekans görüngesi o işarete ilişkin tüm bilgiyi taşır' anlamına geldiği için yukarıdaki tümce vurgulanmalıdır.

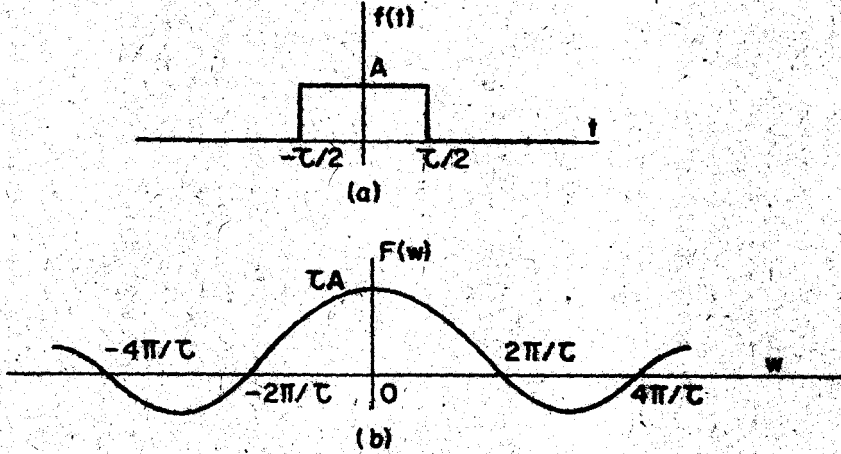
Aşağıda, bir işlevin Fourier dönüşümünün bulunması ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Örnek 2. 6. Şekil 2.9a'da gösterilen dikdörtgen vurumu düşünelim. Bu vurunun Fourier dönüşümü (2.25) kullanılarak bulunabilir.

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{A}{j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\
 &= A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

$f(t)$  çift işlev olduğundan  $F(\omega)$  gerçeldir ve çizimi Şekil 2.9b'de verilmiştir.



Şekil 2.9 Bir dikdörtgen vurum ve Fourier dönüşümü

Örnek 2.4 ve Şekil 2.5 göz önüne getirilirse, bir dikdörtgen vurumun Fourier dönüşümü (frekans görüncesi) ile bir dönemli vurum dizisinin frekans görüncesi zarfının,  $2\pi/T$  çarpanı dışında, aynı olduğunu görürüz. Bu gerçek, Şekil 2.5 üzerine yapılan gözlem iii de dolaylı olarak belirtilmişti.

Örnek 2.7. Bir dürtü işlevinin Fourier dönüşümünü bulalım. Bir önceki örnekte vurum genişliği sıfıra gönderilir ve  $A\tau = 1$  değişmez tutulursa dikdörtgen vurum, birim dürtü işlevi olur. Buna göre dikdörtgen vurumun Fourier dönüşümünde de aynı limit alma işlemi yapılırsa dürtü işlevinin Fourier dönüşümü elde edilir. Bir başka deyişle

$$\begin{aligned}
 F[\delta(t)] &= \lim_{\tau \rightarrow 0} A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\
 &= 1 \quad (\text{Ek A'ya bakınız})
 \end{aligned}$$

Burada  $F$  Fourier dönüşümü işlemini belirtir. Görüldüğü gibi birim dürtü işlevinin Fourier dönüşümü birim değişmez işlevidir. Bir dürtü işlevinin Fourier dönüşümü,  $2\pi/T$  çarpanı dışında, dönemli dürtü dizisinin frekans

görüngesinin zarfıyla aynıdır. Bu gözlem bir önceki örnekte bir dikdörtgen vurunun Fourier dönüşümü ile bir dönemli vurun dizisinin frekans görüngesinin zarfı arasında kurulan ilişkiye benzer.

Dürtü işlevinin Fourier dönüşümünün bulunmasında limit alma işlemi ileride karşılaşılabileceği için öğretici amaçlarla verilmiştir. Oysa tanım kullanılarak dürtü işlevinin Fourier dönüşümü kolayca bulunabilir.

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt$$

$$= 1 \text{ (Ek A'ya bakınız)}$$

Bir işaretin bantgenişliği, onun frekans görüngesinin genişliğinin bir ölçüsüdür. Bir işaretin bantgenişliği için kullanılan pek çok değişik tanım vardır, ancak en yaygın kullanılanı şudur:  $|F(\omega)|$  nin, maksimum değerinin  $1/\sqrt{2}$ 'sinden büyük değerler aldığı frekans bandının uzunluğu 3 dB bant genişliği diye adlandırılır. 3 dB olarak adlandırılmasının nedeni,  $1/\sqrt{2}$  noktasının güç düzeyinin  $1/2$  olduğu noktaya karşı gelmesi ve bu frekansta güç düzeyinin maksimum güç düzeyinin 3 dB altında olmaıdır. İşaret bantgenişliğinin başka tanımları da olmasına karşın en çok kullanılanı budur.

Bir önceki altbölümde bahsedilen zaman-bantgenişliği arasındaki ters orantılı ilişkiyi yukarıdaki örnekte de görebiliriz. Vurum genişliği artarsa yani zaman işlevi genişlerse, frekans görüngesi sivrileşir. Karşıt olarak zaman işlevi daralırsa frekans görüngesi daha yayvan olur (yani bantgenişliği artar).

Bundan sonraki anlatımda aynı anlama geldikleri için Fourier dönüşümü ve frekans görüngesi terimleri eşanlamlı olarak kullanılacaktır.

## 2.5 FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN VARLIĞI

Bazı zaman işlevlerinin Fourier dönüşümü yoktur. Bu yargıya Fourier dönüşümünün tanımından varabiliriz. (2.25)'de verilen tümlev sonluysa, Fourier dönüşümü vardır.  $e^{-j\omega t}$  nin büyüklüğü 1 olduğundan, Fourier tümlevlerinin varlığı için bir yeterli koşul şöyledir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

$f(t)$  nin salt tümlevinin alınabilmesi olarak adlandırılan bu koşul oldukça kısıtlayıcıdır. Basit bazı zaman işlevleri, örneğin birim basamak ve birim yokuş işlevleri için bile, bu koşul sağlanmaz.

Aslında salt tümlevi alınamayan işlevler için Fourier dönüşümü tanımlanmaz. Bununla birlikte dürtü işlevleri kullanılırsa, salt tümlevin alınabilmesi koşulu her zaman gerekmez. Daha sonra göreceğimiz gibi salt tümlevi alınamamasına karşın dürtü işlevleri ile Fourier dönüşümü tanımlanan işlevler vardır. Tanımında ve kullanımında bazı matematiksel güç-

lükler olmasına karşın dürtü işlevi, iletişim kuramında çözülemeyi kolaylaştıran çok kullanışlı bir araçtır. Bu nedenle bu kitapta dürtü işlevi çok kullanılacaktır. Dürtü işlevinin matematiksel zorluklarının tartışılması, okuyucunun bu kitabı anlaması için gereken matematik bilgisinin üzerinde bir bilgiyi gerektirdiği için, bu konuya girilmeyecektir. Dürtü işlevinin tanımı ve limitte dürtü işlevine yaklaşan işlevler Ek A'da verilmiştir.

1,  $\text{sgn}(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\cos \omega_0 t$ ,  $\sin \omega_0 t$  ve  $e^{j\omega_0 t}$  gibi işlevlerin salt tümlevi alınamaz ve Fourier dönüşümünün varlığı için yeterli koşul sağlanmaz. Ancak bu işlevlerin Fourier dönüşümleri limitte bulunabilir.

Örnek 2.8. Bir A değişmez işlevinin Fourier dönüşümünü bulalım. (Şekil 2.10a).

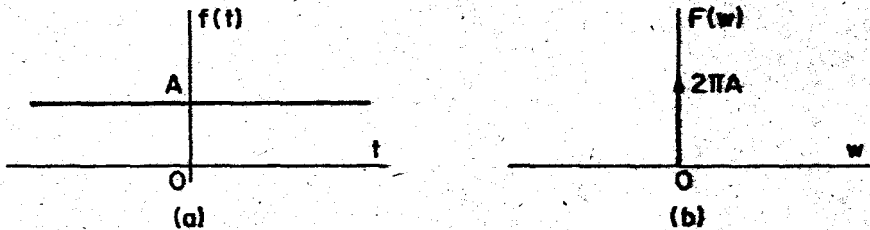
Bir dikdörtgen vuruğun Fourier dönüşümü Örnek 2.7'de bulunmuştu. Vurum genişliği  $\tau$  sonsuza götürülürse dikdörtgen vuruğun değişmez işleve yaklaşır. Buna göre bir değişmez işlevin Fourier dönüşümü,  $\tau$  sonsuza giderken dikdörtgen vuruğun Fourier dönüşümünün limitidir. Bir başka deyişle  $f(t) = A$  nın Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  şu biçimdedir.

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \tau \cdot \text{Sa} \left( \frac{\omega \tau}{2} \right) \quad (2.29)$$

Limitte dürtü işlevi  $\delta$  ya yaklaşan işlevlerin çizelgesi Ek A'da verilmiştir.  $\text{Sa}(\cdot)$  işlevi bunlardan biridir. (2.29) daki limit alınarak bir değişmez işlevin Fourier dönüşümü bulunabilir.

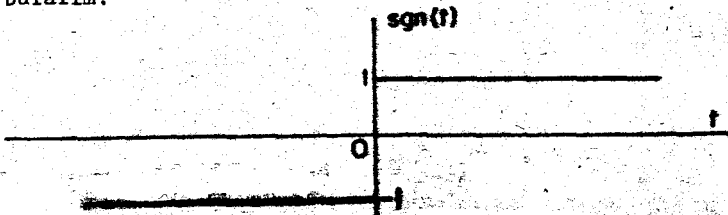
$$F(\omega) = 2\pi A \delta(\omega) \quad (2.30)$$

Bu sonucun doğruluğu  $F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümünün  $f(t)$  ye eşit olduğu gösterilerek de anlaşılabilir. Değişmez işlev ve Fourier dönüşümü Şekil 2.10'da verilmiştir.



Şekil 2.10 Değişmez işlev ve Fourier dönüşümü

Örnek 2.9. Şekil 2.11'de verilen signom işlevinin [ $\text{sgn}(t)$ ] Fourier dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.11 Signom işlevi

Bu işlevi şu biçimde ifade edebiliriz.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$= u(t) - u(-t)$$

Limit kullanılarak bu işlev şu biçimde yazılabilir.

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

$\text{sgn}(t)$  nin Fourier dönüşümü şöyle bulunabilir.

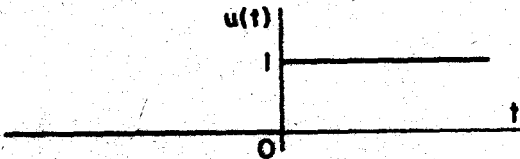
$$\begin{aligned} F[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} F[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

Örnek 2.10. Şekil 2.12'de verilen birim basamak işlevi  $u(t)$  nin Fourier dönüşümü  $\text{sgn}(t)$  nin Fourier dönüşümü kullanılarak bulunabilir. Birim basamak işlevini şu biçimde ifade edebiliriz.

$$u(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}(t)]$$

Buna göre

$$\begin{aligned} F[u(t)] &= F\left[\frac{1}{2}\right] + F\left[\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$



Şekil 2.12 Birim basamak işlevi



lükler olmasına karşın dürtü işlevi, iletişim kuramında çözümlenmeyi kolaylaştıran çok kullanışlı bir araçtır. Bu nedenle bu kitapta dürtü işlevi çok kullanılacaktır. Dürtü işlevinin matematiksel zorluklarının tartışılması, okuyucunun bu kitabı anlaması için gereken matematik bilgisinin üzerinde bir bilgiyi gerektirdiği için, bu konuya girilmeyecektir. Dürtü işlevinin tanımını ve limitte dürtü işlevine yaklaşan işlevler Ek A'da verilmiştir.

1,  $\text{sgn}(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\cos \omega_0 t$ ,  $\sin \omega_0 t$  ve  $e^{j\omega_0 t}$  gibi işlevlerin salt tümlevi alınamaz ve Fourier dönüşümünün varlığı için yeterli koşul sağlanmaz. Ancak bu işlevlerin Fourier dönüşümleri limitte bulunabilir.

Örnek 2.8. Bir A değişmez işlevinin Fourier dönüşümünü bulalım. (Şekil 2.10a).

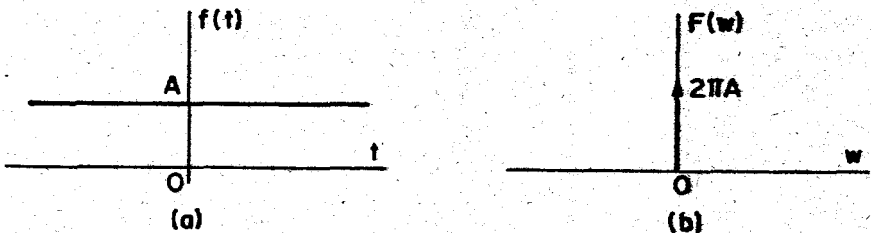
Bir dikdörtgen vuruğun Fourier dönüşümü Örnek 2.7'de bulunmuştu. Vurum genişliği  $\tau$  sonsuza götürülürse dikdörtgen vuruş değişmez işleve yaklaşır. Buna göre bir değişmez işlevin Fourier dönüşümü,  $\tau$  sonsuza giderken dikdörtgen vuruğun Fourier dönüşümünün limitidir. Bir başka deyişle  $f(t) = A$  nın Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  şu biçimdedir.

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (2.29)$$

Limitte dürtü işlevi  $\delta$  ya yaklaşan işlevlerin çizelgesi Ek A'da verilmiştir.  $\text{Sa}(\cdot)$  işlevi bunlardan biridir. (2.29) daki limit alınarak bir değişmez işlevin Fourier dönüşümü bulunabilir.

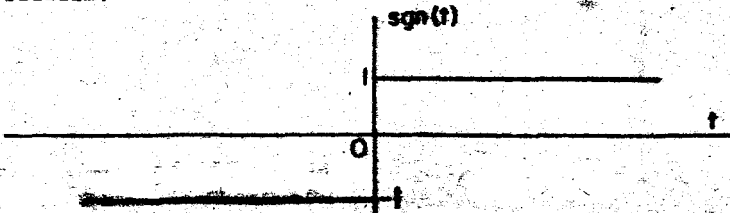
$$F(\omega) = 2\pi A \delta(\omega) \quad (2.30)$$

Bu sonucun doğruluğu  $F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümünün  $f(t)$  ye eşit olduğu gösterilerek de anlaşılabilir. Değişmez işlev ve Fourier dönüşümü Şekil 2.10'da verilmiştir.



Şekil 2.10 Değişmez işlev ve Fourier dönüşümü

Örnek 2.9. Şekil 2.11'de verilen signom işlevinin  $[\text{sgn}(t)]$  Fourier dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.11 Signom işlevi

Bu işlevi şu biçimde ifade edebiliriz.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$= u(t) - u(-t)$$

Limit kullanılarak bu işlev şu biçimde yazılabilir.

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

$\text{sgn}(t)$  nin Fourier dönüşümü şöyle bulunabilir.

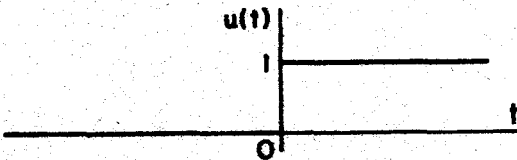
$$\begin{aligned} F[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} F[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

Örnek 2.10. Şekil 2.12'de verilen birim basamak işlevi  $u(t)$  nin Fourier dönüşümü  $\text{sgn}(t)$  nin Fourier dönüşümü kullanılarak bulunabilir. Birim basamak işlevini şu biçimde ifade edebiliriz.

$$u(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}(t)]$$

Buna göre

$$\begin{aligned} F[u(t)] &= F\left[\frac{1}{2}\right] + F\left[\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$



Şekil 2.12 Birim basamak işlevi

Örnek 2.11.  $\cos \omega_0 t$  nin Fourier dönüşümü de bir limit alınarak bulunabilir.  $\cos \omega_0 t$  işlevi  $\cos \omega_0 t$  ile  $[-T/2, T/2]$  üzerindeki birim dikdörtgen vurum  $G_T(t)$  nin çarpımının  $T$  sonuza giderken limiti olarak düşünülebilir. Bu nedenle  $f(t) = \cos \omega_0 t$  nin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  ise

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F\{G_T(t) \cos \omega_0 t\} \quad (2.31)$$

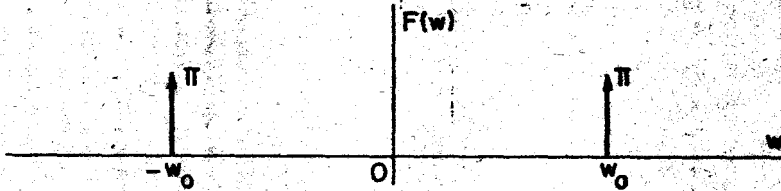
(2.31) deki Fourier dönüşümü hesaplanırsa

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \left\{ \text{Sa} \left[ \frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right] + \text{Sa} \left[ \frac{(\omega + \omega_0)T}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Örnek 2.8 deki gibi  $\text{Sa}(\cdot)$  işlevinin limiti alınırsa

$$F(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.32)$$

bulunur.  $F(\omega)$  nin çizimi Şekil 2.13'de gösterilmiştir.



Şekil 2.13  $\cos \omega_0 t$  nin Fourier dönüşümü

Benzer biçimde  $\sin \omega_0 t$  ve  $e^{j\omega_0 t}$  Fourier dönüşümleri de bulunabilir.

$$f(t) = \sin \omega_0 t \leftrightarrow F(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (2.33)$$

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.34)$$

Laplace dönüşümünü bilenler Fourier dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki benzerliğe dikkat etmiş olmalıdırlar. Limitte bile Fourier dönüşümü olmayan işlevler vardır (örneğin  $f(t) = e^t$ ). Laplace dönüşümü Fourier dönüşümünden değişik ve Fourier dönüşümünün varlığı konusunda ortaya çıkan güçlüklerle Laplace dönüşümünde rastlanmaz. Fourier ve Laplace dönüşümleri arasındaki ayrılıklar ve benzerlikler Ek D'de kısaca tartışılmıştır.

## 2.6 DÖNEMLİ İŞLEVLERİN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Dönemli işlevlerin salt tümlevi alınamaz, yani Fourier dönüşümünün varlığı için yeterli koşul sağlanmaz. Ancak dönemli işaretlerin

Fourier dönüşümü  $\sin \omega_0 t$ ,  $\cos \omega_0 t$  ve  $e^{j\omega_0 t}$  için yaptığımız gibi limit alınarak bulunabilir. Bir dönemli işlevin Fourier dönüşümü bulunurken önce  $[-\tau/2, \tau/2]$  solumu zaman aralığı üzerinde Fourier tümlevi hesaplanır ve sonra  $\tau$  sonsuza giderken limit bulunur. Ancak dönemli bir işlevin Fourier serisi açılımını ve bir önceki altbölümde bulunan sonuçlar kullanılarak Fourier dönüşümü daha kolay bir biçimde bulunabilir.

$f(t)$  dönem süresi  $T$  olan bir dönemli işlev olsun.  $f(t)$  nin Fourier serisi gösterimi ise şöyledir:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.35)$$

(2.35)'in sol yanının Fourier dönüşümü sağ yanının Fourier dönüşümüne eşittir.

$$F(\omega) = F[f(t)] = F\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (2.36)$$

Fourier dönüşümünün doğrusallık özelliği ve

$$F[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2.37)$$

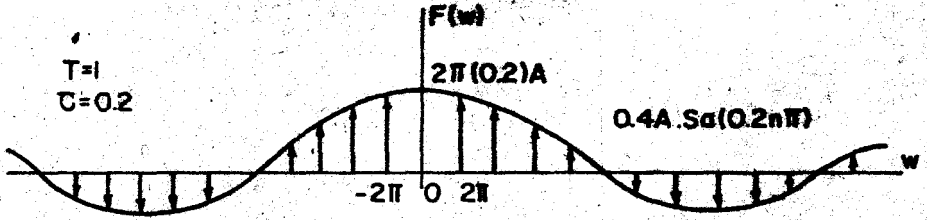
kullanılarak, (2.36) şu biçimde yeniden yazılabilir.

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2.38)$$

Görüldüğü gibi  $f(t)$  dönemli işlevinin Fourier dönüşümü eşit aralıklarla  $\omega = n\omega_0$  larda yerleştirilmiş ve şiddetleri sırasıyla  $2\pi c_n$  olan dürtülerden oluşur. Dönemli işlevlerin frekans görünüşü altbölüm 2.3'de  $2\pi c_n$  nin  $\omega_n$  ye karşı çizimi olarak tanımlanmıştı. Frekans görünüşünün bu tanımlama ile Fourier dönüşümü hemen hemen aynıdır; tek ayrılık simgelemesidir.

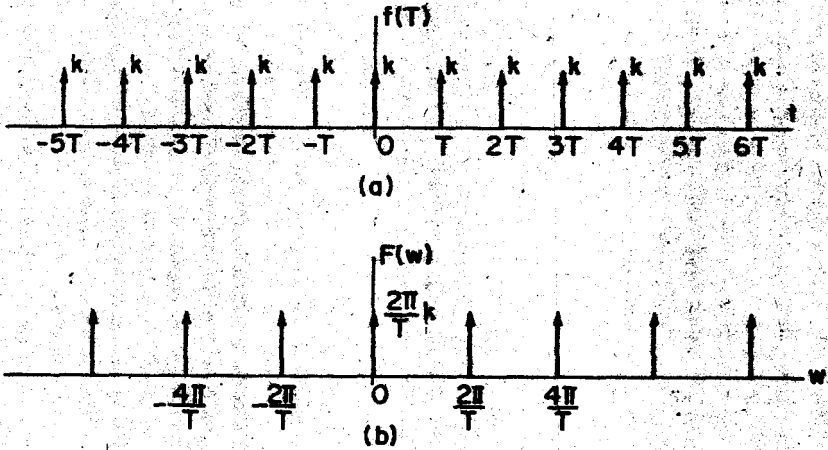
Dönemli olmayan işlevler için Fourier dönüşümü frekans görünüşü olarak tanımlanmıştı. Dönemli işlevler için ise Fourier dönüşümünün daha önce tanımlanan frekans görünüşü ile aynı olduğu ortaya çıkmıştır. Bu nedenle bundan sonra dönemli olsun, ya da olmasın bütün  $f(t)$  ler için, Fourier dönüşümü ile frekans görünüşü kavramlarının aynı olduğu düşünülecektir. Dönemli işlevler için frekans görünüşünü, görünüş çizimleri dizisi olarak göstermek yerine, dürtüler dizisi olarak göstermeyi yeğliyeceğiz. Frekans görünüşünün evrik Fourier dönüşümü alınarak zaman dalga biçimi yeniden elde edilebileceği için bu gösterim daha uygundur.

Şekil 2.14'de, Şekil 2.2'de verilen dönemli vurum dizisinin Fourier dönüşümü (ve yeni yorumu ile frekans görünüşü) çizilmiştir.



Şekil 2.14 Dönemli bir vurum dizisinin frekans görüngesi

Şekil 2.15'de ise dönemli bir dürtü dizisinin çizimi ve Fourier dönüşümü verilmiştir.



Şekil 2.15 Dönemli bir dürtü dizisi ve Fourier dönüşümü

Bu bölümde işaretlerin çözümlenmesinde kullanılacak kavramlar ve araçlar geliştirilmiştir. Daha belirgin söylemek gerekirse, bu bölümde işaretleri, değişik frekanslardaki bileşenlerin toplamı olarak belirtmenin yolları irdelenmiştir. Bu yolla işaretlerin frekans bölgesi gösterimi elde edilmiştir. Bundan sonraki bölümde elektrik dizgelerinin elektriksel işaretlere tepkisi incelenirken, bu bölümde geliştirilen frekans bölgesinin gösteriminin ne denli gerekli olduğu görülecektir.

## ALİŞTİRMALAR

2.1. Aşağıda verilen işlevlerin dönemli olup olmadıklarını saptayınız. Dönemli işlevler için dönemi bulunuz.

(a)  $A \cos 3t + B \sin 7t$

(b)  $A \cos 2t + B \cos 2\sqrt{2}t$

(c)  $A \sin (t/31) + B \cos (13t/18) + C \sin (3t/2)$

(d)  $(A \sin 2t + B \cos 6t)^2$

(e)  $A \cos t + B \sin \pi t$

2.2.  $f(t) = f(-t)$  eşitliğini sağlayan işlevler çift işlevlerdir ve bunlar düşey eksene göre simetriktirler.  $f(t) = -f(-t)$  eşitliğini sağlayan işlevler ise tek işlevlerdir ve sıfır noktasına göre simetriktirler.

Herhangi bir  $f(t)$  işlevinin, her zaman, bir  $f_c(t)$  çift işlevi ile bir  $f_t(t)$  tek işlevinin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

$$f(t) = f_c(t) + f_t(t)$$

Daha sonra  $u(t)$ ,  $e^{-at}$  ve  $e^{jt}$  işlevlerinin tek ve çift bileşenlerini bulunuz.

$$\text{İpucu: } f(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

2.3. Eğer bir dönemli işaret bazı simetri koşullarını sağlarsa Fourier katsayılarının bulunması daha kolaylaşır.

Aşağıdakilerin doğru olduklarını gösteriniz.

(a)  $f(t) = f(-t)$  (çift simetri) ise, trigonometrik Fourier serisi açılımında sinüs terimleri olmaz.

(b)  $f(t) = -f(-t)$  (tek simetri) ise, trigonometrik Fourier serisi açılımında kosinüs terimleri olmaz.

(c)  $f(t) = -f(t \pm T/2)$  (dönme simetrisi) ise, bütün çift harmonikler yok olur.

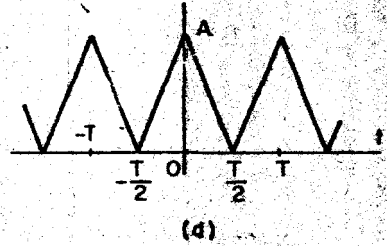
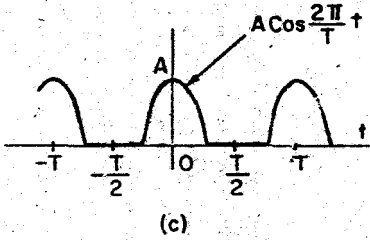
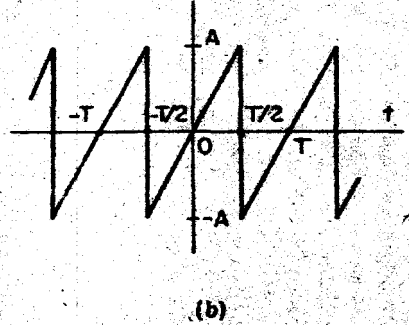
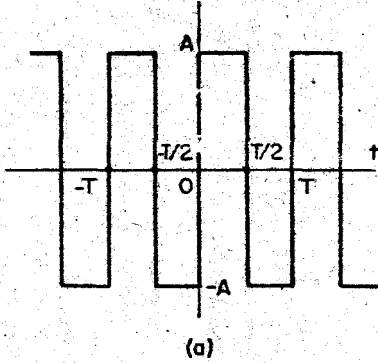
(d)  $f(t) = f(t \pm T/2)$  ise, bütün tek harmonikler yok olur.

2.4. Alıştırma 2.1'de verilen işlevleri düşününüz.

(a) Dönemli işlevlerin dönemini bulduktan sonra trigonometrik Fourier katsayılarını bir bakışta doğrudan yazabilir misiniz? Dönemli her işaretin ana frekans bileşeni var mıdır?

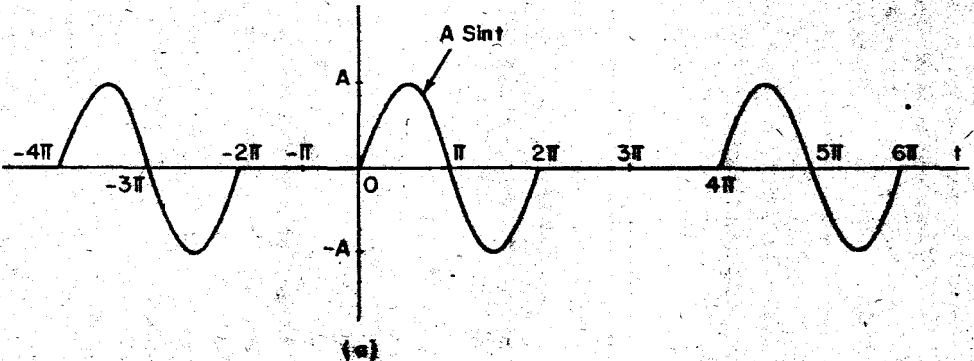
(b) Verilen işlevlerin tümünün frekans görüngelerini çiziniz. Gö-  
rüldüğü gibi görüngesi kesikli olan işlevlerin dönemi olması  
gerekmez.

2.5. Eğrileri Şekil 2.A.1'de verilen işlevlerin trigonometrik Fourier  
serisi açınımlarını bulunuz?

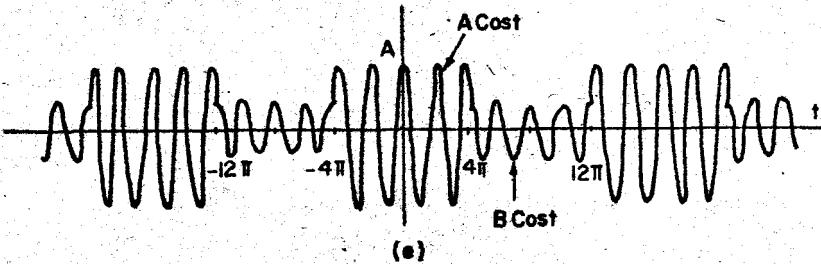
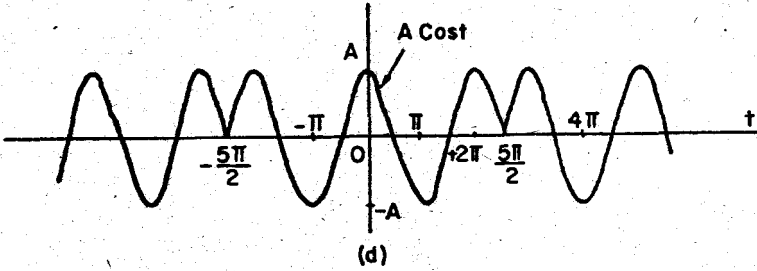
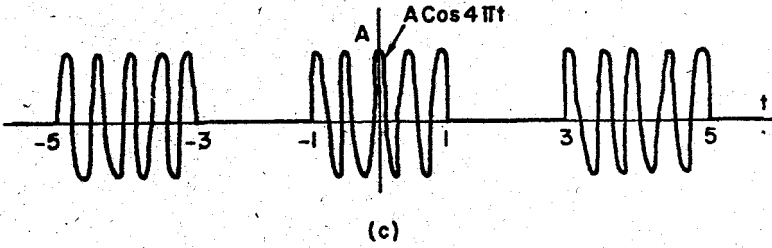
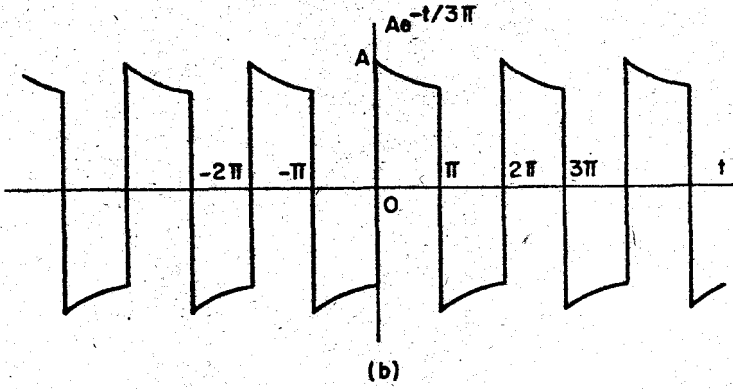


Şekil 2.A.1.

2.6. Şekil 2.A.2'de dalgabiçimleri verilen işlevlerin karmaşık Fourier  
serisi açınımlarını elde ediniz.

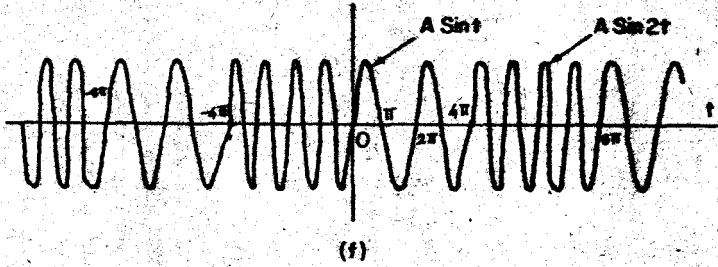


Şekil 2.A.2.



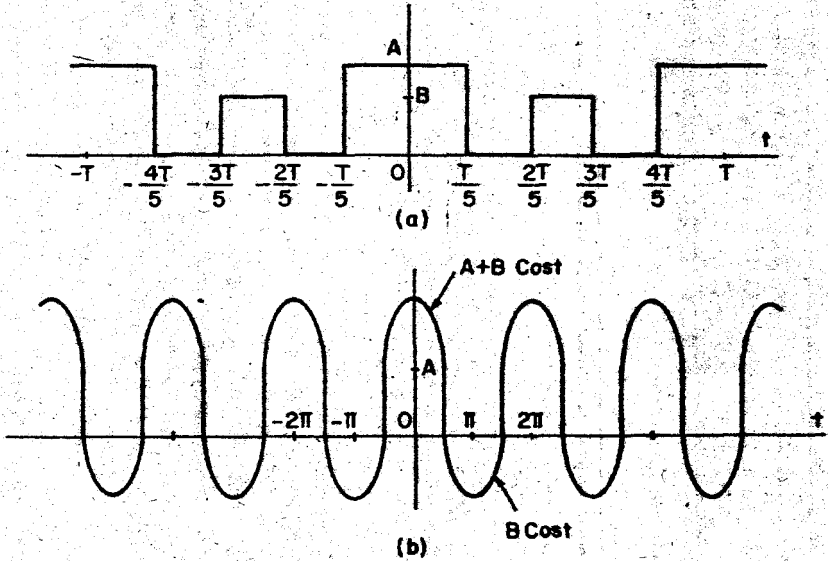
Şekil 2.A.2 (devam)





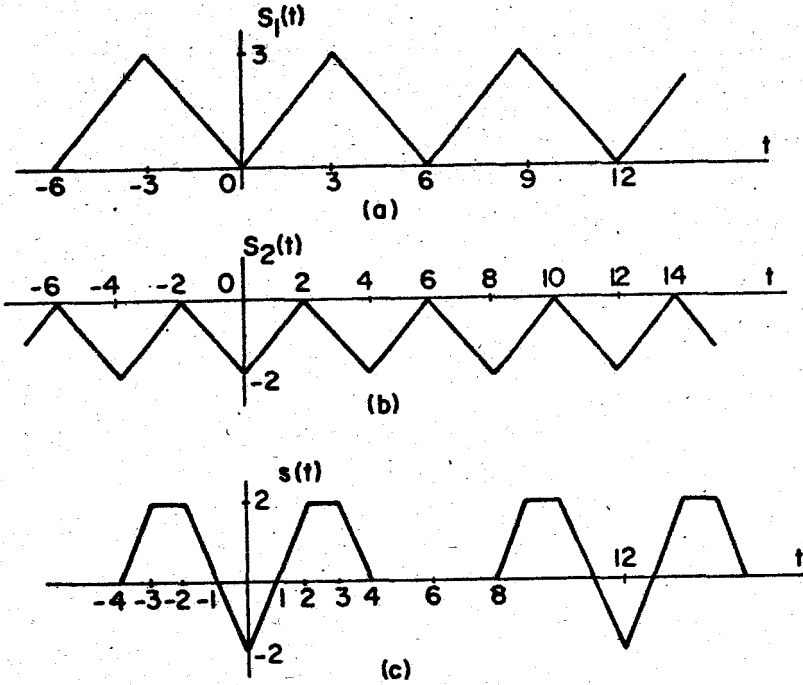
Şekil 2.A.2 (devam)

- 2.7. Şekil 2.A.3'de verilen işlevleri iki işlevin toplamı olarak belir-  
tiniz. Bu iki işlevin karmaşık Fourier serisi açınımlarını ayrı  
ayrı bulunuz. Daha sonra bu iki açınıma toplayarak Şekil 2.A.3'de  
verilen işlevlerin karmaşık Fourier serisi açınımlarını elde ediniz.



Şekil 2.A.3

- 2.8. Şekil 2.A.4c'de verilen dönemli  $s(t)$  işaretini, Şekil 2.A.4a ve Şekil  
2.A.4b'de verilen dönemli  $s_1(t)$  ve  $s_2(t)$  işaretlerinin toplamı ola-  
rak ifade edilebilir.  $s_1(t)$  ve  $s_2(t)$  işaretlerinin trigonometrik  
Fourier serisi açınımlarını kullanarak  $s(t)$  işaretinin trigonomet-  
rik Fourier serisi açınımlarını bulunuz ve bu açınıma kullanarak  $s(t)$ '  
nin DA bileşenini, birinci ve ikinci harmoniklerini saptayınız. Bu  
işaretin ana frekans bileşeni var mıdır?



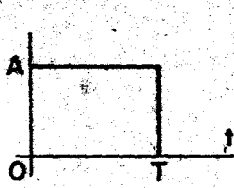
Şekil 2.A.4

2.9. Dönemi  $T$  olan bir  $f(t)$  dönemli işlevinin karmaşık Fourier serisi açılımını

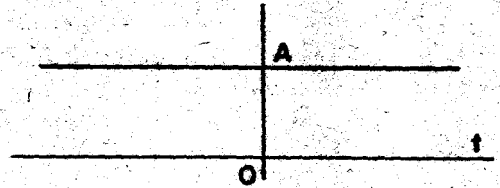
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$$

olarak veriliyor.  $f(t) \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t$  işlevinin dönemini bulunuz ve bu işlevin karmaşık Fourier serisi açılımının katsayılarını,  $f(t)$ 'nin karmaşık Fourier serisi açılımındaki katsayılar cinsinden ifade ediniz.

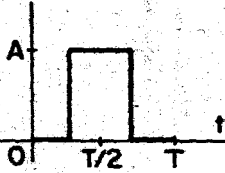
2.10. Şekil 2.A.5'de verilen işlevler yalnız  $(0, T)$  zaman aralığında tanımlanmıştır. Bu işlevlerin Fourier serisi (trigonometrik ya da karmaşık) açınımlarını elde ediniz. Daha sonra bu açınımları Şekil 2.A.6'da verilen benzer işlevlerin Fourier serisi açınımları ile karşılaştırınız ve her açılımın geçerli olduğu zaman aralığını belirtiniz.



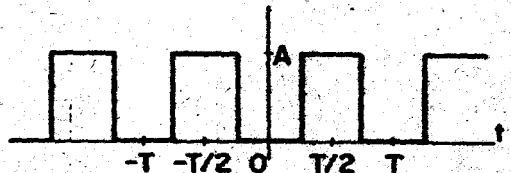
(a)



(a)



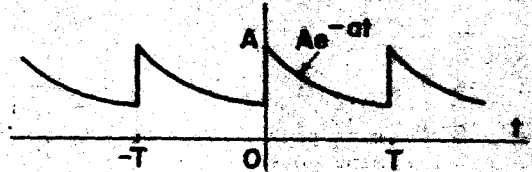
(b)



(b)



(c)



(c)

Şekil 2.A.5

Şekil 2.A.6

2.11. Dönemi  $T$  olan bir  $f(t)$  dönemli işlevinin karmaşık Fourier serisi açılımını

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} ; t \in (-\infty, \infty)$$

olarak veriliyor. Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

ve

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

olarak tanımlanmıştır. Bu gösterimdeki  $c_n$  katsayılarının bilindiğini varsayınız. Diğer bir  $g(t)$  işlevi  $g(t) = f(t-t_0)$  olarak tanımlanıyor.  $g(t)$  işlevinin de dönemi  $T$ 'dir, ve bunun Fourier serisi açılımını

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j\omega_n t}$$

olarak verilmektedir.  $d_n$  katsayılarını  $c_n$  katsayıları cinsinden ifade ediniz.

2.12. Bir  $f(t)$  işlevinin karmaşık Fourier serisi gösterimindeki katsayıların (a) gerçel (b) sanal olması için,  $f(t)$  işlevinin hangi koşulları sağlaması gerekir.

2.13. (a) Dönemi  $T$  olan bir  $f(t)$  dönemli işlevinin karmaşık Fourier serisi gösterimi şöyledir:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

ve

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

olarak tanımlanmıştır.

$c_n$  nin  $\omega_n$  ye göre çizimi  $f(t)$  nin frekans görüngesidir.  $f(t)$  aynı anda  $2T$  dönemine göre de dönemli bir işlemdir ve  $2T$  dönemine göre şu gösterim elde edilir.

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{j\omega_m t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Burada

$$d_m = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(t) e^{-j\omega_m t} dt$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{2T} m$$

olarak tanımlanmıştır.

Her iki gösterim de geçerlidir. Bu iki gösterimin katsayıları arasında nasıl bir bağıntı vardır? Bir gösterimdeki bazı bileşenlerin öteki gösterimde olmamasını nasıl açıklarsınız? Dönemli işlevlerin frekans görüngelerinde herhangi bir belirsizlik var mıdır?

(b) Şu  $f(t)$  işlevini düşününüz.

$$f(t) = 1, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Bu işlev, herhangi bir  $T$  için,  $T$  dönemine göre dönemli olarak düşünülebilir. Bu işlevin frekans görüngesini elde ediniz ve sonuçları tartışınız.

2.14.  $f(t)$  nin Fourier dönüşümünün

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

olarak ifade edilebileceğini gösteriniz.  $f(t)$  işlevi  $t$  nin çift işlevi ise

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

olduğunu gösteriniz.  $f(t)$  işlevi  $t$  nin tek işlevi ise

$$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

olduğunu gösteriniz. Daha sonra, bu sonuçları kullanarak, aşağıdakileri kanıtlayınız.

- $f(t)$  işlevi  $t$  nin gerçel ve çift işlevi ise,  $F(\omega)$  da  $\omega$ 'nın gerçel ve çift işlevidir.
- $f(t)$  gerçel ve tek işlev ise,  $F(\omega)$  sanal ve tek işlevdir.
- $f(t)$  sanal ve çift işlev ise,  $F(\omega)$  da sanal ve çift işlevdir.
- $f(t)$  karmaşık ve çift işlev ise,  $F(\omega)$  de karmaşık ve çift işlevdir.
- $f(t)$  karmaşık ve tek işlev ise,  $F(\omega)$  de karmaşık ve tek işlevdir.

2.15. Gerçel bir  $f(t)$  işlevi çift ve tek işlevlerin toplamı olarak ifade edilebilir. (Alıştırma 2.2'ye bakınız)

$$f(t) = f_c(t) + f_t(t)$$

Burada  $f_c(t)$  çift işlev,  $f_t(t)$  ise tek işlevdir. Bir gerçel  $f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  ise,  $\text{Ge}\{F(\omega)\}$  nin  $f_c(t)$  nin Fourier dönüşümü ve  $\text{San}\{F(\omega)\}$  nin da  $f_t(t)$  nin Fourier dönüşümü olduklarını gösteriniz. (Burada  $\text{Ge}(a)$ ,  $a$  nin gerçel bileşenini,  $\text{San}(a)$  ise  $a$  nin sanal bileşenini göstermektedir.)

2.16. Bir gerçel  $f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  ise

$$F(\omega) = F^*(-\omega)$$

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

$$\text{açı } F(\omega) = -\text{açı } F(-\omega)$$

olduğunu gösteriniz. Burada '\*' işlevi karmaşık eşlenik anlamındadır.

2.17. Bir  $f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  dir.

$$F\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Aşağıda Fourier dönüşümü teoremlerinden bazıları verilmiştir. Bunların kanıtlayınız.

(a) Zaman kaydırma teoremi:

$$F\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

(b) Frekans kaydırma teoremi

$$F^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\} = e^{j\omega_0 t} f(t)$$

(c) Zaman türevi teoremi:

$$F\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega)$$

(d) Frekans türevi teoremi

$$F^{-1}\left\{\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right\} = -jtf(t)$$

(e) Zaman ölçeklemesi teoremi

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\omega/a)$$

(f) Frekans kaydırma teoremini kullanarak şunu gösteriniz.

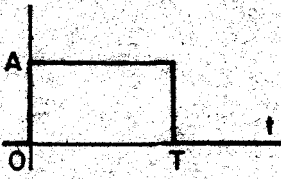
$$F\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)}{2}$$

Bu bazen 'Modülasyon teoremi' diye adlandırılır. Bu teorem ileride çok sık kullanılacaktır. (Burada  $F$  işleci Fourier dönüşümü,  $F^{-1}$  işleci ise evrik Fourier dönüşümü anlamındadır.)

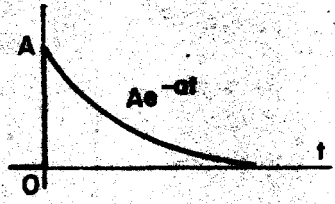
2.18. Bir  $f(t)$  işlevinin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  dır. Aşağıdakilerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

- $f(2t)$
- $tf(3t)$
- $(t-1)f(t)$
- $(t-3)f(-3t)$
- $t \frac{df}{dt}$
- $f(3-2t)$
- $(3-2t) f(3-2t)$
- $f(t) \sin \omega_0 t$

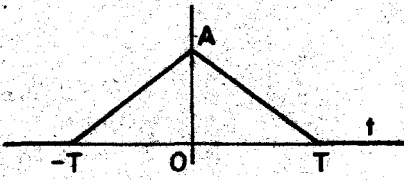
2.19. Şekil 2.A.7'de dalgabiçimleri verilen işlevlerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.



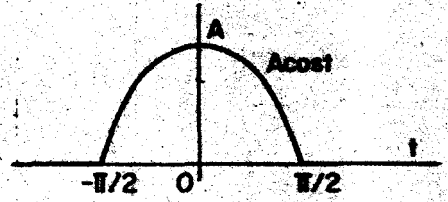
(a)



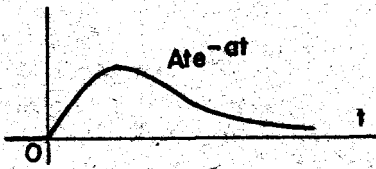
(b)



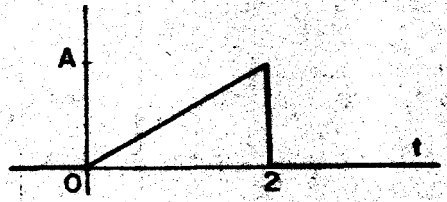
(c)



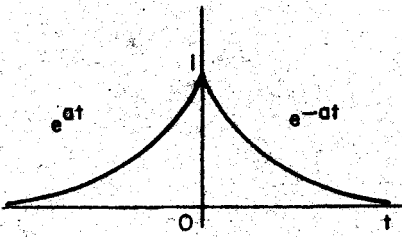
(d)



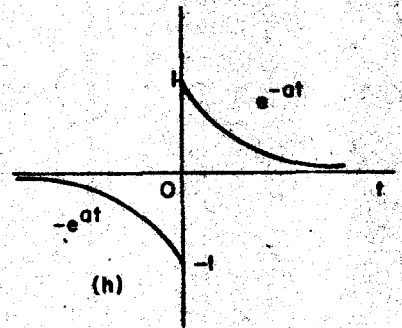
(e)



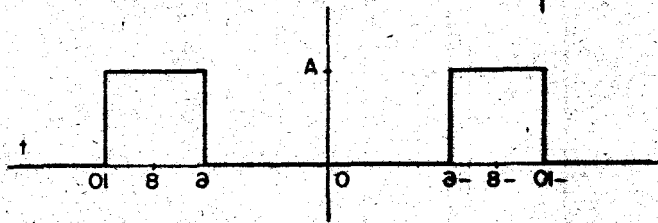
(f)



(g)



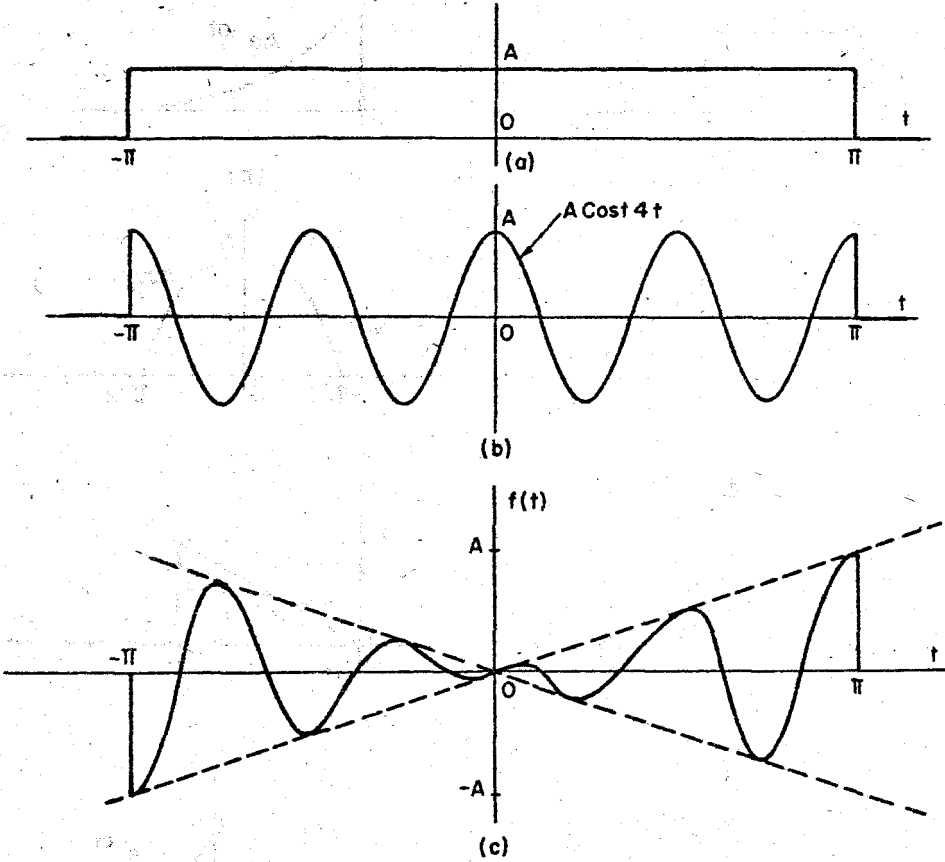
(h)



(i)

Şekil 2.2.7

2.20. (a) Şekil 2.A.8a'da dalgabiçimi verilen işaretin Fourier dönüşümünü bulunuz.



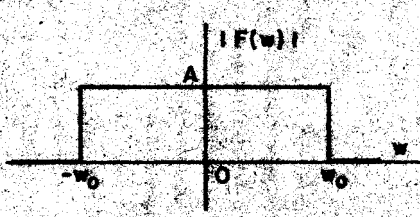
$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\pi} t \cos. 4t, & (-\pi < t < \pi) \\ 0, & \text{başka yerler} \end{cases}$$

Şekil 2.A.8

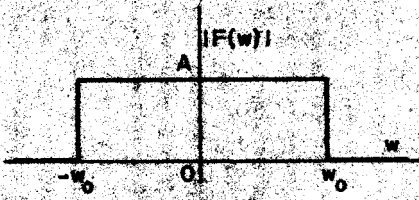
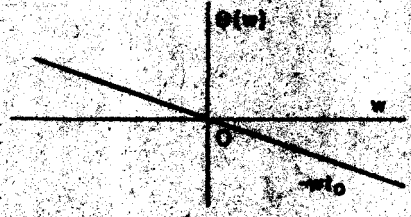
- (b) Yukarıda elde edilen sonucu ve modülasyon teoremini kullanarak Şekil 2.A.8b'de dalgabiçimi verilen işaretin Fourier dönüşümünü bulunuz.
- (c) Yukarıda elde edilen sonucu ve frekans türevi teoremini (Alıştırma 2.17d) kullanarak Şekil 2.A.8c'deki işaretin Fourier dönüşümünü bulunuz.
- (d) Şekil 2.A.8'deki işaretlerin frekans görüngelerini çiziniz.



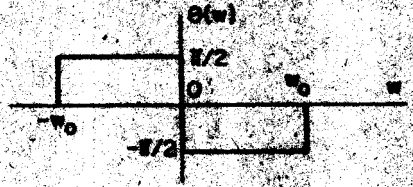
2.21. Fourier dönüşümleri Şekil 2.A.9'da verilen  $f(t)$  işlevlerini bulunuz.



(a)

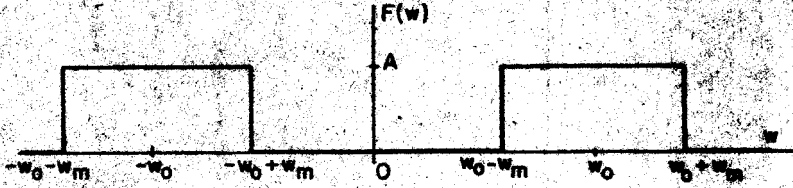


(b)

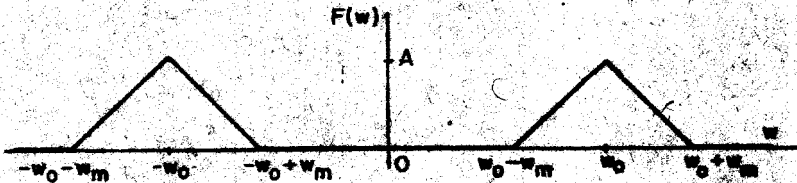


Şekil 2.A.9

2.22. Fourier dönüşümleri Şekil 2.A.10'da verilen  $f(t)$  işlevlerini bulunuz. İpucu: Modülasyon teoremini kullanınız.



(a)



(b)

Şekil 2.A.10

2.23. Dürtü işlevinin örnekleme özelliğini kullanarak, aşağıdaki tümlemleri bulunuz.

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-2)](t^2+1) dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\frac{\pi}{2} - t)] \sin t dt$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+3)]e^{-t} dt$$

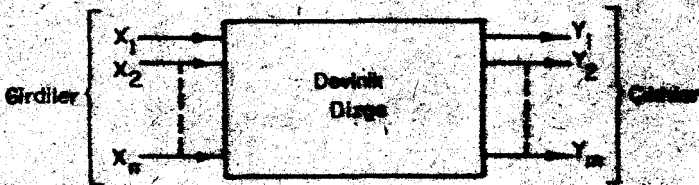
2.24. Karmaşık Fourier serisi açınımlarını kullanarak, Şekil 2.A.2'de dalga biçimlerini verilen dönemli işlevlerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

# BÖLÜM 3

## ELEKTRİKSEL İŞARETLERİN DOĞRUSAL DİZGELERDEN İLETİMİ

### 3.1. DOĞRUSAL DİZGELER

Bu bölümde, doğrusal dizgelerin ve elektrik işaretlerinin doğrusal dizgelerden iletiliminin incelenmesinde gerekli olan kavramlar geliştirilecektir. Asıl amacımız, doğrusal dizgelerin iletiliş kuramında geçerli ve önemli olan özelliklerinin incelenmesidir. Bu nedenle bir devinik (dinamik) dizgenin ayrıntılı tanımı verilmeyecek, bunun yerine özel bir tanımla yetinilecektir. Dizge şu biçimde tanımlanabilir: Girdi ve çıktı çiftleri arasında bir işlevsel varlık oluşturan, birbirlerini etkileyen, ya da birbirlerinden bağımsız öğelerin oluşturduğu öbek bir dizgedir. Genel olarak, bir dizgede birden çok girdi ve birden çok çıktı olabilir. Bir devinik dizgeyi girdi ve çıktıları ile gösteren bir öbek çizimi Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 Bir devinik dizge öbek çizimi

Bir dizgenin girdi ve çıktıları, örneğin bir elektrik dizgesindeki akım ve gerilim dalgabıçimleri gibi, genellikle bazı fiziksel nicelikleri gösteren zaman işlevleridir.

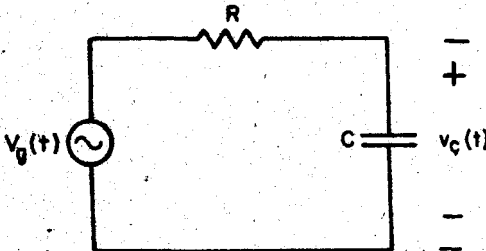
Girdi ve çıktılara ek olarak, dizgelerin çözümlenmesinde gereken çok önemli bir kavram daha vardır ve bu kavram *durum*'dur. Herhangi bir zaman anında bir dizgenin durumu, gelecekteki davranışı açısından, dizgenin geçmişine ilişkin tüm bilgiyi taşıyan bir nicelik ya da niceliklerdir. Durum kavramının daha ayrıntılı bir biçimde tartışılmasına burada gerek yoktur. Böyle bir tartışma okuyucunun ilgisini asıl amacımızdan saptıracaktır. Eğer okuyucu bir dizgenin bu temel kavramlarını biliyorsa, yukarıda yaptığımız özel tanım okuyucuya bu kavramları hatırlatacaktır. Öte yandan, okuyucu bu kavramları bilmiyorsa, bu altbölümdeki bazı tartışmalar çok açık olarak anlaşılabilir. Ancak, bu asıl amacımız yönünden sorun yaratmayacaktır.

Doğrusal dizgeler genellikle *süperpozisyon ilkesini* sağlamaları ile nitelendirilirler. Süperpozisyon ilkesi şu biçindedir:  $f_1(t)$  girdisine dizgenin tepkisi (çıktısı)  $g_1(t)$  ve  $f_2(t)$  girdisine dizgenin tepkisi  $g_2(t)$  ise, herhangi  $\alpha$  ve  $\beta$  değişmezleri için  $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$  girdisine dizgenin tepkisi  $\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)$  dir. Burada  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  herhangi iki girdidir.

Doğrusal dizgenin süperpozisyon ilkesini sağlayan bir dizge olduğunu söyleyen tümce tam doğru değildir. Bunun nedeni süperpozisyon ilkesinin tanımında, dizgenin durumunun herhangi bir biçimde söz konusu edilmemesidir. Başlangıç anında dizgenin sıfır-durumda olduğu varsayılırsa, yukarıdaki tanım bütün durumlar için tam doğru olur. Bir başka deyişle,  $t_0$  başlangıç anında dizge sıfır-durumda iken,  $f_1(t)$  girdisine  $g_1(t)$  çıktısı ve  $f_2(t)$  girdisine  $g_2(t)$  çıktısı verirse,  $t_0$  anında sıfır-durumdaki aynı dizge  $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$  girdisine karşı  $\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)$  çıktısını oluşturur. Bu sav tüm doğrusal dizgeler için geçerlidir.

Aşağıdaki örnek, süperpozisyon ilkesinin yukarıda verilen ilk tanımının doğrusal dizgelerce sağlanmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1. Şekil 3.2'de verilen RC devresini düşününüz.  $t_0 = 0$  başlangıç anında sıgaç üzerinde  $V_0$  başlangıç gerilimi olsun. Dizgenin girdisini



Şekil 3.2 RC devresi

$v_g(t)$  ve çıktısını  $v_c(t)$  (sığaç üzerindeki gerilim) olarak varsayalım.

$v_c(t)$  girdisi olarak bir birim basamak işlevi  $u(t)$  uygulanırsa buna karşı gelen  $v_g(t)$  çıkış geriliminin

$$v_c(t) = (1 - e^{-t/RC}) + v_0 e^{-t/RC} \quad (3.1)$$

olduğu kolayca bulunabilir. Eğer  $v_c(t)$  girdisi iki katına çıkarılırsa, yani  $v_g(t) = 2 u(t)$  olursa, buna karşı gelen  $v_g(t)$  gerilimi

$$v_c(t) = 2(1 - e^{-t/RC}) + v_0 e^{-t/RC} \quad (3.2)$$

olur.  $2u(t)$  girdisine karşı gelen çıktı,  $u(t)$  girdisine karşı gelen çıktının iki katı değildir. Bunun nedeni  $V_0$  i içeren terimin iki kat artmamış olmasıdır. Eğer dizgenin başlangıç durumu olan sığaç üzerindeki başlangıç gerilimi  $V_0$  sıfır olursa, (3.1) ve (3.2)'den görülebileceği gibi girdi iki kat olduğunda çıktı da iki kat olur. Bir başka deyişle, ancak ve ancak dizge başlangıçta sıfır-durumda olursa, süperpozisyon ilkesi sağlanır.

Sıfır-durum kısıtlaması yapılmadan doğrusal dizge şu biçimde tanımlanabilir:

**Tanım 3.1.** Aşağıdaki koşulu sağlayan dizgeye *doğrusal dizge* denir.

Herhangi  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  girdileri, herhangi  $x_1$  ve  $x_2$  durumları ile herhangi  $\alpha$  ve  $\beta$  değişmezleri için;

- i.  $t_0$  başlangıç anında  $x_1$  durumundaki dizgeye  $f_1(t)$  girdisi uygulandığında  $g_1(t)$  çıktısı oluşur, ve
- ii.  $t_0$  başlangıç anında  $x_2$  durumundaki dizgeye  $f_2(t)$  girdisi uygulandığında  $g_2(t)$  çıktısı oluşur ise,
- iii.  $t_0$  başlangıç anında  $\alpha x_1 + \beta x_2$  durumundaki dizgeye  $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$  girdisi uygulandığında  $\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)$  çıktısı oluşur.

Örnek 3.1'de düşünülen RC devresinin doğrusal dizgenin bu tanımını sağladığı gösterilebilir. Tanım 3.1'in verilmesindeki amaç doğrusal dizgeye katı bir tanım getirmek değil, başlangıç durumunun doğrusal dizge tanımına nasıl girdiğini göstermektedir.

Bu nitelikteki çözümlerlerin büyük bir bölümünde, açıkça belirtilmemesine karşın doğrusal dizgelerin sıfır-durumundaki davranışları ile uğraşılacaktır. Bir başka deyişle, dizgenin başlangıçta sıfır-durumda olduğu varsayılacaktır. Bu nedenle çeşitli girdilere karşı doğrusal dizgelerin tepkelerini (çıktılarını) bulmakta süperpozisyon ilkesi kullanılacaktır.

## 3.2. DORTU TEPKESİ VE KATLANMA TOMLEVI

Çeşitli girdilere karşı doğrusal dizgelerin tepkelerinin saptanmasında (başlangıçta sıfır-durum varsayımı yapılarak) süperpozisyon ilkesi kullanılabilir. Herhangi bir giriş işlevi  $f(t)$  bir çakım basit işlevlerin toplamı olarak ifade edilir ve eğer bu basit işlevler ayrı ayrı girdi olarak uygulandığında dizgenin herbirine tepkisi saptanırsa, süperpozisyon ilkesine göre,  $f(t)$  ye dizgenin tepkisi bu basit işlevlere olan tepkelerin toplamıdır. Bu durumda sorun herhangi bir giriş işlevini, tepkeleri bilinen ya da kolayca bulunabilen basit işlevlerin toplamı olarak ifade etmeye indirgenir.

Herhangi bir  $f(t)$  dalgabiçiminin Fourier serisi açılımı ya da Fourier dönüşümü,  $f(t)$  nin karmaşık üstel işlevlerin toplamı olarak ifade edilmesidir. Burada bunlardan değişik olarak bir başka açılım daha kullanılacaktır.

Herhangi bir  $f(t)$  işlevi dürtü işlevlerinin toplamı olarak ifade edilebilir. Bir dürtü işlevinin örnekleme özelliği (Ek A ya bakınız) kullanılarak, herhangi bir  $f(t)$  işlevi şu biçimde yazılabilir.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Bu tümlewin gerçekte bir toplamın limiti olduğu hatırlanırsa,  $f(t)$  işlevi şu biçimde de ifade edilir.

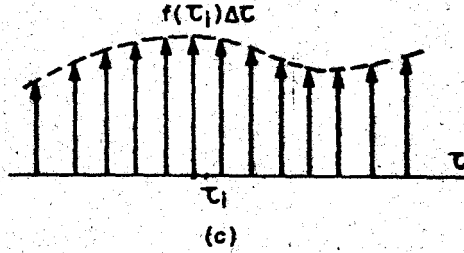
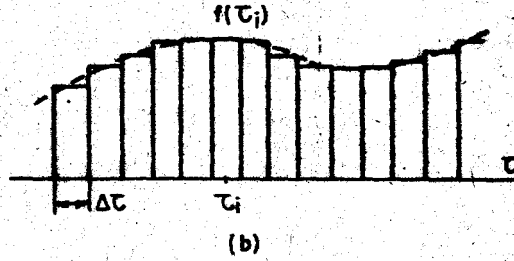
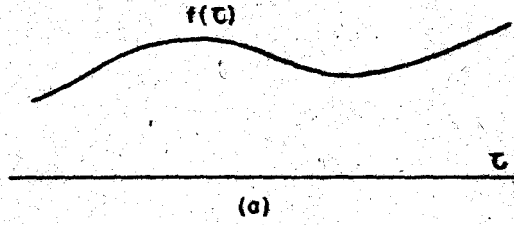
$$f(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [f(\tau_i) \Delta\tau] \delta(t-\tau_i) \quad (3.4)$$

Buna göre  $f(t)$ , dürtü işlevlerinin toplamının limiti olarak belirlenebilir. (3.4)'de verilen  $f(t)$  nin dürtü işlevleri toplamı biçimindeki gösterim çizimsel olarak Şekil 3.3'dedir.  $t=\tau_i$  anındaki dürtünün şiddeti  $f(\tau_i) \Delta\tau$  dir. Böylece  $f(t)$  basit işlevlerin toplamı olarak ifade edilmiş olur. Bu durumda öncelikle çözülmesi gereken sorun, bu basit işlevlere karşı dizgenin tepkesinin saptanmasıdır. Bir doğrusal dizgenin bir dürtü işlevine tepkisi, doğrusal dizgelerin incelenmesinde çok kullanılan bir kavramdır ve şu özel tanımla verilir.

Tanım 3.2. Sıfır durumda olan dizgenin girişine  $\tau$  anında uygulanan dürtü işlevine, doğrusal dizgenin  $t$  anında gösterdiği tepke doğrusal dizgenin dürtü tepkisi olarak adlandırılır ve  $h(t, \tau)$  ile gösterilir.

Bir doğrusal dizgenin dürtü tepkisi  $h(t, \tau)$  dizgenin çok önemli bir değiştirgenidir (parametresidir). Bu değiştirgen doğrusal dizgenin sıfır-durum davranışıyla ilgili tüm bilgiyi taşır. (Dürtü tepkesinin tanımında kullanılan 'tepke' ifadesinin 'sıfır-durumu tepkisi' anlamında kullanıldığına dikkat ediniz.)

$\tau$  anında uygulanan dürtüye dizgenin tepkisi  $h(t, \tau)$  dir. Girişe uygulanan  $f(t)$  dalgabiçimi  $\tau_i$  de şiddetleri  $f(\tau_i) \Delta\tau$  olan dürtülerin toplamı biçiminde ifade edilmişti. Bu durumda süperpozisyon ilkesi kullanılarak  $f(t)$  girdisine dizgenin tepkisi  $g(t)$  şu biçimde ifade edilebilir.



Şekil 3.3  $f(t)$  nin dürtü işlevleri toplamı olarak gösterimi

$$g(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [f(\tau_i) \Delta\tau] h(t, \tau_i) \quad (3.5)$$

Bu limit ve sonsuz toplam bir tümlev olarak düşünülürse,  $g(t)$  tepkisi,  $f(t)$  girdisi ve  $h(t, \tau)$  dürtü tepkisi türünden şu biçimde bulunabilir:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (3.6)$$

Yukarıdaki sonuçlar zamanla-değişen dizgeler için de geçerlidir. Eğer dizge zamanla-değişmez ise, dürtü tepkisi ve tepke ifadeleri daha

basit bir biçimde yazılabilir. Bir dizgede bir girdinin neden olduğu tepke, bu girdinin uygulandığı gerçek zamana bağlı değilse bu dizgeye zamanla-değişmez denir. Bir başka deyişle, başlangıç durumu değişmez tutulmak koşuluyla, girdinin zaman içinde kaydırılması çıktının da zaman içinde aynı biçimde kaydırılmasına neden olur. Zamanla-değişmez dizgenin tanımı şu biçimde verilebilir.

**Tanım 3.3.** Herhangi bir  $t_0$  anında  $x_0$  durumunda olan dizgenin girişine uygulanan  $f(t)$  girdisi  $g(t)$  tepkesini oluşturur ve  $t_0 + \tau$  anında  $x_0$  durumundaki dizgeye uygulanan  $f(t + \tau)$  girdisi  $g(t + \tau)$  tepkesini oluşturur ise bu dizgeye zamanla-değişmez dizge denir.

Dürtü tepkesi  $h(t, \tau)$  açısından dizgenin zamanla-değişmez olması, dürtü tepkesi  $h(t, \tau)$  ifadesinin  $t$  ve  $\tau$  değerlerine ayrı ayrı bağlı olmayıp, aralarındaki farka, yani  $t - \tau$  ya bağlı olması anlamına gelir. Bir başka deyişle  $\tau$  anında uygulanan dürtüye karşı  $t$  anında alınan tepke yalnız dürtünün uygulandığı anla tepkenin gözlemlendiği an arasında geçen zamana bağlıdır.  $t - \tau$  nin bir işlevi olduğundan dürtü tepkesi  $h(t, \tau)$  tek bir zaman değişkeni ile  $h(t, \tau) = h(t - \tau)$  olarak ifade edilebilir.

Bir  $f(t)$  girdisine karşı, zamanla-değişmez doğrusal bir dizgenin sıfır-durum tepkesi  $g(t)$ , (3.6)'da  $h(t, \tau)$  yerine  $h(t - \tau)$  konularak bulunabilir.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.7)$$

Bu özel tümlev katlanma (konvolüsyon) tümlevi olarak adlandırılır. Doğrusal dizge kuramında katlanma tümlevi çok sık kullanılır. Değişken değiştirilerek katlanma tümlevinin bir başka biçimi de elde edilebilir.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma) h(\sigma)d\sigma \quad (3.8)$$

Katlanma tümlevinin her iki biçimi de kısaca  $g(t) = f(t) * h(t)$  olarak gösterilir. Burada '\*' katlanma işlecidir ve bu ifade şu biçimde okunur: 'f(t) ile h(t) yi katlayarak g(t) bulunur'.

Çoğunlukla zamanla-değişmez dizgelerle uğraşacağımız için  $t - \tau$  yerine tek bir zaman değişkeni  $\tau$  kullanılırsa, dürtü tepkesi  $h(\tau)$  biçiminde ifade edilir. Burada  $\tau$  değişkeni dürtü ile tepkenin gözlenmesi arasında geçen zamandır.

(3.7) ve (3.8)'de verilen katlanma tümlevlerinin bulunması çoğunlukla görüldüğü gibi kolay olmayabilir. Tümlev sınırlarına dikkat etmek gereklidir. Katlanma tümlevinin alınmasında yararlı olabilecek belirli bazı çizimsel yöntemler de vardır. Bu çizimsel yöntemler ve bazı özel işlevlerin (dürtü işlevleri) katlanması üzerine ayrıntılı bilgi Ek F'de verilmiştir.

Buna göre  $h(\tau)$  dürtü tepkesi bilinen bir dizgeye uygulanan herhangi bir girdiye, bu dizgenin tepkesini saptayabiliriz. O zaman ortaya şu soru çıkar. Herhangi bir dizgenin dürtü tepkesi nasıl bulunur? Ne



yazık ki, dürtü tepkesinin bulunması için her dizgede geçerli olan bir yol öneremiyoruz. Dürtü tepkesinin bulunması için her dizge için özel yöntemler kullanmak gereklidir. Bazı durumlarda şu yol kullanılır: Genliği A ve genişliği 1/A olan bir vuruşa dizgenin tepkesi bulunur. Daha sonra A sonsuza gönderildiğinde, vuruş işlevi dürtü işlevine yaklaşır ve vuruşa karşı gelen tepke de dürtü tepkesine yaklaşır. Aşağıdaki örnekte bu yolla bir basit RC devresinin dürtü tepkesinin nasıl bulunduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.2. Şekil 3.2'de verilen RC devresini düşünelim. Bu dizgenin dürtü tepkesini saptamak için bu dizgenin sıfır-durum tepkesi bulunmalıdır. Bir başka deyişle,  $v_g(t) = \delta(t)$  ve sığaç üzerindeki gerilim sıfır iken  $v_c(t)$  bulunmalıdır.

$v_c(t)$  girişini genliği V volt ve genişliği 1/V saniye olan bir gerilim vuruşu varsayarsak, büyüklüğü V/R amper olan bir akım akmaya başlar. 1/V saniye içinde sığaç üzerinde 1/R kulonluk yük birikir ve sığaç gerilimi 1/RC volt olur. V değerini sonsuza götürürsek, vuruş dürtüye dönüşür. Öte yandan, tepke yani sığaç üzerindeki gerilim sıfır saniyede sıfırdan 1/RC volta sıçrar. Daha sonra giriş gerilimi sıfır olduğundan, sığaç direnç üzerinden boşalır ve dürtünün uygulandığı andan t saniye sonra tepke

$$v_c(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad (3.9)$$

olur. Buna göre bu dizgenin dürtü tepkesinin

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{RC} e^{-t/RC} & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

olduğu bulunur.

Yükün korunumundan giderek sığaç üzerindeki gerilimin birden bire değişmeyeceği söylenebilir. Bu ise, yukarıda söylenen 'sığaç üzerindeki gerilim 0 saniyede 0 dan 1/RC volta sıçrar' tümcesi ile çelişir görünmektedir. Bunun nedeni, yukarıdaki örnekte sıfır süreli ve sonsuz genlikli fiziksel olmayan gerilim vuruşunun kullanılmış olmasıdır.

Yukarıdaki örnekten de anlaşıldığı gibi karmaşık bir dizgenin dürtü tepkesinin bulunması oldukça zor olabilir. Ancak dürtü tepkesini bulmadan dizgenin tepkesini saptamak için daha kolay yollar vardır. Bu yollar aşağıdaki altbölümde tartışılacaktır.

### 3.3. FREKANS BÖLGESİNDE TEPKE

Bir dizgenin belirli bir girdiye tepkesi, bu girdi ile dizgenin dürtü tepkesinin katlanarak bulunabileceği görülmüştü. Ayrıca dürtü tepkesinin saptanmasının ve katlama işleminin o kadar basit olmadığı da söylenmişti.

(3.7)'de verilen ifadenin her iki yanının da Fourier dönüşümünü alalım. Sol yanın Fourier dönüşümü alındığında

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.11)$$

bulunur. Burada  $G(\omega)$  terimi  $g(t)$  nin Fourier dönüşümünü gösterir. Sağ yanın Fourier dönüşümü alındığında ise,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau e^{-j\omega t} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(t-\tau)} h(t-\tau) dt \right] d\tau \\ & = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$= H(\omega) F(\omega)$$

bulunur. Burada  $H(\omega)$  ve  $F(\omega)$  sırasıyla  $h(t)$  ve  $f(t)$  nin Fourier dönüşümleridir. Bu durumda, Fourier dönüşümünün tek olması nedeniyle çıktı, gir-di ve dürtü tepkesinin Fourier dönüşümleri arasında şu bağıntı vardır.

$$G(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (3.13)$$

(3.7)'den giderek (3.13)'ün elde edilmesi, Ek C'de tartışılan Fourier dönüşüm çiftlerinin zaman-katlanması özelliğinin bir uygulamasıdır. Bu özellik oldukça önemlidir ve çok sık kullanılacaktır. Zaman-katlanması özelliği şu biçimde açıklanabilir: Zaman bölgesinde katlanma, frekans bölgesinde çarpmaya eşdeğerdir. Bir başka deyişle  $f(t) * h(t)$  ye eşit olan  $g(t)$  yi bulmak yerine, önce  $h(t)$  ve  $f(t)$  nin Fourier dönüşümlerini bulunur, daha sonra  $H(\omega)F(\omega)$  hesaplanarak  $g(t)$  nin Fourier dönüşümü elde edilir.  $H(\omega) F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak  $g(t)$  bulunur.

Yukarıda açıklanan özelliğin frekans bölgesinde karşılığı olan frekans-katlanması özelliği de Ek C'de verilmiştir. Frekans-katlanması özelliği ise şöyledir: Zaman bölgesinde çarpma, frekans bölgesinde katlanmaya eşdeğerdir. Bir başka deyişle  $\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$  nin evrik Fourier dönüşümü  $f_1(t)f_2(t)$  dir. Burada  $F_1(\omega)$  ve  $F_2(\omega)$  sırasıyla  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  nin Fourier dönüşümleridir. Bu özellik de iletişim dizgelerinin incelenmesinde oldukça sık kullanılır.

Fourier dönüşüm çiftlerinin özellikleri üzerine yaptığımız bu kısa açıklamayı burada kesip, yeniden bir dizgenin tepkesinin saptanması sorununa gelirsek,  $G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$  nin çok kullanışlı bir bağıntı olduğu görülür. Bu bağıntı kullanılarak,  $H(\omega)$  ile  $F(\omega)$  çarpıldığında frekans bölgesinde tepke bulunur. Burada ortaya dürtü tepkesi  $h(t)$  nin Fourier dönüşümü  $H(\omega)$  nin bulunması sorunu çıkar. Daha önce dürtü tepkesinin bulunmasının kolay bir iş olmadığı söylenmişti. Bu nedenle dürtü tepkesini hesaplamadan başka bir yolla  $H(\omega)$  nin doğrudan saptanması daha uygun olur,

Dürtü tepkisi  $h(t)$  nin Fourier dönüşümü  $H(\omega)$  genellikle dizgenin karmaşık geçiş işlevi ya da dizge işlevi olarak adlandırılır. Karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$ , dürtü tepkesinin Laplace dönüşümü olan geçiş işlevi  $H(s)$  ile yakından ilintilidir. Bazı genel koşullar altında karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$ , basit bir yerine koyma yolu ile geçiş işlevi  $H(s)$ 'den elde edilebilir.

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (3.14)$$

Bu bağıntının geçerli olabilmesi için  $s$ -düzlemindeki sanal eksenin, Laplace dönüşümü  $H(s)$  nin geçerli olduğu bölgenin içine düşmesi gereklidir.  $t < 0$  için  $h(t) = 0$  olan dizgelerde bu koşul,  $H(s)$  nin kutuplarının karmaşık düzlemin sol yarısında olmasına indirgenir. Karşılaşacağımız birçok durumlarda (3.14)'de verilen bağıntı geçerlidir. Fourier ve Laplace dönüşümleri arasındaki ilişki ile (3.14)'ün geçerli olması için gerekli koşullar Ek D'de geniş olarak anlatılmıştır.

Bu tartışmanın sonunda karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$  nin bazı koşullar altında geçiş işlevi  $H(s)$  den elde edilebileceği görülür. Dürtü tepkisi  $h(t)$  nin Laplace dönüşümü olan geçiş işlevi  $H(s)$  genellikle dürtü tepkisi elde edilmeden bulunur. Dizgelerin türevsel denklemlerle gösteriminden, geçiş işlevi  $H(s)$  nin saptanmasındaki yolların bilindiği varsayılmıştır. Basit bir dizge için, geçiş işlevi  $H(s)$  bir bakışta yazılabilir. Örneğin, Örnek 3.2'de tartışılan RC devresi için geçiş işlevi  $H(s)$  şu biçindedir.

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC} \quad (3.15)$$

Karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$  ise

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3.16)$$

Tepkenin çözümlenmesi üzerine buraya değin yapılan tartışmayı şu biçimde özetleyebiliriz:

- i.  $f(t)$  girdisi ile dürtü tepkisi  $h(t)$  katlanarak zaman bölgesinde  $g(t)$  tepkisi bulunur. Dürtü tepkesinin saptanması ve katlanma işlemi bu yöntemde karşılaşılan iki ana sorundur.
- ii. Frekans bölgesinde  $G(\omega)$  tepkisi, yani  $g(t)$  nin Fourier dönüşümü,  $F(\omega)$  ile karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$  nin çarpımlarına eşittir. Genellikle, dürtü tepkesinin bulunmasıyla karşılaştırıldığında geçiş işlevinin bulunması daha kolaydır. Bunun yanısıra çarpma işlemi de katlanma işlemine göre daha basittir. Bu nedenle birçok durumda frekans bölgesi yaklaşımı ile tepkenin elde edilmesi daha kolaydır. Bu yolu kullanmak için, kuşkusuz,  $F(\omega)$  nin hesaplanmış olması gereklidir.  $g(t)$  yi bulmak gerekirse  $G(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınır.

İletişim dizgelerinin çözümlenmesi, ya zaman bölgesinde ya da frekans bölgesinde yapılır. Yapılacak olan çözümlenmeye göre en uygun yol seçilir.

Karmaşık geçiş işlevi  $H(\omega)$  ile geçiş işlevi  $H(s)$  arasında (3.14)' de verilen bağıntı geçerli olduğunda karmaşık geçiş işlevi genellikle  $H(\omega)$  yerine  $H(j\omega)$  ile gösterilir. Bundan sonraki anlatımda karmaşık geçiş işlevi için  $H(j\omega)$  gösterimi kullanılacaktır.

Geçiş işlevinin yalnız zamanla-değişmeyen doğrusal dizgeler için tanımlandığına dikkat ediniz. Zamanla-değişen dizgelerin dürtü tepkisi iki zaman değişkeninin işlevi olduğundan, bunun Fourier dönüşümü tek başına frekansın bir işlevi olmaz. Sonuçta  $G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  bağıntısı zamanla-değişen dizgeler için geçerli değildir.

### Doğrusal Dizgenin Sinüzoidal Tepkisi

$G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  bağıntısından da anlaşılacağı gibi karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  bir dizgenin oldukça önemli bir parametresidir. Bu bağıntı kullanılarak geçiş işlevi bilinen bir dizgenin herhangi bir girdiye gösterdiği tepke hesaplanabilir. Örneğin, karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  olan bir dizgenin girişine  $e^{j\omega_0 t}$  sinüzoidalini uygulayalım. Giriş işaretinin Fourier dönüşümü  $2\pi \delta(\omega - \omega_0)$  dır. Buradan

$$G(\omega) = 2\pi H(j\omega) \delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.17)$$

bulunur.  $g(t)$  yi bulmak için  $G(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınırsa

$$g(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \quad (3.18)$$

elde edilir. Buna göre giriş işareti bir sinüzoidal  $e^{j\omega_0 t}$  ise, çıkış işareti de genliği  $H(j\omega_0)$  olan bir sinüzoidaldir. Bu ise doğrusal dizgelerin çok önemli bir özelliğidir.

$f(t)$  bir sinüs dalgası, yani  $f(t) = \sin \omega_0 t$  ise, (3.13) de bunun Fourier dönüşümü  $j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$  yi kullanarak, frekans bölgesinde dizgenin tepkisi elde edilir.

$$G(\omega) = j\pi [H(-j\omega_0) \delta(\omega + \omega_0) - H(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.19)$$

Bu ifadenin evrik Fourier dönüşümü alınarak  $g(t)$  elde edilir.

$$g(t) = \frac{H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} - H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad (3.20)$$

$h(t)$  gerçel olduğundan  $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$  dır ve  $g(t)$  tepkisi şu biçimde ifade edilebilir.

$$g(t) = \text{San} [H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}] = |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \text{açı } H(j\omega_0)] \quad (3.21)$$

[Burada  $\text{San}(a)$  gösterimi  $a$  karmaşık sayısının sanal kısmını gösterir.] Buna göre giriş işareti bir sinüs dalgası ise, çıkış işareti de genliği ve evresi  $H(j\omega_0)$ 'a bağlı olan bir sinüs işaretidir.

Benzer biçimde  $f(t) = \cos \omega_0 t$  için karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  olan bir dizgenin tepkisi  $g(t)$  şöyle ifade edilebilir:

$$g(t) = \text{Ce}(H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}) = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \text{açı } H(j\omega_0)] \quad (3.22)$$

[Burada  $\text{Ce}(a)$  gösterimi  $a$  karmaşık sayısının gerçel kısmını gösterir.] Bu örneklerden, doğrusal dizgelerin çözümlenmesinde karmaşık geçiş işlevinin önemi anlaşılabilir.

Örnek 3.3. Şekil 3.2'de verilen RC devresinde  $R = 10 \text{ Kohm}$  ve  $C = 0.0159 \mu\text{F}$  olsun. Bu dizgenin girişine  $v = \cos \omega t$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ rad/san}$ , işareti uygulandığında tepkeyi (sığaç üzerindeki gerilimi) bulalım.

Bu dizgenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  daha önce bulunmuş ve (3.16)'da verilmişti.  $R$  ve  $C$  değerleri yerine konulup  $\omega = \omega_0$  da  $H(j\omega)$  hesaplanırsa,

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 1.59 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{1 + j} \quad (3.23)$$

bulunur. Buradan  $H(j\omega_0)$ 'nin büyüklüğü ve açısı

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \text{açı } H(j\omega_0) = -\frac{\pi}{4} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. (3.22)'de verilen ifade kullanılarak,  $\cos \omega_0 t$  ye karşı dizgenin tepkisi bulunabilir.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot 10^4 t - \frac{\pi}{4}) \quad (3.25)$$

### Dönemli $f(t)$ Girişine Tepke

Karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  ile gösterilen zamanla-değişmeyen bir doğrusal dizgenin girişine uygulanan  $f(t)$  işlevi dönemli ise, giriş işareti  $f(t)$  Fourier serisi açılımı ile şu biçimde gösterilebilir:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (3.26)$$

Burada  $c_n$  hesaplanması gereken katsayılarıdır. Yukarıdaki gösterime göre giriş işareti karmaşık üstel işlevlerin toplamıdır.

Dizge doğrusal bir dizge olduğundan,  $f(t)$  ye karşı tepke, karmaşık üstel işlevlerin herbirine karşı olan tepkelerin toplamıdır. Bir başka deyişle,  $f(t)$  girdisine karşı  $g(t)$  tepkisi şu biçimdedir:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn \frac{2\pi}{T}) e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (3.27)$$

Bu ifadeden görülebileceği gibi  $g(t)$  de dönemli bir işlevidir. Buradan şu sonuca varabiliriz: Bir doğrusal dizgenin girdisi dönemli ise çıktı da dönemlidir ve çıkışın Fourier katsayıları  $c_n H(jn \frac{2\pi}{T})$  dir. Bu sonuca doğrudan  $G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  bağıntısından da varılabilir.

### Süzme ve Dizge Bantgenişliği

Eğer bir dizgede  $f(t)$  girdisi  $g(t)$  tepkesini oluşturur ise, tepkenin frekans görünüşü (yani Fourier dönüşümü)  $G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  dir. Burada  $F(\omega)$  giriş işareti  $f(t)$  nin frekans görünüşü ve  $H(j\omega)$  da dizgenin karmaşık geçiş işlevidir. Bir başka deyişle,  $f(t)$  işaretinin bu dizgeden iletimi ile frekans bölgesinde  $F(\omega)$  ve  $H(j\omega)$  nin çarpımları eşdeğerdir. Buna göre dizge, giriş işaretinin frekans görünüşünü değiştirir. Bu işlem, geniş anlamda, bir *süzme* olarak düşünülebilir.  $H(j\omega)$  ile çarpma işleminde,  $H(j\omega)$  nin büyüklüğüne bağlı olarak bazı frekans bileşenleri güçlendirilir, bazı frekans bileşenleri zayıflatılır ve bazıları ise değişmeden kalır. Benzer biçimde  $H(j\omega)$  nin aşısına bağlı olarak her frekans bileşeni değişik evre kaymasına uğrar.

Süzmenin konumuzdaki anlamı, bir işareten istenmeyen frekans bileşenlerinin ayıklanmasıdır. Eğer istenmeyen frekanslarda  $H(j\omega)$  nin büyüklüğü sıfır ya da bu frekanslardaki büyüklük istenilen frekanslardakine göre çok küçükse, istediğimiz amaca ulaşmış oluruz.

Süzme işlemini gerçekleştiren birimlere *süzgeç* denir. Temel olarak dört tür *süzgeç* vardır. *Alçak-geçiren süzgeç* belirli bir kesim frekansının üzerindeki frekans bileşenlerini ayıklar. *Bant-geçiren süzgeç* ise  $(\omega_1, \omega_2)$  frekanslarının oluşturduğu bantın dışındaki bileşenleri yok eder. *Yüksek-geçiren süzgeç* ise belirli bir kesim frekansının altındaki bütün frekans bileşenlerini ayıklar. Belirli bir frekans aralığındaki frekans bileşenlerini ayıklayan *süzgeçlere* ise *bant söndüren süzgeç* denir. Bir *süzgecin* iyiliği, istenilmeyen frekans bileşenlerini ne kadar ayıkladığı ve istenilen frekans bileşenlerini ne kadar bözülmeden ilettiği ile ölçülür. *Süzgeçlerin* bazıları için uygulamadan basit birer örnek vereceğiz. Düşüncel (ideal) *süzgeçlerin* özellikleri ise daha sonraki alt bölümde tartışılacaktır.

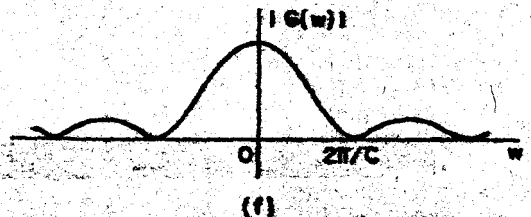
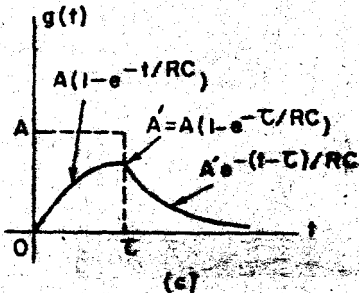
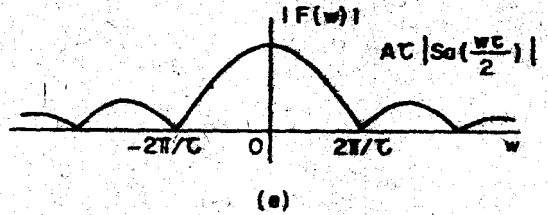
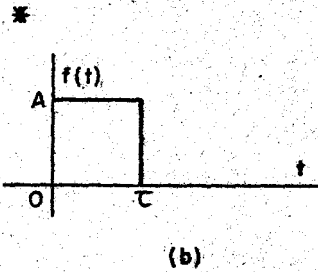
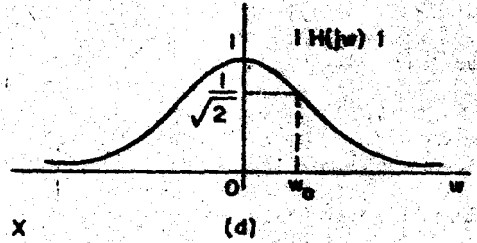
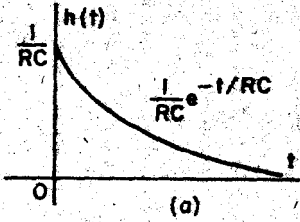
Bir dizgenin (ya da bir *süzgecin*) bantgenişliğinden frekans bantının genişliği anlaşılır. Örneğin kesim frekansı  $\omega_0$  olan bir alçak geçiren *süzgecin* bantgenişliği  $\omega_0$  rad/san'dır. Eğer bir bant geçiren *süzgeç*  $(\omega_1, \omega_2)$  frekansları dışındaki frekansları ayıklıyor ise, bu *süzgecin* bantgenişliği  $\omega_2 - \omega_1$  rad/san'dır. Ancak uygulamadaki *süzgeçlerde* kesim frekansını tek bir frekans olarak belirlemek zordur. Yaygın olarak yapılan bir varsayma göre,  $H(j\omega)$  nin değerinin en büyük değerinin  $1/\sqrt{2}$  katı olduğu frekans *kesim frekansı* diye adlandırılır.

Bu frekans 3 dB frekansı olarak da adlandırılır. Bu frekansta güç görüncesinin büyüklüğü 1/2 dir ve bu ise maksimum değerin 3 dB altına gelir. 3 dB kesim frekansları kullanılarak tanımlanan bantgenişliği ise 3 dB bantgenişliği diye adlandırılır.

Örnek 3.4. Üzerinde çeşitli örnekler çözdüğümüz RC devresi aslında bir alçak geçiren süzgeçtir. Bu devrenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$  olarak bulunmuştur. Frekans arttıkça  $H(j\omega)$  nın büyüklüğü, en büyük değeri olan bir e göre, küçülür. Girişe aşağıda verilen vuruğu uygulayıp bu dizgenin tepkesini, hem zaman bölgesinde hem de frekans bölgesinde inceleyelim.

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{başka yerlerde} \end{cases}$$

$f(t)$  ile daha önce saptanan dürtü tepkesi  $h(t)$  katlanarak zaman bölgesinde tepke bulunur.  $f(t)$  girdisi, dürtü tepkesi ve katlama işleminin sonuçları Şekil 3.4a,b,e'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Bir RC alçak geçiren süzgecin bir vuruşa tepkesi

Frekans bölgesinde ise tepke  $H(j\omega)F(\omega)$  dır.  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  ise şöyledir:

$$F(\omega) = A \tau e^{-j \frac{\omega \tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$H(j\omega)$  ve  $F(\omega)$  karmaşık oldukları için, bunların ve  $H(j\omega)F(\omega)$  nin yalnız büyüklükleri çizilmiştir (Şekil 3.4d,e, ve f'ye bakınız).  $f(t)$  ile  $g(t)$  ve  $|F(\omega)|$  ile  $|G(\omega)|$  karşılaştırılırsa, alçak geçiren süzgecin neden olduğu, zaman ve frekans bölgesi gösterimlerindeki bozulmalar (ya da değişiklikler) kolayca görülebilir.

$H(j\omega_0) = 1/\sqrt{2}$  eşitliğini sağlayan  $\omega_0$  hesaplanarak 3 dB bantgenişliği bulunabilir.

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.28)$$

Buradan  $\omega_0 = 1/RC$  rad/san bulunur. Buna göre, bu alçak geçiren süzgecin 3 dB bantgenişliği  $B = 1/RC$  rad/san'dır.  $RC$  çarpımı dizgenin zaman değişimi (zaman sabiti) olarak da bilinir.

Şekil 3.4'deki zaman bölgesi gösteriminden de anlaşılacağı gibi,  $RC$  çarpımı  $\tau$ 'ya göre küçükse, tepke giriş işaretini yakından izler ve alçak geçiren süzgecin neden olduğu bozulma az olur.  $RC$  zaman değişimi küçültüldükçe, tepke giriş işaretine yaklaşır. Bu sonuca frekans bölgesindeki gösterimden de varabiliriz. Eğer  $RC \ll \tau$  ise süzgecin bantgenişliği  $F(\omega)$  nin bantgenişliğinden daha büyüktür. Bir başka deyişle,  $F(\omega)$  nin önemli büyük bileşenlerinin olduğu frekans bölgesinde  $|H(j\omega)|$  oldukça düzdür. Bunun sonucu olarak da  $|H(j\omega)F(\omega)|$  nin biçimi  $|F(\omega)|$  ninkinden çok değişik değildir ve bozulma önemsiz bir düzeydedir. Bu durum 'dizgenin bantgenişliği, girişine uygulanan işareti dizgenin yakından izlemesine olanak verecek kadar geniştir' denilerek ifade edilir.

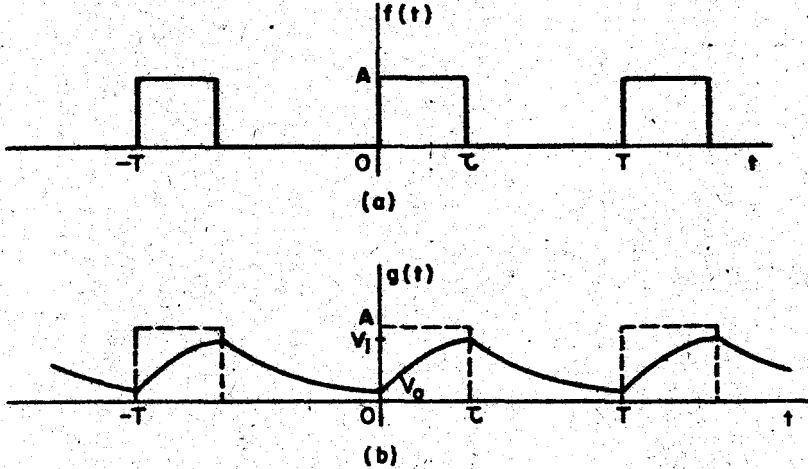
Öte yandan eğer  $RC$  zaman değişimi  $\tau$ 'ya göre büyükse, Şekil 3.4a'dan da görülebileceği gibi tepke oldukça kötü bir biçimde bozulur. Tepkenin  $\tau$  anındaki  $A' = A(1 - e^{-\tau/RC})$  değeri  $A$  ya yakın olmaz. Bir başka deyişle, dizge yeteri kadar hızlı değildir ve tepke  $\tau$  saniyede  $A$  ya erişemez. Bu durum 'dizge yavaş' denilerek tanımlanabilir. Frekans bölgesi gösteriminden de anlaşılacağı gibi  $RC \gg \tau$  olursa,  $H(j\omega)$  ile çarpıldıktan sonra  $F(\omega)$  frekans görüngesi oldukça önemli bir biçimde bozulur.  $F(\omega)$  nin çok az bir bölümü dizgenin bantgenişliği içine düşer. Bu nedenle çıkış görüngesi giriş görüngesine göre çok başkadır. Dizge bantgenişliği yeteri kadar geniş değildir ve tepke giriş işaretinin yakın bir benzeri değildir.

Daha önce de belirtildiği gibi alçak geçiren süzgeçler yüksek frekans bileşenlerini ayıklamak için kullanılır. Bunun doğal bir sonucu olarak da tepke girdiden değişiktir. İstenilen bir değişiklik olduğu için, bunu bozulma olarak adlandırmak uygun olmayabilir. İstenilen değişikliğin yani yüksek frekansların ayıklanmasının yanı sıra, kullanılan alçak geçiren süzgece bağlı olarak alçak frekans bileşenleri de bir ölçüde bozulur.



Örnek 3.5. Örnek 3.4'de incelenen RC alçak geçiren süzgecini düşününüz. Girişe Şekil 3.5a'da gösterilen bir vuruş dizisi uygulandığında Şekil 3.5b'de gösterilen tepke oluşur.  $V_0$  ve  $V_1$  değerleri için şu bağıntılar yazılabilir.

$$\begin{aligned} V_1 &= A(1 - e^{-\tau/RC}) + V_0 e^{-\tau/RC} \\ V_0 &= V_1 e^{-(T-\tau)/RC} \end{aligned} \quad (3.29)$$



Şekil 3.5 Vuruş dizisi ve RC devresinin tepkesi

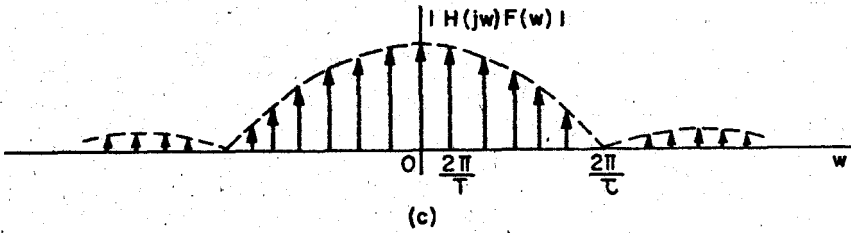
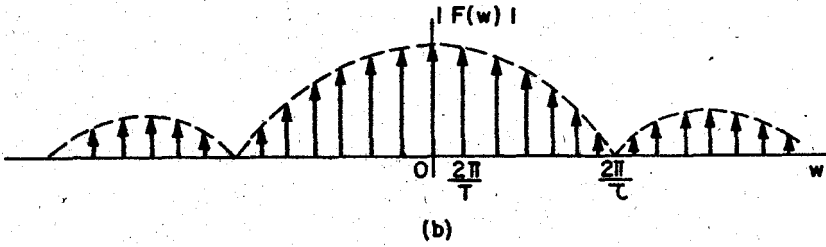
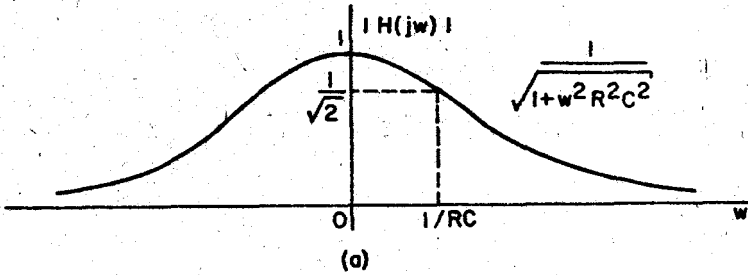
Bu bağıntılardan  $V_0$  ve  $V_1$  çözülebilir.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1 - e^{-\tau/RC}}{1 - e^{-T/RC}} \\ V_0 &= A \frac{1 - e^{-\tau/RC}}{1 - e^{-T/RC}} e^{-(T-\tau)/RC} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Vuruş dizisinin ve tepkenin frekans görüngeleri Şekil 3.6'da çizilmiştir.  $F(\omega)$  ve  $H(j\omega)$  gerçel olmadıkları için, bunların yalnız büyüklükleri çizilmiştir.

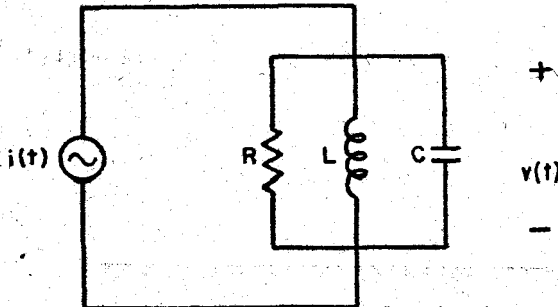
Aşağıdaki örnekte bir RLC akortlu devresi incelenmiştir. Bu uygulamada çok yaygın kullanılan bir bant geçiren süzgeçtir.

Örnek 3.6. Şekil 3.7'de verilen RLC devresini düşününüz. Bu devre tek akortlu RLC devresi ya da tank devresi olarak bilinir.



Şekil 3.6 Vuram dizisinin frekans görüngesi ve RC devresinin buna karşı gelen tepkesinin frekans görüngesi

Bu devrenin girdisi  $i(t)$  akımıdır ve devre üzerinde oluşan gerilim devrenin çıktısıdır. Buna göre, bu RLC devresinin geçiş işlevi  $H(s)$ ,  $s$ -bölgesinde bu devrenin empedansıdır (dirençtisidir) ve  $V(s)/I(s)$  dir. Geçiş işlevi  $H(s)$  devrenin türevsel denklemlerle gösteriminden Laplace dönüşümü kullanılarak elde edilebilir.



TTMMOB ELEKTRİK MÜHENDİSLERİ ODASI  
Şekil 3.7 Tek akortlu RLC devresi

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} = \frac{sL}{s^2LC + s\frac{L}{R} + 1} \quad (3.31)$$

$H(s)$  nin her iki kutbu da sol yarı düzlemde olduğundan sanal eksen, yani  $j\omega$ -ekseni,  $H(s)$  nin var olduğu bölgenin içine düşer ve  $H(s)$  de  $s$  yerine  $j\omega$  konularak karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  elde edilir.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \frac{L}{R}} \quad (3.32)$$

Daha sonra çok kullanılacak olan  $\alpha$ ,  $\omega_0$  ve  $Q$  değiştirgenleri şu biçimde tanımlanır.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = \frac{1}{2RC} \quad (3.33)$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

Burada  $\omega_0$  merkez frekansı,  $Q$  ise nitelik sayısı olarak bilinir. Bu değiştirgenler kullanılarak  $H(j\omega)$  nin büyüklüğü ve evresi şu biçimde yazılabilir.

$$|H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right)^2}}$$

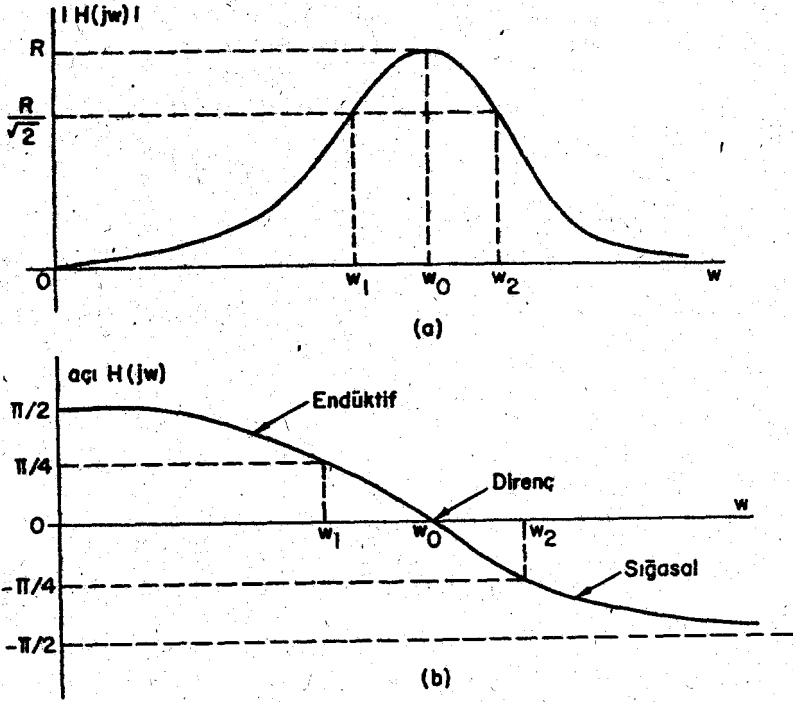
$$\text{açı } H(j\omega) = + \tan^{-1} \left( Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right) \quad (3.34)$$

$|H(j\omega)|$  ve açı  $H(j\omega)$  nin çizimleri Şekil 3.7'de verilmiştir.

Şekil 3.8'den  $|H(j\omega)|$  nin bantgeçiren özelliği görülebilir. Geçiş işlevi, yani empedans,  $\omega$  ın yakınındaki frekanslarda yüksektir ( $R$  ye yakın) ve  $\omega_0$  dan uzaklaştıkça sifıra doğru azalır. Bu nedenle  $i(t)$  nin frekans bileşenlerinden  $\omega_0$  a yakın olanların devre üzerinde oluşturduğu gerilim uzak olanlarınkine göre daha yüksektir. Buna göre  $i(t)$  nin devre üzerinde oluşturduğu  $v(t)$  gerilimi,  $i(t)$  nin bantgeçiren süzgeçten geçmiş biçimindedir.  $\omega = \omega_0$  noktasında  $|H(j\omega)| = R$  ve açı  $H(j\omega) = 0$  olduğundan, bu frekansta devre tek bir direnç gibi görünür. Devrenin tek bir direnç gibi davrandığı bu frekans rezonans frekansı diye adlandırılır.

$|H(j\omega)|$  nin değerinin en büyük değer olan  $R$  nin 3 dB altına düştüğü frekanslar arasındaki fark devrenin 3 dB bantgenişliği olarak adlandırılır. Buna göre

$$B.G. = \omega_2 - \omega_1 \quad (3.35)$$



Şekil 3.8 Paralel RLC devresinin karmaşık geçiş işlevinin büyüklüğü ve evresi

Buradaki  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekansları (3.34)'den saptanabilir.

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} - 1)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} + 1) \quad (3.36)$$

Bu durumda 3 dB bantgenişliği,

$$B.G. = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha = \frac{1}{RC} \quad (3.37)$$

dir. Burada nitelik sayısı  $Q$  üzerinde durularak ilginç sonuçlar çıkartılabilir. (3.37)'den görülebileceği gibi  $Q$ , merkez frekansı  $\omega_0$  ın 3 dB bantgenişliğine oranıdır.

$$Q = \frac{\omega_0}{B.G.} \quad (3.38)$$

$\omega$  merkez frekansı değişmez tutulup Q arttırılırsa bantgenişliği azalır. Q azaltılırsa bantgenişliği artar. Bu nedenle nitelik sayısı Q bantgenişliği gereksimmelerine göre belirlenmelidir. Bantgenişliği daraldıkça istenmeyen frekans bileşenleri daha iyi ayıklanır, ancak istenilen işaretlede bir miktar bozulma olur. Bu nedenle dizge tasarımcısı, birbiriyel çelişen bu iki etmen arasında bir denge kurmalıdır. Süzgeç özgeçisi  $|H(j\omega)|$ ,  $\omega$  a göre simetrik değildir, ancak büyük Q değerleri için simetrik olmaya yaklaşır ve simetrik varsayılabilir.

Örnek 3.7. Yukarıdaki örnekte incelenen akortlu RLC devresini düşününüz. 100 KHz'e akortlanmış ve 3 dB bantgenişliği olan devrede R, L ve C değerlerini belirleyelim. L ya da C değerlerinden birisini kendimiz seçer, daha sonra verilen koşulları sağlayacak biçimde diğerini ve R yi buluruz. Endüktansı L=0.1 mH olarak seçtiğimizi varsayalım. (3.33)'de  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^5$  rad/san konularak C=0.0253  $\mu$ F bulunur. Daha sonra (3.37)'de verilen B.G. =  $2\pi \cdot 4 \cdot 10^3$  rad/san koşulu kullanılarak R=1.57 Kohm bulunur. Bu devrenin girişine şu GM işaretini uygulayalım.

$$i(t) = A [1 + \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t)] \cos(2\pi \cdot 10^5 t) \quad (3.39)$$

Bu işaretin  $2\pi \cdot 10^5$  rad/san,  $2\pi \cdot 98 \cdot 10^3$  rad/san ve  $2\pi \cdot 102 \cdot 10^3$  rad/san'de olmak üzere üç frekans bileşeni vardır. Bunların büyüklükleri sırasıyla A, A/2 ve A/2 dir; evreleri ise bu frekanslardaki kosinüs dalga biçimlerine göre  $0^\circ$  dir. RLC devresinin bu giriş işaretine tepkesi  $V(\omega) = H(j\omega)I(\omega)$  bağıntısı kullanılarak bulunabilir.

$$v(t) = AR \cos(2\pi \cdot 10^5 t) + \frac{A}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot 98 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{4}) + \frac{A}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot 102 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{4}) \quad (3.40)$$

Bu ifade şu biçimde de yazılabilir.

$$v(t) = AR [1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{4})] \cos(2\pi \cdot 10^5 t)$$

Buna göre GM dalga biçiminin yan bantları  $1/\sqrt{2}$  ile çarpılarak zayıflatılır ve evreleri ise taşıyıcıya göre  $\pi/4$  kadar kayar. Q = 25 olduğundan, v(t) nin hesaplanmasında  $H(j\omega)$ ,  $\omega_0$  a göre simetrik varsayılmıştır.

### 3.4. BOZULMASIZ İLETİM

Daha önceki altbölümlerde yapılan tartışmalarda, bozulmasız bir iletişim için dizgenin bütün frekans bileşenlerini eşit ölçüde zayıflatması gerektiği üzerinde durulmuştu. Bu  $|H(j\omega)|$  nin değişmez olması anlamına gelir. Ancak bozulmasız bir iletişim için bu koşul yeterli değildir. Daha önce de belirtildiği gibi dizge, her frekans bileşenine bir evre kayması verir. Her frekans bileşenin eşit olarak zayıflatılmasına karşın evre kayması nedeni ile, dizgenin çıktısı girdiden tümüyle değişik olabilir.

Bu nedenle bozulmasız iletim için dizgenin evre özegrisi, yani açısı  $H(j\omega)$ , belirli koşulları sağlamalıdır.

Önce bozulmasız iletim ile ne demek istediğimizi belirlemeliyiz. Çıkış dalgabıçımının giriştekinin tam bir benzeri olması istenmektedir. Ancak çıkış dalgabıçımının büyüklüğü girişe göre başka olabilir ve çıkışta giriş dalgabıçımına göre bir zaman gecikmesi bulunabilir. Buna göre herhangi bir  $f(t)$  işaretinin bozulmasıziletimi için tepke

$$g(t) = k f(t-t_0) \quad (3.42)$$

olmalıdır. Buna dayanarak  $f(t)$  girdisi için, bozulmasız bir iletim sağlayacak dizgenin geçiş işlevini saptayabiliriz.  $g(t)$  tepkisi  $k f(t-t_0)$  olduğundan bunun Fourier dönüşümü alınarak

$$G(\omega) = k e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (3.43)$$

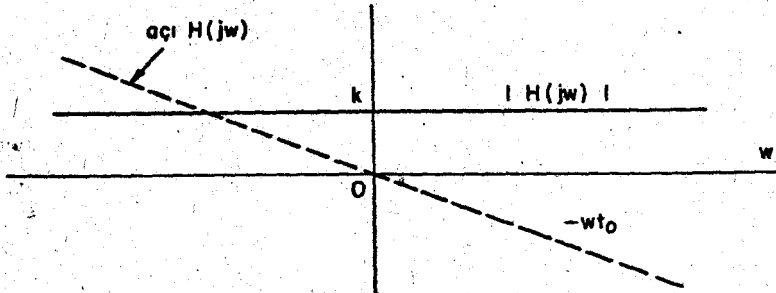
elde edilir.  $G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  bağıntısı bilindiğinden, bozulmasız bir iletim sağlayacak dizgenin geçiş işlevi

$$H(j\omega) = k e^{-j\omega t_0} \quad (3.44)$$

olmalıdır. (3.44)'den geçiş işlevinin büyüklüğü  $H(j\omega)$  nın bütün frekanslar için bir  $k$  değişmeğine eşit olması gerektiği görülür. Öte yandan evre özegrisi şu bağıntıyı sağlamalıdır.

$$\text{açı } H(j\omega) = -\omega t_0 \quad (3.45)$$

Bir başka deyişle evre kayması, frekansın doğrusal bir işlevi olmalıdır. Bu koşulun 'her frekans bileşeninin evresinin aynı miktarda kaydırılması' anlamına gelmediğine dikkat ediniz. Eğer bütün frekans bileşenlerinin evreleri aynı miktarda kaydırılırsa, dalgabıçımı bozulmaya uğrar. Bozulmasız iletim sağlayan bir dizgenin büyüklük ve evre özegrileri Şekil 3.9'da çizilmiştir.



Şekil 3.9 Bozulmasız iletim için büyüklük ve evre özegrileri

Frekans bileşenleri yalnız  $(\omega_1, \omega_2)$  bandı üzerinde olan bir  $f(t)$  dalgabıçımının bozulmasız iletimi için, dizge geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nın (3.44)'ü yalnız  $(\omega_1, \omega_2)$  frekans bandında sağlaması yeterlidir. Bu bandın dışında  $F(\omega) = 0$  olduğundan buralarda  $H(j\omega)$  nın değerinin  $f(t)$  nin iletimine hiç bir etkisi yoktur. Bu nedenle herhangi bir dalgabıçımının

bozulmasız iletilebilmesi için dizge geçiş işlevinin, yalnız  $f(t)$  nin kapsadığı frekans bandında (3.44)'ü sağlaması gerekir. Ancak girişe uygulanacak tüm işaretlerin bozulmasız iletimi için, dizgenin geçiş işlevi bütün frekanslarda (3.44)'ü sağlamalıdır.

### 3.5. DÜŞÜNCEL SÜZGEÇLER

Bir düşüncel alçak geçiren süzgeç belli bir kesim frekans  $\omega_c$  rad/san'den küçük frekanslardaki işaretleri bozulmadan ileten bir doğrusal dizgedir.  $\omega_c$  rad/san'den büyük frekanslardaki işaretler tümüyle söndürülür. Eğer bir işarette  $\omega_c$  den küçük ve büyük frekans bileşenleri var ise,  $\omega_c$  nin altındaki frekans bileşenleri bozulmadan geçer, üstündekiler ise tümüyle sıfırlanır.

Daha önceki altbölümlerde elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu tür bir düşüncel alçak geçiren süzgecin geçiş işlevi şu biçimde belirlenebilir.

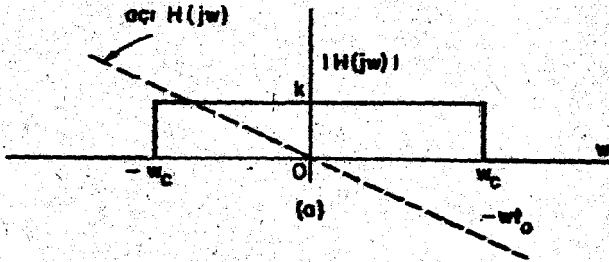
$$H(j\omega) = \begin{cases} k e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3.46)$$

Bu geçiş işlevine karşılık gelen dürtü tepkisi,  $H(j\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak bulunabilir.

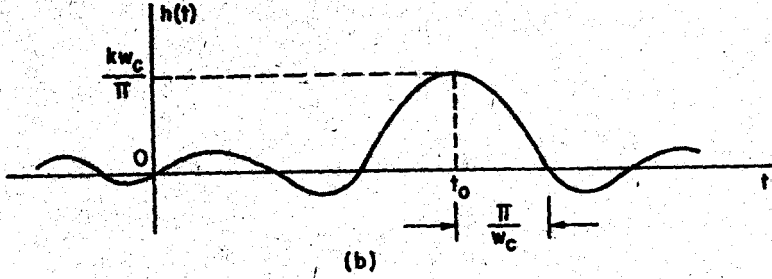
$$h(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} \quad (3.47)$$

Düşüncel alçak geçiren süzgecin geçiş işlevi ve dürtü tepkisi Şekil 3.10'da çizilmiştir.

Benzer biçimde, bir düşüncel bant geçiren süzgeç  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  rad/san frekansları arasındaki bütün işaretleri bozulmadan ileten bir doğrusal dizgedir. Frekansları bu bantın dışında olan işaretler tümüyle söndürülür. Bir başka deyişle, bir düşüncel bant geçiren süzgecin geçiş işlevi



Şekil 3.10 Bir düşüncel alçak geçiren süzgecin geçiş işlevi ve dürtü tepkisi

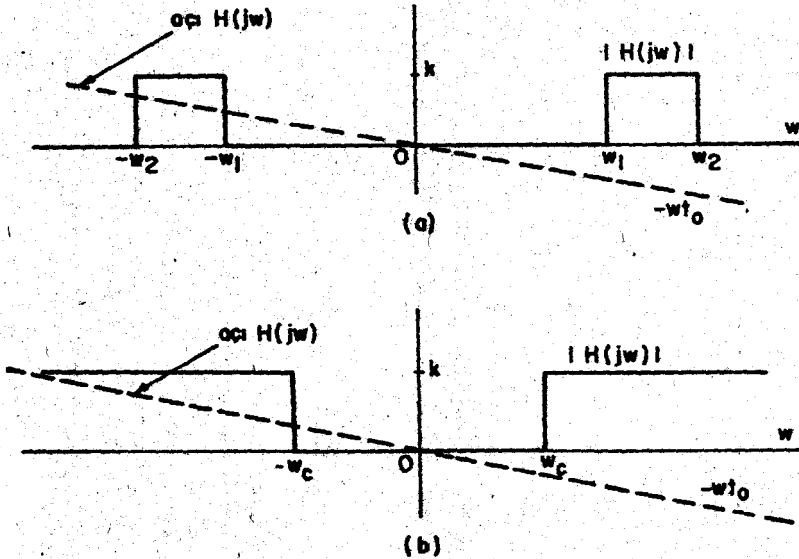


Şekil 3.10 (devam)

$(\omega_1, \omega_2)$  bandında (3.44)'ü sağlar ve bu bandın dışındaki frekanslarda sifıra eşittir.

Bir düşüncel yüksek geçiren süzgeç ise bir  $\omega_c$  rad/san kesim frekansından büyük frekanslardaki bütün işaretleri bozulmadan iletir ve  $\omega_c$  rad/san'den küçük frekanslardaki işaretleri tümüyle söndürür. Bir düşüncel bantgeçiren süzgeç ile bir düşüncel yüksek geçiren süzgecin geçiş işlevleri Şekil 3.11'de çizilmiştir.

Şekil 3.10b'den ve (3.47)'den görülebileceği gibi, bir düşüncel alçak geçiren süzgecin dürtü tepkisi  $h(t)$ , eksi  $t$  değerleri için sıfır değildir. Buradan  $t = 0$  anında uygulanan dürtüye dizgenin daha dürtü



Şekil 3.11a) Bir düşüncel bant geçiren süzgecin geçiş işlevi

b) Bir düşüncel yüksek geçiren süzgecin geçiş işlevi



uygulanmadan önce bir tepke oluşturduğu sonucu çıkar ki bu özellik gerçek dizgeler için söz konusu olamaz. Bu özelliği olan dizgeler nedensel-olmayan dizgeler diye adlandırılır. Nedensel-olmayan dizgelerin gerçekte yapılabilmeleri olanaksızdır.  $t < 0$  için dürtü tepkeleri  $h(t)$  sıfır olan dizgeler ise nedensel ya da fiziksel olarak gerçekleştirilebilir dizgeler diye adlandırılırlar.

Dürtü tepkesi  $h(t)$ ,  $t < 0$  için sıfır olmadığından düşüncel alçak geçiren süzgeç, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir dizge değildir, yani bu dizge fiziksel olarak yapılamaz. Benzer biçimde, düşüncel yüksek geçiren süzgeç ile düşüncel bant geçiren süzgeci de fiziksel olarak gerçekleştirmek olanaksızdır. Uygulamada, özgeçirileri düşüncel süzgeç özgeçirilerine yakın olan süzgeçlerle yetiniriz. Özgeçirileri düşüncel süzgeç özgeçirilerine istenildiği kadar yakın süzgeçler yapmak olanaklıdır. Bugünkü teknoloji ile, özgeçirileri düşüncel süzgeçlerinkine çok yakın olan kristal süzgeçler de yapılabilmektedir.

Dürtü tepkesi üzerindeki fiziksel olarak gerçekleştirilebilirlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığı çok kolayca anlaşılabilir. Dürtü tepkesi  $h(t)$ ,  $t < 0$  için sıfır olmalıdır. Ancak çoğunlukla elimizde dürtü tepkesi yerine karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  vardır ve dürtü tepkisini bulmak için evrik Fourier dönüşümü almak gereklidir, bu ise her zaman kolay olmayan bir işlemdir. Bu nedenle, fiziksel olarak gerçekleştirilebilirlik için geçiş işlevi üzerine bazı koşullar koymak daha uygun olur. Paley-Wiener ölçütü fiziksel olarak gerçekleştirilebilirlik için karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  üzerinde bir gerekli koşuldur. Eğer karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nin karesinin tümlevi varsa, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (3.48)$$

ise, bu ölçüt geçerlidir. Bir başka deyişle,  $H(j\omega)$  nin karesinin tümlevi yoksa Paley-Wiener ölçütü uygulanmaz.

Paley-Wiener ölçütü şöyledir: Karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nin karesinin tümlevi alınabilen bir dizge, ancak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (3.49)$$

koşulu sağlanırsa fiziksel olarak gerçekleştirilebilir.

Paley-Wiener ölçütünün bir gerekli koşul olduğuna, bir yeterli koşul olmadığına dikkat edilmelidir. Bir başka deyişle, (3.49)'u sağlayan bir  $H(j\omega)$ , fiziksel olarak gerçekleştirilebilir ya da gerçekleştirilemez diye kesin bir şey söylenemez. Ancak (3.49) sağlanmazsa dizge fiziksel olarak gerçekleştirilemez.

Bu ölçüte göre (3.49) sağlandığında öyle bir  $\Theta(\omega)$  evre işlevi bulunabilir ki  $|H(j\omega)|$  büyüklüğü ile birleştirildiğinde,  $|H(j\omega)| e^{j\Theta(\omega)}$  fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir dizgenin karmaşık geçiş işlevini oluşturur. Ancak  $\Theta(\omega)$  evre işlevinin açısı  $H(j\omega)$  ya eşit olup olmadığı be-

İletilemez. Yani  $H(j\omega)$  nın fiziksel olarak gerçekleştirilebilirliği kesinlikle söylenemez. Buna ek olarak Paley-Wiener ölçütü  $H(j\omega)$  yı fiziksel olarak gerçekleştirilebilir yapacak evre işlevi  $\theta(\omega)$  nın saptanmasına yarayacak bir yöntem de getirmez. Paley-Wiener ölçütü daha çok fiziksel olarak gerçekleştirilemez  $H(j\omega)$  ların saptanmasında yararlıdır.

Örneğin,  $\omega$ -ekseninde bir aralık üzerinde herhangi bir  $H(j\omega)$  nın büyüklüğü sıfır yani  $|H(j\omega)| = 0$  ise, (3.49)'daki tümlev sonsuz olacağından, bu ölçüt kullanılarak bu tür bir  $H(j\omega)$  nın fiziksel olarak gerçekleştirilemez olduğu söylenebilir. Düşüncel alçak geçiren süzgeçlerin, düşüncel yüksek geçiren süzgeçlerin ve düşüncel bant geçiren süzgeçlerin geçiş işlevlerinin büyüklüğü  $|H(j\omega)|$ ,  $\omega$ -ekseninde belirli aralıklarda sıfırdır. Yukarıda verilen sonuç kullanılırsa bu tür süzgeçlerin fiziksel olarak gerçekleştirilebilir olmadığı ortaya çıkar.

Paley-Wiener ölçütünden çıkaracağımız bir başka basit sonuç, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir dizgenin geçiş işlevi  $|H(j\omega)|$  nın büyüklüğünün  $k e^{-\alpha|\omega|}$  üstel işlevinden daha hızlı bir biçimde sıfıra düşmeyeceğidir. Eğer daha hızlı bir biçimde sıfıra yaklaşırsa, (3.49)'daki tümlev sonsuz olur. Örneğin (3.49) sağlanmayacağından, büyüklüğü  $k e^{-\alpha\omega^2}$  olan bir  $H(j\omega)$  fiziksel olarak gerçekleştirilemez.

### 3.6. ZAMAN-BANTGENİŞLİĞİ ARASINDAKİ TERS ORANTILI İLİŞKİ

Bundan önceki bölümde, bir işaretin zaman bölgesindeki genişliği ile frekans bölgesindeki bantgenişliği arasında ters orantılı bir bağlantı olduğu belirtilmişti. Vurum genişliği azalırken bantgenişliğinin arttığı ve bunun tersinin de doğru olduğu gösterilmişti.

Eğer işaret genliğinde keskin değişiklikler oluyorsa, yani işaret zamanla göre hızlı değişimler gösteriyorsa, işaretin yüksek frekans bileşenleri var demektir. Oldukça düz bir işaret genellikle alçak frekans bileşenlerinden oluşur. Eğer bir işarette süreksizlik varsa, bu işaretin frekans bileşenleri sonsuza kadar gider. Bu gerçekler önemli vurum dizisi örneği (Örnek 2.1, Örnek 2.2) ile de gösterilebilir. Vurum dizisinde süreksizlikler vardır ve sonsuz sayıda Fourier katsayısı olduğundan frekans bileşenleri sonsuza kadar gider. Daha önce vurum genişliği azaldığında yüksek frekans terimlerinin öneminin arttığı gösterilmişti. Örnek 3.5'den de görülebileceği gibi, bir vurum dizisi bir alçak geçiren süzgeçten geçirilirse, yüksek frekans bileşenleri zayıflatılır, süreksizlikler ve hızlı değişimler düzleşir.

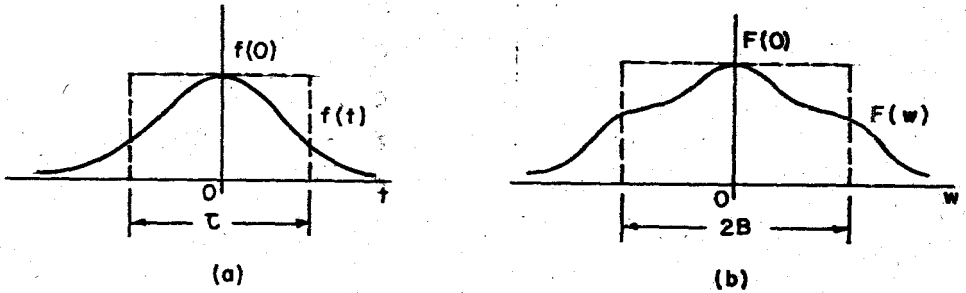
Bu bölümde zaman-bantgenişliği ters orantısı daha genel anlamda ele alınacaktır.  $f(t)$  işlevinin  $t = 0$  dolayında simetrik bir artı vurum olduğunu varsayalım.  $f(t)$  nin biçimi önemli değildir. Burada basit sonuçlar verecek bir vurum genişliği tanımı kullanılacaktır. Alanı  $f(t)$  vurumunununki ile aynı olan ve yüksekliği  $f(0)$  olan bir dikdörtgen vurumun genişliği,  $f(t)$  vurumunun vurum genişliği  $\tau$  diye tanımlanır. (Şekil 3.12a'ya bakınız)

$$\tau = \frac{A}{f(0)} = \frac{1}{f(0)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (3.50)$$

$f(t)$  gerçel ve çift işlev olduğundan Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  da  $\omega$  ya göre gerçel ve çift işlevdir.  $f(t)$  nin vuruş genişliğini tanımladığımız biçimde  $F(\omega)$  nin bantgenişliği de tanımlanabilir. Bir başka deyişle, rad/san türünden  $B$  bantgenişliği tanımı şu biçimdedir. (Şekil 3.12b'ye bakınız)

$$B = \frac{1}{2F(0)} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \quad (3.51)$$

$F(\omega)$  herhangi bir biçimde olabilir. Bir vuruş biçiminde olması ve bütün  $\omega$  değerleri için artı değerler alması gerekmediği gibi, en büyük



Şekil 3.12 Bir simetrik, artı vuruş ve Fourier dönüşümü

değerinin de  $\omega = 0$  da olması gerekmez.

Vuruş genişliği  $\tau$  ile bantgenişliği arasında bir bağıntı bulmak için,  $F(\omega)$  nin  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü olduğunu kullanabiliriz.

$$F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.52)$$

$\omega = 0$  konulursa,

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (3.53)$$

bulunur. (3.53)'deki tümlevi (3.50)'de yerine koyarak

$$\tau = \frac{F(0)}{f(0)} \quad (3.54)$$

elde edilir.

Benzer biçimde evrik Fourier dönüşümü bağıntısı

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.55)$$

kullanılır ve  $t = 0$  yerine konulursa,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \quad (3.56)$$

bulunur. Buna göre (3.51) ve (3.56) dan

$$B = \frac{2\pi f(0)}{2 F(0)} \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.54) ve (3.57) kullanılarak, B bantgenişliği  $\tau$  türünde bulunur.

$$B = \frac{\pi}{\tau} \quad (3.58)$$

Böylece herhangi bir simetrik artı  $f(t)$  vurumu için zaman ile bantgenişliği arasındaki ters orantı elde edilmiş olur.

Yukarıda yapılan zaman genişliği ve bantgenişliği tanımlarından giderek (3.58) elde edilir. Hangi tanım kullanılırsa kullanılsın, zaman ile bantgenişliği arasında bir ters orantılı bağıntının olduğu bulunabilir. Bu ters orantılı ilişki  $B = \frac{\alpha}{\tau}$  olarak ifade edilebilir. Buradaki  $\alpha$  değişmezi ise kullanılan tanıma bağlıdır.

Bu ters orantılı ilişki işaretler ve bunların frekans görünelere özgü değildir. Bu bütün Fourier dönüşüm çiftlerinin genel bir özelliğidir. İşlev daralırca Fourier dönüşümü genişler ve bunun karşıtı da doğrudur. Dürtü tepkesi  $h(t)$  ile geçiş işlevi  $H(j\omega)$  çifti bu genel özelliğin gözlemlendiği bir başka örnektir. Dürtü tepkesinin genişliği azaltılırsa, geçiş işlevinin genişliği yani dizge bantgenişliği artar ve bunun karşıtı da doğrudur.

Bir önceki altbölümde, dizge bantgenişliğinin işaret bantgenişliğine göre daha dar olduğunda, işaretin bir bozulmaya uğrayacağından söz edilmişti. Eğer dizge bantgenişliği daha genişse, tepke giriş işaretine oldukça yakındır. 'Dizge bantgenişliği, giriş işaretindeki hızlı değişimleri dizgenin izleyebileceği kadar, geniştir' ya da 'dizge hızlıdır' denilerek bu gerçek bir başka türlü belirtilebilir. Dürtü tepkesinin darlığı (dizge bantgenişliğinin genişliği) dizgenin hızlılığının bir ölçüsüdür.

Dizgelerin hızlılığı için daha anlamlı bir ölçü yükselme süresi diye adlandırılan niceliktir. Yükselme süresi üzerine birçok tanım yapılmıştır. Ancak bu tanımların tümünde, yükselme süresi girdideki bir değişiklik ya da sıçramaya karşı, çıkışın tepke vermesi için geçen zaman uzunluğunun ölçüsü olarak tanımlanır. Yükselme süresi için birçok tanım yapılmasının nedeni, zaman içinde tepkenin başladığı ve bittiği noktaların saptanmasındaki belirsizliktir.

Çok yaygın kullanılan yükselme süresi tanımlarından birkaçı aşağıda verilmiştir.

Bir dizgenin girdisi birim basamak işlevi ise, yükselme süresi şu biçimde tanımlanabilir:

1. Tepkenin en küçük değerinden en büyük değerine yükselmesi için geçen süredir.
2. Tepkenin sıfırdan en büyük değerine erişmesi için geçen süredir.
3. Tepkenin 0.1 den 0.9 a erişmesi için geçen süredir.
4. Tepkenin 0.5 e eşit olduğu andaki eğiminin birbölüsüdür.
5. Tepkenin en büyük eğiminin birbölüsüdür.

Aşağıdaki örnekte bu tanımlar kullanılarak bir dizgenin yükselme süresi hesaplanacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Örnek 3.8.  $t_0$  saniye gecikme veren bir düşüncel alçak geçiren süzgecin yükselme süresini bulalım. Dizge geçiş işlevi şu biçimdedir.

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{Başka yerlerde} \end{cases} \quad (3.59)$$

Bu dizgenin girişine  $t = 0$  anında bir birim basamak işlevi uygulayalım ve dizgenin tepkisini saptayalım.

$t = 0$  anında uygulanan birim basamak işlevinin Fourier dönüşümü şöyledir.

$$F(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.60)$$

Buna göre tepkenin dönüşümü,

$$G(\omega) = H(j\omega)F(\omega) = \begin{cases} [\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}], & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{Başka yerlerde} \end{cases} \quad (3.61)$$

$G(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak, zaman bölgesinde  $g(t)$  tepkesi elde edilir.

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \{ \omega_c(t-t_0) \} \end{aligned} \quad (3.62)$$

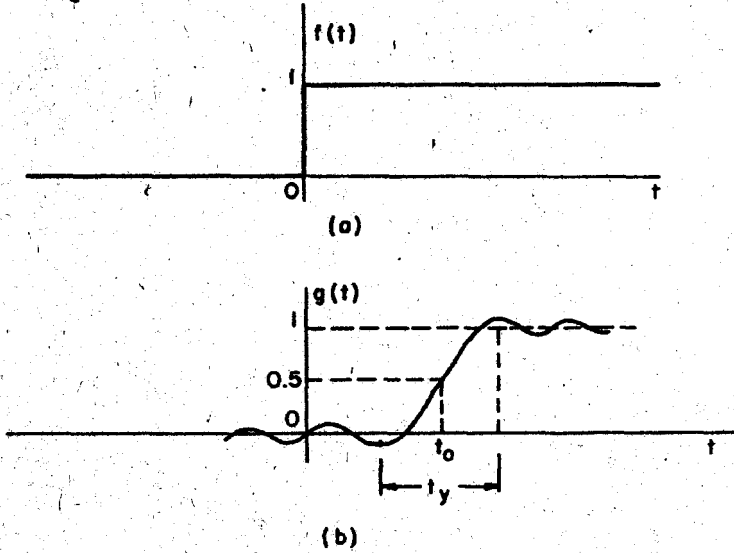
Burada  $\text{Si}(\cdot)$  işlevi,

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (3.63)$$

olarak tanımlanmıştır. Birim basamak girdisi ve buna karşı gelen  $g(t)$  tepkesinin çizimleri Şekil 3.13'de verilmiştir.

$t_y$  yükselme süresini, tepkenin en küçük değerinden en büyük değerine erişmesi için geçen süre olarak alırsak, (3.62) ve (3.63)'den

$$t_y = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (3.64)$$



Şekil 3.13 Birim basamak işlevi ve bir düşüncel alçak geçiren süzgecin buna tepkisi

bulunur. Burada  $\omega_c$  alçak geçiren süzgecin rad/san türünden kesim frekansıdır. Buna göre yükselme süresi ile süzgecin kesim frekansı ters orantılıdır.

Yükselme süresinin ikinci tanımı kullanılıyorsa  $t_y = 1.6 \pi / \omega_c$  san., üçüncü tanımı kullanılıyorsa  $t_y = 0.88 \pi / \omega_c$  san. ve dördüncü tanımı kullanılıyorsa  $t_y = \pi / \omega_c$  san. bulunacaktı. Bu durumda hangi tanım kullanılırsa kullanılsın, yükselme süresinin dizge bantgenişliği ile ters orantılı olduğu görülür. Orantı değişmezi işe kullanılan tanıma bağlıdır.

Yukarıdaki örnekte elde edilen sonuçların ışığında şu genel tüme söylenebilir: Doğrusal, zamanla-değişmeyen herhangi bir dizgenin yükselme süresi, dizgenin bantgenişliği ile ters orantılıdır. Orantı değişmezi yükselme süresi tanımına, bantgenişliği tanımına ve dizgenin geçiş işlevi  $H(j\omega)$  ya bağlıdır. Bu nedenle yukarıdaki çözümlmeyi şu biçimde özetleyebiliriz: Bir dizgenin bantgenişliği arttıkça yükselme süresi küçülür ve girdideki ansal değişimlere dizge daha hızlı tepke verir.

## 3.7. ERKE GÖRÜNGE YOĞUNLUĞU

1-ohmluk bir direnç üzerindeki bir  $f(t)$  geriliminin (ya da 1-ohmluk bir dirençten geçen bir  $f(t)$  akımının) açığa çıkardığı erke şu biçimde tanımlanır:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (3.65)$$

Bu erke tanımının anlamlı olabilmesi için, (3.65)'de verilen tümlevin sonlu olması gerekir. Ancak önemli işlevleri de içeren büyük bir işaret kümesi için, bu tümlev sonlu değildir. Bu işaretler için, erke nin zaman ortalaması tanımlanır ki bu da işaretin ortalama gücüdür. Bu tür işaretler gelecek altbölümde incelenecektir. Burada ilginizi yalnız (3.65)'deki tümlevin sonlu olduğu işaretler üzerine toplayacağız.

E erkesi,  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  türünden şu biçimde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.66)$$

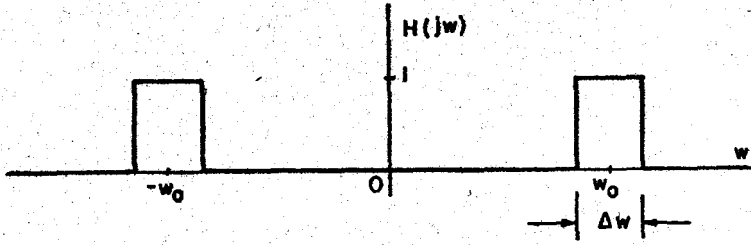
$f(t)$  gerçel olduğundan  $F(-\omega) = F^*(\omega)$  dir. Buna göre

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.67)$$

Bu bağıntı Parseval teoremi ya da Plancharel teoremi olarak da bilinir. Böylece erke için  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  türünden bir ifade elde edilmiş olur.

(3.67)'den E erkesinin, ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$  frekans değişkenine göre tümlev alınır)  $|F(\omega)|^2$  eğrisinin altında kalan alan olduğu görülebilir.  $|F(\omega)|^2$  niceliği erke görüngen yoğunluğu diye tanımlanır.  $\omega_0$  rad/san frekansındaki işaretin birim bantgenişliğine (hertz biriminde) düşen erkesi  $|F(\omega_0)|^2$  dir. Bu niceliğe neden erke görüngen yoğunluğu dendiği aşağıdaki tartışmadan sonra daha açık olarak anlaşılacaktır.

$H(j\omega)$  geçiş işlevi Şekil 3.14'de gösterilen bir düşüncel bant geçiren süzgecin girişine, bir  $f(t)$  işareti uygulansın. Bu süzgeç  $\omega_0$  rad/san etrafında,  $\Delta\omega$  rad/san'lik çok dar bir bant dışındaki bütün frekansları ayıklar. Bu süzgecin çıkışı  $g(t)$  ile gösterilirse, bunun Fourier dönüşümü  $G(\omega)$  şu biçimdedir.



Şekil 3.14 Bir düşüncel bant geçiren süzgecin geçiş işlevi

$$G(\omega) = H(j\omega)F(\omega) \quad (3.68)$$

(3.67) ve (3.68) kullanılarak  $g(t)$  çıkış işaretinin erkesi  $E_g$  şöyle bulunabilir.

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.69)$$

Şekil 3.14'de verilen  $H(j\omega)$  geçiş işlevi yerine konulur.  $\Delta\omega$  nın yeteri kadar dar olduğu varsayılır ve  $\Delta\omega$  üzerinde  $|F(\omega)|^2$  değişmez olarak düşünülürse, (3.69)'daki tümlev şu biçime indirgenir.

$$E_g = 2|F(\omega_0)|^2 \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) \quad (3.70)$$

Fiziksel olarak, çıkış erkesi  $E_g$ , giriş işaretinin  $\omega_0$  rad/san dolayında  $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$  Hz bandı üzerinde yoğunlaşmış erkesi olarak yorumlanabilir.

Buna göre (3.70)'i de kullanarak şu sonuca varabiliriz:  $2|F(\omega_0)|^2$  ifadesi giriş işaretinin  $\omega_0$  rad/san frekansındaki birim bantgenişliğine (Hz biriminde) düşen erke miktarıdır. Bir başka deyişle  $2|F(\omega)|^2$ ,  $f(t)$  işaretinin bir tür erke yoğunluğudur.  $|F(\omega)|^2 = |F(-\omega)|^2$  olduğundan erkenin yarısı eksi frekanslardan gelir ve bu nedenle ortaya bir 2 çarpanı çıkar. Bu durumda artı ve eksi frekanslar ayrı ayrı düşünülürse,  $|F(\omega_0)|^2$ ,  $\omega_0$  rad/san dolayında hertz başına düşen erkedir. Bu nedenle erke görüncü yoğunluğu  $|F(\omega_0)|^2$  için seçilmiş çok uygun bir deyimdir. Yalnız artı frekanslar düşünüldüğünde  $2|F(\omega)|^2$  bazen *tek-yanlı erke görüncü yoğunluğu* diye adlandırılır.

$|F(\omega)|^2$  erke görüncü yoğunluğunun birimi joule/hz'dir. Erke ve erke görüncü yoğunluğu üzerine aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 3.9. Bir  $f(t)$  işaretinin erke görüncü yoğunluğu

$$|F(\omega)|^2 = 10^{-10} \omega^2 \text{ joule/hz}$$

olarak verilmiştir.  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4$  rad/san'deki erke yoğunluğu

$$|F(\omega)|^2_{\omega=\omega_0} = 4\pi^2 \cdot 10^{-2} \text{ joule/hz}$$



dir.  $2\pi \cdot 10^4$  rad/san ile  $4\pi \cdot 10^4$  rad/san arasındaki frekans bölgesinde işaretin erkesi,

$$E' = \frac{1}{2\pi} \int_{-4\pi \cdot 10^4}^{-2\pi \cdot 10^4} 10^{-10} \omega^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi \cdot 10^4}^{4\pi \cdot 10^4} 10^{-10} \omega^2 d\omega$$

ya da tek-yanlı erke görünge yoğunluğu türünden

$$E' = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi \cdot 10^4}^{4\pi \cdot 10^4} 2 \cdot 10^{-10} \omega^2 d\omega$$

olarak bulunur. Bu tümlev hesaplanarak

$$E' = 18\,423 \text{ joule}$$

elde edilir.

Erke görünge yoğunluğu üzerine yaptığımız bu tartışmayı girdi ve çıktı erkeleri arasındaki bağıntıyı vererek bitirelim.  $f(t)$  girdisi ile  $g(t)$  çıktısının Fourier dönüşümleri sırasıyla  $F(\omega)$  ve  $G(\omega)$  olsun. Yukarıdaki tanımlara göre  $|F(\omega)|^2$  ile  $|G(\omega)|^2$  sırasıyla girdi ile çıktının erke görünge yoğunluklarıdır.  $G(\omega) = H(j\omega)F(\omega)$  olduğundan (burada  $H(j\omega)$  karmaşık geçiş işlevidir) çıktının erke görünge yoğunluğunu girdinin erke yoğunluğu türünden bulabiliriz.

$$|G(\omega)|^2 = |H(j\omega)F(\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |F(\omega)|^2 \quad (3.71)$$

Buna göre çıktının erke görünge yoğunluğu  $|H(j\omega)|^2$  ile girdinin erke görünge yoğunluğunun çarpımlarına eşittir.

### 3.8. GÜÇ GÖRÜNGE YOĞUNLUĞU

Bundan önceki altbölümde önemli işaretleri de içeren büyük bir işaret kümesi için (3.65) ile tanımlanan erkenin sonlu olmadığından söz edilmişti. Bu tür işaretler için erkenin zaman-ortalaması tanımlanır ki, bu aslında işaretin ortalama gücüdür. Bir  $f(t)$  işaretinin ortalama gücü, 1-ohmluk bir dirence uygulanan  $f(t)$  geriliminin (ya da 1-ohmluk bir dirençten geçen  $f(t)$  akımının) tükettiği ortalama güç olarak tanımlanır.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \overline{f^2(t)} \quad (3.72)$$

Ortalama gücü  $P$ 'sonlu olmayan işaretler kuramsal olarak vardır. Bu tür işaretlerin ortalama güçleri sonsuzdur. Ancak fiziksel ortamda sonsuz ortalama gücü olan işaretler olamayacağı için, bu tür işaretlerle burada ilgilenilmeyecektir.

Erkesi sonlu olan işaretlerin  $P$  ortalama güçleri sıfırdır. Bu altbölümde ortalama güçleri sıfırdan değişik ve sonlu olan işaretlerle ilgilenilecektir.

Önce  $f_T(t)$  işlevini  $f(t)$  işaretinin kesilmiş bir parçası olarak tanımlayalım.

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < T/2 \\ 0 & \text{Başka yerlerde} \end{cases} \quad (3.73)$$

$f_T(t)$  nin Fourier dönüşümü  $F_T(\omega)$  olsun.  $T$  sonlu ise  $f_T(t)$  nin erkesi de sönüldür ve

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \quad (3.74)$$

$f(t)$  nin ortalama gücü  $P$  ise şu biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.75)$$

$P$  ortalama gücü şöyle de ifade edilebilir.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (3.76)$$

$T \rightarrow \infty$  iken  $E_T$  erkesi artar, ancak  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_T$  ortalama gücü sonlu bir değere yaklaşır. Kesilmiş işaretin erke görüme yoğunluğu  $|F_T(\omega)|^2$ ,  $T \rightarrow \infty$  iken bazı  $\omega$  değerleri için herhangi bir sınıra bağlı kalmadan artabilir, ancak  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2$  sonlu olabilir. Bu limit  $f(t)$  nin güç görüme yoğunluğu olarak tanımlanır ve  $S(\omega)$  ile gösterilir. Bir başka deyişle,  $f(t)$  nin güç görüme yoğunluğu  $S(\omega)$  şu biçimde tanımlanır.

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \quad (3.77)$$

Burada  $S(\omega)$  nin birimi watt/hz'dir.

Erke görüme yoğunluğu için yapılan tartışmaya benzer biçimde bir tartışma yapılırsa,  $S(\omega)$  in  $\omega_0$  rad/san dolayında yoğunlaşmış, birim bant genişliği (hz) içine düşen,  $f(t)$  nin gücü olduğu görülebilir.  $S(\omega)$  nin fiziksel önemini ve bunun neden güç görüme yoğunluğu diye adlandırıldığını tartışmadan önce, bir dizgenin girdi ve çıktısının güç görüme yoğunlukları arasındaki bağıntıyı elde edelim.

## Çıktının Güç Görünge Yoğunluğu

Geçiş işlevi  $H(j\omega)$  olan bir dizgenin girişine  $f(t)$  uygulandığında  $g(t)$  tepkisi oluşsun.  $f_T(t)$  ve  $g_T(t)$  (3.73)'de tanımlandığı gibi  $f(t)$  ve  $g(t)$  den kesilmiş parçalar olsunlar. Dizgeye  $f_T(t)$  girdi olarak uygulandığında tepkeyi saptayalım. Ancak genel olarak, dizgenin  $f_T(t)$  girdisine tepkisi  $g_T(t)$  ye eşit değildir. Özellikle  $-T/2$  ve  $T/2$  uç noktaları yakınlarında asıl tepke  $g_T(t)$  den farklıdır.  $g_T(t)$  de  $-T/2$  ye yakın  $t > -T/2$  değerlerinde  $f(t)$  nin  $t < -T/2$  değerlerinin de etkisi vardır.  $T/2$  nin ötesinde ise  $t < T/2$  anlarındaki  $f(t)$  nin etkisi görülür.

Ancak  $T \rightarrow \infty$  iken limitte,  $f_T(t)$  ye olan tepke ile  $g_T(t)$  arasındaki fark önemsiz olur ve limitte fazla bir yanılğı yapmadan asıl tepkeyi  $g_T(t)$  ye eşit varsayabiliriz. Bir başka deyişle,  $T \rightarrow \infty$  iken  $f_T(t)$  girdisi  $g_T(t)$  tepkisini oluşturur denebilir. Buna göre

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} H(j\omega)F_T(\omega) \quad (3.78)$$

Burada  $F_T(\omega)$  ve  $G_T(\omega)$  sırasıyla  $f_T(t)$  ve  $g_T(t)$  nin Fourier dönüşümleridir.

$g(t)$  çıktısının güç görünge yoğunluğu  $S_g(\omega)$  şu biçimde tanımlanır:

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G_T(\omega)|^2 \quad (3.79)$$

(3.78)'den  $G_T(\omega)$  nin limit altındaki değeri yerine konularsa,

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H(j\omega)|^2 |F_T(\omega)|^2 \quad (3.80)$$

elde edilir. Girdinin güç görünge yoğunluğu yerine konularak

$$S_g(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (3.81)$$

bulunur. Buna göre çıktının güç görünge yoğunluğu  $|H(j\omega)|^2$  ile girdinin güç görünge yoğunluğunun çarpımlarına eşittir. Bundan önceki altbölümde, girdi ve çıktının erke görünge yoğunluğu arasında da bu tür bir bağıntı elde edilmişti.

## Güç Görünge Yoğunluğunun Fiziksel Anlamı

$\omega_0$  rad/san frekansına oturtulmuş, bantgenişliği  $\Delta\omega$  rad/san olan, çok dar bantlı bir düşünce bantgeçiren süzgecin girişine herhangi bir  $f(t)$  işareti uygulayalım. Bu süzgecin geçiş işlevi  $H(j\omega)$  şekil 3.14'de gösterilmiştir. Bu süzgeç bu bantın dışındaki bütün frekansları bastırır ve bu bantın içindeki bütün frekansları bozmadan geçirir. Bu nedenle bu süzgecin çıkışı  $f(t)$  nin,  $\omega_0$  frekansı etrafında  $\Delta\omega$  rad/san bantı içine düşen frekanslardaki bileşenleri olarak düşünülebilir.

$f(t)$  nin güç görüngen yoğunluğu  $S_f(\omega)$  olsun. Buna göre bu süzgecin çıkışının güç görüngen yoğunluğu şu biçimdedir.

$$S_g(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (3.82)$$

Çıkışın toplam gücü  $P_g$  ise

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad (3.83)$$

$H(j\omega)$  yerine konulur ve  $\Delta\omega$  yeteri kadar küçük varsayılırsa

$$P_g = 2 S_f(\omega_0) \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) \quad (3.84)$$

bulunur. Yukarıda çıktı için yapılan yoruma uygun olarak,  $P_g$  çıkış gücü,  $f(t)$  nin  $\omega_0$  etrafında  $\Delta\omega$  rad/san bandı üzerinde toplanan güctür. Sonuç olarak

$$\frac{P_g}{\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)} = 2 S_f(\omega) \quad (3.85)$$

ifadesi  $f(t)$  nin  $\omega = \omega_0$  da birim bantgenişliği (hz) başına düşen gücü olarak yorumlanabilir. Bu durumda  $2 S_f(\omega_0)$  bir tür güç görüngen yoğunludur. Gücün yarısı eksi frekanslardan geldiği için, ortaya bir 2 çarpanı çıkar. Bunun nedeni bir gerçel  $f(t)$  için  $S(\omega)$  nın  $\omega$  ya göre çift işlev olmasıdır. (3.77)'de tanımlandığı gibi eksi ve artı frekanslar ayrı ayrı düşünüldüğünde,  $S_f(\omega)$ ,  $\omega = \omega_0$  rad/san'de hertz başına düşen (watt biriminde) güçtür. Bu nedenle güç görüngen yoğunluğu  $S(\omega)$  için seçilmiş iyi bir deyimdir. Yalnız artı frekanslar düşünülürse,  $2 S(\omega)$  tek-yanlı güç görüngen yoğunluğu olarak da adlandırılır.

(3.77)de verilen güç görüngen yoğunluğunun tanımından giderek, güç görüngen yoğunluğunun yalnız  $F_T(\omega)$  frekans görüngesinin büyüklüğü ile ilgili bilgiyi taşıdığı söylenebilir. Yani evre bilgisi yitirilmiştir. Bu nedenle, büyüklük görüngeleri aynı, evre görüngeleri değişik bütün işaretlerin güç görüngen yoğunlukları aynıdır. Bir başka deyişle, değişik işaretler aynı güç görüngen yoğunluğuna sahip olabilir.

$c(t) = f(t) \cos \omega_0 t$  nin Güç Görüngen Yoğunluğu

Bir  $f(t)$  işaretinin güç görüngen yoğunluğu  $S_f(\omega)$  olsun.

$$c(t) = f(t) \cos \omega_0 t \quad (3.86)$$

olarak verilen  $c(t)$  nin güç görüngen yoğunluğunu bulalım. Tanımdan giderek  $c(t)$  nin güç görüngen yoğunluğu şu biçimde bulunur:

$$S_c(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |C_T(\omega)|^2 \quad (3.87)$$

Burada  $C_T(\omega)$  ifadesi  $c_T(t)$  nin Fourier dönüşümüdür ve  $c_T(t)$  ise  $c(t)$  nin kesilmiş parçasıdır.

Kesilmiş  $c_T(t)$  işlevi şu biçimde ifade edilebilir.

$$c_T(t) = f_T(t) \cos \omega_0 t \quad (3.88)$$

Fourier dönüşüm çiftlerinin katlanma özelliği kullanılarak şu yazılabilir.

$$\begin{aligned} C_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \{F_T(\omega) \star \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\} \\ &= \frac{1}{2} [F_T(\omega - \omega_0) + F_T(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (3.89)$$

(3.89)'dan  $C_T(\omega)$  nın değeri (3.87)'de yerine konulursa  $c(t)$  nin güç görünge yoğunluğu bulunur.

$$S_c(\omega) = \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega - \omega_0) + F_T(\omega + \omega_0)|^2 \quad (3.90)$$

$F_T(\omega - \omega_0)$  ve  $F_T(\omega + \omega_0)$  birbirleriyle çakışmayan iki görünge iseler, (3.90)'daki karé ifadesi açıldığında ortaya çıkan  $F_T(\omega - \omega_0)F_T^*(\omega + \omega_0)$  ve  $F_T(\omega + \omega_0)F_T^*(\omega - \omega_0)$  çarpım terimleri sıfır olur. Bu durumda  $c(t)$  nin güç görünge yoğunluğu şuna indirgenir.

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [|F_T(\omega - \omega_0)|^2 + |F_T(\omega + \omega_0)|^2] \\ &= \frac{1}{4} [S_f(\omega - \omega_0) + S_f(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Çarpım terimlerinin yok olması ve güç görünge yoğunluğunun (3.91) de verildiği gibi basit bir biçimde ifade edilmesini sağlayacak bir başka koşul  $S_f(\omega - \omega_0)$  ile  $S_f(\omega + \omega_0)$  in çakışmamasıdır.  $S_f(\omega - \omega_0)$  ile  $S_f(\omega + \omega_0)$  görüngelerinin çakışmaması ise ancak ve ancak  $S_f(\omega)$  nın şu koşulu sağlaması ile olur:

$$S_f(\omega) \equiv 0 \quad |\omega| > \omega_0 \quad (3.92)$$

Bu koşulun sağlanmadığı ve çarpım terimlerinin yok olmadığı durumlarda da karşılaşılabılır. Bu durumlarda  $c(t)$  nin güç görünge yoğunluğu (3.91) de verilen ifadeye eşit olmaz. Bu nedenle güç görünge yoğunluğu (3.91) ile ifade edilmeden önce görüngelerin çakışıp çakışmadıklarına bakılmalıdır.

Benzer biçimde

$$c(t) = f(t) \sin \omega_0 t \quad (3.93)$$

işaretinin güç görünge yoğunluğu

$$S_c(\omega) = \frac{1}{4} [S_f(\omega - \omega_0) + S_f(\omega + \omega_0)] \quad (3.94)$$

olarak bulunur. Ancak daha önce olduğu gibi  $S_f(\omega - \omega_0)$  ve  $S_f(\omega + \omega_0)$  görüngelerinin çakışmaları gerekir. Böylece  $f(t) \cos \omega_0 t$  ile  $f(t) \sin \omega_0 t$  nin güç görünge yoğunluklarının birbirlerine eşit oldukları görülür. Bunun nedeni, daha önce sözedildiği gibi, güç görünge yoğunluğunun evre bilgisine karşı duyarlı olmamasıdır.

$f(t) \cos \omega_0 t$  işaretindeki toplam gücü şu biçimde hesaplanabilir.

$$P_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega) d\omega \quad (3.95)$$

$S_f(\omega - \omega_0)$  ve  $S_f(\omega + \omega_0)$  görüngelerinin çakışmadığı varsayılırsa

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega - \omega_0) d\omega + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega + \omega_0) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4} P_f + \frac{1}{4} P_f = \frac{1}{2} P_f \end{aligned} \quad (3.96)$$

Buna göre  $f(t) \cos \omega_0 t$  nin gücü  $f(t)$  nin gücünün yarısıdır.

Bu kitapta çoğu zaman dönemli işaretlerle uğraşacağımızdan erke görünge yoğunluğu yerine güç görünge yoğunluğu daha sık kullanılacaktır. Bundan sonraki altbölümde dönemli işaretlerin güç görünge yoğunlukları saptanacaktır. Burada bir nokta daha belirtilmelidir: Dönemli olmayan işaretlerin güç görünge yoğunluklarının bulunması kolay bir iş değildir. Bunun nedeni  $F_T(\omega)$  nin saptanmasında ve (3.77)'de verilen limitin bulunmasında ortaya çıkan güçlüklerdir.

### 3.9. DÖNEMLİ İŞARETLERİN GÜÇ GÖRÜNGE YOĞUNLUĞU

Dönemi  $T_0$  olan bir dönemli  $f(t)$  işareti düşünelim. Bunun Fourier serisi açılımı,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.97)$$

dir. Burada

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} ; c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.98)$$

Bundan önceki bölümde  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü

**DÖNÜMLÜ İŞARETLERİN GÜÇ GÖRÜNÜŞÜ TOPLANLARI**

$$F(\omega) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - m_n) \quad (2)$$

olarak bulunmuştur.

$f(t)$  nin kesilmiş bir parçası olan  $f_T(t)$ ,  $f(t)$  ile bir  $G_T(t)$  işlevinin çarpımı olarak gösterilebilir.

$$f_T(t) = f(t) G_T(t) \quad (3)$$

Burada  $G_T(t)$  kısırlı işlevi  $|t| < T/2$  aralığında bir, başka yerlerde sıfır olan bir işlevdir (Şekil 2.8). Fourier dönüşüm çiftlerinin katılması ilmi kullanılarak,  $f_T(t)$  nin Fourier dönüşümünü  $F(\omega)$  ve  $G_T(t)$  nin Fourier dönüşümleri türünden elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[ F(\omega) * T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T \frac{\sin \frac{(\omega - m_n) T}{2}}{\frac{(\omega - m_n) T}{2}} \right] \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ c_n \frac{\sin \frac{(\omega - m_n) T}{2}}{\frac{(\omega - m_n) T}{2}} \right] \quad (3.1) \end{aligned}$$

(3.101)'de  $F_T(\omega)$  için verilen ifade kullanılarak  $\frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2$  şu biçimde hesaplanabilir.

$$\frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 = \frac{1}{T} T^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ c_n c_m^* \frac{\sin \frac{(\omega - m_n) T}{2}}{\frac{(\omega - m_n) T}{2}} \frac{\sin \frac{(\omega - m_m) T}{2}}{\frac{(\omega - m_m) T}{2}} \right] \quad (3.2)$$

$T \rightarrow \infty$  iken, değişik  $n$  ve  $m$  değerleri için  $\frac{\sin x}{x}$  işlevlerinin çarpımı sıfır olur. Bu nedenle yukarıda verilen iki katlı toplam tek kata indirilir ve

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{\sin^2 \frac{(\omega - m_n) T}{2}}{\left[ \frac{(\omega - m_n) T}{2} \right]^2} \right] \quad (3.3) \end{aligned}$$

Toplam içinde verilen terim  $\delta(\cdot)$  işlevinin limittaki biçimlerinden biridir (Ek A'ya bakınız). Bu nedenle

$$S_f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \pi \cdot \delta\left(\frac{\omega - n\omega_0}{2}\right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.104)$$

Böylece dönemli işlevlerin güç görüncü yoğunluklarını, bunların Fourier katsayıları türünden veren bir ifade bulunmuş olur.

Bir dönemli işlevin güç görüncü yoğunluğu  $n$  tamsayıları için  $n\omega_0$  rad/san frekanslarında şiddetleri  $2\pi |c_n|^2$  olan dürtülerden oluşur.

Örnek 3.10.  $f(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$  dönemli işlevinin güç görüncü yoğunluğunu bulalım.

$$f(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{a}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \frac{a}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t}$$

gösteriminden  $f(t)$  nin Fourier katsayıları kolayca elde edilebilir.

$$c_1 = \frac{a}{2} e^{j\theta}$$

$$c_{-1} = \frac{a}{2} e^{-j\theta}$$

$$c_n = 0 \quad n \neq 1 \text{ ve } n \neq -1$$

Buna göre

$$S_f(\omega) = 2\pi \frac{a^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Güç görüncü yoğunluğunun  $\theta$  evresine bağlı olmadığına dikkat ediniz.  $f(t)$  nin toplam gücü ise şu biçimde hesaplanabilir.

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega \\ = \frac{a^2}{2}$$

Bu beklenen bir sonuçtur, çünkü genliği  $a$  olan herhangi bir sinüzoidalin ortalama-kare-değeri (yani gücü)  $a^2/2$  dir.

Örnek 3.11. Şekil 3.15a'da gösterilen dönemli kare dalganın güç görüncü yoğunluğunu bulalım. Bundan önceki bölümde bu dönemli dalga biçiminin Fourier katsayıları şu biçimde saptanmıştı.

$$c_0 = A/2$$

$$c_n = \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad (n \text{ tek sayı})$$

$$c_n = 0 \quad (n \text{ çift sayı, } n \neq 0)$$



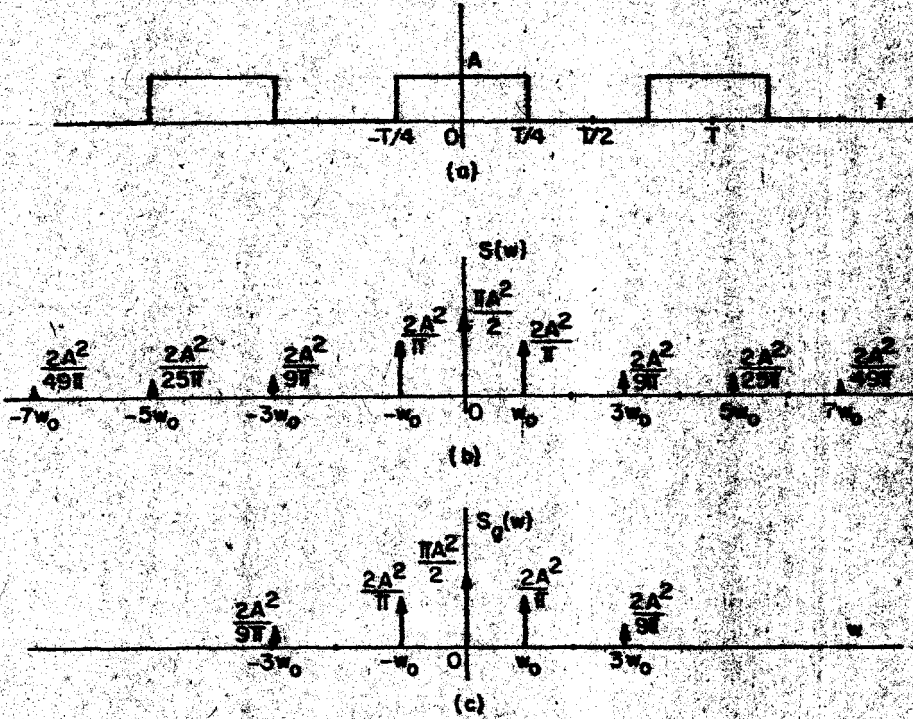
## DÖNENLİ İŞARETLERİN GÜÇ GÖRÜNGE YOĞUNLUĞU

Buna göre bu kare dalganın güç görünge yoğunluğu

$$S(\omega) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

Bu güç görünge yoğunluğunun çizimi Şekil 3.15b'de verilmiştir.

Büyüklüğü bir ve kesim frekansı  $\omega_c = 20/T$  rad/san olan bir düşük geçiren süzgecin bu kare dalgaya verdiği tepkenin güç görünge yoğunluğu ve tepkenin toplam gücü ise şu biçimde bulunabilir.



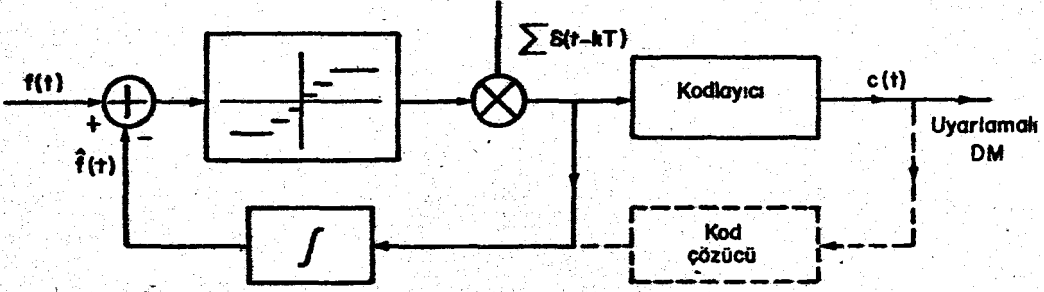
Şekil 3.15 Kare dalga, bunun güç görünge yoğunluğu ve alçak geçiren süzgecin tepkesinin güç görünge yoğunluğu.

$\omega$  frekansı yaklaşık olarak 3.183  $\omega_0$  dir. Buna göre yalnız  $n = 0$ ,  $n = +3$  ve  $n = -3$  terimleri süzgecin geçiş bandının içine düşerler.  $g(t)$  tepkesinin güç görünge yoğunluğu şöyledir:

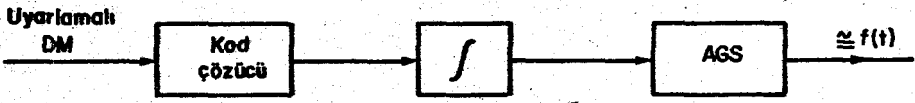
$$S_g(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega) + \frac{2A^2}{\pi} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2A^2}{\pi} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{2A^2}{9\pi} \delta(\omega - 3\omega_0) + \frac{2A^2}{9\pi} \delta(\omega + 3\omega_0)$$

$S_g(\omega)$  nın çizimi Şekil 3.15c'de verilmiştir.  $g(t)$  nin toplam gücü ise şu biçimde bulunabilir.

$$\begin{aligned}
 P_g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi A^2}{2} + \frac{2A^2}{\pi} + \frac{2A^2}{\pi} + \frac{2A^2}{9\pi} + \frac{2A^2}{9\pi} \right] \\
 &= A^2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} \right] = 0.475 A^2
 \end{aligned}$$

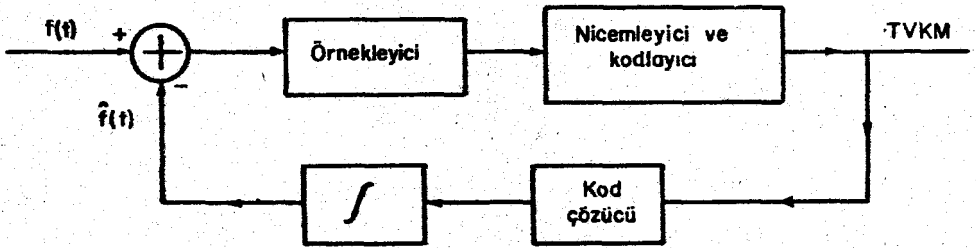


(a)



(b)

Şekil 8.17 Uyarlamalı DM modülatörü ve demodülatörü



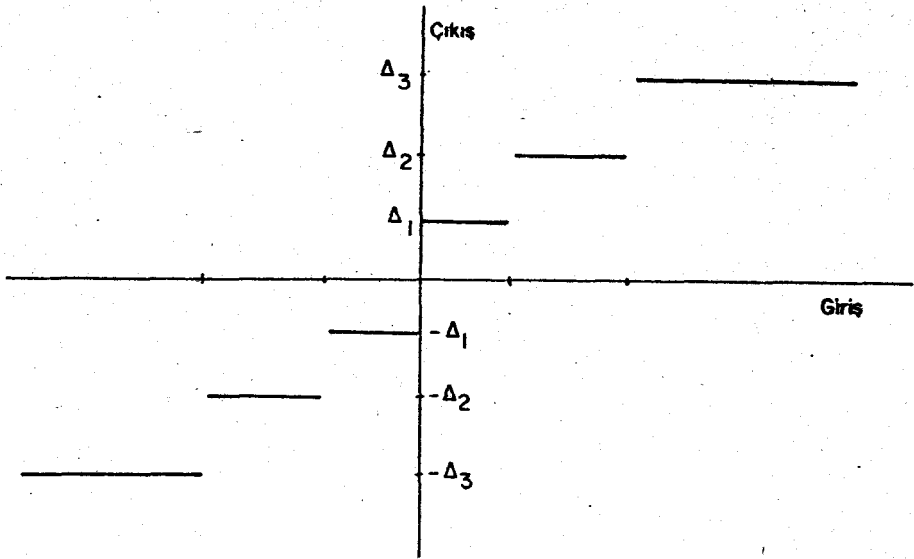
(a)



(b)

Şekil 8.18 TVKM modülatörü ve demodülatörü

Bu nedenle TVKM'de daha küçük bantgenişliği ile çalışmak olasıdır. Örneğin TVKM ile görüntü işaretinin yeniden üretilmesinde  $N = 2^3 = 8$  düzey sayısı kabul edilebilir sonuçlar verir. Aynı niteliği elde etmek için

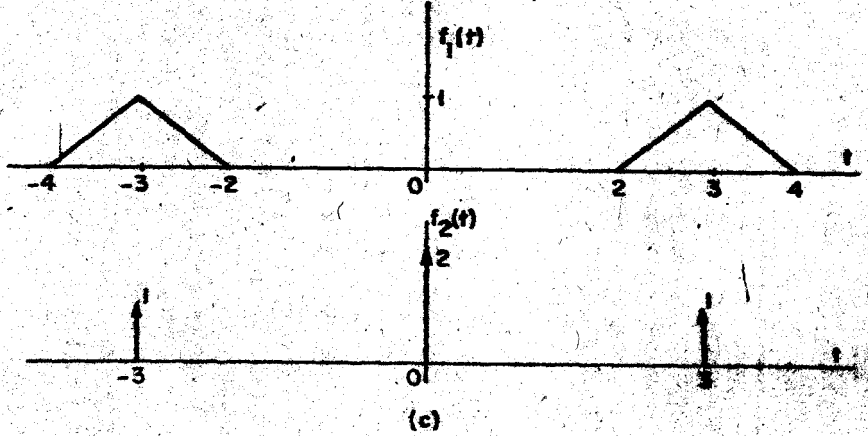


Şekil 8.16 Uyarlamalı DM için bir doğrusal olmayan aygıt özdeşliği

beslemek gerekebilir. Bu tür bir uyarlamalı DM modülatörü ile demodülatörünün öbek çizimleri Şekil 8.17'de verilmiştir. Uyarlamalı DM dizgelerindeki kodlayıcı ve kod çözücü dizgenin karmaşıklığını arttırır. Buna göre uyarlamalı DM dizgesinin üstünlüğü için ödenen bedel, dizgenin karmaşıklığı ve  $m$ -li dizinin ikili dizi olarak kodlanmasının neden olduğu bantgenişliği artmasıdır.

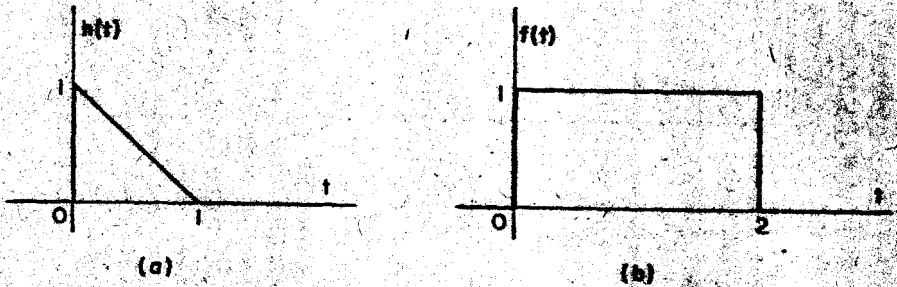
Doğrusal olmayan aygıt ile bunu izleyen dürtü dizisiyle çarpma yerine bir VKM örnekleyici-nicemleyicisi kullanılarak özel bir uyarlamalı DM dizgesi elde edilir. Burada kullanılan kodlayıcı bir VKM kodlayıcısı ve kod çözücü ise bir VKM kod çözücüsüdür. DM ile VKM'nin bir birleşimi olduğu için bu uyarlamalı DM yöntemi türevsel VKM (TVKM) diye adlandırılır. TVKM modülatörü ile demodülatörünün öbek çizimleri Şekil 8.18'de gösterilmiştir.

İşlevsel olarak, TVKM işareti  $f(t) - \hat{f}(t)$  fark işaretinin bir VKM işareti olarak gösteriminden başka birşey değildir. Ancak burada  $f(t)$  deki adım boyları değişkendir ve  $\mp\Delta$  ile  $\mp N\Delta/2$  arasında değişir;  $N$  nicemleme düzeyleri sayısını gösterir. Bu nedenle  $\hat{f}(t)$  işareti  $f(t)$  yi daha yakından izler.  $N=2$  için TVKM basit DM'ye indirgenir. Özellikle sıkıştırıcı-genleştirici yöntemi de kullanılırsa, arama gürültüsü çok düşük olur, başlama hızlanır ve eğim sınırlanması olasılığı azalır.  $N>2$  için TVKM dizgesinin karmaşıklığı VKM'ninkine eşdeğerdir.  $f(t)$  işareti örnekten örneğe önemli ölçüde değişmeyeceği için,  $f(t) - \hat{f}(t)$  fark işareti daha az sayıda nicemleme düzeyi ile uygun bir biçimde gösterilebilir.



Şekil 3.A.3 (devam)

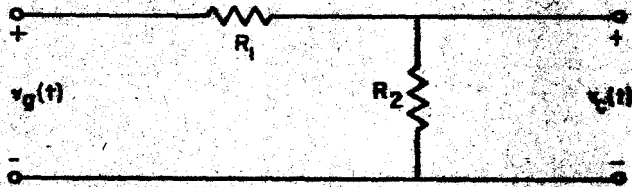
3.6. Bir dizgenin dürtü tepkisi  $h(t)$  Şekil 3.A.4a'da verilmiştir.



Şekil 3.A.4

Devrenin girişine Şekil 3.A.4b'de gösterilen birim dürtüden yararlanılmaktadır. Dizgenin bu girdiye verdiği tepkeyi çizimle yolla bulunuz.

3.7. (a) Şekil 3.A.5'de verilen devrenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  yi bulunuz.

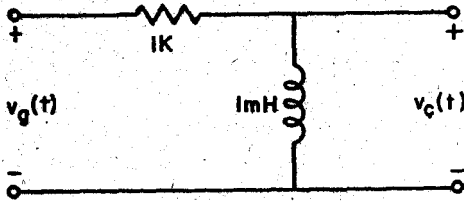


Şekil 3.A.5

(b) Bu dizgenin  $v_g(t) = \delta(t)$  dürtüsüne verdiği dürtü tepkisi  $h(t)$  yi bulunuz.

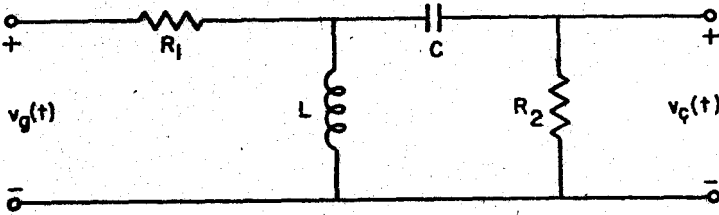
(c) Dürtü tepkisini ve katlanma tümevini kullanarak bu dizgenin  $v_g(t) = u(t) - u(t-1)$  girdisine verdiği tepkeyi bulunuz.

- 3.8. Şekil 3.A.6'da verilen devrenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  yı bulunuz.



Şekil 3.A.6

- 3.9. Şekil 3.A.7'de verilen devrenin karmaşık geçiş işlevini elde ediniz.



Şekil 3.A.7

Aşağıda verilen girdilere devrenin oluşturduğu tepkelerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

- (a)  $\delta(t)$
- (b)  $u(t)$
- (c)  $e^{-t} u(t-T)$

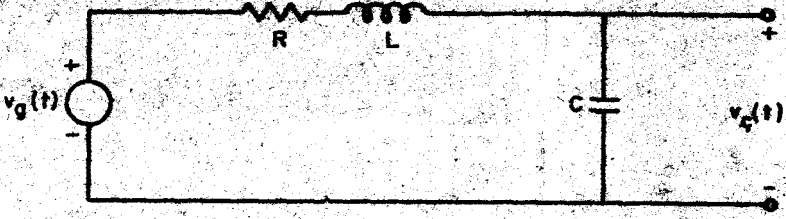
- 3.10. Bir dizgenin karmaşık geçiş işlevi

$$H(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$$

olarak verilmektedir.

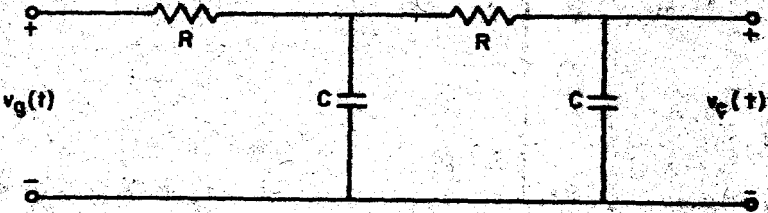
- (a) Bir dizgenin çıkışında  $g(t) = \cos \omega_c t$  tepkesini oluşturacak  $f(t)$  girdisini bulunuz. Bu tepkeyi verecek tek bir  $f(t)$  işareti bulunabilir mi?
- (b) Bu dizgenin çıkışında  $g(t) = e^{-t}$  tepkesini oluşturacak  $f(t)$  girdisini bulunuz.  $f(t)$  girdisi bulunamazsa, nedenlerini açıklayınız.

- 3.11. Şekil 3.A.8'de verilen seri RLC devresinin girişine  $v(t) = Ae^{-at} u(t)$  gerilimi uygulanmaktadır. Bu devrenin dürtü tepkesini bulunuz ve sığaç üzerinde oluşan gerilimi bir tümlev ifadesi olarak yazınız.



Şekil 3.A.8

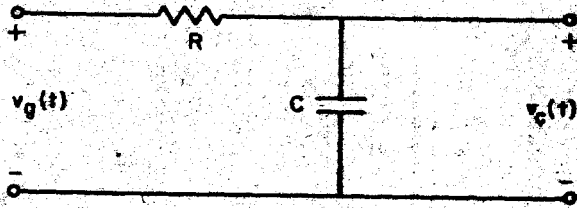
3.12. Birbirinin aynı iki RC devresi ardarda bağlanmıştır (Şekil 3.A.9).



Şekil 3.A.9

Devrenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  yi bulunuz. RC kesimlerinin herbirinin karmaşık geçiş işlevlerini çarparak bu devrenin karmaşık geçiş işlevi elde edilebilir mi? Neden?

3.13. Şekil 3.A.10'da verilen RC alçak geçiren süzgecini düşününüz.



Şekil 3.A.10

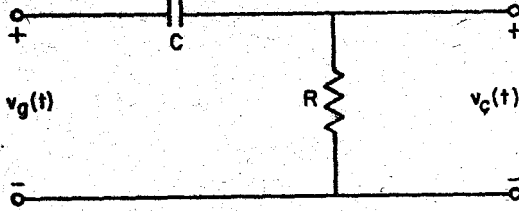
(a) Bir süzgecin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nın büyüklük ve evre özgeçirilerini çiziniz.

(b) Bu devreden hangi tür işaretler bozulmadan geçer? Bu devrenin girişine  $\cos \omega_0 t$  işareti ( $\omega_0 = 1/RC$ ) uygulanmaktadır. Oluşan tepkeyi bulunuz. Tepkede girdiye göre ne kadar bir gecikme vardır?

3.14. Bir RC alçak geçiren süzgecinin (Şekil 3.A.10) girişine şiddetleri 1 ve dönemi T olan bir dürtü dizisi gerilim olarak uygulanmaktadır. RC süzgecinin 3 dB kesim frekansı  $f_c = 1/2\pi RC$  dir.

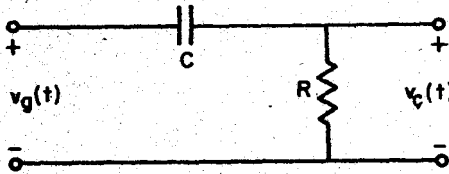
- (a) Sıgıaç üzerinde oluşan çıkış geriliminin Fourier serisi açılımını bulunuz.
- (b) Çıktıda üçüncü harmonik 100 kez zayıflatılmışsa  $f_c T$  çarpımını bulunuz.

3.15. Şekil 3.A.11'de verilen RC yüksek geçiren süzgecini düşününüz.



Şekil 3.A.11

- (a) Bu süzgecin dürtü tepkesini bulunuz.
- (b) Dürtü tepkesini kullanarak, devrenin birim basamak girdisine verdiği tepkeyi bulunuz.
- (c) Katlama tümlevini kullanarak, aynı süzgecin  $e^{-at}u(t)$  girdisine verdiği tepkeyi hesaplayınız.
- 3.16. (a) Bir devrenin girişine bir  $v_g(t)$  işareti uygulanmaktadır. Devrenin çıktısı  $v_c(t) = \tau [dv_g(t)/dt]$  olarak verilmektedir. Burada  $\tau$  bir değişmez sayıdır. Devrenin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  yı bulunuz.
- (b) Şekil 3.A.12'de verilen RC devresinin girişine bir  $v_g(t)$  işareti uygulanmaktadır. Devrenin zaman değişmezi  $\tau = RC$  dir.  $v_g(t)$  deki en yüksek  $f$  frekansı  $f \ll 1/T$  koşulunu sağlamaktadır. Bu koşullar altında,  $v_c(t)$  çıkış geriliminin yaklaşık olarak  $v_c(t) \cong \tau dv_g(t)/dt$  olduğunu gösteriniz.

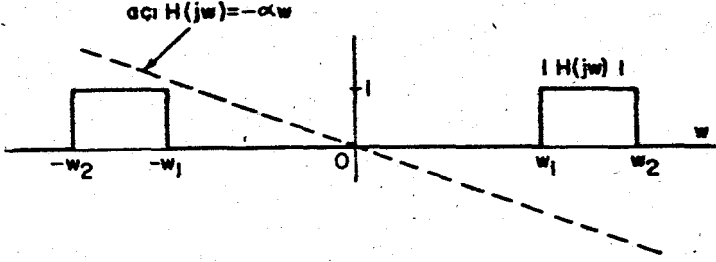


Şekil 3.A.12

3.17. Özegrileri Şekil 3.A.13'de verilen dizgenin girişine

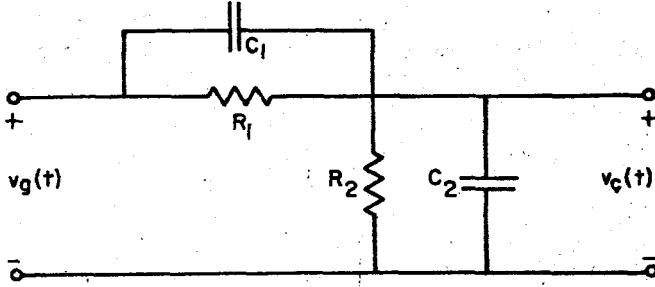
- a)  $\cos \omega_0 t$ , burada  $\omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$
- b) tüm frekans bileşenleri  $[\omega_1, \omega_2]$  aralığında olan bir  $f(t)$  işareti uygulandığında, dizgenin çıktısını bulunuz. Bu dizgede, bu işaretler için iletimin bozulmasız olduğu söylenebilir mi?





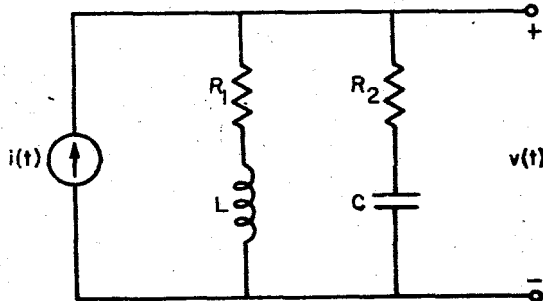
Şekil 3.A.13

- 3.18. Şekil 3.A.14'de verilen devrenin işaretleri bozulmadan iletilmesi için  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  ve  $C_2$  arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?



Şekil 3.A.14

- 3.19. Şekil 3.A.15'de verilen devrede çıkış gerilimi  $v(t)$  ile giriş akımı  $i(t)$  arasındaki ilişkiyi belirleyen karmaşık geçiş işlevini bulunuz. Çıkış gerilimi dalgabüçümünün giriş gerilimi dalgabüçümü ile aynı olması (bozulmasız iletim) istenmektedir. Bunun için  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  ve  $C$  arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır. Girdi ile çıktı arasında zaman gecikmesi var mıdır?

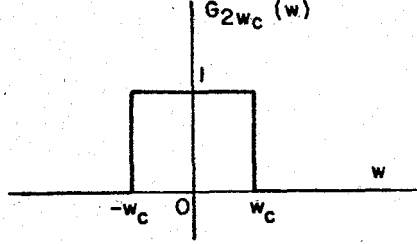


Şekil 3.A.15

3.20. (a) Bir düşüncel yüksek geçiren süzgecin karmaşık geçiş işlevi

$$H(j\omega) = [1 - G_{2\omega_c}(\omega)] e^{-j\omega t_0}$$

olarak verilmektedir. Buradaki  $G_{2\omega_c}(\omega)$  kapı işlevidir ve Şekil 3.A.16'da verilmiştir.



Şekil 3.A.16

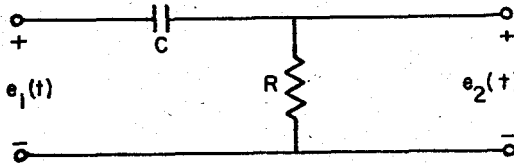
Bu süzgecin karmaşık geçiş işlevinin büyüklük ve evre özgeçirlerini çiziniz. Daha sonra bu süzgecin dürtü ve basamak tepkelerini bulunuz.

(b) (a) kısmında yapılanları, karmaşık geçiş işlevi

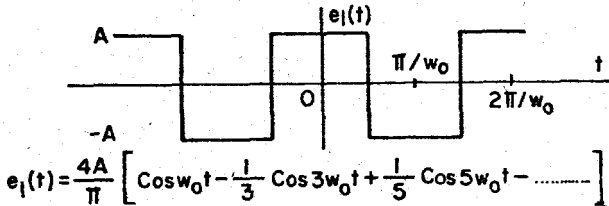
$$H(j\omega) = [G_B(\omega - \omega_0) + G_B(\omega + \omega_0)] e^{-j\omega t_0}$$

olan bir bantgeçiren süzgeç için yineleyiniz.

3.21. Şekil 3.A.17a'da verilen RC yüksek geçiren süzgecinin girişine ortalama değeri sıfır olan bir kare dalga (Şekil 3.A.17b) uygulanmaktadır.



(a)



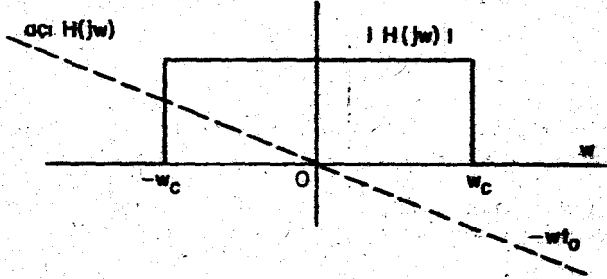
(b)

Şekil 3.A.17

$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \frac{2}{RC}, \frac{3}{RC}$  değerleri için zaman bölgesi çözümlenmesi yaparak çıktıyı bulunuz ve dalgabıçimini çiziniz. Çıktının Fourier serisi açılımını, frekans bölgesi çözümlenmesini kullanarak, yazınız.

Bu RC devresinin çıkışına nasıl bir devre bağlanmalıdır ki  $e_1(t)$  için bozulmasız iletim sağlansın?

- 3.22. Özgegrileri Şekil 3.A.18'de verilen düşüncel alçak geçiren süzgeci düşününüz.



Şekil 3.A.18

Bu süzgecin girişine aşağıda verilen işaretler uygulandığında oluşan tepkeleri bulunuz ve sonuçları yorumlayınız.

- (a)  $(\pi/\omega_c) \cdot \delta(t)$   
 (b)  $Sa(\omega_c t)$   
 (c)  $Sa(2\omega_c t)$

- 3.23. Bir düşüncel bant geçiren süzgecin karmaşık geçiş işlevi

$$H(j\omega) = k [G_{\Delta\omega}(\omega - \omega_0) + G_{\Delta\omega}(\omega + \omega_0)] e^{-j\omega t_0}$$

olarak verilmektedir. Burada tanımlanan  $G_{\Delta\omega}(\cdot)$  işlevi kapı işlevidir ve Şekil 3.A.16'da verilmiştir.

- (a) Bu süzgecin büyüklük ve evre özgegrilerini çiziniz.  
 (b) Bu süzgecin dürtü tepkisini bulunuz. Süzgeç fiziksel olarak gerçekleştirilebilir mi?

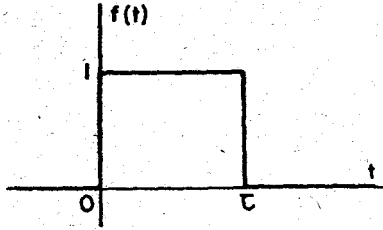
- 3.24. Bir doğrusal dizgenin karmaşık geçiş işlevi

$$H(j\omega) = \tau e^{-j5\omega\tau} \frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

olarak verilmektedir.

- (a) Dizgenin dürtü tepkisini bulunuz.

- (b) Dizgenin girişine Şekil 3.A.19'da gösterilen dikdörtgen vuruş uygulandığında çıkışta oluşan  $g(t)$  tepkesini bulunuz ve çiziniz.



Şekil 3.A.19

- (c) Girişe uygulanan dikdörtgen vuruşun süresi  $10\tau$  olursa hesap yapmaksızın çıktıyı çiziniz.
- (d) İşaret ve dizge bantgenişliklerini düşünerek (a), (b) ve (c) de elde edilen sonuçları karşılaştırınız.

3.25. (a) Geçiş işlevi

$$H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts}$$

olan bir dizgenin öbek çizimini veriniz. (İpucu: s-bölgesinde s'ye bölme, zaman bölgesinde tümlev almaya, s-bölgesinde  $e^{-st}$  ile çarpma zaman bölgesinde  $\tau$  kadar kaymaya karşı gelir.

- (b) Geçiş işlevi (a) kısmında verilen dizgenin karmaşık geçiş işlevinin

$$H(j\omega) = e^{-j\omega \tau/2} \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2}$$

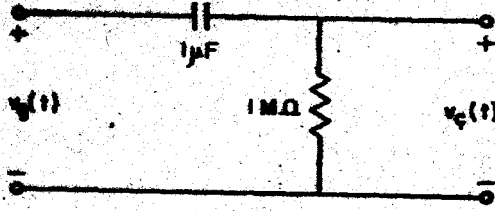
biçiminde yazılabileceğini gösteriniz.

- (c) Dizgenin girişine Şekil 3.A.19'da gösterilen  $\tau$  süreli bir dikdörtgen vuruş uygulanmaktadır.

- (i) (a) kısmında tasarımı yaptığınız dizgenin öbek çizimini kullanarak zaman bölgesinde çıktının süresi  $2\tau$  olan bir üçgen vuruş olduğunu gösteriniz.
- (ii) Görünge yaklaşımını, (b)'de verilen karmaşık geçiş işlevini ve bir dikdörtgen vuruşun Fourier dönüşümünü kullanarak (i)'de verilen sonucu elde ediniz.

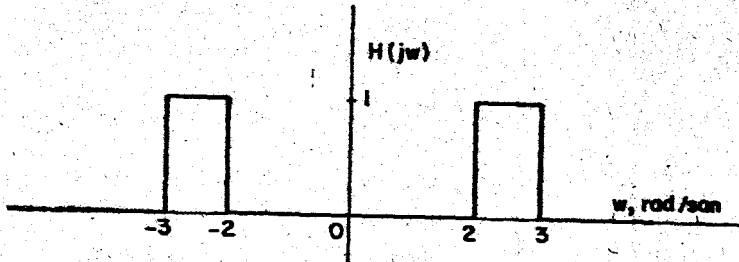
3.26.  $v(t) = \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi ft}$  olarak verilmektedir.  $v(t)$  nin içerdiği E erkesini bulunuz.

3.27. Şekil 3.A.20'de verilen bir yüksek geçiren RC süzgecinin girişine  $v_g(t) = e^{-t} u(t)$  volt gerilimi uygulanmaktadır.



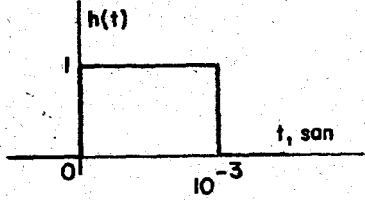
Şekil 3.A.20

- (a) Çıkış geriliminin frekans görünüşünü çiziniz.
- (b) Çıktının erke görüme yoğunluğunu çiziniz.
- (c) Toplam çıktı erkesinin girdi erkesinin yarısı olduğunu gösteriniz.
- 3.28. Aşağıda verilen işaretlerin güç görüme yoğunluklarını çiziniz ve her işaretin gücünü bulunuz.
- (a)  $A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t$
- (b)  $[A + \cos \omega_1 t] \cos \omega_2 t$
- (c)  $A \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$
- 3.29. Aşağıda verilen işaretlerin güç görüme yoğunlukları  $S(\omega)$  ya bulunuz.
- (a) Şiddetleri  $I$  ve dönemi  $T$  olan bir dürtü dizisi.
- (b) Genliği  $A$ , vurum süresi  $\tau = 1/A$  ve dönemi  $T$  olan bir vurum dizisi
- 3.30. Karmaşık geçiş işlevi Şekil 3.A.21'de verilen bir düzencel bant geçiren süzgecin girişine  $f(t) = A + \cos \frac{3\pi}{4} t + \cos \frac{3\pi}{2} t$  işareti uygulanmaktadır. Toplam çıkış gücünü ya da erkesini bulunuz.



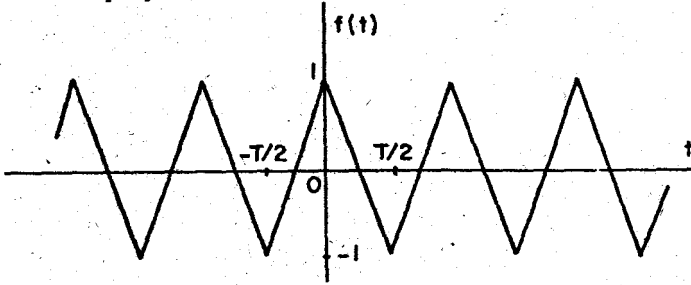
Şekil 3.A.21

- 3.31. Dürtü tepkisi Şekil 3.A.22'de verilen bir süzgecin girişine  $\cos(2\pi \cdot 10^3 t)$  işareti uygulanmaktadır. Çıkış işaretini ve çıkış işaretinin gücünü bulunuz.

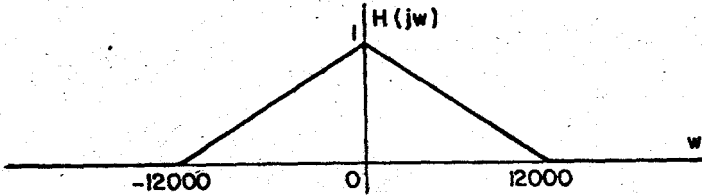


Şekil 3.A.22

- 3.32. Şekil 3.A.24a'da verilen  $f(t)$  işareti, karmaşık geçiş işlevi Şekil 3.A.23b'de verilen bir dizgeden iletilmektedir. Üç ayrı  $T$  değeri için ( $T = 2\pi/3000$ ,  $\pi/3000$  ve  $\pi/6000$ ), çıkış işaretinin güç görüğe yoğunluğunu ve gücünü bulunuz. Giriş işaretinin gücünü de hesaplayınız.



(a)



(b)

Şekil 3.A.23

- 3.33. Bir RC alçak geçiren süzgecinin (Şekil 3.A.10) girişine  $v_g(t) = \cos \omega_0 t + 2\sin 3\omega_0 t + 0.5 \sin 4\omega_0 t$  işareti uygulanmaktadır. Süzgecin 3 dB kesim frekansı  $f_c$  dir ve  $f_c = 2 f_0$  dir.

(a) Girdinin güç görüğe yoğunluğu  $S_g(\omega)$  yı bulunuz.

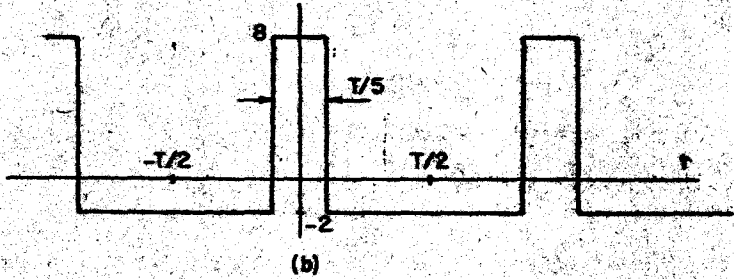
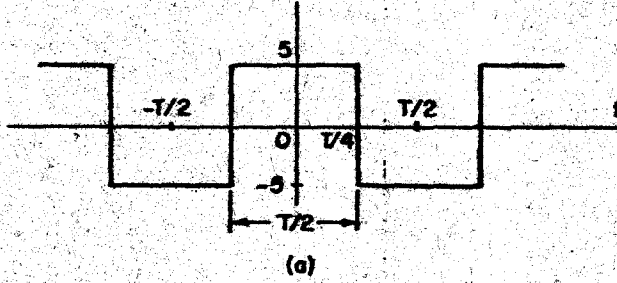
(b) Çıktının güç görüğe yoğunluğu  $S_C(\omega)$  yı bulunuz.

(c)  $P_C$  toplam çıkış gücünü bulunuz.

3.34. 1 ohmluk bir direnç üzerine sırasıyla Şekil 3.A.24a ve Şekil 3.A.24b'de verilen vuruş dizileri uygulanmaktadır.

(a) Her iki durumda dirençte açığa çıkan toplam güç nedir?

(b) Her iki durumda birinci harmonik (ana) frekans bileşeninin gücü, toplam gücün yüzde kaçdır?



Şekil 3.A.24

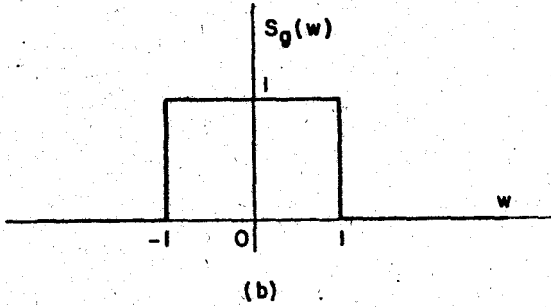
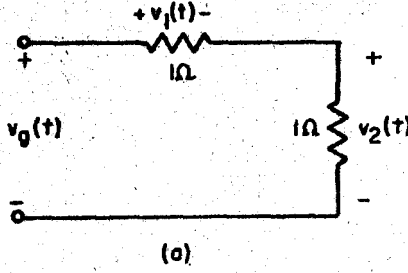
(c) Her iki durumda ilk 10 harmonikte toplanan güç toplam gücün yüzde kaçdır?

(d) Her iki durumda güç görüğe yoğunluğunun birinci sıfır geçişine kadar olan harmoniklerde toplanan gücü bulunuz, bu güç toplam gücün yüzde kaçdır?

3.35. (a) Genliği 1 volt, dönemi 1 msan olan bir dönemli kare dalga geriliminin güç görüğe yoğunluğunu bulunuz.

(b) Bu kare dalga, 3 dB kesim frekansı 1 KHz olan bir RC alçak geçiren süzgecin (Şekil 3.A.10) girişine uygulanmıştır. Sızmaç üzerinde oluşan çıkış geriliminin güç görüğe yoğunluğunu bulunuz.

3.36. Şekil 3.A.25a'da gösterilen devrenin girişine, güç görüğe yoğunluğu  $S(\omega)$  olan (Şekil 3.A.25b) bir işaret uygulanmıştır.



Şekil 3.A.25

Dirençler üzerinde oluşan gerilimlerin güç görünge yoğunlukları  $S_{v_1}(w)$  ve  $S_{v_2}(w)$  yı bulunuz. Toplam giriş gücü ile  $v_1(t)$  ve  $v_2(t)$  deki toplam güçleri bulunuz. 'Güç korunumu' ilkesi sağlanıyor mu? (Erke tanımını dikkatli bir biçimde yeniden okuyunuz.)

3.37. Bir dönemli üçgen  $v(t)$  dalgabiçimi şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$v(t) = \frac{2t}{T}, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

$$\text{ve } v(t + T) = v(t).$$

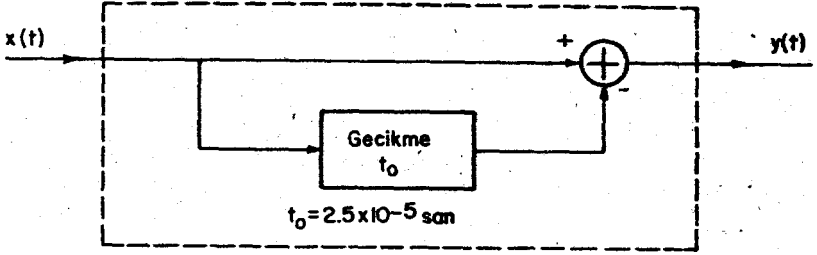
Bu işaretin Fourier serisi açılımı

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{2\pi}{T} nt$$

olarak verilmektedir. İlk üç harmonikte toplanan gücün toplam işaret gücüne oranını bulunuz.

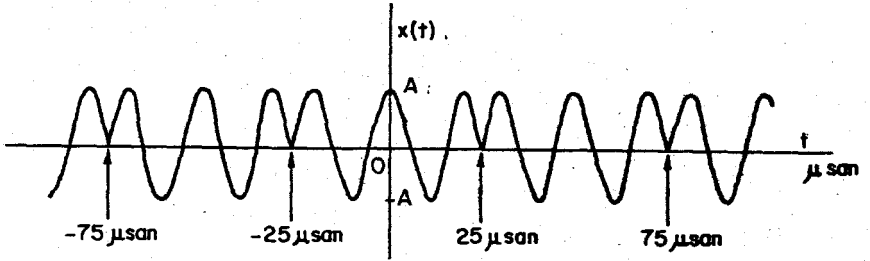
3.38. Şekil 3.A.26'da verilen dizgenin girdisi  $x(t)$  ve çıktısı  $y(t)$  dir.





Şekil 3.A.26

- (a) Dizgenin dürtü tepkesini bulunuz.
- (b) Şekil 3.A.27'de verilen  $x(t)$  nin frekans görünüşü  $X(\omega)$  yi bulunuz ve  $|\omega| \leq 2\pi \cdot 10^5$  rad/san için güç görüğe yoğunluğunu çiziniz.  $x(t)$  nin DA bileşeni var mıdır?



Şekil 3.A.27

- (c)  $|\omega| \leq 2\pi \cdot 10^5$  rad/san için  $y(t)$  nin güç görüğe yoğunluğunu çiziniz.  $y(t)$  nin DA bileşeni var mıdır?

# BÖLÜM 4

## GENLİK MODÜLASYONU

### 4.1. GİRİŞ

Bölüm 1 de belirtildiği gibi, bilgi işaretini iletme uygun bir biçime sokmak ve iletişim kanalından aynı anda birçok kullanıcının yararlanmasını sağlamak (frekans bölmeli çoklama) için modülasyon işlemi gereklidir. Modülasyon türleri taşıyıcı dalgaya göre sınıflandırıldığında, taşıyıcı dalga olarak bir sinüzoidalın kullanıldığı modülasyon türleri örneksel modülasyon (SD) (sürekli dalga modülasyonu - CW) diye adlandırılan bir modülasyon sınıfını oluşturur.

Örneksel modülasyonda dalgabiçimi genel olarak şöyle ifade edilebilir.

$$c(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (4.1)$$

Bu sinüzoidal zaman işlevi taşıyıcı olarak adlandırılır. Örneksel modülasyon türlerinde üç değiştirgen, A genliği,  $\omega_0$  frekansı ya da  $\phi$  evresinden birisi bilgi işaretine (modüle eden işarete) bağlı olarak değiştirilir. A genliği modüle eden işarete bağlı olarak değiştirilirse genlik modülasyonu (kısa biçimde CM) elde edilir.  $\omega_0$  frekansı değiştiriliyor ise frekans modülasyonu (FM) elde edilir.  $\phi$  evresi değiştirildiğinde ise evre modülasyonu (EM) elde edilir.

Genlik modülasyonun çeşitli biçimleri en sık ve yaygın kullanılan modülasyon türleridir. Birçok radyo yayımları ile TV yayımları gibi

iletişim dizgelerinde genlik modülasyonunun bazı biçimleri, ya yalnız başına ya da başka bir modülasyon türü ile birlikte kullanılır. Askeri iletişim aygıtlarının bir çoğunda da genlik modülasyonunun değişik biçimleri kullanılır.

Genliği modüle edilmiş dalgabiçimi genel olarak şu biçimdedir:

$$c(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (4.2)$$

$A(t)$  genliği ile modüle eden  $f(t)$  işaretini arasındaki ilişkiye bağlı olarak genlik modülasyonunun değişik biçimleri elde edilir. (4.2) ile gösterilen iki genlik modülasyonu türü şunlardır:

1. Taşıyıcılı genlik modülasyonu, (ya da taşıyıcılı çift yan bant, ya da yalnızca genlik modülasyonu)
2. Çift yan bant (ÇYB) modülasyonu (ya da taşıyıcısı bastırılmış genlik modülasyonu)

Yukarıdaki adlandırmada bir noktaya açıklık getirmek gerekir. Sinusoidal taşıyıcı dalga genliğinin, bilgi işaretine bağlı olarak değiştirildiği modülasyon türlerinin tümüne birden genlik modülasyonu dendiği gibi, özel bir tür genlik modülasyonu olan "taşıyıcılı genlik modülasyonu"da yalnızca genlik modülasyonu demektir.

(4.2) de verilen genliği modüle edilmiş dalgabiçimi bir süzgeçten geçirilirse, genlik modülasyonunun başka biçimleri olarak düşünülebilen, başka modülasyon türleri elde edilir. Kullanılan süzgece bağlı olarak şu iki değişik genlik modülasyonu biçimi elde edilir.

3. Tek yan bant (TYB) modülasyonu
4. Artık yan bant (AYB) modülasyonu

Genlik modülasyonu tekniğinin bu dört türü, bu ve bundan sonraki bölümlerde ayrıntılarıyla incelenecektir.

Genlik modülasyonu türlerinin herbirisi tartışılırken önce modüle edilmiş dalgabiçimi ve bunun özellikleri incelenecektir. Daha sonra modüle edilmiş dalgabiçimini üretmek için kullanılan yöntemler anlatılacaktır. Son olarak ise, modüle edilmiş işaretin nasıl demodüle edileceği tartışılacaktır. İncelenen modülasyon türü ile daha önce incelenenler arasında bir karşılaştırma yapılacak ve genlik modülasyonunun her türünün üstünlükleri ve eksiklikleri de ayrıca belirtilecektir.

#### 4.2. TAŞIYICILI GENLİK MODÜLASYONU

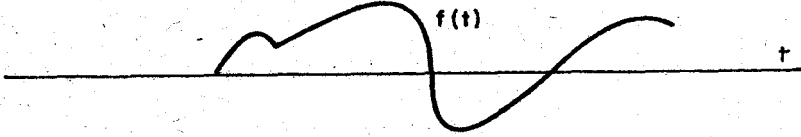
Bu genlik modülasyonu türünde modüle edilmiş dalgabiçimi şöyle ifade edilebilir:

$$c(t) = A[1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.3)$$

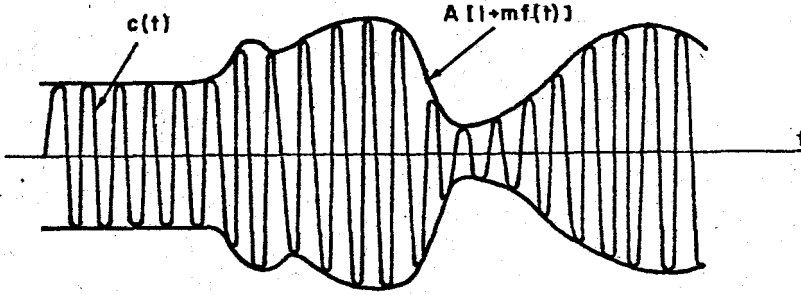
Burada  $f(t)$  modüle eden işaret (bilgi işareti),  $\omega_0$  ise taşıyıcı frekansını belirtir.  $A$  ve  $m$  değişmez sayılardır. Olağan koşullar altında bu de-

giştirgenlerin aşağıdaki paragrafta açıklanan bazı koşulları sağlamaları gerekir.

Şekil 4.1'den görülebileceği gibi modüle edilmiş  $c(t)$  işaretinin zarfı, DA terimi  $A$  ve ölçekleme katsayısı  $A_m$  dışında, modüle eden  $f(t)$



(a)



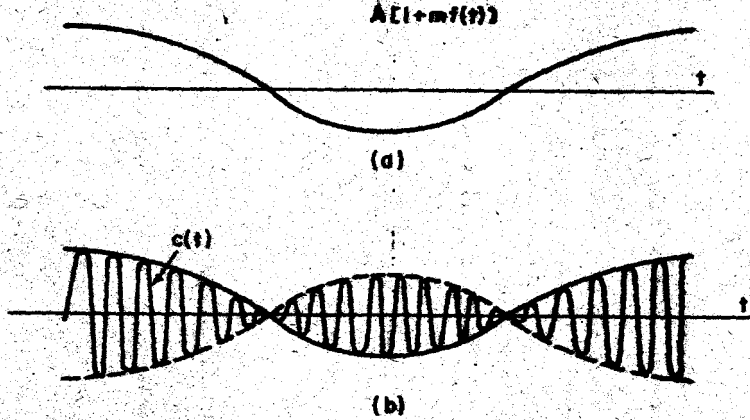
(b)

Şekil 4.1 Genliği modüle edilmiş dalgabiçimi

işaretine aynen benzer.  $\omega_0$  taşıyıcı frekansı ise  $f(t)$  nin en büyük frekans bileşeni  $\omega_m$  den çok daha büyüktür. Uygulamada her zaman karşılaşılan durum budur. Eğer bu koşul sağlanmazsa, yani  $\omega_0$  frekansı  $\omega_m$  den çok büyük değilse, modüle edilmiş dalgabiçiminin zarfı tam olarak saptanamaz. Oysa zarf kavramı, özellikle bu modülasyon türünde, çok önemlidir. En kolay ve en yaygın demodülasyon yöntemleri  $c(t)$  nin zarfının  $f(t)$  ye benzediği gerçeğini kullanırlar.  $\omega_0 > \omega_m$  olması kuramsal bir kısıtlama olmamakla birlikte, bu modülasyon türünün kullanılabilirliğini doğrudan etkileyen bir koşuldur. Uygulamadaki birçok durum da, bilgi işareti  $f(t)$  nin en yüksek frekansı taşıyıcı frekansı olarak kullanılan frekanslardan çok küçüktür. Burada bu koşul herhangi bir çaba harcamadan sağlanmış olur.

(4.3)'de köşeli parantez içindeki  $1$  terimi taşıyıcıyı gösterir.  $A$  değişmez bu taşıyıcının genliğidir ve  $A$ 'nın değeri üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. (4.2)'de var olan  $\emptyset$  evresi (4.3)'deki ifadede sıfır alınmıştır. Zaman başlangıcı istenildiği gibi seçilebileceği için, bu varsayım sonucu ortaya herhangi bir sorun çıkmaz.  $m$  değişmez ise modülasyon derecesi olarak adlandırılır. Modülasyon derecesinin tanımı ve  $m$  üzerindeki kısıtlamalar aşağıda verilmiştir.

Taşıyıcılı genlik modülasyonunda en önemli kısıtlama bütün  $t$  değerleri için  $[1 + mf(t)] > 0$  olmasıdır. Bu koşul sağlandığında modüle edilmiş işaretin zarfı, modüle eden  $f(t)$  işaretine benzer, yalnız büyüklüğü değişiktir. Şekil 4.2'de gösterildiği gibi, herhangi bir anda



Şekil 4.2 Aşırı modüle edilmiş GM dalgabiciimi

$[1 + mf(t)]$  negatif olursa zarf bozulmaya uğrar. Bu da kırımsal bir kısıtlama değildir. Ancak en kolay ve en yaygın demodülasyon yöntemlerinin kullanılabilmesi için, bu koşulun sağlanması gerekir. Bu koşul sağlanmadığında, taşıyıcılı genlik modülasyonunun kullanılabilirliği yok olur. Bu nedenle taşıyıcılı genlik modülasyonunda bütün  $t$  değerleri için  $[1 + mf(t)]$  nin eksi olmaması gerekir. Bu kısıtlama için bütün  $t$  değerlerinde  $|mf(t)| \leq 1$  olması yeterli bir koşuldur.

Eğer bilgi işareti  $f(t)$  nin zaman ortalaması sıfır ve büyüklüğünün en büyük değeri bir ise, yani

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{ve} \quad \text{maks } |f(t)| = 1; \quad (4.4)$$

ise zarfın bozulmaması için gereken koşul  $m \leq 1$  olması ile eşdeğerdir. Bilgi işareti  $f(t)$ , (4.4)'de verilen koşulları sağlıyor ise, değişmez  $m$  değiştiren modülasyon derecesi olarak tanımlanır. Bu nedenle zarfın bozulmaması için modülasyon derecesinin bire eşit ya da birden küçük olması gerekir. Kimi kez  $m$  değişmezi 100 ile çarpılarak modülasyon derecesi yüzde olarak belirtilir. Örneğin  $m = 0.75$  için dalgabiciimi %75 modüle edilmiş denir.  $m > 1$  (%100 modülasyondan daha büyük) olduğunda ortaya çıkan durum ise aşırı-modülasyon olarak adlandırılır.

Bu anda akla şu soru gelebilir: Bilgi işareti  $f(t)$  (4.4) de verilen koşulları sağlamazsa modülasyon derecesi nasıl tanımlanır? Bu durumda yapılan tanım aşağıda verilmiştir. Genliği modüle edilmiş dalgabiciimi şöyle olsun.

...  $c(t) = A [1 + k f(t)] \cos \omega_0 t$  (4.5)  
 ... Burada  $f'(t)$  bilgi işaretidir ve bütün  $t$  değerleri için  $|k f'(t)| < 1$  koşulu sağlanır. Genel olarak  $f'(t)$  (4.4)'de verilen koşulları sağlamayabilir ve bu nedenle  $f'(t)$  modülasyon derecesi olması gerekmez.

Kolay bir dönüşüm ile  $f'(t)$  bilgi işaretini

$$f'(t) = a + b f(t) \quad (4.6)$$

olarak ifade etmek olasıdır. Burada  $a$  ile  $b$  değişmez sayılardır ve  $f(t)$  (4.4)'ü sağlar.  $a$  ve  $b$  değişmezleri çok kolayca bulunabilir.  $f'(t)$  nin ortalama değeri  $a$ 'dır ve  $f'(t)$  nin ortalama değeri olan  $a$  ya göre en büyük değişimi ise  $b$  dir. (4.6)'daki eşitlik (4.5)'de yerine konur ve düzenlenirse modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımı şöyle ifade edilebilir.

$$c(t) = A (1 + ka) \left[ 1 + \frac{kb}{1 + ka} f(t) \right] \cos \omega_0 t \quad (4.7)$$

$A'(1 + ka) = A$  ve  $\frac{ka}{1 + ka} = m$  olarak tanımlanırsa,  $c(t)$  dalgabıçımı

$$c(t) = A [1 + m f(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.8)$$

ile ifade edilebilir. Burada  $f(t)$  (4.4)'ü sağlar.  $\frac{kb}{1 + ka}$  ya eşit olan  $m$  değişmezi ise (4.5)'de verilen modüle edilmiş dalgabıçımının modülasyon derecesidir. Buna göre modüle edilmiş dalgabıçımını her zaman (4.8)'deki biçime indirmek ve modülasyon derecesini belirlemek olasıdır.

**Örnek 4.1. Modüle edilmiş dalgabıçımı**

$$c(t) = 2 \left[ 1 + \frac{1}{2} f'(t) \right] \cos \omega_0 t \quad (4.9)$$

olarak verildiğinde, Şekil 4.3'de gösterilen dalgabıçımleri için modülasyon derecelerini bulunuz.

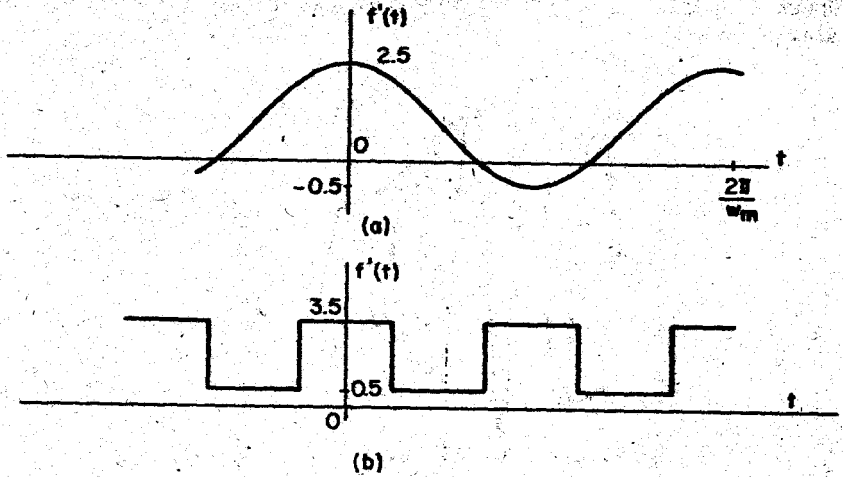
Birinci durumda  $f'(t)$  şu biçimde gösterilebilir.

$$f'(t) = 2 + \frac{1}{2} f(t)$$

Burada (4.4)'ü sağları. Buna göre  $a = 2$ ,  $b = \frac{1}{2}$  dir ve buna göre modülasyon derecesi  $\frac{1}{4}$  dir.

Birinci durumda  $f'(t)$  şu biçimde gösterilebilir.

$$f'(t) = 2 + \frac{3}{2} f(t)$$



Şekil 4.3. İki bilgi işareti

ve  $f(t)$  (4.4) ü sağlar. Buradan  $a = 2$ ,  $b = \frac{3}{2}$  ve modülasyon derecesi  $m = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot 2} = \frac{9}{16}$  bulunur.

Modüle edilmiş dalgabıçımı, bu dalgabıçımının yalnız çizimsel gösterimine bakılarak da, standard biçimde ifade edilebilir.  $f(t)$  işareti (4.4) ü sağladığında, yani  $f(t)$  normalize edildiğinde,

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \max_t c(t) = A + mA \\ C_{\min} &= \min_t c(t) = A - mA \end{aligned} \quad (4.10)$$

Çizimsel gösterimden  $C_{\max}$  ve  $C_{\min}$  değerleri saptanabilir ve  $m$  ve  $A$  değişmezleri şu biçimde hesaplanabilir.

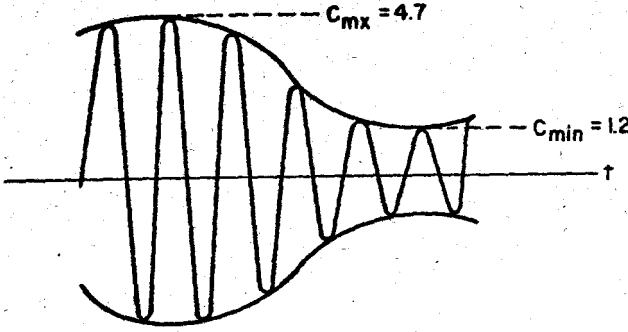
$$\begin{aligned} \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\max} + C_{\min}} &= \frac{A + mA - A - mA}{A + mA + A - mA} = \frac{2mA}{2A} = m \\ \frac{C_{\max} + C_{\min}}{2} &= \frac{A + mA + A - mA}{2} = A \end{aligned} \quad (4.11)$$

Buna göre modüle edilmiş dalgabıçımı

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_o t \quad (4.12)$$

biçiminde ifade edilebilir ve burada  $f(t)$  bilgi işaretinin normalize edilmiş durumudur.

Örnek 4.2. Şekil 4.4'de verilmiş olan dalgabıçımının modülasyon derecesini bulunuz.



Şekil 4.4 Genliği modüle edilmiş dalgabıçımı

$$m = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\max} + C_{\min}} = \frac{4.7 - 1.2}{4.7 + 1.2} = 0.59$$

Genliği modüle edilmiş bir dalgabıçımı standart biçimde ifade edildiğinde,  $f(t)$  işareti bilgi işaretinin normalize edilmişidir ve eğer bilgi işareti normalize edilmiş durumda değilse (yani (4.4)'ü sağlamıyor ise)  $f(t)$  işareti bilgi işaretine eşit değildir.

Modülasyon derecesi üzerine yapılan bu tartışmayı bir gözlemle bitirelim. Modülasyon derecesi ne tek başına genlik modüle edicinin bir değiştirgeni, ne de tek başına modüle eden işaretin bir değiştirgenidir. Bu, modüle edilmiş  $c(t)$  işaretinin bir değiştirgenidir. Genlik modüle edici düzen değiştirilmeden, modüle eden işaret (bunun ortalaması, en büyük ya da en küçük değerleri) değiştirildiğinde modülasyon derecesi de buna uygun olarak değişir. Eğer modüle eden işaret  $\cos \omega t$  gibi tek bir sinüzoidal ise, (4.5)'deki  $k$  modülatör değiştirgeni modülasyon derecesine eşit olur. Bunun nedeni, genliği bir olan bir sinüzoidalın normalize edilmiş biçimde olmasıdır. Kimi kez modüle eden işaret belirtilmeden de modülasyon derecesi belirtilir ya da belirtilmek istenir; bu durumda modüle eden işaret genliği bir olan tek bir sinüzoidal varsayılır.

### Genliği Modüle Edilmiş Dalgabıçımlarının Frekans Görünüşü

Herhangi bir  $f(t)$  işareti için

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.13)$$

dalgabıçımının frekans görünüşünü bulalım. Ancak daha önce bazı özel modüle edici işaretler için  $c(t)$  nin görünüşünün saptanması yararlıdır.



Örnek 4.3.  $f(t) = \cos \omega_m t$  için  $c(t)$  nin görünüşünü bulalım. Modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabitiğini şöyle ifade edilebilir.

$$c(t) = A [1 + m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t$$

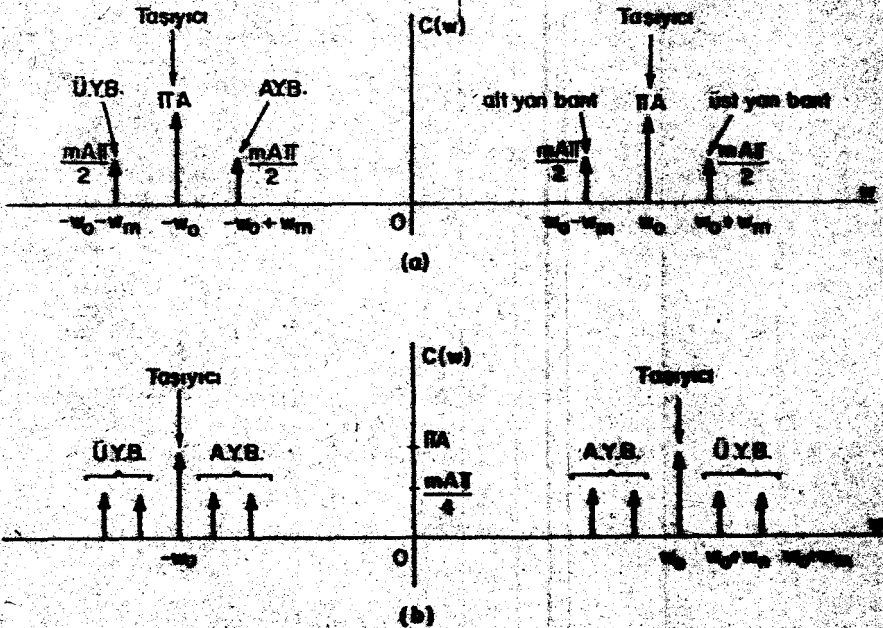
$$= A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t$$

Her terimin Fourier dönüşümü alınarak bunun frekans görünüşü bulunabilir.  $c(t)$  nin frekans görünüşü  $C(\omega)$  ise;

$$C(\omega) = A \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{mA \cdot \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_m)] + \frac{mA \cdot \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0 + \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_m)]$$

$C(\omega)$  görünüşü Şekil 4.5a'da çizilmiştir.  $\omega = \omega_0$  ve  $\omega = -\omega_0$  daki dürtüler taşıyıcıyı gösterir. Görünüşün geri kalan kısmı yanbantlar olarak adlandırılır. Görünüşün  $\omega > \omega_0$  ve  $\omega < -\omega_0$  bölgesinde olan bileşenler üst yanbant olarak adlandırılır.  $0 < \omega < \omega_0$  ile  $-\omega_0 < \omega < 0$  bölgesinde olan bileşenler ise alt yanbant olarak adlandırılır. Bu durumda üst yanbant  $\omega = \omega_0 + \omega_m$  ve  $\omega = -\omega_0 - \omega_m$  daki dürtülerden oluşur, alt yanbant ise  $\omega = \omega_0 - \omega_m$  ve  $\omega = -\omega_0 + \omega_m$  daki dürtülerden oluşur.

Genliği modüle edilmiş herhangi bir dalgabitiğinin görünüşü taşıyıcı ile alt ve üst yanbantlardan oluşur.



Şekil 4.5 Genliği modüle edilmiş bazı dalgabitiğinin frekans görünüşleri

Örnek 4.4. Modüle eden  $f(t)$  işareti

$$f(t) = \frac{1}{2} \cos \omega_m t + \frac{1}{2} \cos \omega_n t$$

olarak verildiğinde genliği modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımının görüncesini bulalım.  $f(t)$  işareti  $c(t)$  de yerine konur ve düzenlenirse

$$c(t) = A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{4} \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{mA}{4} \cos(\omega_0 - \omega_m)t \\ + \frac{mA}{4} \cos(\omega_0 + \omega_n)t + \frac{mA}{4} \cos(\omega_0 - \omega_n)t$$

elde edilir. Buradan  $c(t)$  nin frekans görüncesi

$$C(\omega) = A\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{mA\pi}{4} [\delta(\omega - \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_m)] \\ + \frac{mA\pi}{4} [\delta(\omega - \omega_0 + \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_m)] + \frac{mA\pi}{4} [\delta(\omega - \omega_0 - \omega_n) \\ + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_n)] + \frac{mA\pi}{4} [\delta(\omega - \omega_0 + \omega_n) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_n)]$$

$C(\omega)$  nin çizimi Şekil 4.5b'de verilmiştir.

Bu örneklerden sonra modüle eden herhangi bir  $f(t)$  işareti için, genliği modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımının görüncesini bulalım. Modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımı şöyle ifade edilebilir.

$$c(t) = A \cos \omega_0 t + mA f(t) \cos \omega_0 t \quad (4.14)$$

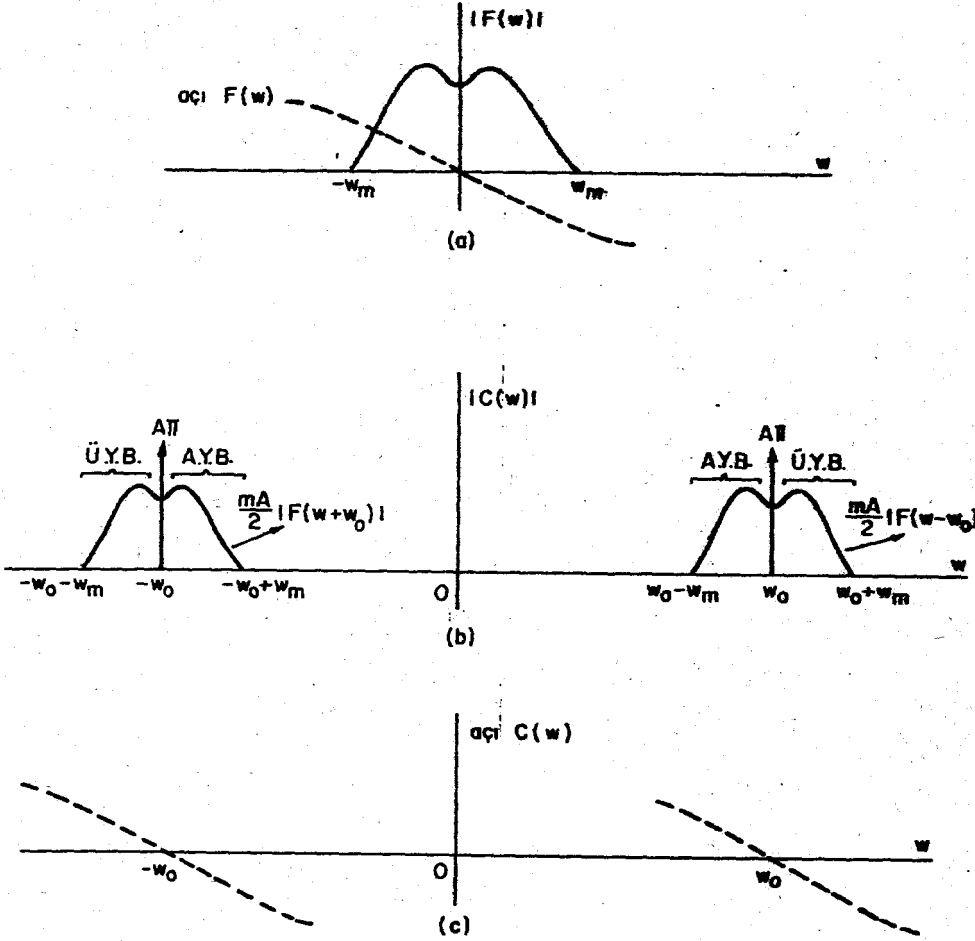
taşıyıcı      yanbantlar

Bunun Fourier dönüşümü alınarak  $c(t)$  nin görüncesi bulunur.

$$C(\omega) = A\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ + mA \frac{1}{2\pi} \{F(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\} \\ = A\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{mA}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (4.15)$$

Böylece genliği modüle edilmiş dalgabıçımının görüncesi bilgi işaretinin görüncesine bağlı olarak bulunmuş olur. Herhangi bir  $f(t)$  ile buna karşı gelen  $c(t)$  nin büyüklük görünceleri Şekil 4.6a ve b'de verilmiştir.

Genlik modülasyonunun etkisinin,  $f(t)$  işaretinin görüncesini  $\omega_0$  taşıyıcı frekansına ve  $-\omega_0$  a aktarmak olduğuna dikkat ediniz. Yalnız artı frekanslar düşünüldüğünde, görüncü  $\omega = \omega_0$  daki taşıyıcı ile  $\omega_0$  dan büyük frekanslardaki üst yanbant ve  $\omega_0$  dan küçük frekanslardaki alt yanbanttan oluşur. Eksi frekanslarda görüncü  $\omega = -\omega_0$  daki taşıyıcı ile



Şekil 4.6 Bilgi işareti ve modüle edilmiş dalgabüçümünün görümleri

$-\omega_0$  dan büyük frekanslardaki alt yanbant ve  $-\omega_0$  dan küçük frekanslardaki üst yanbanttan oluşur.  $c(t)$  gerçel olduğu için,  $\omega = 0$  a göre,  $C(\omega)$  nin büyüklüğü çift, evresi de tek simetriktir.

$f(t)$  gerçel olduğu için,  $\omega = 0$  a göre,  $F(\omega)$  nin büyüklüğü çift, evresi ise tek simetriktir.  $C(\omega)$  ise  $F(\omega)$  nin  $\omega = \omega_0$  ve  $\omega = -\omega_0$  e taşınmış durumu ve taşıyıcı olduğuna göre, ( $\omega_0 > \omega_m$  iken) artı frekanslar için  $\omega = \omega_0$  a göre  $C(\omega)$  nin büyüklüğü çift evresi ise tek simetriktir. Aynı biçimde negatif frekanslar için de  $\omega = -\omega_0$  a göre  $C(\omega)$  nin büyüklüğü çift, evresi de tek simetriktir. Özetlersek gerçel  $f(t)$  için  $|C(\omega)|$  hem  $\omega = 0$  e göre, hem  $\omega > 0$  için  $\omega = \omega_0$  a göre, hem de  $\omega < 0$  için

$F(\omega)$  de sonsuza kadar uzanan frekans bileşenleri olduğundan,  $F(\omega - \omega_0)$  dan eksi frekanslara,  $F(\omega + \omega_0)$  dan da artı frekanslara bir taşma olur. Bu göz önüne alınması gereken bir noktadır, ancak bu örnekte bu taşma ihmal edilecek kadar küçüktür. ( $n \geq 17$  için  $2\pi C_n$  dolaylarında). Bu nedenle bunlar Şekil 4.8'de verilen çizime katılmamıştır.

Eğer bu taşma göz önüne alınır ve  $C(\omega)$  tam olarak hesaplanmak istenirse  $\omega = \mp(\omega_0 + n \frac{2\pi}{T})$  frekansındaki dürtülerin şiddetleri  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_n + c_{32} + n]$  dir. Örneğin

$$\begin{aligned} \omega = \mp(\omega_0 + \frac{2\pi}{T}); \frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_1 + c_{33}] &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi [\frac{2}{\pi} + \frac{2}{33\pi}] \\ &= 1 + \frac{1}{33} = 1.03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = \mp(\omega_0 - \frac{2\pi}{T}); \frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_{-1} + c_{31}] &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi [\frac{2}{\pi} - \frac{2}{31\pi}] \\ &= 1 - \frac{1}{31} = 0.968 \end{aligned}$$

#### Genliği Modüle Edilmiş Dalgabıçımlerinde Güç

Genliği modüle edilmiş

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.16)$$

dalgabıçımının güç görünge yoğunluğu,

$$g(t) = A [1 + mf(t)] \quad (4.17)$$

nin güç görünge yoğunluğuna bağlı olarak hesaplanabilir. (4.16) ve (4.17)'den  $c(t) = g(t) \cos \omega_0 t$  elde edilir. Buna göre bir önceki bölümde elde edildiği gibi  $c(t)$  nin güç görünge yoğunluğu şöyle ifade edilebilir.

$$S_c(\omega) = \frac{1}{4} [S_g(\omega - \omega_0) + S_g(\omega + \omega_0)] \quad (4.18)$$

Burada  $g(t)$  deki en yüksek frekansın  $\omega_0$ 'dan daha küçük olduğu varsayılmıştır.

$g(t)$  nin güç görünge yoğunluğu  $S_g(\omega)$  ise bir önceki bölümde yapılan tanım kullanılarak hesaplanabilir.  $g(t)$  dönemli bir işlev ise,  $g(t)$  de dönemli bir işlevdir. Bir önceki bölümde belirtildiği gibi, dönemli bir işlevin güç görünge yoğunluğu bunun Fourier serisi gösterimi kullanılarak bulunabilir. Modüle edilmiş işaretin herhangi bir frekans bandında yoğunlaşmış gücü ise güç görünge yoğunluğunun bu bant üzerinde tümlevi alınarak bulunur. Herhangi bir  $f(t)$  nin gücü üzerine yaptığımız bu tartışmayı burada bitirebiliriz.

$$C(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{4} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

Bu önemli kare dalga  $f(t)$  nin görünüşü, bunun Fourier serisi gösterimi kullanılarak bulunabilir.

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T})$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

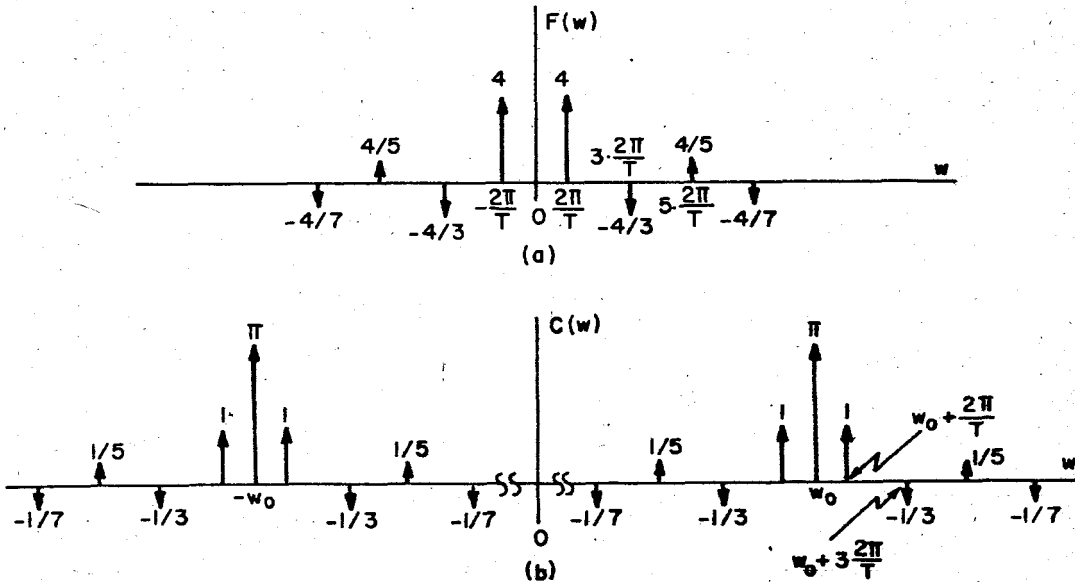
$$c_n = 0 \quad n \text{ çift tamsayı}$$

$$c_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad n \text{ tek tamsayı}$$

Buna göre

$$C(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - \omega_0 - n \frac{2\pi}{T}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega + \omega_0 - n \frac{2\pi}{T}) \right]$$

Şekil 4.8'de  $F(\omega)$  ve  $C(\omega)$  nin çizimleri verilmiştir.



Şekil 4.8  $F(\omega)$  ve  $C(\omega)$  nin görünüşleri

$F(\omega)$  de sonsuza kadar uzanan frekans bileşenleri olduğundan,  $F(\omega - \omega_0)$  dan eksik frekanslara,  $F(\omega + \omega_0)$  dan da artı frekanslara bir taşma olur. Bu göz önüne alınması gereken bir noktadır, ancak bu örnekte bu taşma ihmal edilecek kadar küçüktür. ( $n \geq 17$  için  $2\pi C_n$  dolaylarında). Bu nedenle bunlar Şekil 4.8'de verilen çizime katılmamıştır.

Eğer bu taşma göz önüne alınır ve  $C(\omega)$  tam olarak hesaplanmak istenirse  $\omega = \mp(\omega_0 + n \frac{2\pi}{T})$  frekansındaki dürtülerin şiddetleri  $\frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_n + c_{32+n}]$  dir. Örneğin

$$\begin{aligned} \omega = \mp(\omega_0 + \frac{2\pi}{T}); \frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_1 + c_{33}] &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \left[ \frac{2}{\pi} + \frac{2}{33\pi} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{33} = 1.03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = \mp(\omega_0 - \frac{2\pi}{T}); \frac{1}{4} \cdot 2\pi [c_{-1} + c_{31}] &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{2}{31\pi} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{31} = 0.968 \end{aligned}$$

#### Genliği Modüle Edilmiş Dalgabıçımalarında Güç

Genliği modüle edilmiş

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.16)$$

dalgabıçımının güç görünüşüne yoğunluğu,

$$g(t) = A [1 + mf(t)] \quad (4.17)$$

nin güç görünüşüne yoğunluğuna bağlı olarak hesaplanabilir. (4.16) ve (4.17)'den  $c(t) = g(t) \cos \omega_0 t$  elde edilir. Buna göre bir önceki bölümde elde edildiği gibi  $c(t)$  nin güç görünüşüne yoğunluğu şöyle ifade edilebilir.

$$S_c(\omega) = \frac{1}{4} [S_g(\omega - \omega_0) + S_g(\omega + \omega_0)] \quad (4.18)$$

Burada  $g(t)$  deki en yüksek frekansın  $\omega_0$ 'dan daha küçük olduğu varsayılmıştır.

$g(t)$  nin güç görünüşüne yoğunluğu  $S_g(\omega)$  ise bir önceki bölümde yapılan tanım kullanılarak hesaplanabilir.  $g(t)$  dönemli bir işlev ise,  $g(t)$  de dönemli bir işlevidir. Bir önceki bölümde belirtildiği gibi, dönemli bir işlevin güç görünüşüne yoğunluğu bunun Fourier serisi gösterimi kullanılarak bulunabilir. Modüle edilmiş işaretin herhangi bir frekans bandında yoğunlaşmış gücü ise güç görünüşüne yoğunluğunun bu bant üzerinde tümleli alınarak bulunur. Herhangi bir  $f(t)$  nin gücü üzerine yaptığımız bu tartışmayı burada bitirebiliriz.

Bu bölümde bulunan sonuçlardan anlaşılacağı gibi, genliği modüle edilmiş dalgabıçımının bilgi taşıyan kısmı yanbantlardır. Taşıyıcı tek başına herhangi bir bilgi içermez. Bu nedenle bilgi taşıyan yanbantların gücü ile taşıyıcı gücü arasındaki oranı incelemek yararlıdır. Bu oranı rastgele  $f(t)$  ler için saptayamayız, ancak bazı özel  $f(t)$ 'ler için hesaplayabiliriz. Daha sonra elde edilen bu sonuçlar kullanılarak, toplam gücün yanbantlarla taşıyıcı arasında nasıl bölündüğü üzerinde genel bir sonuç çıkarılabilir.

Bilgi işaretini bir sinüzoidal olarak varsayalım.

$$f(t) = \cos \omega_m t \quad (4.19)$$

Buna göre modüle edilmiş dalgabıçımı

$$c(t) = A \cos \omega_o t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_o - \omega_m)t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_o + \omega_m)t \quad (4.20)$$

Bu işaretin toplam gücü, bunun zaman ortalaması alınarak bulunur.

$$P_T = \frac{A^2}{2} + \left(\frac{mA}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{mA}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \quad (4.21)$$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{2}} + \underbrace{\frac{m^2 A^2}{4}}$$

Taşıyıcı- Yanbantlar-  
nın gücü daki güç

Buradan şu gözlemleri yapabiliriz:

1. Modülasyon derecesi  $m$  arttırıldıkça GM dalgabıçımının gücü artar.  $m = 0$  için modüle edilmemiş taşıyıcının gücü  $A^2/2$  dir.  $m = 1$  için ise dalgabıçımının toplam gücü

$$\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4} \text{ olur.}$$

2. Yanbantlardaki gücün taşıyıcı gücüne oranı

$$\frac{P_v}{P_t} = \frac{\frac{m^2 A^2}{4}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{m^2}{2} \quad (4.22)$$

3. Yanbantlardaki gücün toplam güce oranı,

$$\frac{P_v}{P_T} = \frac{\frac{m^2 A^2}{4}}{\frac{A^2}{2} + \frac{m^2 A^2}{4}} = \frac{m^2}{2 + m^2} \quad (4.23)$$

Bu çarpımı elde etmenin çeşitli yolları vardır. Gerçekte GM dalga biçiminin üretimi bu çarpmanın gerçekleştirilmesinden başka bir şey değildir. Burada kuramsal olarak kolay, ancak uygulamada o kadar kolay olmayan doğrudan çarpma işlemi incelenmektedir. Bu çarpımı dolaylı bir biçimde elde etmenin yolları ve çözümlemesi ileride incelenecektir.

Çeşitli GM modülatörleri incelenirken zaman bölgesi ve frekans bölgesi çözümlenmeleri ayrı ayrı yapılacaktır. (4.30)'da verilen çarpma frekans bölgesinde katlanmaya karşı gelir. Yani

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot [V_1(\omega) * V_2(\omega)] \quad (4.31)$$

Burada

$$V_1(\omega) = A 2\pi \cdot \delta(\omega) + mAF(\omega) \quad (4.32)$$

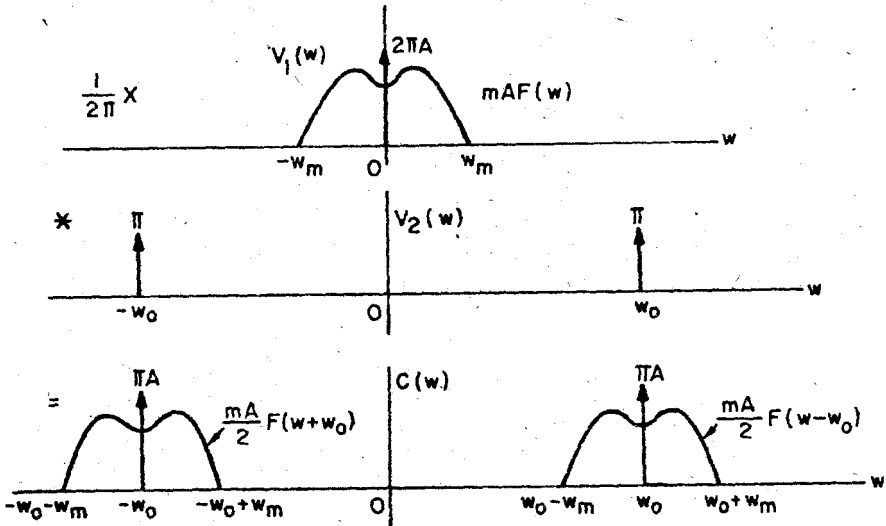
ve

$$V_2(\omega) = \pi [ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) ]$$

Katlanma işlemi yapılırsa

$$C(\omega) = A\pi [ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) ] + \frac{mA}{2} [ F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) ] \quad (4.33)$$

bulunur. Bu beklenen bir sonuçtur. Katlanma işlemi Şekil 4.10'da verilmiştir.



Şekil 4.10  $V_1(\omega)$  ve  $V_2(\omega)$  nin katlanması



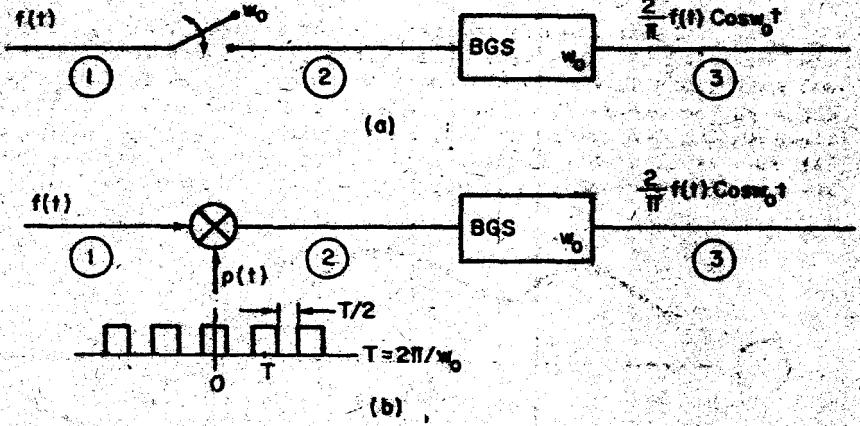
## Kıyıcı Modülasyonu

(4.29) da verilen ve üretilmesi istenen GM dalgabıçını şöyle de yazılabilir.

$$c(t) = A \cos \omega_0 t + mA f(t) \cos \omega_0 t \quad (4.34)$$

Buna göre  $f(t) \cos \omega_0 t$  teriminin üretilmesi yeterlidir. Taşıyıcı sora eklenebilir.

$f(t) \cos \omega_0 t$  yi üretmek için Şekil 4.11a'da gösterilen modülâtörü önerebiliriz.  $f(t)$  işareti bir anahtar yardımıyla nöbetleğe kısa devre edilir ve topraklanır. Sonuçta elde edilen işaret bir bant geçiren süzgeçten (BGS) geçirilir. Burada kullanılan anahtar mekanik bir anahtar olabileceği gibi elektriksel de olabilir. Bant geçiren süzgeç  $\omega_0$  a oturulmuştur ve süzgeç bantgenişliği en az  $f(t)$  daki en yüksek frekansın iki katı olmalıdır. Bu modülâtörün eşdeğer gösterimi Şekil 4.11b'de verilmiştir.



Şekil 4.11 Bir kıyıcı modülâtörün öbek çizimi

## Zaman Bölgesi Çözümlemesi:

Şekil 4.11 de verilen kıyıcı modülâtörün öbek çiziminin çeşitli noktalarında işareti çözümleyelim. 1 noktasında modüle eden  $f(t)$  işareti vardır. 2 noktasında ise  $f(t)$  ve genliği bir, dönemi  $T = 2\pi/\omega_0$  olan döneli vurum treni  $p(t)$  nin çarpımı, yani  $f(t) \cdot p(t)$ , vardır.  $p(t)$  nin Fourier serisi gösterimi kullanılarak bu çarpım şu biçimde gösterilebilir.

$$\begin{aligned} f(t) \cdot p(t) &= f(t) \cdot \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n \frac{2\pi}{T} t \right] \\ &= \frac{1}{2} f(t) + \frac{2}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t - \frac{2}{3\pi} f(t) \cos 3\omega_0 t + \dots \quad (4.35) \end{aligned}$$

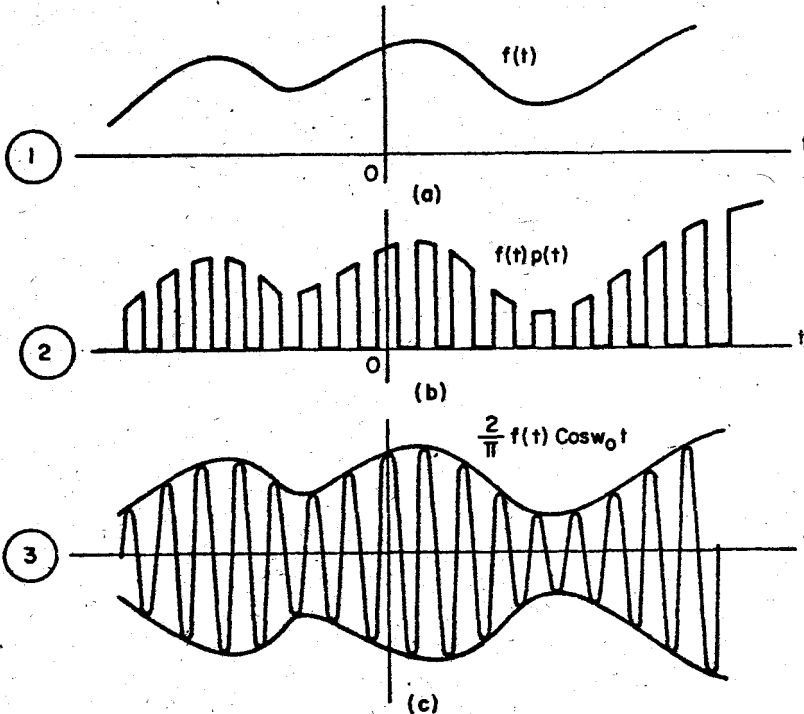
$\omega_0$  a oturtulmuş bantgeçiren süzgeç yalnız ikinci terimi geçirir ve diğerlerini tümüyle söndürür. Buna göre 3 noktasında

$$\frac{2}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t \quad (4.36)$$

işareti vardır. 1, 2 ve 3 noktalarındaki işaret Şekil 4.12'de çizilmiştir.

Yalnız ikinci terimin geçmesi ve bunun bozulmaya uğramaması için bazı koşullar sağlanmalıdır. Önce  $\omega_0$  frekansı  $f(t)$  deki en yüksek  $\omega_m$  frekansının en az iki katı olmalıdır, yani  $\omega_0 > 2\omega_m$  dir. Bu koşul sağlandığında (4.35) deki birinci ve ikinci terimlerin görüngeleri çakışmaz. Eğer bu koşul sağlanmazsa birinci ve ikinci terimlerin görüngeleri çakışır ve bir bant geçiren süzgeç yardımıyla  $\frac{2}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t$  yi elde etmek olanaksızlaşır. İkinci koşul ise  $\omega_0$  daki bant geçiren süzgecin bant genişliği ile ilgilidir. Süzgeç yalnız ikinci terimi geçirmeli ve diğerlerini tümüyle söndürmelidir. Süzgeç bant genişliği en az  $2\omega_m$  ve en çok  $2(\omega_0 - \omega_m)$  olmalıdır. Kabaca bant genişliği  $\omega_0$  olabilir.

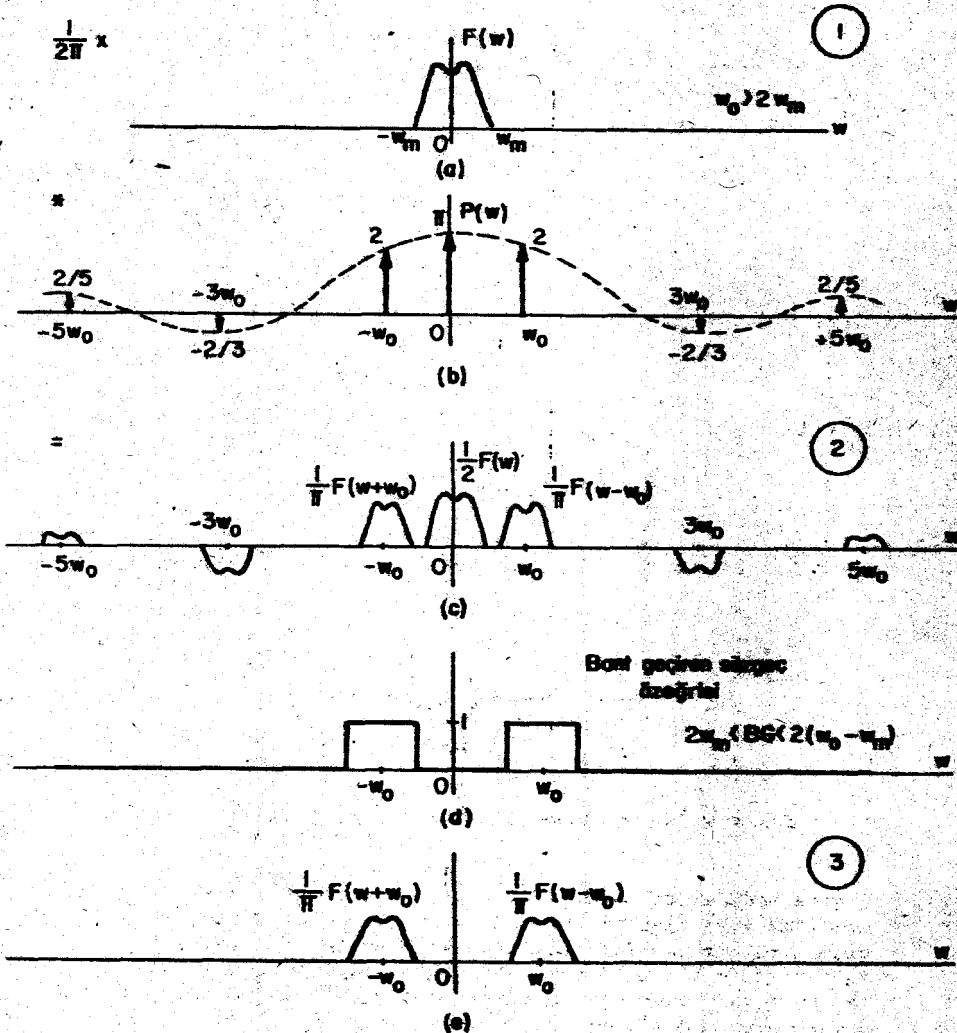
$\omega_0$  frekansı  $2\omega_m$  den çok fazla büyük olmazsa, bant geçiren süzgeç üzerindeki kısıtlamalar daha sıkılaşır. İstenilen terimin bozulmadan geçmesi ve temel bant işaret ile üçüncü harmoniğin tamamıyla yok edilmesi gereklidir. Bu nedenle süzgeç özgeçiriminin düz ve kesim yerlerinin keskin olması gerekir.  $\omega_0$  frekansı  $2\omega_m$  den çok büyük ise, bant geçiren süzgeç üzerindeki bu kısıtlamalar daha esnek olabilir. Bant geçiren süzgeç ve  $\omega_0$  üzerindeki bu koşullar frekans bölgesi çözümülemesi yapıldıktan sonra daha iyi anlaşılacaktır.



Şekil 4.12 Kırılcı modülasyonun üç noktasındaki işaretler

## Frekans Bölgesi Çözülmesi:

2 noktasında  $f(t)$  ile  $p(t)$  nin çarpımı vardır. Bu nedenle 2 deki işaretin görünüşü  $F(\omega)$  ile  $P(\omega)$  nin katlanmasıdır. Şekil 4.13'de  $F(\omega)$ ,  $P(\omega)$  ve bunların katlanmaları çizilmiştir. Bant geçiren süzgecin yalnız  $\omega_0$  çevresindeki görünüşü bozmadan geçirmesi, temel bant işaretini ile üçüncü harmonik ve diğer harmonikleri tümüyle söndürmesi istenir. Şekil 4.13'de bu işi yapan bir bant geçiren süzgecin özgeçirili de verilmiştir. Bant geçiren süzgecin çıktısının görünüşü şöyledir.



Şekil 4.13 Kıyıcı modülatörün frekans bölgesi çözülmesi

$$\frac{1}{\pi} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (4.37)$$

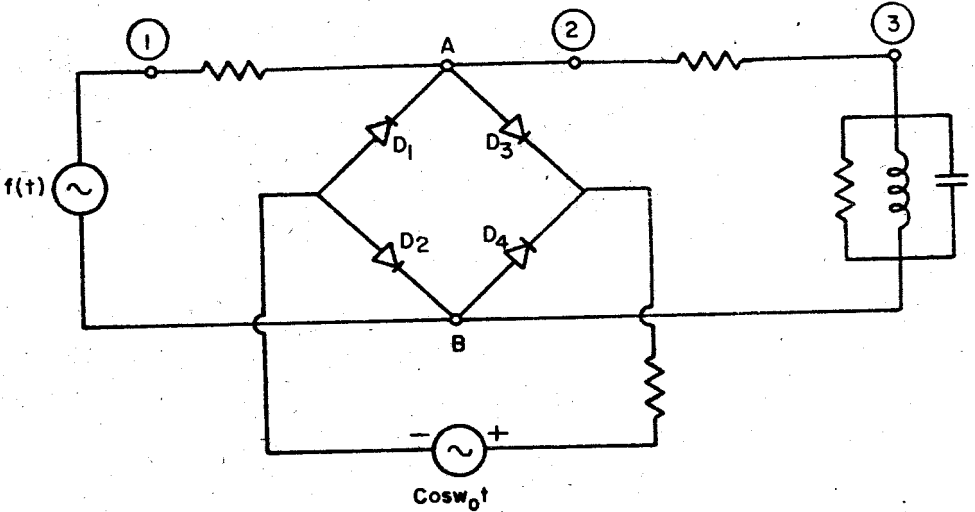
Evrık Fourier dönüşümü alınarak buna karşı gelen zaman işlevi

$$\frac{2}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t \quad (4.38)$$

olarak bulunur.

$\omega > 2\omega_0$  koşulu ile bant geçiren süzgecin bantgenişliği üzerindeki diğer koşullar Şekil 4.13'den görülebilir. Bant geçiren süzgeç düşüncel olmayacağından, (4.38)'de verilen işarette bir ölçüde bozulma olması kaçınılmazdır. Ancak bu düşük düzeylerde tutulabilir.

Şekil 4.11'de öbek çizimi verilen kıyıcı modülatörü, uygulamada Şekil 4.14'deki devre ile gerçekleştirilebilir. Şekil 4.14'deki 1,2 ve 3 noktaları Şekil 4.11'deki aynı noktalara karşı gelir. Şekil 4.14'deki



Şekil 4.14 Uygulamadaki bir kıyıcı modülatörü

kıyıcı modülatörü şu biçimde çalışır.  $\cos \omega_0 t$  nin eksi olduğu yarı dönemlerde dört diyodun hepsi de kısa devredir. Burada  $\cos \omega_0 t \geq f(t)$  varsayımı yapılmıştır. Diyotlar kısa devre olduklarında  $D_1$  diyodu üzerindeki gerilim ile  $D_2$  diyodu üzerindeki gerilim aynıdır ve böylece A ucu ile B toprak ucunun gerilimi aynıdır. Böylece  $\cos \omega_0 t$  eksi olduğundan A ucu toprağa bağlanmış olur ve 2 noktasındaki gerilim sıfır olur.

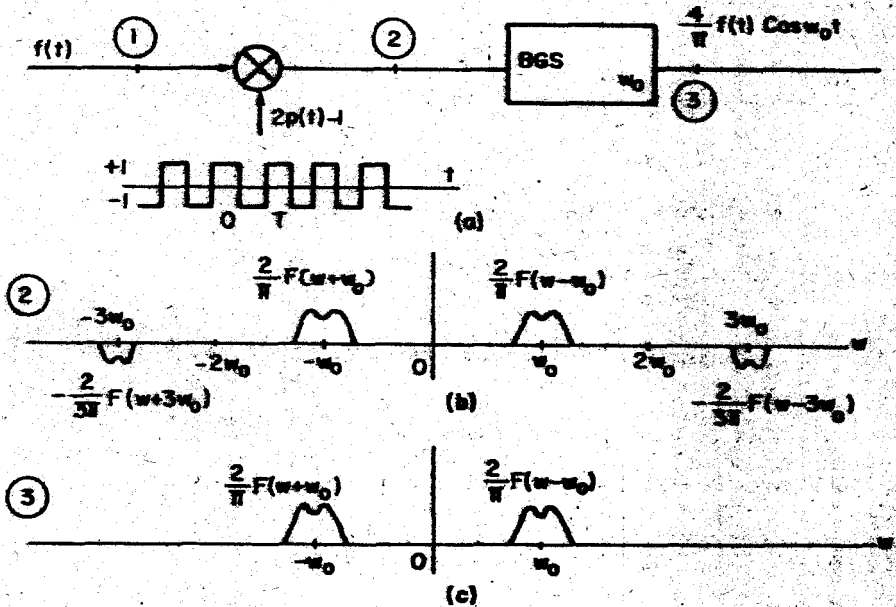
$\cos \omega_0 t$  nin artı olduğu yarı dönemlerde dört diyoda hepsi de açık devredir ve sonuçta 2 noktasındaki gerilim  $f(t)$  ye eşit olur. Buna göre 2 noktasındaki gerilim  $f(t) \cdot p(t)$  dir. Çıkıştaki tank devresi bir bant geçiren süzgeç olarak iş görür. Şekil 4.14'deki kıyıcı modülatörü şönt modülatörü olarak da adlandırılır.

Kıyıcı modülasyonu üzerine yapılan bu tartışmaya hâkimmeden önce kıyıcı modülasyonu ile ilgili şu iki ilginç gözlemi belirteceğiz.  $f(t)$  yi  $p(t)$  ile çarpmak yerine  $[2 p(t)-1]$  ile çarparsak, çıkışında temel bant terimi gözükmez.

$$f(t) [2p(t)-1] = f(t) \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0 t \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t - \frac{4}{3\pi} f(t) \cos 3\omega_0 t + \dots \quad (4.39)$$

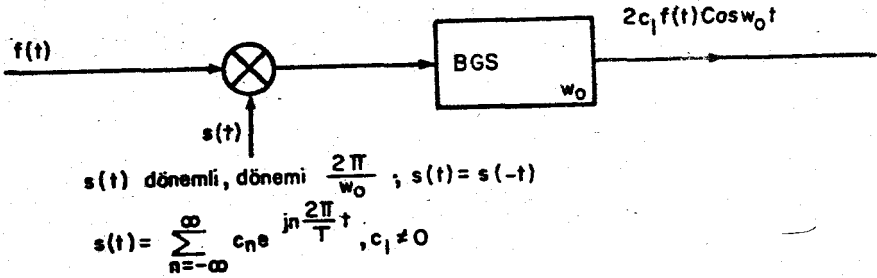
Birinci terim istenilen işaretlerdir ve bant geçiren süzgeçten geçer, diğerleri ise bant geçiren süzgeç tarafından tümüyle söndürülür. Bu değiştirilmiş kıyıcı modülatörünün öbek çizimi ile 2 ve 3 noktalarındaki işaretlerin görüngeleri Şekil 4.15'de verilmiştir.



Şekil 4.15 Değiştirilmiş kıyıcı modülatörü ve çeşitli noktalardaki işaretlerin görüngeleri

Şekil 4.15'den de görülebileceği gibi bu modülatörün üstünlüğü daha önce belirtilen koşulları biraz gevşetme olanağı yaratmasıdır. Örneğin temelbant terimi olmadığından, görüngelerin üst üste çakışmaması için  $\omega_0 > 2\omega_m$  olması gerekmez,  $\omega_0 > \omega_m$  yeterlidir. Temel-bant terimi olmaması nedeni ile  $\omega_0$  daki bant geçiren süzgecin bantgenişliği en çok  $2\omega_0$  olabilir. (0 zaman bu süzgeç kesim frekansı  $2\omega_0$  olan bir alçak geçiren süzgeç olur.) Bant geçiren süzgecin bantgenişliği en az  $2\omega_m$  dir. Modülatörde yapılan bu ufak değişiklik,  $\omega_0$  ve süzgeç bantgenişliği üzerindeki kısıtlamaları biraz azaltma amacını güder. Ancak bu modülatörü gerçekleştirmek, kıyıcı modülatörünü gerçekleştirmek kadar kolay değildir.

Yapılan ikinci gözlem ise  $f(t)$  yi,  $p(t)$  ile çarpmak yerine, dönemi  $2\pi/\omega_0$  olan herhangi bir dönemli  $s(t)$  işlevi ile çarpabilmemizdir.  $s(t)$  dönemli işlevinin birinci harmoniği sıfırdan farklı olmalı, yani  $c_1 \neq 0$ , ve 0 a göre çift simetrik olmalıdır.  $f(t) \cdot s(t)$  nin görüngesi 0,  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$  e aktarılmış  $f(t)$  görüngelerinden oluşur. Bant geçiren süzgeç yalnız  $\omega_0$  çevresindeki görüngeyi geçirir, diğerlerini tümüyle söndürür.  $\omega_0$  çevresindeki görüngenin sıfır olmaması için  $c_1 \neq 0$  koşulu gereklidir.  $\omega_0$  çevresindeki terimin evresi sıfır olan bir kosinüs dalgası olabilmesi için ise çift simetri koşulu aranır. Kıyıcı modülatöründe yapılabilen benzer bir frekans bölgesi çözümlemesi burada da yapılabilir. Ancak burada bu değiştirilmiş kıyıcı modülatörü için daha ayrıntılı bir çözümleme yapılmayacaktır. Şekil 4.16'da bu değiştirilmiş kıyıcı modülatörünün öbek çizimi verilmiştir.



Şekil 4.16 Bir değiştirilmiş kıyıcı modülatörü

Burada da bant geçiren süzgeç  $\omega_0$  a oturtulmuştur ve bantgenişliği üzerindeki koşullar, kıyıcı modülatöründeki koşullarla genel olarak aynıdır. Bu değiştirilmiş kıyıcı modülatöründe karşılaşılan güçlük, daha önce belirttiği gibi, çarpma işleminin yapılmasıdır. Eğer çarpma işlemi kolayca yapılabilsydi,  $f(t)$  yi doğrudan  $\cos \omega_0 t$  ile çarpıp ve bir bantgeçiren süzgeç gereksinmesinden kurtulurduk.

### Doğrusal-Olmayan Aygıt Modülasyonu

GM modülatörlerinin büyük bir çoğunluğu doğrusal olmayan aygıtları kullanır. Sonuçta elde edilen dalgabıçımı bilgi işaretinde olmayan frekansları da içerdiğinden, genlik modülasyonu doğrusal bir işlem değil-

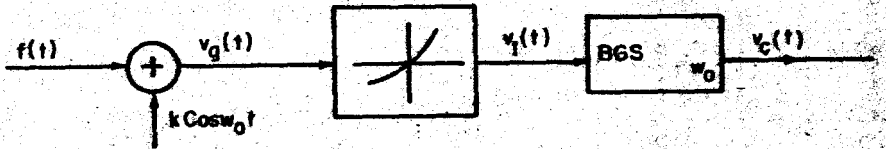
dir. Bu nedenlerle doğrusal olmayan öğeleri içeren devrelerle bu modülasyon gerçekleştirilebilir. Doğrusal olmama özelliği, modülasyon için gerekli mekanizmayı sağlar.

Şekil 4.17'deki modülatörü düşünelim. Doğrusal olmayan  $v_1 = g(v_g)$  özgeğrisinin sürekli olduğunu ve bunun Taylor serisi açılımının şu biçimde olduğunu varsayalım.

$$v_1 = g(v_g) = a_1 v_g + a_2 v_g^2 + a_3 v_g^3 + \text{daha yüksek terimleri} \quad (4.40)$$

üçüncü ve daha yüksek derece terimlerinin sıfır ya da ihmal edilebilir olduklarını kabul edelim. Bu modülatörle GM dalgabıçımının üretilemesinde ikinci derece terimi önemli olan terimdir.

Yukarıda yapılan varsayımlarla doğrusal olmayan aygıtın çıkışındaki işareti şöyle ifade edebiliriz.



Şekil 4.17 Doğrusal olmayan aygıt modülatörü

$$v_1 = a_1 v_g + a_2 v_g^2 \quad (4.41)$$

(4.41)'de  $v_g(t) = f(t) + k \cos \omega_0 t$  yerine konulursa,

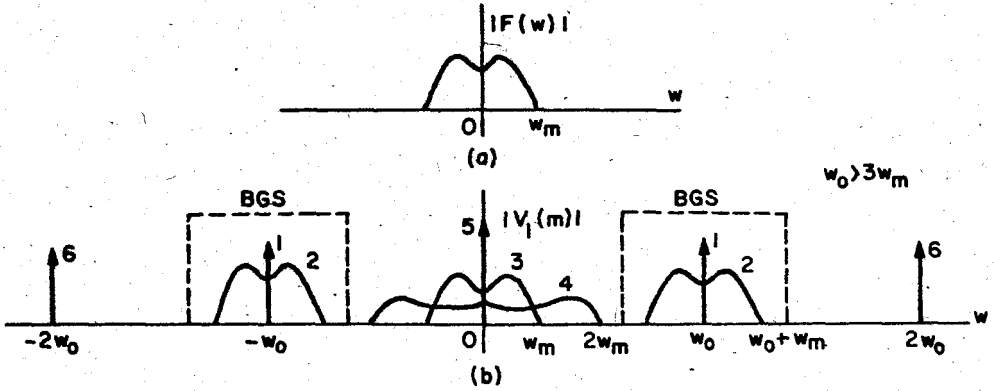
$$\begin{aligned} v_1(t) &= a_1 [f(t) + k \cos \omega_0 t] + a_2 [f(t) + k \cos \omega_0 t]^2 \\ &= a_1 f(t) + a_1 k \cos \omega_0 t + a_2 f^2(t) + \\ &\quad + 2a_2 k f(t) \cos \omega_0 t + a_2 k^2 \cos^2 \omega_0 t \end{aligned} \quad (4.42)$$

Düzenlenirse,

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \underbrace{a_1 k \left[ 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} f(t) \cos \omega_0 t \right]}_{\text{GM dalgabıçımı}} \\ &\quad + \underbrace{a_1 f(t) + a_2 f^2(t) + \frac{a_2 k^2}{2} - \frac{a_2 k^2}{2} \cos 2\omega_0 t}_{\text{İstenilmeyen terimler}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$A = a_1 k$  ve  $m = \frac{2a_2}{a_1}$  kısaltmaları yapılırsa birinci ve ikinci terimlerin istenilen GM dalgabıçımını oluşturduğu görülür. Geri kalan terimler istenilmeyen terimlerdir ve bir bant geçiren süzgeç tarafından tümüyle söndürülür. Böylece süzgecin çıkışında istenilen GM dalgabıçımı elde edilir.

Doğrusal olmayan öge çıkışındaki  $v_1(t)$  işaretinin görünüşü Şekil 4.18'de verilmiştir. (4.43) de verilen ifadedeki terimlere karşı



Şekil 4.18  $v(t)$  nin frekans görünüşü

gelen görüngeler sırasıyla numaralandırılmıştır. Bant geçiren süzgeç üzerindeki koşullar, bu görüme çizimi kullanılarak kolayca saptanabilir. Bant geçiren süzgeç  $\omega_0$  a merkezlenmelidir. İstenilen terimleri geçirmesi için bantgenişliği en az  $2\omega_m$ , dördüncü ile öteki terimlerden kurtulmak için ise bantgenişliği en çok  $2(\omega_0 - 2\omega_m)$  olmalıdır. Şekil 4.18'den görülebileceği gibi 2 ve 4. terimlerin çakışmalarını için  $\omega_0 > 3\omega_m$  olmalıdır. Eğer bu koşul sağlanmazsa  $f(t)\cos \omega_0 t$  ile  $f^2(t)$  nin frekans görüngeleri üst üste biner ve  $f(t)\cos \omega_0 t$  nin bir bant geçiren süzgeç ile çıkarılması olanaksızlaşır.

Üç ve daha yüksek derece terimlerin ihmal edilmesi varsayımı doğru değilse, ortaya bir üçüncü derece terimi

$$a_3 [f(t) + k \cos \omega_0 t]^3 \quad (4.44)$$

çıkar ve bunun açılımını şöyledir:

$$a_3 f^3(t) + 3a_3 k f^2(t) \cos \omega_0 t + 3a_3 k^2 f(t) \cos^2 \omega_0 t + a_3 k^3 \cos^3 \omega_0 t \quad (4.45)$$

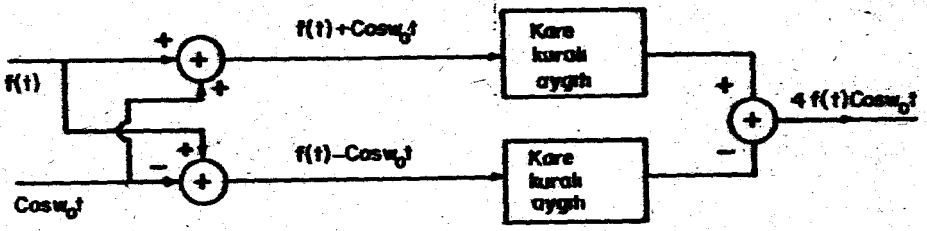
ikinci terimin görünüşü  $\omega_0$  a merkezlenmiş  $F(\omega) * F(\omega)$  bileşenidir. Bu terim olduğunda,  $\omega_0$  a merkezlenmiş bant geçiren süzgeç yalnız  $f(t)\cos \omega_0 t$  yi geçirmez. Bu nedenle üçüncü derece terimi olduğunda bu modülatör istenildiği gibi çalışmaz. Üçüncü derece terimi olduğunda  $2\omega_0$  a merkez-



lenmiş bir bant geçiren süzgecin çıkışından genliği  $f(t)$  ile modüle edilmiş frekansı  $2\omega_0$  olan bir dalgabıçımı alınır. Eğer daha yüksek derece terimleri varsa bunu da elde edemeyiz.

Daha önce de söz edildiği gibi doğrusalsızlığın en önemli terimi ikinci derece terimdir. Özgeçisi yalnız ikinci derece terimini içeren modülatör kare-kuralı modülatörü olarak adlandırılır. Yukarıda gösterildiği gibi doğrusalsızlık rastgele bir doğrusalsızlık değildir. Aşağıda doğrusal-olmayan aygıt modülasyonu üzerine iki örnek daha çözümlenecektir.

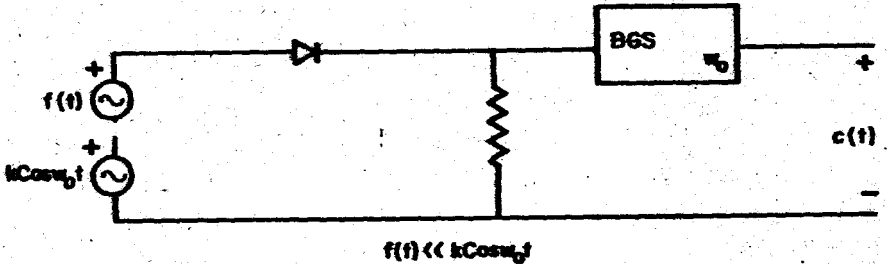
Örnek 4.6. Şekil 4.19'da verilen modülatörü düşünelim. Modülatörün işleyişi Şekil 4.19'da verilen öbek çizimi izlenerek kolayca anlaşılabilir.



Şekil 4.19 Bir tür doğrusal-olmayan aygıt modülatörü

dir. Bu modülatörde, istenilmeyen terimler bant geçiren bir süzgeç kullanmadan yok edilir. Burada kullanılan kare kuralı aygıtların birbirleriyle aynı olması ve tam kare almaları gerekir.

Örnek 4.7. Doğrusal olmayan aygıt modülatörüne başka bir örnek Şekil 4.20'de verilmiştir.  $f(t) \ll k \cos \omega_0 t$  varsayılır. Buna göre diyet yalnız  $k \cos \omega_0 t$ 'nin artı olduğu yarı dönemlerde iletir.



Şekil 4.20 Bir tür doğrusal olmayan aygıt modülatörü

Diyot çıkış akımı şu biçimdedir.

$$[f(t) + k \cos \omega_0 t] \cdot p(t) \quad (4.46)$$

$p(t)$  nin Fourier serisi gösterimi yerine konulursa,

$$\begin{aligned} [f(t) + k \cos \omega_0 t] & \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n \omega_0 t \right] \\ & = \frac{1}{2} f(t) + \frac{2}{\pi} f(t) \cos \omega_0 t - \frac{2}{3\pi} f(t) \cos 3 \omega_0 t + \dots \\ & + \frac{k}{2} \cos \omega_0 t + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos \omega_0 t \cos n \omega_0 t \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\omega_0$  a merkezlenmiş bant geçiren süzgecin çıktısı,

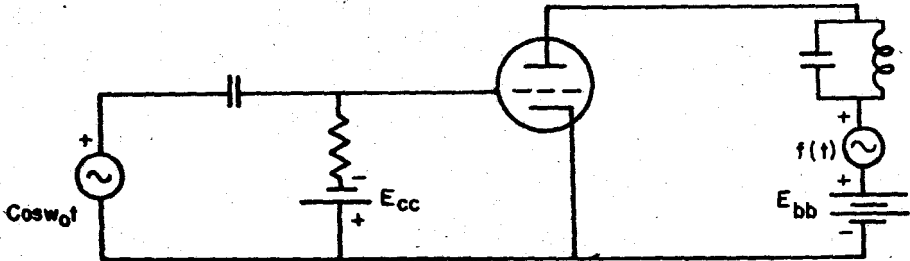
$$\frac{k}{2} \left[ 1 + \frac{4}{k\pi} f(t) \right] \cos \omega_0 t \quad (4.48)$$

olur ve bu istenilen GM dalgabiçimidir.

Bu modülatörde diyot bir kıyıcı olarak kullanılır. Burada yapılan çözümleme kıyıcı modülatöründe yapılan çözümleme ile aynıdır. Ancak bu modülatörün çalışmasında genel ilke diyot özgeçirindeki doğrusalsızlıktır. Bu nedenle, bu modülatör doğrusal olmayan aygıt modülatörü olarak düşünülebilir.

#### Doğrudan Akortlu Devre Modülasyonu

Bu modülasyon yöntemi yüksek güç düzeylerinde genliği modüle edilmiş dalgabiçimi üretmek için kullanılır. Modülatör, triyot plakasından modülasyon verilen, bir C sınıfı yükselteçtir. Doğrudan akortlu devre modülatörü olarak adlandırılan modülatörün devresi Şekil 4.21'de verilmiştir.



Şekil 4.21 GM modülatörü olarak kullanılan ve plakasından modülasyon verilen bir C-sınıfı yükselteç

E çok büyük bir eksi gerilim ise tüp normal olarak iletmez. Taşıyıcının tepe değerlerinde tüp akım geçirir. Buna göre çıktı yani plaka akımı,  $\cos \omega_0 t$  nin tepe değerlerini gösteren bir dizi vuruumdur. Bir başka deyişle plaka akımı, frekansı  $\omega_0$  olan bir vuru dizisidir. Plaka akımının büyüklüğü plaka gerilimi ile orantılıdır. Plaka gerilimi  $E_{pb}$  bilgi işareti  $f(t)$  ye bağlı olarak değiştirilirse, plaka akımı genliği  $f(t)$  ile değişen vuruimlardan oluşur. Yükseltecin çıkışındaki akortlu devre, istenilen genliği modüle edilmiş dalgabıçımını elde etmek için kullanılan bir bant geçiren süzgeçtir. Bu modülatör, yükseltecin C sınıfı olarak çalışması nedeniyle ortaya çıkan doğrusalsızlığı kullanır. Standart GM yayımları vericilerinde bu tür modülatörler yaygın olarak kullanılır.

#### 4.4. GM DEMODÜLATÖRLERİ

Burada amaç modüle edilmiş

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \quad (4.49)$$

dalgabıçımından bilgi işareti  $f(t)$  yi geri çıkarmaktır.

GM demodülatörlerini temel olarak iki sınıfa ayırabiliriz.

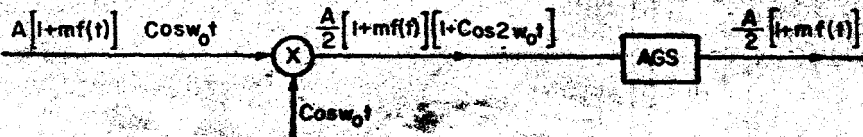
- 1- Eşzamanlı demodülatörler
- 2- Eşzamanlı olmayan demodülatörler

Eşzamanlı demodülatörler diğer GM modülasyon türlerinin demodüle edilmesinde de kullanılır. Buna karşın eşzamanlı olmayan demodülasyon yöntemleri yalnız taşıyıcılı GM dalgabıçımının demodüle edilmesinde kullanılır. Bu altbölümde eşzamanlı demodülasyon yöntemleri ile ortalama zarf sezimi ve zarf sezimi olarak adlandırılan iki eşzamanlı olmayan demodülasyon yöntemi incelenecektir.

#### Eşzamanlı Demodülasyon

Genlik modülasyonunun aslında  $f(t)$  yi  $\cos \omega_0 t$  ile çarparak,  $f(t)$  nin görüncesini istenilen bir taşıyıcı frekansına taşımak olduğundan söz edilmişti. Burada yapmamız gereken  $\omega_0$  çevresindeki görüneyi yeniden temelbanta aktarmaktır. Aşağıda görüleceği gibi  $\cos \omega_0 t$  ile çarpılarak bu amaca erişilebilir. Bu yolla temelbant işaretine ek olarak yüksek frekanslarda istenilmeyen işaretler de üretilir. Ancak bunlardan bir alçak geçiren süzgeç (AGS) yardımı ile kurtulabiliriz.

Burada önerilen modülatör Şekil 4.22'de verilmiştir.



Şekil 4.22 Eşzamanlı demodülatör

Modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımı  $\cos\omega_0 t$  ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} c(t) \cos\omega_0 t &= A [1 + mf(t)] \cos^2\omega_0 t \\ &= A [1 + mf(t)] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t \right] \\ &= \frac{A}{2} [1 + mf(t)] + \frac{A}{2} [1 + mf(t)] \cos 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir.

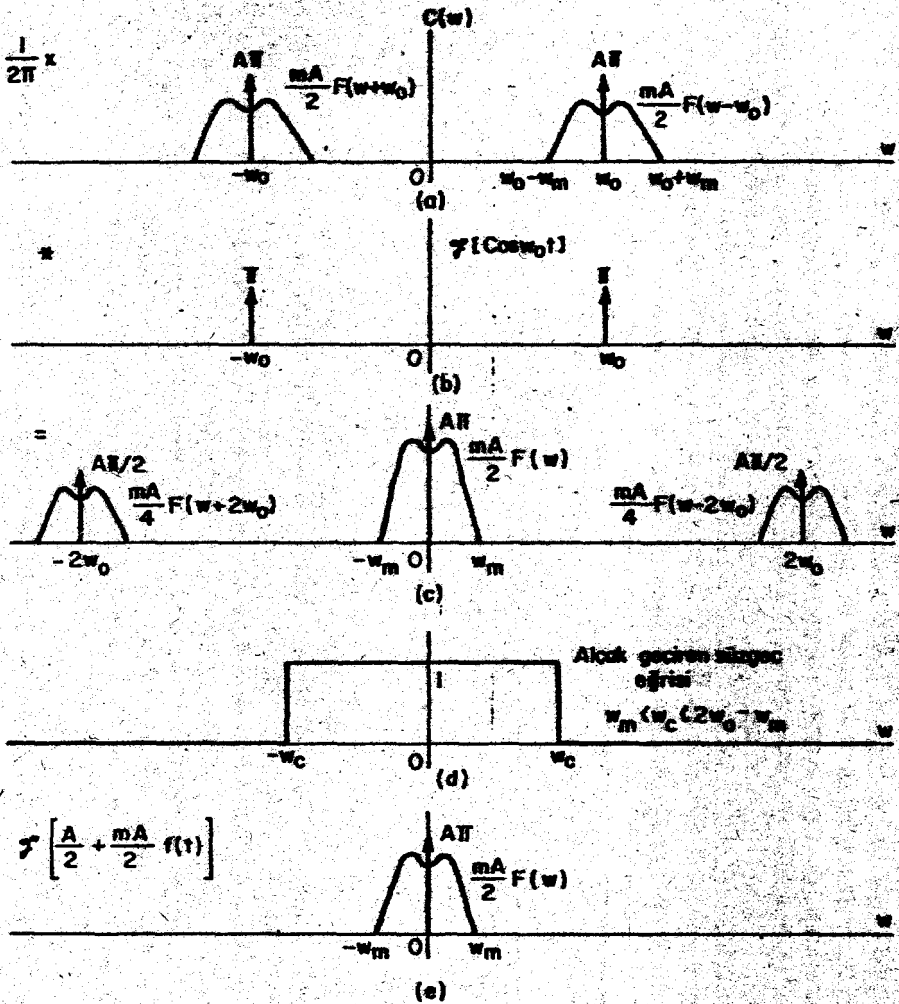
Birinci terim istenilen temelbant işaretidir, ikinci terim ise görüncesi  $2\omega_0$  da olan işaretidir. Alçak geçiren süzgeç, birinci terimi bozmaya uğratmadan geçirir ve ikinci terimi tümüyle söndürür. Buna göre süzgecin çıktısı  $\frac{A}{2} [1 + mf(t)]$  dir. DA teriminden bir sığaç yardımıyla kurtulunur ve böylece modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımından bilgi işareti  $f(t)$  elde edilmiş olur.

(4.50) deki iki terimin görüncelerinin çakışmaması ve temelbant işareti  $f(t)$  nin yeniden geri elde edilebilmesi için  $\omega_0 > \omega_m$  olmalıdır. Burada  $f(t)$  nin en yüksek frekansı  $\omega_m$  ile gösterilmiştir. Uygulamada bu koşul her zaman sağlanır. Alçak geçiren süzgecin kesim frekansı  $\omega_m$  ile  $2\omega_0 - \omega_m$  arasında olmalıdır, kabaca  $\omega_0$  olabilir. Alçak geçiren süzgecin özegrileri düşüncel özeğrilere yakın olmalıdır ve böylece birinci terimi bozmadan geçirmeli, yüksek frekans bileşenlerini tümüyle söndürmelidir.  $\omega_0$  frekansı  $\omega_m$  ye yaklaştıkça alçak geçiren süzgeç üzerindeki kısıtlamalar artar,  $\omega_0 \gg \omega_m$  ise süzgeç üzerindeki keskin kesim ve düzgün özeğri kısıtlamaları biraz hafifler.

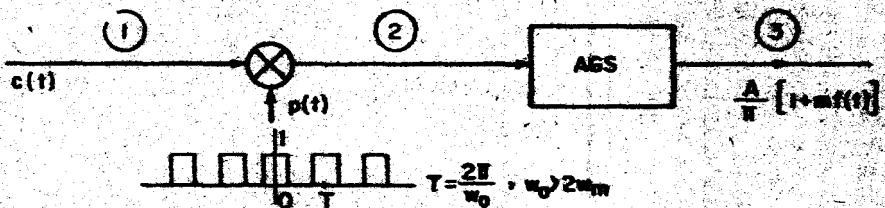
Modüle edilmiş dalgabıçımının taşıyıcısı ile aynı evrede ve frekansta olan  $\cos\omega_0 t$  sinuzoidal kullanıldığından bu demodülatör 'eşzamanlı' olarak adlandırılır. Alıcı uçta taşıyıcı ile aynı evre ve frekansta bir sinuzoidal üretmek her zaman kolay değildir. Eşzamanlamadan sapma olursa ortaya bazı sorunlar çıkar. Aynı sorunlar diğer genlik modülasyonu türlerinde de ortaya çıktığından, bunlar gelecek bölümde ayrıca tartışılacaktır.

İletişim dizgelerinin incelenmesinde  $\cos\omega_0 t$  ile çarpma genellikle ' $\omega_0$  ile karıştırmak' ya da ' $\omega_0$  ile heterodin etmek' olarak adlandırılır. Eşzamanlı demodülatörün frekans bölgesi çözümlemesi Şekil 4.23'de verilmiştir. Zaman bölgesinde çarpmanın frekans bölgesinde katlanmaya karşılık geldiğini unutmayınız.

Genliği modüle edilmiş dalgabıçımını elde ederken  $\cos\omega_0 t$  ile çarpma ya eşdeğer başka yolların da var olduğu belirtilmişti. Eşzamanlı demodülatörün tasarımında da bu yollar kullanılabilir.  $c(t)$  yi  $\cos\omega_0 t$  ile çarpmak yerine frekansı  $\omega_0$  olan bir dönemli vurum dizisi  $p(t)$  çarpılır. İstenmeyen frekans terimleri bir alçak geçiren süzgeç yardımıyla söndürülür. Bu tür bir demodülatörün öbek çizimi Şekil 4.24'de verilmiştir. 2 noktasında zaman dalgabıçımı aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.23 Eşzamanlı demodülatörün frekans bölgesi çözümlenmesi



Şekil 4.24 Bir eşzamanlı GM demodülatörü

$$\begin{aligned}
 c(t)p(t) &= A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n \omega_0 t \right] \\
 &= \frac{A}{2} [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t + A [1 + mf(t)] \\
 &\quad \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} (\cos \omega_0 t \cos n \omega_0 t) \right] \\
 &= \frac{A}{2} [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t + A [1 + mf(t)] \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} \cos(n-1)\omega_0 t + \frac{1}{2} \cos(n+1)\omega_0 t \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} A [1 + mf(t)] + \frac{A}{2} [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t \\
 &\quad + A [1 + mf(t)] \left( \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} \right) \cos \omega_0 t + \dots \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Yalnız birinci terim alçak geçiren süzgeçten geçer, ötekileri ise  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$ , ..., da oldukları için atılır. Buna göre alçak geçiren süzgecin çıkışında 3 noktasında işaret

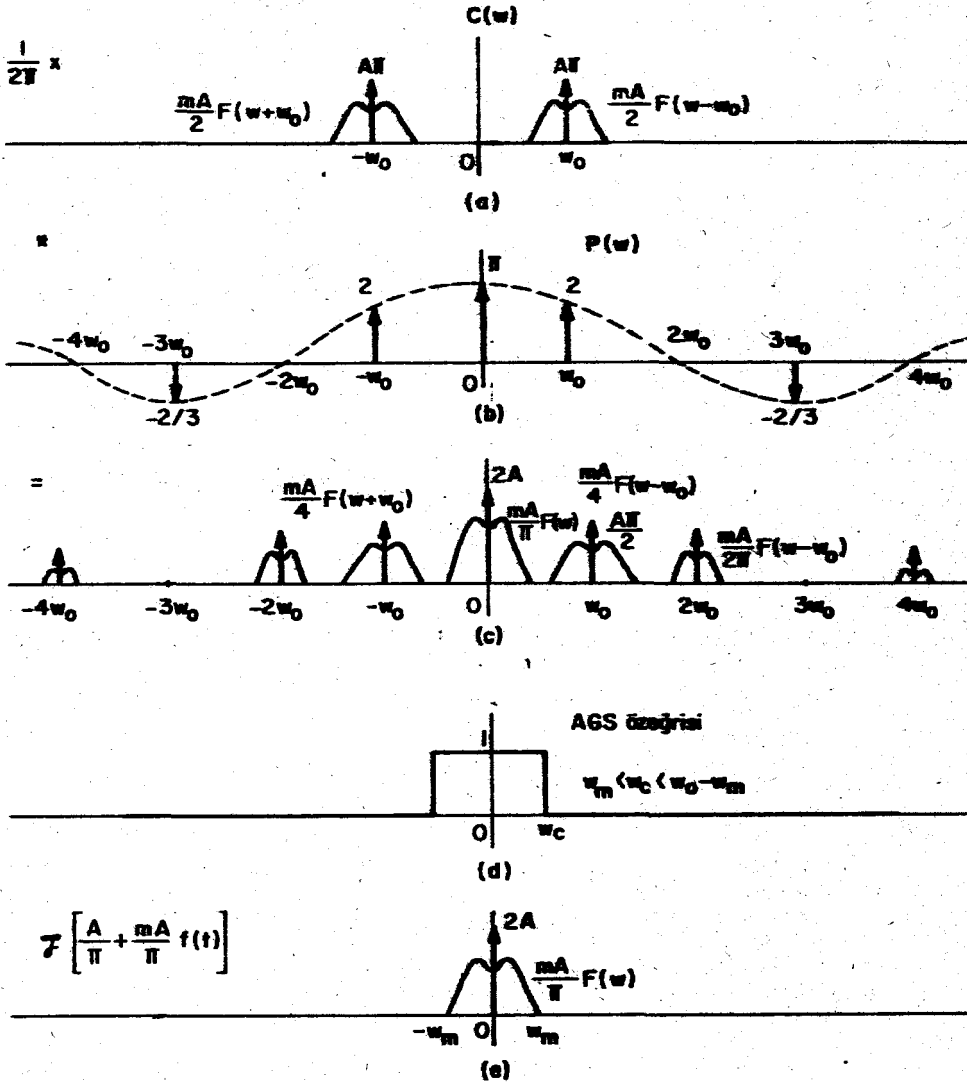
$$\frac{1}{\pi} A [1 + mf(t)] \quad (4.52)$$

dir. DA terimi atıldıktan sonra bilgi işareti yeniden geri elde edilmiş olur.

Eşzamanlı demodülatörün frekans bölgesi çözümlenmesi Şekil 4.25 de verilmiştir.  $c(t)$  nin  $p(t)$  ile çarpımı frekans bölgesinde  $C(\omega)$  ile  $P(\omega)$  nin katlanmasına karşı gelir. Alçak geçiren süzgeç, bantı içine düşen frekansları geçirir. Süzgecin çıkışındaki işaret (4.52) de verilmiştir ve bunun görüngesi  $2A \delta(\omega) + \frac{A}{\pi} F(\omega)$  dir. Çarpım işaretindeki görüngelerin çıkışması için  $\omega_0 > 2\omega_m$  olmalıdır. Alçak geçiren süzgecin başka frekans terimlerini geçirmemesi için, kesim frekansı  $\omega_m$  ile  $\omega_0 - \omega_m$  arasında olmalıdır.

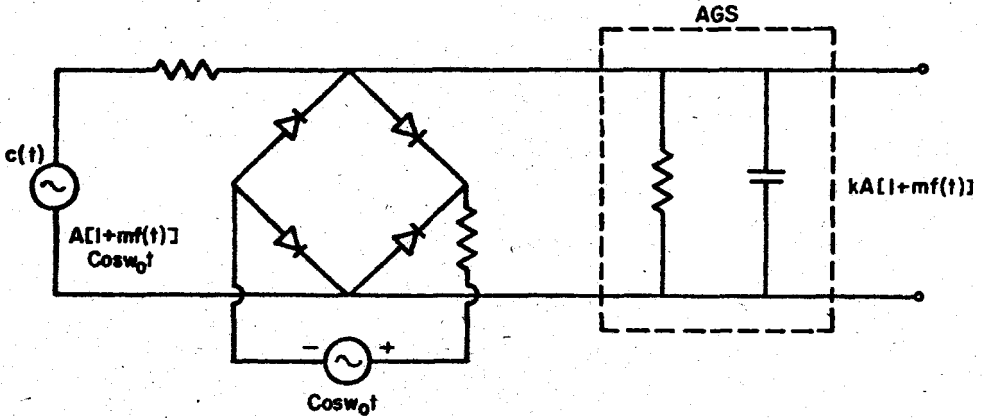
Kare dalga  $p(t)$  nin evre ve frekansı taşıyıcı ile aynı olduğundan bu demodülatör de eşzamanlı demodülatör olarak adlandırılır. Kuşkusuz, alçak geçiren süzgeç Şekil 4.25 de gösterildiği gibi düşüncel değildir. Süzgeç düşüncel olmadığından temelbant işaretinde bir ölçüde bozulma olur ve yüksek frekans terimleri tümüyle söndürülmez. Bozulma düzeyi alçak geçiren süzgeç özgeğrisinin düşüncelden ne kadar uzak olduğuna bağlıdır.

$p(t)$  ile çarpma işleminin yapılmasında kullanılacak bir devre Şekil 4.26'da verilmiştir. Kıyıcı modülatöründe olduğu gibi diyot köp-



Şekil 4.25 Şekil 4.24'de verilen eşzamanlı demodülâtörün frekans bölgesi çözümlemesi

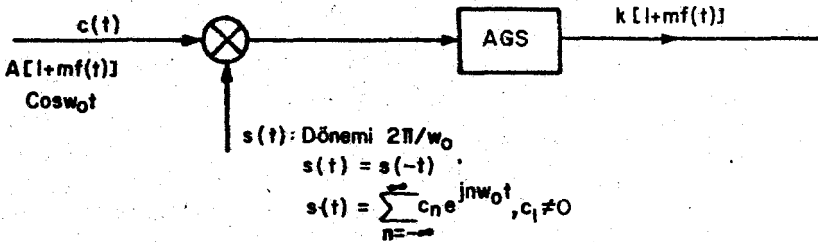
rüsü  $c(t)$  ile  $p(t)$  yi çarpmaya yarar. Koşut RC devresi basit bir alçak geçiren süzgeçtir. Burada yine  $\cos \omega_c t$  nin büyüklüğünün  $c(t)$  den çok fazla olduğu varsayımı yapılır. Böylece diyot köprüsü  $\cos \omega_c t$  nin artı yarı dönemlerinde kapanan, eksi yarı dönemlerinde açılan bir anahtar görevi görür. Alçak geçiren süzgecin düşüncel olmadığı açıktır. Bu demodülato kırıyıcı demodülâtörü ya da halka demodülâtörü olarak da adlandırılır.



Şekil 4.26 Kıyıcı demodülatörü

Şekil-4.24 de gösterilen eşzamanlı demodülatörde  $c(t)$  yi  $p(t)$  yerine  $[2p(t)-1]$  ile çarpıyorduk, çıktıda  $\omega_0$  nın çevresinde hiçbir görüngen olmayacak ve geri kalan görüngeler 2 ile çarpılacaktı.  $\omega_0$  etrafında terim olmayacağından, görüngelerin çakışmaması için  $\omega_0$  üzerine konulan kısıtlama hafifleyecek ve  $\omega_0 > \omega_m$  olacaktır. Benzer biçimde alçak geçiren süzgecin kesim frekansı üzerindeki koşul da gevşetilebilir ve kesim frekansı  $\omega_m$  ile  $2\omega_0 - \omega_m$  arasında olabilir. Geri kalan her şey Şekil 4.24'deki demodülatör ile aynıdır, yalnız çıktı 2 katına çıkmıştır. Bu demodülatörün zaman bölgesi ve frekans bölgesi çözümlenmeleri Şekil 4.24 deki demodülatörün çözümlenmesine benzediğinden bunlar okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır.

Eğer  $c(t)$  işareti,  $p(t)$  ya da  $2p(t)-1$  yerine, dönemi  $2\pi/\omega_0$  olan herhangi bir dönemli  $s(t)$  işlevi ile çarpılırsa, bir başka eşzamanlı demodülatör elde edilir.  $s(t)$  belirli bazı koşulları sağlarsa, örneğin birinci harmoniği sıfırdan ayrı, yani  $c_1 \neq 0$ , olursa ve  $s(t)$  işlevi  $t = 0$  a göre çift simetrik, yani  $s(t) = s(-t)$  ise, istenilen frekans kaydırmaları gerçekleşir. Alçak geçiren süzgeç ise yalnız temelbant işaretini geçirir. Bu demodülatör Şekil 4.27'de verilmiştir.  $w = 0$  a kaydı-



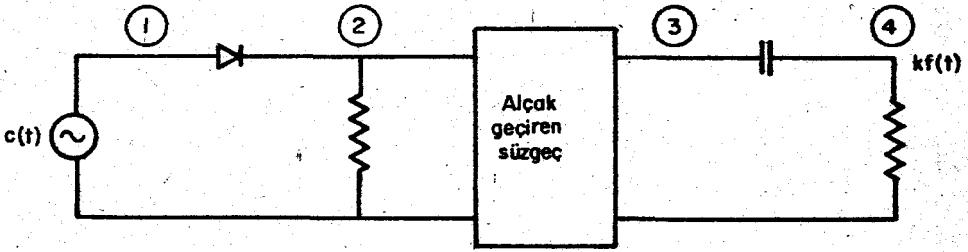
Şekil 4.27 Başka bir eşzamanlı GM demodülatörü



rılan terimin sıfır olmaması için  $c_1 \neq 0$  koşulu gereklidir. Yapılan işlemin, taşıyıcı ile aynı evrede tek bir kosinüs dalgası ile çarpmaya eşdeğer olabilmesi için,  $s(t) = s(-t)$  koşulu gerekir. Bu koşul sağlanmazsa, bu işlem  $c(t)$  yi  $\cos(\omega_0 t + \theta)$  ile çarpmaya eşdeğer olur, yani evre eşzamanlaması kaybolur. Evre eşzamanlaması olmadığına neler olabileceği üzerinde gelecek bölümde durulacaktır.  $s(t) = s(-t)$  varsayımı,  $s(t)$  nin birinci harmoniğinin evresi ile taşıyıcının evresinin eşzamanlı olduğu anlamına gelir. Bu nedenle de bu demodülatör eşzamanlı bir demodülatördür.

### Ortalama-Zarf Sezici

Şekil 4.28'de gösterilen demodülatör eşzamanlı olmayan bir GM demodülatördür. Ortalama zarf sezici diye adlandırılan bu demodülatörün



Şekil 4.28 Ortalama zarf sezici

eşzamanlı olmamasının nedeni, frekansı ve evresi taşıyıcının frekansı ve evresi ile eşzamanlı olması gereken herhangi bir sinüoidal ya da dönemli bir işlev kullanılmamasıdır.

Şekil 4.24 de gösterilen eşzamanlı demodülatör ile bu demodülatörün çalışma ilkeleri ayrı olmasına rağmen, çözümlenmeleri aynıdır.

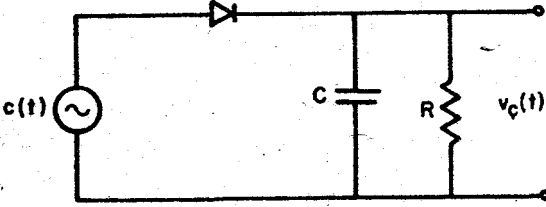
1 noktasında  $c(t)$  işareti vardır. 2 noktasında (4.51) de verilen  $c(t) \cdot p(t)$  vardır. Alçak geçiren süzgeç çıkışı 3 noktasında ise (4.52) de verilen temelbant işareti  $\frac{\Delta}{\pi} [1 + mf(t)]$  bulunur. 3 ve 4 noktaları arasındaki sığaç DA terimini tutar ve 4 noktasında istenilen bilgi işareti  $\frac{mA}{\pi} f(t)$  elde edilir.

Bu demodülatörün çıkışından istenilen bilgi işaretini alabilmemiz için modüle edilmiş işaretin zarfının bozulmamış olması gereklidir, yani  $[1 + mf(t)] \geq 0$  olmalıdır. Eğer bu bağıntı sağlanmazsa 2 noktasındaki işaret  $c(t)p(t)$  olmaz ve bu nedenle 4 noktasında elde edilen işaret de  $f(t)$  ye eşit değildir. Eşzamanlı demodülatörlerde zarfın bozulmamış olması ( $[1 + mf(t)] \geq 0$ ) gerekli bir koşul değildir. İki demodülasyon türü arasındaki en önemli ayırım budur.

Şekil 4.28'de yarı dalga doğrultmacı yerine tam dalga doğrultmacı konarak elde edilen eşzamanlı olmayan demodülatörün incelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

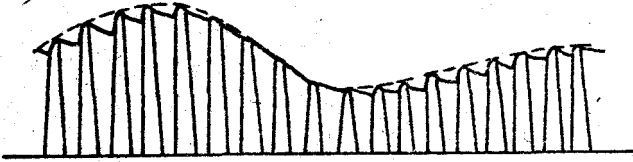
## Zarf Sezici

Eşzamanlı olmayan demodülatöre diğer bir örnek Şekil 4.29 da verilen zarf sezicidir. Bu en kolay ve en yaygın olan GM demodülatördür. Evlerde GM radyolarında kullanılan demodülatör bu tür bir zarf sezicidir.



Şekil 4.29 Zarf sezici

Zarf sezicisinin çalışması Şekil 4.30 da açıklanmıştır. Bir zarf sezicide, sezicinin çıktısı modüle edilmiş işaretin zarfını izler. Modüle edilmiş işaretin artı yarı dönemlerinde C sığacı giriş işaretinin

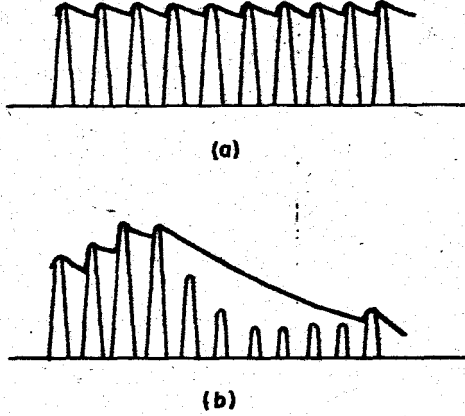


Şekil 4.30 Bir zarf sezicinin çıktısı

tepe değerine kadar dolar. Giriş işareti bu tepe değerinden aşağı düşerken sığaç gerilimi (hemen hemen tepe değerine eşittir.) giriş işaret geriliminden büyük olacağından diyot açık devre olur. Diyot açık devre olduğunda sığaç R direnci üzerinden düşük bir hızla boşalır. Bir sonraki artı dönemde giriş işareti sığaç geriliminden büyük olduğunda diyot yeniden kısa devre olur. Böylece sığaç yeniden bu yeni dönemin tepe değerine dolar. Sonra giriş işaret gerilimi azalır, sığaç geriliminin altına düşer diyot yine açık devre olur ve sığaç boşalır. Bu süreç bu biçimde sürer gider.

Sığaç'ın direnç üzerinde boşalma hızı RC zaman değişimine bağlıdır. Çıktının, yani sığaç geriliminin, modüle edilmiş işareti izleyebilmesi için RC zaman değişimi ayarlanır. RC zaman değişimi üzerinde birbirleriyle çelişen kısıtlamalar vardır. RC çok küçükse, sığaç çok çabuk boşalır ve dalgalık denilen bir tür bozulma ortaya çıkar. Bir zarf sez-

cinin çıktısındaki dalgacık Şekil 4.31a'da gösterilmiştir. Dalgacık istenmediği için RC'nin çok küçük olması da istenmez. Dalgacık genliğinin büyük olması  $\frac{1}{\omega_0} \ll RC$  yapılarak önlenir. Buna ek olarak zarf seziciden sonra konulacak bir alçak geçiren süzgeç yardımıyla dalgacık daha da azaltılabilir.



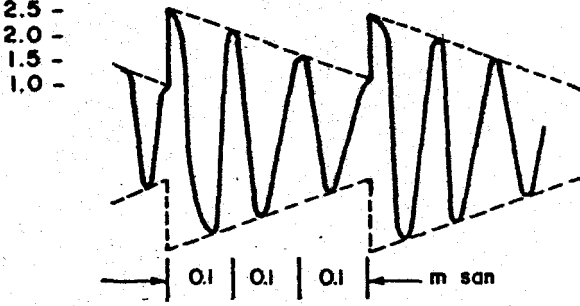
Şekil 4.31 Bir zarf sezicinin çıktısında dalgacık ve çapraz kırpma

Öte yandan, RC zaman değişmezi büyükse, sığaç çok yavaş boşalır ve çapraz kırpma adı verilen istenilmeyen başka bir olay ortaya çıkar. Sığaç gerilimi çok yavaş düşer ve sığaç gerilimi birçok dönem için giriş işaret geriliminden daha büyük kalır. Bu zaman süresince çıktı, yani sığaç gerilimi, modüle edilmiş dalgabıçımının zarfını izleyemez. Çapraz kırpma adı verilen bu olay Şekil 4.31b'de gösterilmiştir. Diyot eğer her tepe değerinde iletmez işe çapraz kırpma var demektir. Çapraz kırpma olmaması için kabaca  $RC \ll \frac{1}{\omega_m}$  olmalıdır, burada  $\omega_m$ ,  $f(t)$  deki en yüksek frekanstır. Önemli dalgacık ve çapraz kırpma sorunlarını önlemek için bu iki kısıtlama birleştirilebilir ve aşağıdaki koşul bulunur:

$$\frac{1}{\omega_0} \ll RC \ll \frac{1}{\omega_m} \quad (4.53)$$

Çapraz kırpma modülasyon derecesi  $m$ 'den bağımsız değildir. Verilen bir dalgabıçımı için çapraz kırpmayı önleyecek en büyük RC değeri bulunabilir.

Örnek 4.6. Şekil 4.32'de verilen GM dalgabıçımının demodüle edilmesi sırasında çapraz kırpmanın olmaması için RC zaman değişmezinin hangi değerler alabileceğini bulalım.



Şekil 4.32 Bir GM dalgabıçımı

Çapraz kırılma olmaması için  $t_o = 0.1$  msan de  $\frac{2}{2.5} > e^{-t_o/RC}$  ve  $\frac{1.5}{2} > e^{-t_o/RC}$  ve  $\frac{1}{1.5} > e^{-t_o/RC}$  olmalıdır. Eğer  $\frac{1}{1.5} > e^{-t_o/RC}$  sağlanırsa diğerleri de sağlanır. Buradan

$$\ln 1.5 < \frac{t_o}{RC} = \frac{10^{-4}}{RC}$$

ya da

$$RC < \frac{10^{-4}}{\ln 1.5} = 2.47 \times 10^{-4} \text{ san}$$

bulunur.

Zarf sezicinin çıktısı modüle edilmiş dalgabıçımının zarfını izlediğinden,  $f(t)$  yi yeniden geri elde edebilmek için modüle edilmiş dalgabıçımının zarfının bozulmamış olması gerekir. Yani  $[1 + mf(t)] > 0$  koşulu sağlanmalıdır. Bu koşul ortalama zarf sezicisi için de geçerlidir. Buna göre ortalama zarf sezici ya da zarf sezici gibi kolay GM demodülatörleri kullanabilmek için ödememiz gereken bedel şudur:

1. Taşıyıcı

2.  $[1 + mf(t)] > 0$

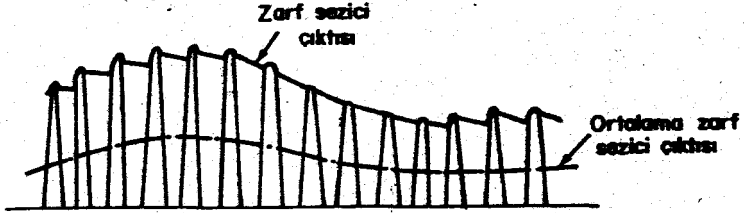
Uygulamada zarf sezicinin yapımının kolay oluşu, bu koşulların sağlanmasını çoğu zaman haklı kılar. Özellikle birkaç göndermeyle belki milyonlarca almanın kullanıldığı uygulamalarda (örneğin GM yayımlarında), almaçların kolay yapılabilir olması göndermecinin karmaşıklığını haklı çıkarabilir.

Eşzamanlı demodülasyon  $[1 + mf(t)] > 0$  koşulunu gerektirmez. Bu nedenle eşzamanlı demodülasyon daha güçlü bir demodülasyon tekniğidir, ancak daha karmaşıktır. Daha önce söz edildiği gibi burada bazı eşzamanlama sorunları ortaya çıkar. Uygulama yerine bağlı olarak iletişim dizgesi tasarımcısı ya en az ekonomik olan genlik modülasyonunu (yani taşıyıcılı) seçer,  $[1 + mf(t)] > 0$  koşulunu sağlar ve en kolay demodu-

lasyon yöntemini (zarf seziciyi) kullanır, ya da gelecek altbölümde tartışılacak olan daha kolay, daha ekonomik bir modülasyon tekniğini seçer ve daha karmaşık bir demodülasyon yöntemi (eşzamanlı demodülasyon) kullanır.

GM demodülatörleri üzerinde yapılan bu tartışmayı bitirmeden önce ortalama zarf sezicisi ile zarf seziciyi karşılaştıralım. Ortalama zarf sezicisinde alçak geçiren süzgeç olarak bu paralel RC devresi kullanılırsa, dikkatli olmayan birisine zarf sezici ile ortalama zarf sezicisi aynı gözükebilir. Bu doğru değildir. Son çıktılarının aynı olmalarına karşın, bu iki dizgenin çalışması tümüyle değişik ilkelere dayanır. Zarf sezicideki paralel RC devresi bir alçak geçiren süzgeç olarak çalışmaz.

Zarf sezicide çıktı doğrultulmuş dalganın tepelerini izler. Ortalama zarf sezicinin çıktısı ise alçak geçiren süzgecin çıktısıdır, yani doğrultulmuş dalganın ortalaması alınmış halidir. Çıktılardaki ayırım Şekil 4.33'de verilmiştir. Çözümlemeye bakılarak da bu ayırım görüle-



Şekil 4.33 Zarf sezici ve ortalama zarf sezici çıktıları

bilir. Ortalama zarf sezicisinin çıktısı  $\frac{A}{\pi} [1 + mf(t)]$ , zarf sezicinin çıktısı ise  $A [1 + mf(t)]$  dir. Bir başka deyişle zarf sezicinin çıktısı ortalama zarf sezicisinin çıktısının  $\pi$  katıdır. Bu nedenle, zarf sezici ortalama zarf seziciye göre daha kolay ve daha verimlidir. Bundan dolayı zarf sezici en yaygın kullanılan GM demodülatördür.

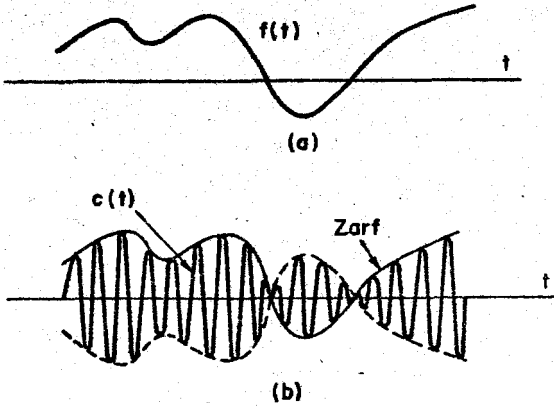
#### 4.5. ÇİFT YAN BANT (ÇYB) MODÜLASYONU

Altbölüm 4.2 de GM dalgabiciimlerinde güç konusu tartışılırken, gücün büyük bir bölümünün taşıyıcıyı iletmekte kullanıldığı gözlenmişti. Sinuzoidal modülasyonda modülasyon derecesi bir iken toplam gücün  $2/3$  ü taşıyıcıya kullanılır.  $m$  birden küçükse, bu oran daha da büyük olur. Taşıyıcının bilgi taşımadığı, modüle edilmiş işarette bilgi taşıyan bölümün yanbantlar olduğu da daha önce belirtilmişti. Bu nedenle taşıyıcı kullanılmayarak gücün büyük ölçüde tutum sağlayabiliriz ve bunu yaparken herhangi bir bilgi kaybımız olmaz. Bu düşünceden giderek taşıyıcısı bastırılmış genlik modülasyonu ya da çift yan bant (ÇYB) modülasyonu olarak adlandırılan modülasyon türü elde edilir.

ÇYB modüle edilmiş dalgabiciimi, yani taşıyıcısız genlik modülasyonu şu biçimde ifade edilebilir:

$$c(t) = f(t) \cos \omega_0 t \quad (4.54)$$

$f(t)$  nin artı olması gerekmediğinden, Şekil 4.34'den görülebileceği gibi,  $c(t)$  nin zarfı bilgi işareti  $f(t)$  ye benzemeyebilir.

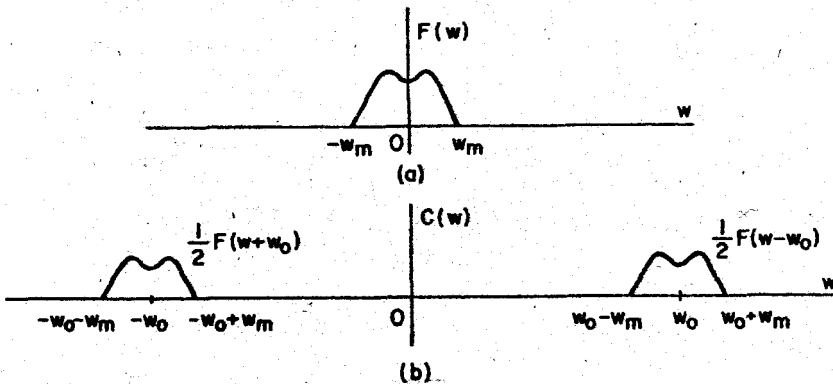


Şekil 4.34 ÇYB modüle edilmiş dalgabicişimi

$f(t)$  nin  $\cos \omega_0 t$  ile çarpımı  $f(t)$  nin görüncesini  $\omega_0$  ve  $-\omega_0$  frekanslarına kaydırır. Zaman bölgesinde çarpma frekans bölgesinde katlanma işlemine karşılık gelir. Buna göre (4.54) de verilen ÇYB işaretinin görüncesi

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \{F(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\} \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

olur.  $C(\omega)$  görüncesi Şekil 4.35 de verilmiştir. GM işaretinin görüncesi tek ayrımlı, ÇYB işaretinin görüncesinde  $\omega_0$  ve  $-\omega_0$  frekanslarında taşıyıcıyı gösteren dürtülerin olmamasıdır.



Şekil 4.35 ÇYB dalgabicişiminin görüncesi

ÇYB modüle edilmiş işaretlerin modülasyon ve demodülasyon tekniklerini tartışmadan önce taşıyıcıyı bastırarak güçten önceli ölçüde tasarruf ettiğimizi belirtmeliyiz. Ancak bunun da bir bedeli vardır. Daha sonraki altbölümlerde ayrıntılı olarak tartışılacağı gibi, ÇYB işaretlerinin demodülasyonu ÇM işaretlerinin demodülasyonu kadar kolay değildir. Modüle edilmiş işaretin zarfı  $f(t)$  ye benzediğinden eşzamanlı olmayan demodülasyon yöntemleri ÇYB işaretlerine uygulanamaz.

#### 4.6. ÇYB İŞARETİNİN ÜRETİMİ

Burada istenilen (4.54) ile verilmiş olan ÇYB modüle edilmiş işareti üretmektir. Bazı ÇM modülatörlerinde taşıyıcı teriminin sonradan eklendiğini hatırlayınız. ÇYB işareti üretmede bu modülasyon yöntemleri doğrudan kullanılabilceği gibi bunlardan başka yöntemler de önerilebilir.

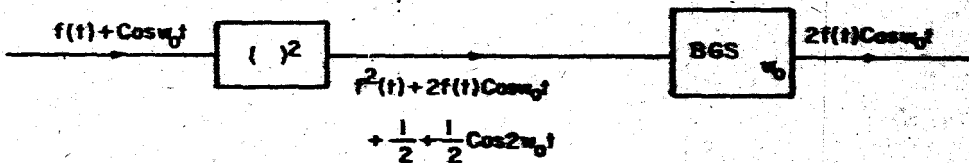
ÇYB modülatörleri şu biçimde sınıflandırılabilir:

1. Örneksel çarpıcı
2. Kıyıcı modülatörü
3. Kare kuralı modülatörü
4. Dengeli modülatör

Örneksel çarpıcı taşıyıcı ÇM de olduğu gibidir. Çarpıcının çıktısı  $f(t)$  ile  $\cos \omega_0 t$  nin çarpımıdır. Bölüm 4.3 de incelenen kıyıcı modülatörün çıktısı ÇYB işaretidir. Buna göre daha önce incelenen çeşitli kıyıcı modülatörler herhangi bir değişiklik yapılmaksızın burada da kullanılabilir.

#### Kare-Kuralı Modülatörü

Burada kullanılan kare kuralı modülatörü ÇM dalgabirliğini üretiminde kullanılan doğrusal olmayan aygıt modülatörünün biraz daha kısıtlanmışıdır. Daha önce yaptığımız varsayımına göre doğrusal olmayan ögenin özgeçrisinin Taylor serisi açılımında üç ve daha yüksek derece terimleri ihmal edilmişti. O kısıtlamaya ek olarak burada birinci terim  $a_1 v_0$  nin de sıfıra eşit olması istenir. Birinci terim sıfır olmazsa çıkışıya frekansı  $\omega_0$  olan bir kosinüs dalgası, yani taşıyıcı, eklenir. Bu nedenle taşıyıcıdan kurtulmak için doğrusal olmayan ögenin bir tam kare kuralı aygıtı olması gerekir. Kare kuralı modülatörünün öbek çizimi Şekil 4.36' da verilmiştir.



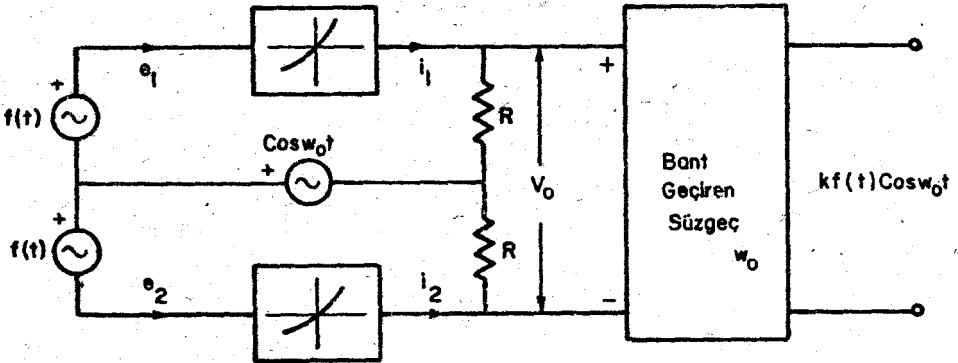
Şekil 4.36 Kare kuralı modülatörü

- Üç ve daha yüksek derece terimlerinin ÇYB işaretinde yaptığı bozulma, GM işaretinde görülen bozulma ile aynıdır.  $\omega_0 (\omega_0 > 3\omega_m)$  ve süzgeç bantgeniği üzerindeki koşullar da, doğrusal olmayan aygıtlarla GM dalgabıçımı üretirken verilen koşullarla aynıdır.

Kare kuralı aygıtları gerçek dünyada ancak yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir. Örneğin bir yarı-iletken diyotun kare alıcı olarak kullanılabilmesi için çalışmasının belirli bir bölgeye sınırlandırılması gerekir. Dengeli modülatör olarak adlandırılan bir modülatör türünde ise tam kare kuralına uymayan doğrusal olmayan aygıtlar kullanılır. Bu modülatörlerde birinci ve üçüncü derece terimlerinin ortaya çıkardığı istenilmeyen terimler kolay bir işleme yok edilir.

### Dengeli Modülatör

Dengeli modülatör aslında bir doğrusal-olmayan aygıt modülatörüdür, ancak bu öyle düzenlenmiştir ki bazı istenilmeyen terimler yok edilir ve modülatörün çıktısı bir ÇYB (taşıyıcısı bastırılmış GM) dalgabıçımı olur. Şekil 4.37'de bir dengeli modülatörün öbek çizimi verilmiştir.



Şekil 4.37 Bir dengeli modülatörün öbek çizimi

Doğrusal olmayan aygıtın özgeçrisinin şu biçimde olduğunu varsayalım:

$$i = a_1 e + a_2 e^2 + a_3 e^3 \quad (4.56)$$

Yüksek derece terimlerinin sıfır ya da ihmal edilebilir oldukları varsayıldığında Şekil 4.36 dan görülebileceği gibi doğrusal olmayan aygıtların giriş gerilimleri

$$e_1 = \cos \omega_0 t + f(t)$$

$$e_2 = \cos \omega_0 t - f(t) \quad (4.57)$$



olur. (4.57), (4.56) daki yerine konularca doğrusal olmayan aygıtların çıkış akımları bulunur.

$$i_1 = a_1[\cos \omega_0 t + f(t)] + a_2[\cos^2 \omega_0 t + 2f(t)\cos \omega_0 t + f^2(t)] + a_3[\cos^3 \omega_0 t + 3f(t)\cos^2 \omega_0 t + 3f^2(t)\cos \omega_0 t + f^3(t)] \quad (4.58)$$

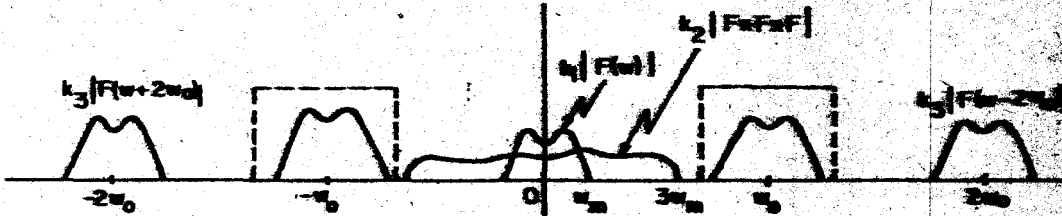
$$i_2 = a_1[\cos \omega_0 t - f(t)] + a_2[\cos^2 \omega_0 t - 2f(t)\cos \omega_0 t + f^2(t)] + a_3[\cos^3 \omega_0 t - 3f(t)\cos^2 \omega_0 t + 3f^2(t)\cos \omega_0 t - f^3(t)]$$

Bant geçiren süzgecin girişindeki gerilim dirençlerin üzerindeki gerilimlerin farkıdır.

$$\begin{aligned} v_0 &= i_1 R - i_2 R \\ &= 2R [a_1 f(t) + a_2 2f(t)\cos \omega_0 t + a_3 3f(t)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \omega_0 t) + a_3 f^3(t)] \\ &= 2R [a_1 f(t) + \frac{3}{2}a_3 f(t) + a_3 f^3(t)] + \frac{3}{2}a_3 f(t)\cos \omega_0 t \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{istenilmeyen terimler}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{3a_3}{2} f(t)\cos \omega_0 t}_{\text{ÇTB}} \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.59) daki istenilmeyen terimlerin görüntüleri ÇTB dalgabüçümünün frekans bandı dışına düştüğünden, bunlar bir süzgeç yardımı ile atılabilir. (4.59) daki son terim istenilen ÇTB dalgabüçümüdür ve bu bant geçiren süzgeçten geçer. (4.59) da verilen  $v_0$  geriliminin görüntüsü Şekil 4.38'de çizilmiştir.

Şekil 4.38'de görülebileceği gibi ÇTB dalgabüçümünü  $f(t)\cos \omega_0 t$  nin bozulmadan elde edilebilmesi için şu koşullar sağlanmalıdır.

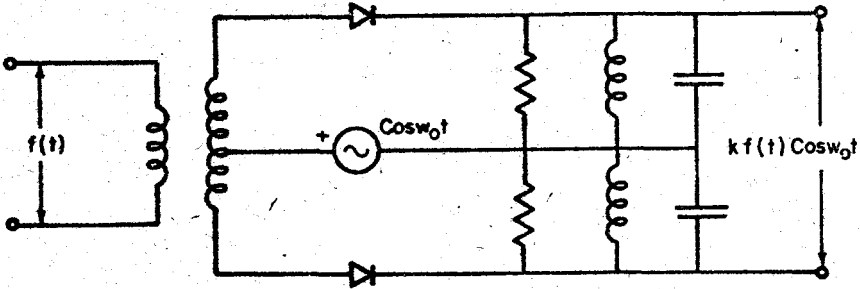


Şekil 4.38  $v_0$  nin görüntüsü

1.  $\omega_m$ ,  $f(t)$  nin en yüksek frekansı ise  $\omega_o > 4\omega_m$  olmalıdır.
2.  $\omega$  a merkezlenmiş bant geçiren süzgecin bantgenişliği en az  $2\omega_o$  ve en çok  $2(\omega_o - 3\omega_m)$  olmalıdır.  $\omega_o$  frekansı  $4\omega_m$  den çok büyük değilse süzgecin özgeçirisi düşüncel özgeçiriye yakın olmalıdır.

Bir doğrusal olmayan aygıt modülatörü ile GM dalgabıçımı üretirken, üç ve daha yüksek derece terimleri ya sıfırdır ya da ihmal edilebilirdi. Bir dengeli modülatör kullanarak ÇYB dalgabıçımı üretirken üçüncü derece teriminin sıfırdan başka olabilir. Modülatörün özel düzenlenmesinin bir sonucu olarak, birinci ve üçüncü derece terimlerinin neden olduğu bozulmalar dengelenir, yani yok edilir. Bundan dolayı bu modülatör dengeli modülatör olarak adlandırılır.

Doğrusal olmayan öğeler olarak yarı iletken diyotlar ve bant geçiren süzgeç olarak tank devresi kullanılabilir. Uygulamada dengeli modülatör olarak kullanılan bir devre Şekil 4.39'da verilmiştir.



Şekil 4.39 Bir dengeli modülatör

Dengeli modülatörler düşük güç düzeylerinde çalışırlar. Bu nedenle istenilen çıkış gücünü elde etmek için modüle edilmiş dalgabıçımı sonradan güçlendirilir. Öte yanda GM yayımlarında modülasyon, C sınıfı yükselteçler kullanılarak, yüksek güç düzeylerinde elde edilir. Hiç bir kuramsal kısıtlama olmamasına karşın, bir C sınıf yükselteç kullanan doğrudan akortlu devre modülatörü ÇYB dalgabıçımı üretiminde kullanışlı olmaz. Bunun nedeni bu modülatörün çıkış işaretinde bir taşıyıcı teriminin olması ve bu kadar yüksek bir güç düzeyinde taşıyıcının bastırılmasının verimli bir yol olmamasıdır.

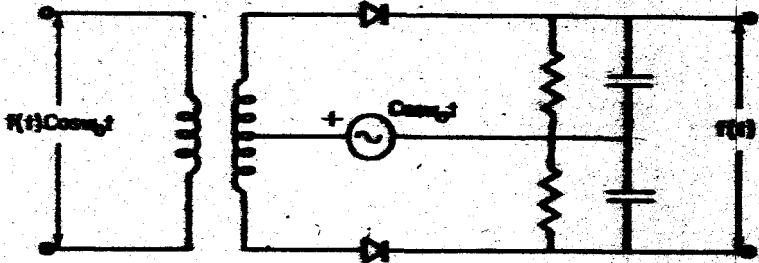
#### 4.7. ÇYB İŞARETLERİNİN DEMODOLE EDİLMESİ

ÇYB işaretlerinin demodülasyonu yalnız eşzamanlı sezme yöntemleri kullanılarak yapılır. Taşıyıcı olmadığından modüle edilmiş dalgabıçımının zarfı, bilgi işareti  $f(t)$  ye benzemez. Bu nedenle bir çeşit zarf sezici kullanarak  $f(t)$  nin yeniden geri elde edilmesi olası değildir.

ÇYB modüle edilmiş işaretin eşzamanlı demodülasyonu GM işaretinin eşzamanlı demodülasyonu ile aynıdır. Bundan dolayı Bölüm 4.3 de tartışılan eşzamanlı demodülasyon yöntemleri, herhangi bir değişiklik yapılmak-

sızın, ÇYB işaretinin demodülasyonu için de geçerlidir. Şekil 4.22, 4.24, 4.26 ve 4.27 de verilen demodülatörler, ÇYB işaretinin demodüle edilmesinde kullanılabilir. ÇYB işareti için bu demodülatörlerle zaman bölgesi ve frekans bölgesi çözümlenmeleri ÇM işareti için yapılan çözümlenmelerle aynıdır. İtek ayrım ÇM işareti için alçak geçiren süzgecin çıkışında taşıyıcının neden olduğu bir DA terimi olması ve bunun ortadan alınarak  $f(t)$  sine elde edilmesidir. ÇYB işaretinin demodülasyonunda alçak geçiren süzgecin çıkışında DA terimi yoktur ve doğrudan  $f(t)$  elde edilir.

Bölüm 4.4 de incelenen ve Şekil 4.26 da verilen kıyıcı demodülatörü ÇYB işaretini demodüle etmekte kullanılabilir. Şekil 4.40'da basit bir eşzamanlı demodülatör devresi verilmiştir. Diyotlar doğrusal olmayan öge olarak, RC devresi ise bir alçak geçiren süzgeç olarak kullanılmıştır.



Şekil 4.40 Doğrusal olmayan ögeler kullanan bir demodülatör

#### Diyotların Özgeçirileri

$$i = a_1 e + a_2 e^2 + a_3 e^3 \quad (4.50)$$

varsayılırsa alçak geçiren süzgeç girişindeki gerilim şöyle olur.

$$v_0 = a_1 f(t) \cos \omega_0 t + a_2 f(t) + a_2 f(t) \cos 2\omega_0 t + a_3 f(t) \cos^3 \omega_0 t + a_3 f^3(t) \cos^3 \omega_0 t \quad (4.51)$$

İkinci terim dışındaki bütün terimler yüksek frekans bileşenleridir ve alçak geçiren süzgeçten geçemezler. Buna göre demodülatörün çıktısı istenilen  $kf(t)$  dir.

Bu demodülatörün de bir eşzamanlı demodülatör olduğunu belirtmeliyiz. Bunun nedeni alıcı uçta frekansı ve evresi taşıyıcısındaki ile aynı olan bir sinus dalgası kullanılmasıdır. Evre ve frekans eşzamanlılığından sapma nedeniyle ortaya çıkan sorunlar gelecek bölümde diğer bir genlik modülasyonu türü incelendikten sonra ele alınacaktır. Bana sonra çeşitli genlik modülasyonu türlerinde eşzamanlama aksatılıklarına değinilecektir. Bu konuların bir incelemesi yapılacaktır.

#### 4.8. GM ve ÇYB'NİN KARŞILAŞTIRILMASI

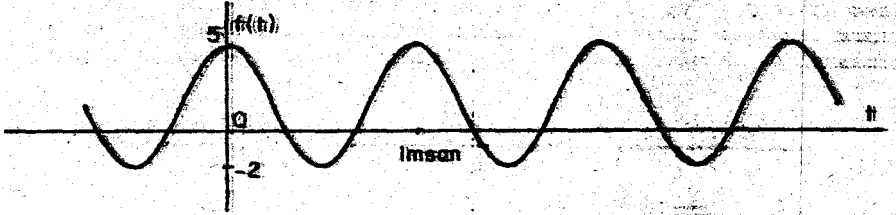
GM ve ÇYB'nin incelenmesi bittigine göre, GM ile ÇYB nin bir karşılaştırmasını yapabilir, bunların birbirlerine göre üstünlüklerini belirtebiliriz.

1. GM'nin en büyük eksikliği gücün büyük bir bölümünün taşıyıcının iletiminde sarfedilmesidir.
2. Zarf sezici çok yalın bir GM demodülatörüdür, ancak ÇYB nin demodülasyonunda kullanılamaz. Zarf sezicinin girdisi bir ÇYB işareti ise çıktısı  $|f(t)|$  dir. Birçok durumlarda, GM de zarf sezici kadar basit bir demodülatör kullanma olanağının yarattığı üstünlük taşıyıcıda harcanan gücün yarattığı eksiklikten ağır basar. Birkaç göndermecin ve pek çok sayıda almanın olduğu uygulamalarda, örneğin bir kitle iletişimi olan GM radyo yayınlarında, taşıyıcılı GM yeğlenir. Ancak göndermeç ile almaç sayısı aynı derecede ise ya da göndermeçin çıkış gücü üzerinde kısıtlamalar varsa, o zaman almaçların karmaşık yapıda olması daha uygun olabilir. Bu durumlarda ÇYB modülasyonu ve eşzamanlı demodülasyon kullanılabilir.
3. Yüksek güç düzeylerinde GM işaretlerinin elde edilmesi ÇYB işaretlerinin elde edilmesine göre daha kolaydır. ÇYB işaretlerinin üretiminde kullanılan dengelenmiş modülatörün tasarımı GM modülatörlerine göre daha zordur.
4. İletilen işaretle ortaya çıkan, seçmeli sönümlenme (fading) adı verilen bir çeşit bozulma GM de ÇYB ye göre daha ciddi sorunlar yaratır. İşaret göndermeçten almaça giderken herbiri ayrı uzunlukta birçok ayrı yolu izler. Bu nedenle ayrı yollardan ulaşan işaretlerde bir evre farkı vardır. Bütün bu farklı yollardan gelen işaretlerin toplamı bileşke işareti verir.

Almaça giden işaret dalgaları ionosferden ve yerden yansımaya uğrarlar. İonosferin durumu zamanla rastgele değiştiğinden, yol uzunlukları ve işaretlerin evreleri rastgele değişir. Sonuçta bileşke işaretin şiddeti rastgele değişir ve olay sönümlenme olarak adlandırılır. Her frekans için atmosfer değişimleri aynı olmayacağından sönümlenme frekansa karşı duyarlıdır. Bu nedenle taşıyıcı ve yan bantlar değişik miktarda sönümlenmeye uğrarlar. Bu etki seçmeli sönümlenme olarak adlandırılır. Seçmeli sönümlenme değişik yanbantları değişik ölçülerde etkiler ve bozulmaya neden olur. Yüksek frekanslarda seçmeli sönümlenme daha şiddetli olduğundan bu frekanslarda ÇYB modülasyonu taşıyıcılı GM'ye yeğlenir.

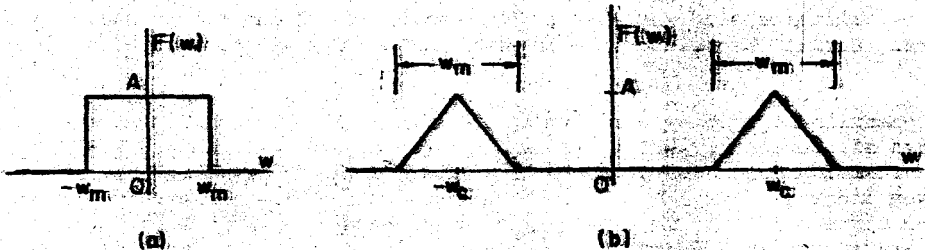
## ALİŞTIRMALAR

- 4.1. Şekil 4.A.1'de bir dönemli  $f(t)$  işareti verilmiştir. Taşıyıcı genlik modülasyonu için, taşıyıcı genliği en az ne olmalıdır? Taşıyıcı frekansı 100 KHz olduğunda, bu taşıyıcı genliği için GM dalgabıçımını kabaca çiziniz. Bu GM dalgasının frekans görünüşünü bulunuz. Daha sonra buna karşılık gelen ÇYB dalgasını kabaca çiziniz ve frekans görünüşünü bulunuz.



Şekil 4.A.1

- 4.2. Bir GM işareti  $10^{-3} \cos(2\pi \cdot 10^6 t)$  voltluk taşıyıcı gerilimi ile  $[100 \cos(2\pi \cdot 10^3 t) + 400 \cos(2\pi \cdot 10^3 t)] \cos(2\pi \cdot 10^6 t)$  voltluk geriliminin toplamından oluşmaktadır.
- (a) GM işaretinin frekans görünüşünü çiziniz.
- (b) Bu GM işaretinin 1 KΩ luk bir yükte açığa çıkacağı gücün tepe değeri nedir?
- (c) 1 KΩ luk yükte açığa çıkan ortalama güç (bir modülasyon döneminde) nedir?
- 4.3.  $\omega_m$  rad/san'ya bantsız aralı bir  $f(t)$  işareti düğünün  $F^2(t)$  işareti de bant sınırlıdır, öyleyse üst en yüksek frekans nedir? Genel olarak,  $F^2(t)$ 'nin görünüşüne ilişkin ne söylenebilir? (İpucu: Frekans katlanması teoremini kullanınız.) Frekans görünüşleri Şekil 4.A.2'de verilen işaretlerin karalarının frekans görünüşlerini bulunuz ve çiziniz.



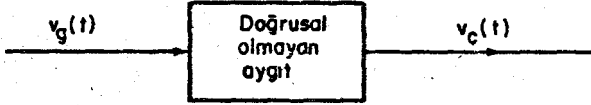
Şekil 4.A.2

- 4.4.  $c(t) = [1 + f(t)] \cos \omega_0 t$  işareti bir kare-kuralı demodülatör ile demodüle edilmektedir. Demodülatörün özegrisi  $v_c = v_g^2$  dir. Bilgi işareti  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü Şekil 4.A.2a'da verilmiştir. (Burada zarfın bozulmaması için  $A = \frac{\pi}{\omega_m}$  varsayınız.) Demodülatör çıkışının frekans görünüşünü bulunuz ve çiziniz.
- 4.5. Aşağıdaki gibi bir sonlu Fourier serisi ile ifade edilebilen bir bant sınırlı  $f(t)$  işaretini düşünün

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^M |c_n| \cos(\omega_n t + \theta_n) ; \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

$f(t)$  nin en büyük frekans bileşeni  $f_M = M/T$  dir.

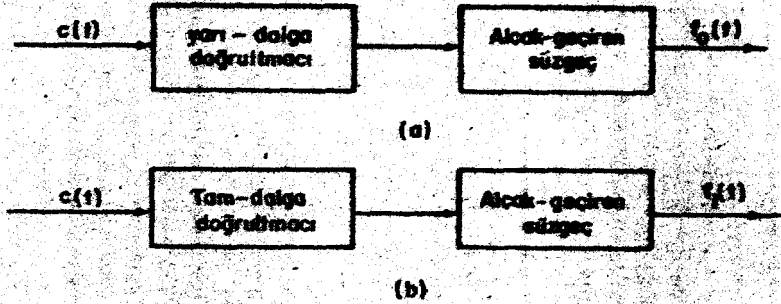
- (a) Böyle bir  $f(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz. Daha sonra  $f^2(t)$  nin frekans bileşenlerini belirleyiniz.
- (b)  $f^2(t)$  nin en yüksek frekans bileşeni nedir?
- 4.6. Şekil 4.A.3'de bir doğrusal-olmayan aygıt gösterilmiştir. Bu aygıtın geçiş özegrisinde en çok üçüncü derece terimi vardır ve



Şekil 4.A.3

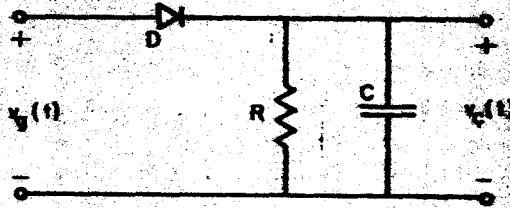
$v_c = a_1 v_g + a_2 v_g^2 + a_3 v_g^3$  olarak verilmektedir. Bu aygıtın girişine  $v_g = f(t) + \cos \omega_0 t$  işareti uygulandığında, çıktının zaman bölgesi ifadesini bulunuz ve frekans görünüşü çiziniz. Bu aygıtın sonra bazı süzgeç ve çarpıcılar kullanılarak  $f(t) \cos \omega_0 t$  yi elde edebilir miyiz?

- 4.7.  $c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t$  GM dalgabiçimi bir ortalama zarf sezici (Şekil 4.A.4a) kullanılarak demodüle edilebilir. Aynı dalgabiçimi Şekil 4.A.4b'de verilen demodülatör kullanılarak da demodüle edilebilir. Her iki AGS'yi kazançları bir ve evre kayması vermeyen düşüncel süzgeçler olarak düşününüz.
- (a)  $f_0(t)$  yi bulunuz.
- (b)  $f_1(t)$  yi bulunuz.
- (c) Her iki durumda demodülatörlerin istenildiği gibi çalışması için,  $\omega_0$  ve  $\omega_m$  hangi koşulları (eğer varsa) sağlamalıdır?



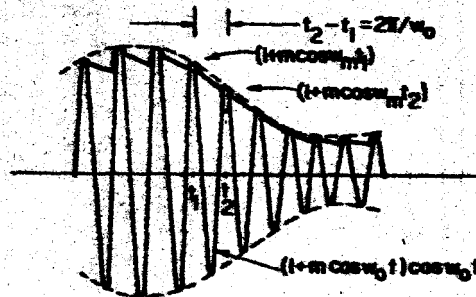
Şekil 4.A.4

- 4.8. Şekil 4.A.5 de verilen zarf sezici kullanılarak  $c(t) = (1 + f(t)) \cos \omega_0 t$  CM işareti demodüle edilecektir. Burada  $f(t)$  bilgi işareti 0 ve -0.5 volt değerlerini alan bir kare dalgadır. Bu kare dalganın dömesi T taşıyıcının dömesine  $(1/f_0)$  göre çok büyüktür.  $(T \gg 1/f_0)$ .  $RC = T/20$  ve  $RC = 4T$  değerleri için zarf sezicinin çıktısını çiziniz.



Şekil 4.A.5

- 4.9.  $v(t) = (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$  işareti Şekil 4.A.5'deki zarf sezici kullanılarak demodüle edilecektir.  $m = 2$  için demodülatörün çıktısını çiziniz.
- 4.10. (a)  $v(t) = (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$  işareti Şekil 4.A.5'deki zarf sezicinin girişine uygulanmaktadır ve  $m < 1$  dir.



Şekil 4.A.6

Herhangi bir  $t_0$  anında, demodülatör çıktısının  $v(t)$  nin zarfını izlemesi için

$$\frac{1}{RC} > \omega_m \left( \frac{m \sin \omega_m t_0}{1 + m \cos \omega_m t_0} \right)$$

bağıntısının sağlanması gerektiğini gösteriniz. (Şekil 4.A.6'ya bakınız.)

- (b) Yukarıda bulunan eşitsizliğin sağ tarafının en büyük değerine  $\cos \omega_m t_0 = -m$  olduğunda erişeceğini gösteriniz.
- (c) Yukarıdaki sonuçları kullanarak demodülatör çıktısının her zaman  $v(t)$  nin zarfını izleyebilmesi için modülasyon derecesi  $m$  nin

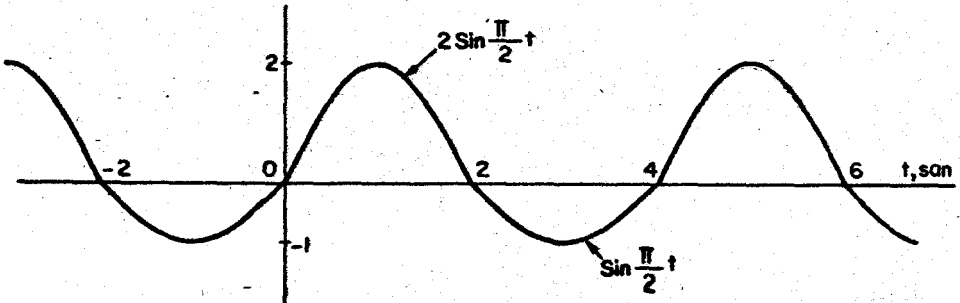
$$m_0 = \frac{RC \omega_m}{\sqrt{1 + (RC \omega_m)^2}}$$

ile bulunan bir  $m_0$  değerine eşit ya da daha az olması gerektiğini gösteriniz..

4.11. Bir zarf sezicinin girişine  $f(t) \cos \omega_0 t$  işareti uygulanmaktadır. Burada  $f(t)$  her zaman artı olan bir işarettir.

- (a) Zarf sezicinin çıktısı neye eşittir?
- (b)  $f(t)$  nin ortalama gücüne bağlı olarak, girdinin ortalama gücü nedir?
- (c) Çıktının ortalama gücü nedir?
- (d) Sonuçlarda herhangi bir uyumsuzluk var mı? Açıklayınız.

4.12. Frekansı  $10^6$  rad/san olan bir taşıyıcının genliği Şekil 4.A.7'de verilen işaret ile modüle edilecektir.

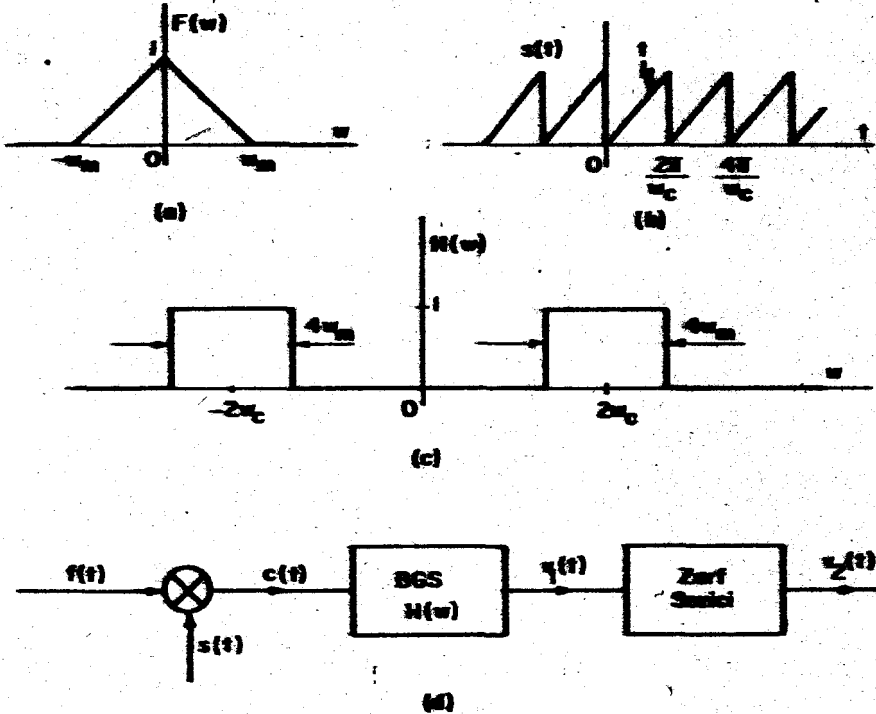


Şekil 4.A.7



- (a) ÇTB modülasyonu için, modüle edilmiş dalgabüçümünü çiziniz.
- (b) (a) kısmında elde edilen ÇTB modüle edilmiş dalgabüçümünü bir zarf sezicisine girişine uyguluyoruz. Zarf sezicisinin çıktısını çiziniz.
- (c) Daha sonra ÇTB modüle edilmiş dalgaya, bir taşıyıcı terimi eklenerek normal CN dalgası elde ediliyor. Bu dalganın bir zarf sezici ile demodüle edilebilmesi için taşıyıcı terimi en az ne olmalıdır?
- (d) (c) kısmında elde edilen CN dalgabüçümünü için zarf sezicisinin çıktısını çiziniz.

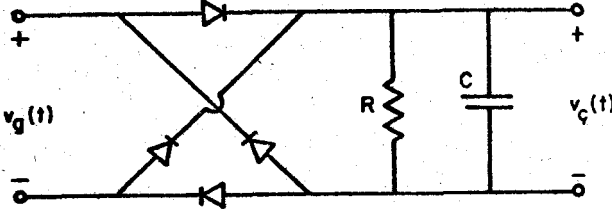
4.13. Şekil 4.A.8a'da verilen dikeyi düşününüz.  $F(\omega)$  nin frekans görünüşü  $F(\omega)$  Şekil 4.A.8a'da verilmiştir. Bilenli  $s(t)$  işlevi ve bant-geçiren süzgecin frekans görünüşü Şekil 4.A.8b ve c'de verilmiştir.  $\omega_c > \omega_m$  varsayınız.



Şekil 4.A.8

- (a)  $c(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz.
- (b)  $v_1(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz.
- (c)  $v_2(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz.

- 4.14. Bir zarf sezicideki diyot yerine bir diyot köprü devresi konularak Şekil 4.A.9 daki devre elde ediliyor. Bu devre ile zarf seziciyi karşılaştırınız. İkisinin ortak olan yönlerini ve birinin ötekine olan üstünlüklerini belirtiniz.



Şekil 4.A.9

- 4.15. Bir ÇYB işareti  $c(t) = f(t)\cos\omega_1 t$  olarak verilmektedir. Burada  $\omega_1$  taşıyıcı frekansdır. Taşıyıcı frekansının  $\omega_1$  den  $\omega_2$  ye değiştirilmesi istenmektedir. (Bu işlem frekans çevrimi olarak bilinir.) Dengeli modülatörde  $f(t)\cos\omega_1 t$  ve  $\cos(\omega_1 + \omega_2)t$  işareti ile uygun süzgeçler kullanarak bu işlemin gerçekleştirilebileceğini gösteriniz.
- 4.16. Şekil 4.A.10 da gösterilen dizge GM işaretlerini (modülasyon derecesi 1 den küçük) demodüle etmekte kullanılmaktadır. Bu demodülatördeki alçak geçiren süzgecin kesim frekansının en az  $2\omega_m$



Şekil 4.A.10

olması gerektiğini gösteriniz. Burada  $\omega_m$ , bilgi işareti  $f(t)$  nin en yüksek frekansdır. Yukarıdaki demodülatörün, genel olarak, taşıyıcısı bastırılmış GM (ÇYB) işaretlerini demodüle edemeyeceğini gösteriniz.

Modülasyon derecesi çok küçük olduğunda kare kök alıcı birim kaldırılabilir mi?

- 4.17. İki bilgi işaretinin aynı anda gönderilmesi stereo yayın olarak adlandırılır. Uygulamada kullanılan stereo Bölüm 6 da tartışılmıştır. Bu bölümde uygulamada kullanılmayan, çeşitli kuramsal stereo dizgeleri ile ilgili alıştırmalar verilmiştir.

Bir stereo yayın istasyonu

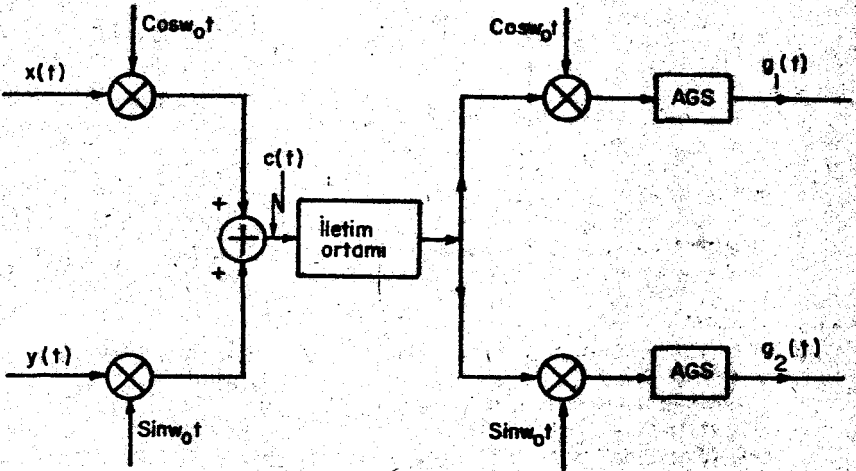
$x(t) \rightarrow$  sağ kanal

$y(t) \rightarrow$  sol kanal

işaretlerini göndermektedir. Frekansları aynı, evreleri  $90^\circ$  farklı iki taşıyıcının genlikleri  $x(t)$  ve  $y(t)$  işaretleri ile modüle ediliyor. Bu işlem dördün çoklama olarak adlandırılır. Gönderilen işaret

$$c(t) = x(t)\cos\omega_0 t + y(t)\sin\omega_0 t$$

olarak ifade ediliyor. Almacıta eşzamanlı demodülasyon kullanılarak  $x(t)$  ve  $y(t)$  geri elde edilmek isteniyor. Burada  $x(t)$  ve  $y(t)$  işaretlerinin aynı frekansa bantlı temelbant işaretleri olduğu varsayılırsa,  $x(t)\cos\omega_0 t$  ve  $y(t)\sin\omega_0 t$  modüle edilmiş işaretlerin aynı frekans bandını kapsadığı görülür. Aynı bantı kapsayan iki ayrı modüle edilmiş işaretin toplamından,  $x(t)$  ve  $y(t)$  modüle eden işaretlerinin ayrı ayrı geri elde edilebilmeleri bu alıştırma incelenecektir. Şekil 4.A.11'de bu tür bir stereo dizgesi gösterilmiştir.  $g_1(t)$  ve  $g_2(t)$  işaretlerinin neye eşit olduklarını bulunuz.



Şekil 4.A.11

- 4.18. (Bu alıştırma da bir kuramsal stereo dizgesi düşünülmüştür.)  $x(t)$  ve  $y(t)$  işaretlerinin her ikisinin de frekans bileşenleri  $2\pi \cdot 30$  rad/san ile  $2\pi \cdot 10^4$  rad/san arasındadır. İstasyonun yayınladığı işaret

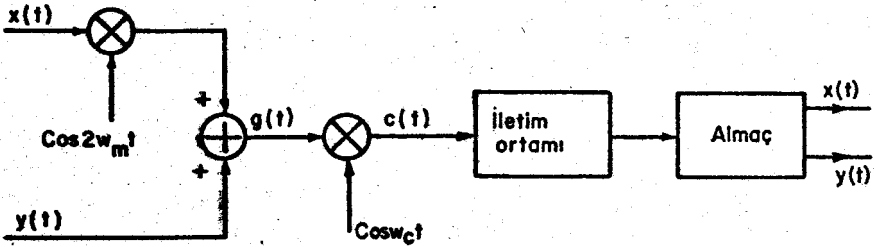
$$c(t) = [A + x(t) + y(t)]\cos\omega_0 t + [A + x(t) - y(t)]\sin\omega_0 t$$

şeklinde dir. Burada  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6$  rad/san ve  $A \gg [ |x(t)| + |y(t)| ]$  dir.

- (a) Ayrı çıktılarda  $x(t)$  ve  $y(t)$  yi veren bir almaç tasarımı yaparak öbek çizimini yapınız. Gönderilen dalgaının frekansının ve evresinin almaçta bilindiğini varsayınız.

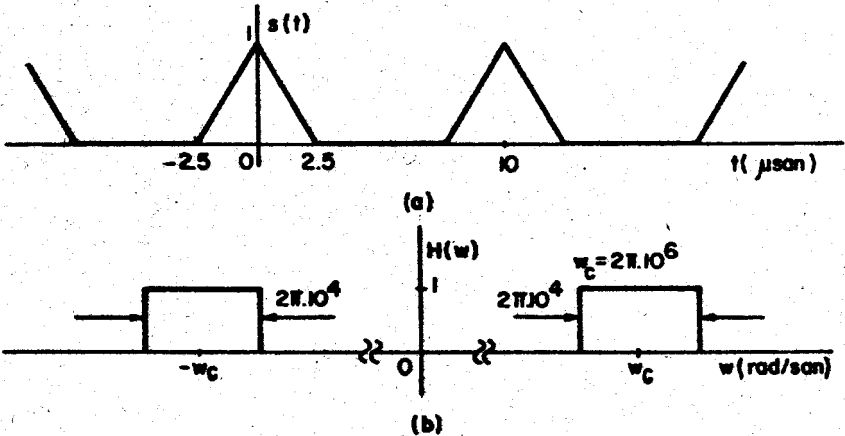
- (b) Bir zarf seziciden oluşan bir almaçın çıktısını bulunuz. ( $A$ 'nın büyük olması varsayımını kullanınız).

- 4.19. Şekil 4.A.12'de verilen dizgeyi düşününüz. (Bu stereo dizgesi de kuramsaldır.)  $x(t)$  ve  $y(t)$  işaretleri  $\omega_m$  ye bant sınırılıdır.  $\omega_c > \omega_m$  varsayınız.



Şekil 4.A.12

- (a)  $g(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz.
- (b)  $c(t)$  nin frekans görünüşünü çiziniz.
- (c)  $x(t)$  ve  $y(t)$  yi iki ayrı çıktı olarak veren bir almaç tasarlayınız ve öbek çizimini yapınız.
- 4.20. Alıştırma 4.2 de verilen modüle edilmiş dalgabıçımının taşıyıcısı bastırılmaktadır. Bu durum için Alıştırma 4.2 yi yeniden çözünüz.
- 4.21. Bir sinuzoidal dalga bozulmuş  $\cos\omega_0 t + a\cos^3\omega_0 t$  olarak elimizde vardır. Bilgi işareti  $f(t)$  ile bu bozulmuş taşıyıcı dalga  $\cos\omega_0 t + a\cos^3\omega_0 t$  çarpılmaktadır.  $f(t)(\cos\omega_0 t + a\cos^3\omega_0 t)$  çarpımının frekans görünüşünü bulunuz ve çiziniz. Bu çarpımdan  $f(t)\cos\omega_0 t$  elde edilebilir mi?
- 4.22. 5 KHz'e bant sınırlı bir bilgi işareti  $f(t)$  ile Şekil 4.A.13a'da gösterilen bir dönemli üçgen dalga çarpılmaktadır. Çarpımın frekans görünüşünü bulunuz ve çiziniz. Çarpım, merkez frekansı 100 KHz olan bir düzgel bant-geçiren süzgeçten (Şekil 4.A.13b) geçirilerek modüle edilmiş işaret elde edilmektedir. Bu süzgecin çıktısı  $Af(t)\cos\omega_0 t$  ise A değişmezi neye eşittir?



Şekil 4.A.13

4.23. Şekil 4.16 da verilen genelleştirilmiş bir kıyıcı demodülatörü ile  $f(t)\cos\omega_0 t$  işareti de demodüle edilebilir. Bu demodülatörde  $s(t)$  nin dönmesi  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  olduğunda da demodülasyon işleminin yapılabilceğini gösteriniz. (Burada  $\omega_0$  tamsayıdır).  $10^4$  rad/san'ye bağımsız bir  $f(t)$  işareti ve  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6$  rad/san için kullanılacak en büyük  $n$  değeri nedir? Bunu  $n \frac{2\pi}{\omega_0}$  olan  $s(t)$  dönme işareti hangi koşulları sağlar?

4.24. Bir dengeli modülasyonda doğrusal-olmayan özgenin  $v-1$  işareti

$$i = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3$$

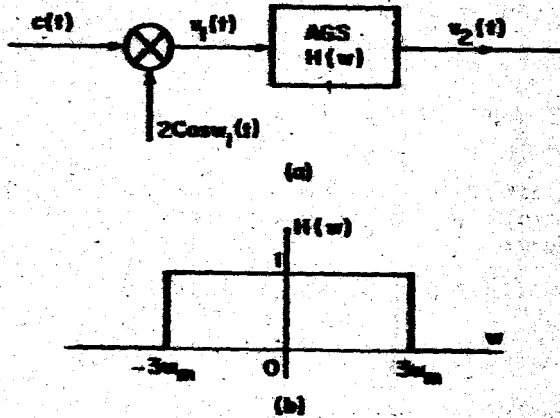
olarak verilmektedir. Çıktıyı bulunuz.

4.25. Bir ÇB işareti

$$c(t) = (\cos\omega_1 t + a \cos\omega_2 t) \cos\omega_0 t$$

Şekil 4.A.14 de verilen demodülatörün girişine uygulanmaktadır. Aşağıda verilen  $\omega_1$  değerleri için  $v_1(t)$  ve  $v_2(t)$  işaretlerini bulunuz ve sonuçları tartışınız.

(a)  $\omega_1 = \omega_0$       (b)  $\omega_1 = \omega_0 - 3\omega_m$



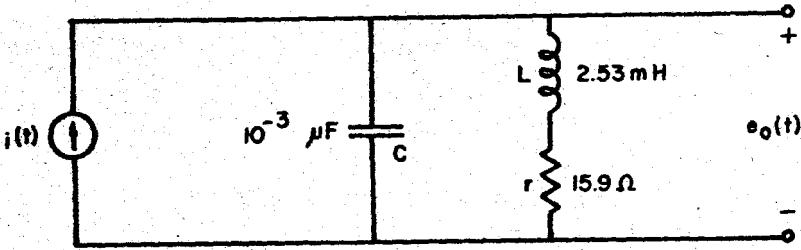
Şekil 4.A.14

4.26. Şekil 4.A.15 de verilen tank devresinin girişine  $i(t) = (1 + 0.5 \cos 2\pi \cdot 10^3 t) \cos 2\pi \cdot 10^5 t$  amper akımı uygulanmaktadır.

(a) Tank devresi üzerinde oluşan  $e_0(t)$  gerilimini bulunuz. Bunun modülasyon derecesi nedir?

(b) Bilgi işaretinin frekansı 2 kHz'e çıkarınca  $e_0(t)$  ne olur?

(İpucu: Şekil 4.A.15 de verilen tank devresi,  $R, L, C$  nin koşt olduğu tank devresine eşdeğerdir.  $L$  ve  $C$  değerleri aynıdır.  $R = Q_L^2 r$  dir. Bu eşdeğerlik  $Q_L = \frac{\omega L}{r} > 10$  için geçerlidir.)



Şekil 4.A.15 Bir tank devresi

4.27. Köprü devresi ölçmelerde çok sık kullanılan bir devredir. Şekil 4.A.16'da gösterilen köprü devresinde üç değişmez direnç vardır ve değerleri şekilde verilmiştir. Dördüncü direnç ise ölçülecek niceliğe (örneğin ısı, gerginlik) bağlı olarak doğrusal değişen bir dirençtir. Bu direncin ortalama değeri  $KR$  dir ve direnç değeri şu şekilde ifade edilebilir:

$$R_x(t) = KR [1 + \alpha f(t)]$$

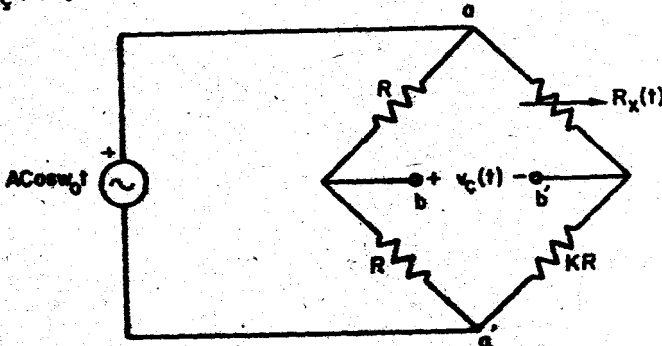
Burada  $f(t)$  ölçülecek niceliktir (örneğin ısı, gerginlik) ve  $|\alpha f(t)| \ll 1$  dir.

$aa'$  uçları arasına bir sinüzoidal gerilim kaynağı,  $A \cos \omega_0 t$  volt uygulanmaktadır.  $bb'$  uçları arasında oluşan çıkış gerilimini bulunuz? (İpucu:

$$\left[ 1 + \frac{\alpha}{2} f(t) \right]^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{2} f(t)$$

yaklaşmasını kullanınız.)

$v_c(t)$  yi kullanarak  $f(t)$  yi nasıl elde edebilirsiniz?



# BÖLÜM 5

## TEK YAN BANT MODÜLASYONU VE ARTIK YAN BANT MODÜLASYONU

Bir önceki bölümde genlik modülasyonunun dört türü olduğundan söz edilmiş ve taşıyıcılı GM ile taşıyıcısı bastırılmış GM yani ÇYB modülasyonu türleri incelenmişti. Bu iki modülasyon türünde taşıyıcı olarak adlandırılan sinüzoidal dalganın genliği bilgi işareti  $f(t)$  ye bağlı olarak değiştiriliyordu. Bu bölümde genlik modülasyonunun diğer iki türü, tek yan bant (TYB) modülasyonu ve artık yan bant (AYB) modülasyonu incelenecektir. TYB ve AYB modülasyonu işaretleri genliği modüle edilmiş GM dalgabıçımından bir doğrusal işlem yoluyla elde edilebilir. Bu nedenle TYB ve AYB, genlik modülasyonu türleri olarak sınıflandırılırlar.

### 5.1. TEK YAN BANT (TYB) MODOLASYONU

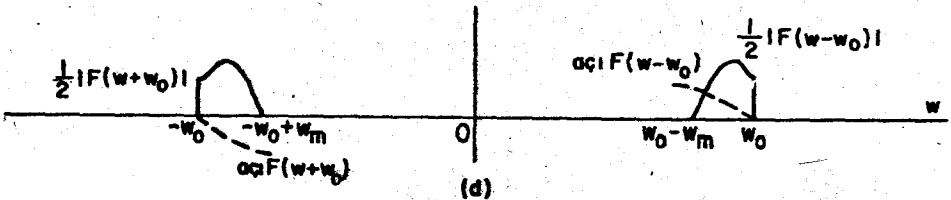
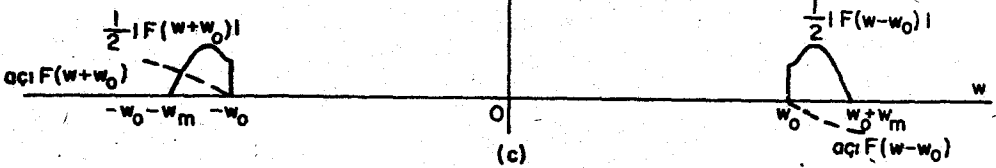
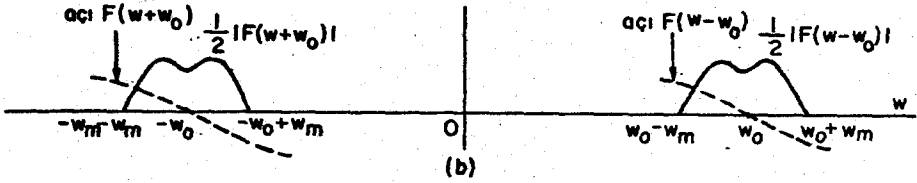
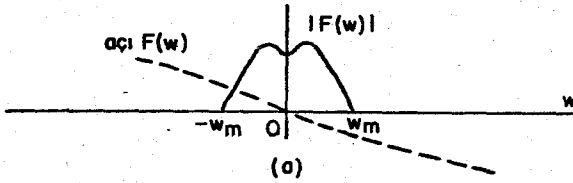
Taşıyıcılı GM'de taşıyıcının iletimi için çok fazla güç harcadığından söz edilmişti. Taşıyıcı hiç bir bilgi taşımaz. Bu nedenle taşıyıcının bastırılmasıyla, gönderilen güçte önemli bir azaltma yapılabilir. Bu yaklaşımdan giderek elde edilen modülasyon türü ÇYB modülasyonudur. ve bu bir önceki bölümde incelenmiştir. Bilgi iletim sığasını etkilemeden gönderilen gücün daha da azaltılabileceği bu bölümde gösterilecektir.

Bölüm 2'de gerçel bir  $f(t)$  nin görüngesi  $F(\omega)$  nin aşağıdaki koşulları sağladığı görülmüştü:

- i.  $|F(\omega)|$  işlevi  $\omega$  ya göre çift işlevdir.
- ii. aç  $F(\omega)$  işlevi  $\omega$  ya göre tek işlevdir.

Buna göre,  $F(\omega)$ ,  $\omega > 0$  (ya da  $\omega < 0$ ) değerleri için biliniyorsa, bütün diğer  $\omega$  değerleri için de bulunabilir. Diğer bir deyişle bilgi işareti  $f(t)$ , artı (ya da eksi) frekanslar üzerindeki görüğe kullanılarak, tek olarak belirlenir. Bu düşünceyi bir adım daha ileri götürerek şu sonuca varabiliriz. Genlik modülasyonu sadece  $F(\omega)$  nın  $\omega_0$  ve  $-\omega_0$  a kaydırılması olduğundan ( $\omega_0$  daki taşıyıcı ile ya da taşıyıcısız), yalnız üst yan bant, yani genliği modüle edilmiş dalgabıçımının görüncesinin yalnız  $|\omega| > \omega_0$  daki bölümü  $f(t)$  işaretini belirler. Benzer biçimde alt yan bant, yani genliği modüle edilmiş işaretin görüncesinin  $|\omega| < \omega_0$  daki bölümü de,  $f(t)$  yi belirlemekte gerekli tüm bilgiyi taşır.

Bu nedenle, kuramsal olarak genliği modüle edilmiş işaretin görüncesindeki bir tek yan bantı (üst yan bant ya da alt yan bant) göndererek bilgi işareti  $f(t)$  yi göndermek olasıdır. Bunun sonucunda ortaya çıkan modülasyon tekniği tek yan bant (TYB) modülasyonu diye adlandırılır. Genliği modüle edilmiş işaretin çift yan bant (ÇYB) modüle edilmiş bir işaret olduğunu varsayalım. Şekil 5.1'de ÇYB işaretinin görüncesi ile üst yan bant ve alt yan bant işaretlerinin görünceleri verilmiştir.



Şekil 5.1 Frekans görünceleri (a) Temel-bant (b) Çift yan bant (c) Üst yan bant (d) Alt yan bant.



TYB modülasyonunda yan bantlardan yalnız biri gönderildiğinden ÇYB modülasyonu ile karşılaştırıldığında gönderilen güç yarıya iner. Bu TYB nin ÇYB ye göre en önemli üstünlüğüdür. TYB nin diğer önemli bir üstünlüğü de bantgenişliğindeki azalmadır. Temel-bant işareti  $\omega_m$  ye sınırlı ise, Şekil 5.1b'den de görülebileceği gibi, ÇYB modüle edilmiş  $f(t)\cos\omega_0 t$  işaretinin bantgenişliği  $2\omega_m$  dir. Yan bantlardan yalnız bir tanesi gönderildiğinden TYB modüle edilmiş işaretin bantgenişliği ise  $\omega_m$  dir ve bu ÇYB modüle edilmiş işaretin bantgenişliğinin yarısıdır. Elektromanyetik görüngenin sınırlı olması ve birçok kullanıcının bu görüngeneyi paylaşmak zorunda olması nedeniyle bu üstünlük çok önemlidir.

ÇYB modüle edilmiş dalgabiçimi ile karşılaştırıldığında, TYB modüle edilmiş dalgabiçiminde gönderilen güç ve bantgenişliği yarıya iner. Yukarıda da belirtildiği gibi, TYB ilke olarak yapılabilir bir modülasyon tekniğidir. Bilgi işareti  $f(t)$  TYB modüle edilerek ilettime uygun bir biçime konur ve iletilir. Diğer yandan alıcı Şekil 5.1 den de görüldüğü gibi  $f(t)$  bilgi işareti kuramsal olarak TYB modüle edilmiş dalgabiçiminden geri elde edilir. Ancak TYB modülasyonunun uygulanabilirliği açısından şu soruların yanıtlanması gerekir:

1. TYB modüle edilmiş dalgabiçimi nasıl üretilir?
2. TYB modüle edilmiş dalgabiçiminin (hem üst yan bant, hem alt yan bant işaretlerinin) zaman bölgesi gösterimi nasıldır? Örneğin  $f(t)$  bilgi işareti ise ÇYB modüle edilmiş dalgabiçimi  $f(t)\cos\omega_0 t$  dir. Görüngeneye bakarak TYB modüle edilmiş dalgabiçiminin zaman bölgesi gösteriminin ne olduğunu söylemek olanaksızdır.
3. TYB modüle edilmiş dalgabiçimi nasıl demodüle edilir ve bilgi işareti  $f(t)$  nasıl geri elde edilir?

Bundan sonraki iki altbölümde bu soruların yanıtları tartışılacaktır.

## 5.2. TYB MODÜLE EDİLMİŞ DALGABIÇİMİNİN ÜRETİMİ

Şu anda TYB modüle edilmiş dalgabiçiminin zaman bölgesi gösterimini bilmiyoruz. Ancak görüngeninin ne olduğunu bildiğimizden, TYB modüle edilmiş işareti üretmekte kullanılan teknikleri inceleyebiliriz. Modülasyon teknikleri araştırılırken, TYB modüle edilmiş işaretlerin zaman bölgesi gösterimleri de elde edilecektir.

TYB modüle edilmiş dalgabiçiminin üretiminde başlıca iki yöntem vardır:

1. Süzgeç yöntemi
2. Evre kaydırma (ya da Hilbert dönüşümü) yöntemi

Süzgeç yöntemi ve bunun çözümülemesi çok basittir ve TYB işareti üretiminde en yaygın kullanılan yöntem de budur. Evre kaydırma yönteminin uygulamasında bazı güçlükler ortaya çıkar. Ancak evre kaydırma yönteminin incelenmesi öğreticidir ve bu yöntemin incelenmesi sırasında TYB modüle edilmiş dalgabiçiminin zaman bölgesi gösterimi elde edilecektir.

## Süzgeç Yöntemi

TYB modüle edilmiş işareti üretirken, yapılması gereken, ÇYB modüle edilmiş işaretin yan bantlarından birisini süzüp almaktır (Şekil 5.1'e bakınız). ÇYB modüle edilmiş işaret bir band geçiren süzgeçten geçirilir; istenilen yan bantın geçmesine izin verilir ve diğeri süzülüp atılır. Bu işlemi yapacak süzgecin özgeğrisi düşüncel süzgeç özgeğrisine yakın olmalıdır. Özellikle  $\omega_0$  daki kesim çok keskin olmalıdır. Bunun nedeni TYB işareti elde etmek için  $\omega_0$  in bir yanındaki frekans bileşenlerinin tümüyle zayıflatılmasının ve diğeri yanındakilerin ise bozulmadan geçirilmesinin gerekli olmasıdır.

Eğer temel-bant bilgi işareti çok düşük frekans bileşenleri varsa, keskin kesimin gerekliliği daha önemli olur.  $f(t)$  nin düşük frekans bileşenleri yoksa süzgeç üzerindeki kısıtlamalar o kadar katı olmayabilir. Örneğin  $f(t)$  bir konuşma işareti ise,  $f(t)$  deki en düşük frekans bileşeni 300 Hz varsayılabilir. Buna göre  $\omega_0$  daki kesim için 600 Hz lik bir bant vardır. Bir başka deyişle, kesim  $\omega_0 - 2\pi \cdot 300$  ile  $\omega_0 + 2\pi \cdot 300$  arasında olmalıdır; bu ise katı bir kısıtlama değildir.

Üst yan bant işareti üretilecek istenirse, süzgecin alt kesim frekansı  $\omega_0$  olmalıdır. Alt yan bant işareti üretilecek istendiğinde ise süzgecin üst kesim frekansı  $\omega_0$  olmalıdır.  $\omega_0$  da olmayan diğeri kesimin ise keskin olması gerekmez. Günümüzdeki kristal teknolojisi sayesinde, özgeğrisi düşüncel özgeğriselere çok yakın bant geçiren süzgeçler elde etmek olasıdır.

Normal olarak ÇYB modüle edilmiş işarete bir taşıyıcı yoktur. Ancak taşıyıcı terimi tümüyle dengelenip atılmamışsa, zayıf da olsa,  $\omega_0$  da taşıyıcı sayılabilecek bir sinüzoidal olur. Bu tamamen bastırılmamış taşıyıcı ise tek yan bant süzgeci ile daha da zayıflatılmış olur. Böylece tek yan bant süzgeci istenilmeyen taşıyıcı terimini zayıflatmaya da yarar.

Uygulama açısından; keskin kesimleri olan süzgeçlerin tasarımı alçak frekanslarda daha kolaydır. Bu nedenle ÇYB işareti genellikle önce alçak bir (orta)  $\omega_{01}$  frekansında elde edilir ve yan bantlardan birisi süzülüp atılır. Elde edilen tek yan bant görüngesi bundan sonra istenilen yüksek bir  $\omega_0$  frekansına kaydırılır. Kaydırma işlemi sonucunda bir takım istenmeyen frekans bileşenleri de ortaya çıkar. Daha sonra bu bileşenler bir başka bant geçiren süzgeç kullanılarak yok edilir. Ancak istenmeyen frekanslar istenenlerden uzak olduğundan, bu bant geçiren süzgecin kesimlerinin keskin olması gerekmez. Gerçekte TYB işaretinin istenilen  $\omega_0$  taşıyıcı frekansına kaydırılması, ard arda birkaç basamakta yapılır. Bu durumda keskin kesimli süzgeçlerle tek yan bant süzme işlemi ara frekans düzeylerinde de tekrarlanabilir.

Yukarıda da belirtildiği gibi süzgeç yöntemi TYB işaretinin üretiminde en yaygın kullanılan yöntemdir. Ancak bu yöntemle TYB işaretinin zaman bölgesi gösterimi elde edilemez.

## Evre Kaydırma (Hilbert Dönüşümü) Yöntemi

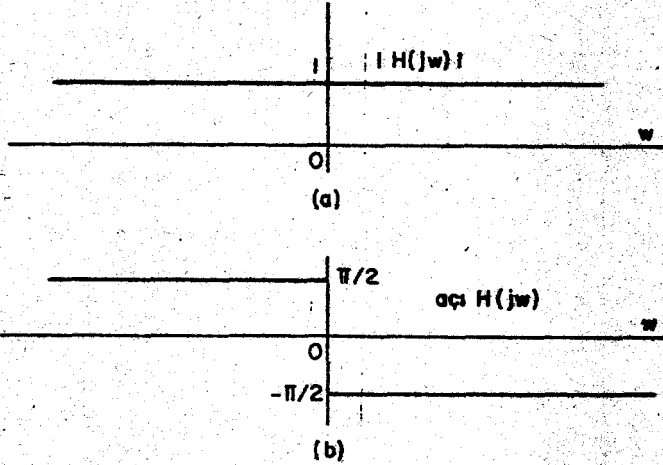
Bu yöntemin çözümlenmesi uzuncadır ve bazı basamaklar arkasındaki mantık açık olmayabilir. Ancak çözümlenmenin sonucunda TYB modüle edil-

miş işaret ve bunun zaman bölgesi gösterimi elde edildikten sonra bu uzun tartışmanın gerekliliği daha iyi anlaşılacaktır.

Bilgi işareti  $f(t)$  nin görünüşü  $F(\omega)$  olsun. Bilgi işareti  $f(t)$  yi karmaşık geçiş işlevi

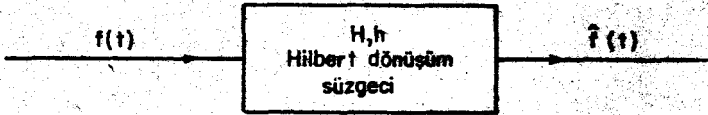
$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5.1)$$

olan bir doğrusal süzgeçten geçirelim. Bu süzgecin büyüklük ve evre özgeçirileri Şekil 5.2'de verilmiştir. Karmaşık geçiş işlevi (5.1)'de verilen bu süzgeç *Hilbert dönüşüm süzgeci* diye adlandırılır. Bir başka deyişle, süzgecin çıktısı girdinin Hilbert dönüşümüdür. Bu süzgecin



Şekil 5.2 Hilbert dönüşüm süzgecinin büyüklük ve evre özgeçirileri

girdisi  $f(t)$  ise,  $f(t)$  nin Hilbert dönüşümü olan çıktı  $\hat{f}(t)$  ile gösterilir ve bunun Fourier dönüşümü ise  $\hat{F}(\omega)$  dir. (Şekil 5.3'e bakınız.)



Şekil 5.3 Hilbert dönüşüm süzgeci

Hilbert dönüşüm süzgeci çıktısının görünüşü şu biçindedir.

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= H(j\omega)F(\omega) \\ &= \begin{cases} -jF(\omega) & \omega > 0 \\ jF(\omega) & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

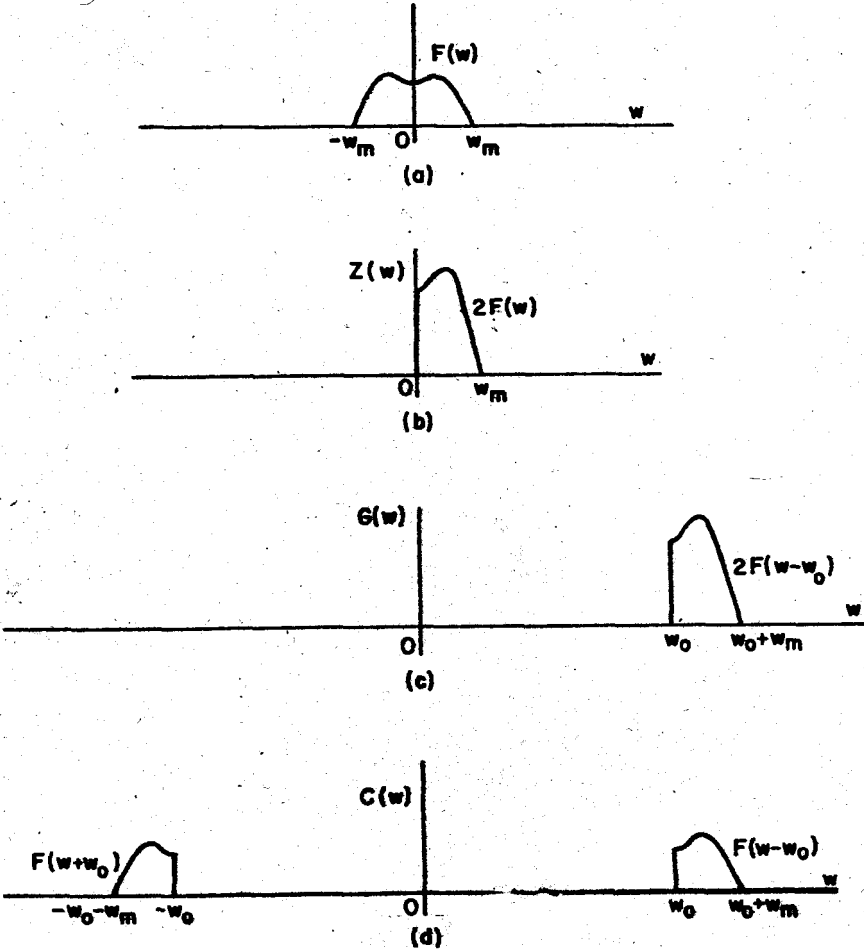
Şimdi bir karmaşık  $z(t)$  işlevi tanımlayalım;

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \quad (5.3)$$

Burada  $\hat{f}(t)$  işlevi  $f(t)$  nin Hilbert dönüşümüdür. Bu yolla oluşturulan karmaşık  $z(t)$  işlevi genellikle *çözümsel işaret* diye adlandırılır. Çözümsel işaretin Fourier dönüşümü şöyle ifade edilebilir.

$$Z(\omega) = F(\omega) + j \begin{cases} -jF(\omega) & \omega > 0 \\ jF(\omega) & \omega < 0 \end{cases} \\ = \begin{cases} 2F(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Çözümsel işaret  $z(t)$  nin yalnız artı frekansları vardır.  $f(t)$  ve  $z(t)$  nin görüngeleri Şekil 5.4'de gösterilmiştir.



Şekil 5.4 TYB işaretin frekans bölgesi çözülmesi

Şekil 5.4'den görülebileceği gibi,  $|Z(\omega)|$  da çift simetri özelliği yoktur. Çözümsel işaret  $z(t)$  gerçel olmadığı için bu beklenen bir sonuçtur.

Çözümsel işaretini  $e^{j\omega_0 t}$  ile çarparak, bu işaretin görünüşünü  $\omega_0$  a kaydıralım.

$$g(t) = z(t)e^{j\omega_0 t} \quad (5.5)$$

$g(t)$  nin görünüşü şu biçimde ifade edilebilir.

$$G(\omega) = Z(\omega - \omega_0) \quad (5.6)$$

$G(\omega)$  görünüşü,  $\omega_0$  a kaydırılmış  $F(\omega)$  nin yan bantlarından birisini içerir ve yalnız artı frekansları vardır. Bu görünüş, artı frekanslar için istediğimiz görünüşdür. Ancak görünüş simetrik değildir ve bu nedende  $g(t)$  zaman işlevi de gerçel değildir.

Şu biçimde bir  $c(t)$  zaman işlevi tanımlayalım.

$$c(t) = G_e [g(t)]$$

$$= \frac{g(t) + g^*(t)}{2} \quad (5.7)$$

$c(t)$  nin görünüşünün, TYB modüle edilmiş dalgabіçiminin istenilen görünüşü olduğunu öne sürelim. Bu önerimizi kanıtlamak için önce (5.7)'nin Fourier dönüşümünü bulalım.

$$C(\omega) = \frac{G(\omega) + G^*(-\omega)}{2} \quad (5.8)$$

$g^*(t)$  nin dönüşümünün  $G^*(-\omega)$  olduğu kolayca gösterilebilir. Değişik frekans bölgelerinde  $C(\omega)$  yı bulalım. (Şekil 5.4c'ye bakınız).

$$1. \omega > \omega_0 : G(\omega) = Z(\omega - \omega_0) = 2F(\omega - \omega_0)$$

$$G^*(-\omega) = 0 \quad (5.9)$$

$$\text{Buna göre } C(\omega) = F(\omega - \omega_0)$$

$$2. \omega < -\omega_0 \text{ (ya da } -\omega > \omega_0)$$

$$G(\omega) = 0$$

$$G^*(-\omega) = F^*(-\omega - \omega_0)$$

$$= 2F^*(-\omega - \omega_0)$$

$$= 2F(\omega + \omega_0) \quad (5.10)$$

$$\text{Buna göre } C(\omega) = F(\omega + \omega_0)$$

$$3. -\omega_0 < \omega < \omega_0$$

$$C(\omega) = 0 -$$

$$C^*(-\omega) = 0 \quad (5.11)$$

ve sonuç olarak  $C(\omega) = 0$  bulunur.

Değişik bölgelerde elde edilen  $C(\omega)$  değerleri birleştirilirse,

$$C(\omega) = \begin{cases} F(\omega + \omega_0) & \omega < -\omega_0 \\ 0 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ F(\omega - \omega_0) & \omega_0 < \omega \end{cases} \quad (5.12)$$

elde edilir. Şekil 5.4d'den de görülebileceği gibi  $C(\omega)$  istemilen TYB işaretini göstermektedir. Bu görüme üst yan bant görüngesidir.

Bu durumda (5.7) ile tanımlanan zaman işlevi  $c(t)$  (üst) TYB işaretinin zaman işlevidir. Daha açık olarak  $c(t)$  zaman işlevi şu biçimde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} c(t) &= Ge [g(t)] = Ge [z(t)e^{j\omega_0 t}] \\ &= Ge\{[f(t) + j\hat{f}(t)] [\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t]\} \\ &= f(t)\cos\omega_0 t - \hat{f}(t)\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (5.13)$$

Bu ifade (üst) TYB modüle edilmiş işaretin zaman bölgesi gösterimidir.

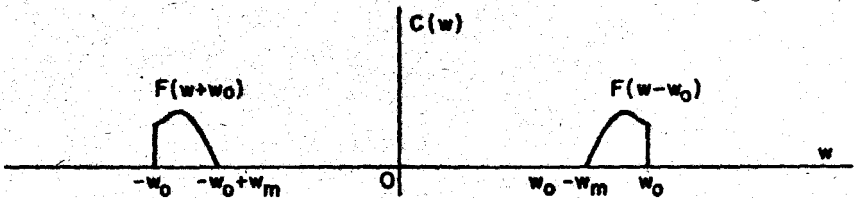
Benzer biçimde çözümsel işaretin karmaşık eşleniği

$$z_1(t) = f(t) - j\hat{f}(t) \quad (5.14)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} c(t) &= Ge [z_1(t)e^{j\omega_0 t}] \\ &= f(t)\cos\omega_0 t + \hat{f}(t)\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (5.15)$$

ile tanımlanan  $c(t)$  nin (alt) TYB modüle edilmiş işaretin zaman bölgesi gösterimi olduğu gösterilebilir. Bunun görüngesi de Şekil 5.5'de gösterilmiştir.



Şekil 5.5 (Alt) TYB işareti görüngesi

Üst ve alt TYB modüle edilmiş işaretlerin zaman bölgesindeki matematiksel gösterimleri (5.13) ve (5.15)'de verilmiştir. Şimdi ortaya çıkan soru şudur: TYB modüle edilmiş  $c(t)$  işareti Hilbert dönüşümü yöntemi kullanılarak nasıl üretilir? Karmaşık  $z(t)$  işaretini üretmek,  $z(t) \cdot e^{-j\omega t}$  nin gerçel kısmını almak gerçekte yapabileceğimiz şeyler değildir. Yapılması gereken, Hilbert dönüşümü  $f(t)$  yi üretmek ve hangi tür TYB işareti isteniyorsa, (5.13) ya da (5.15)'de verildiği biçimde  $f(t)$  ve  $\hat{f}(t)$  nin birleşimlerini oluşturmaktadır.

TYB işaretinin bu yolla üretilmesinde, henüz açıklanmamış olan tek nokta,  $f(t)$  nin Hilbert dönüşümü,  $\hat{f}(t)$  nin nasıl elde edileceğidir. Böyle bir süzgeç gerçekleştirilebilir mi? Bu süzgece fiziksel bir yorum getirebilir miyiz? Şimdi kısaca bu sorulara yanıt arayalım.

Hilbert dönüşüm süzgecinin dürtü tepkisi, (5.1)'de verilen karmaşık geçiş işlevinin evrik Fourier dönüşümü alınarak bulunabilir.

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1} [-j \operatorname{sgn}(\omega)] \\ &= \frac{1}{\pi t} \quad \text{bütün } t \text{ değerleri için} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Buna göre Hilbert dönüşümü  $\hat{f}(t)$  şu biçimde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= h(t) * f(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\tau} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.17)$$

Hilbert dönüşümünün en sık kullanılan tanımı budur. Buna göre kuramsal olarak, dürtü tepkisi (5.17) ile verilen süzgecin çıktısı  $\hat{f}(t)$  dir. Ancak (5.16)'dan da görülebileceği gibi, bu süzgeç fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir süzgeç değildir. Ancak fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir dizge ile bu süzgece çok yakın bir biçimde yaklaştırma yapılabilir. Bu yaklaşım daha önce düşüncel süzgeçlerde kullanılmış ve fiziksel olarak gerçekleştirilemeyen düşüncel süzgeçlere fiziksel olarak gerçekleştirilebilir süzgeçlerle çok yakın bir biçimde yaklaştırma yapılabilceği belirtilmişti.

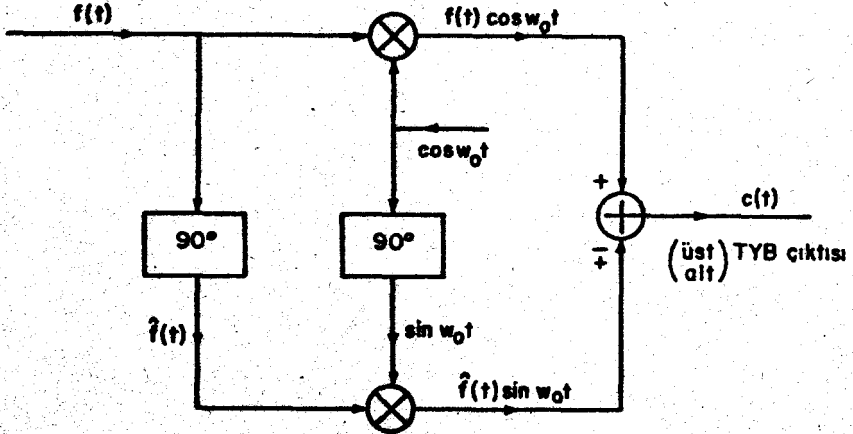
Hilbert dönüşüm süzgecinin fiziksel anlamı nedir? (5.1)'den ve Şekil 5.2'den görüldüğü gibi, Hilbert dönüşüm süzgeci sayıflatma ya da güçlendirme yapmaz; her frekans bileşeninin büyüklüğü değişmeden kalır. Ancak bu süzgeç her frekans bileşenine  $90^\circ$  lik bir evre kayması verir. Bu nedenle  $f(t)$  ye  $\hat{f}(t)$  nin *dördün* işlevi adı da verilir.  $f(t)$  nin her frekans bileşeni ile  $\hat{f}(t)$  de bunlara karşı gelen frekans bileşenleri arasında  $360^\circ$  nin dörtte biri kadar bir evre kayması vardır. Her frekans bileşenine  $90^\circ$  evre kayması vermek,  $f(t)$  yi zaman içinde kaydırmak ya da  $f(t)$  ye sabit bir gecikme vermek demek değildir. Çünkü  $90^\circ$  lik evre her frekans bileşeninde değişik zaman sürelerindeki gecikmelere karşı gelir.

Yukarıda belirtilen gerçekleri kullanarak şu Hilbert dönüşüm çiftleri kolayca elde edilebilir:

$$\begin{aligned} f(t) = \cos \omega_0 t & \rightarrow \hat{f}(t) = \sin \omega_0 t \\ f(t) = \sin \omega_0 t & \rightarrow \hat{f}(t) = -\cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.18)$$

(5.1)'de verilen  $H(j\omega)$  için  $H(j\omega)F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak da bu bağıntılar elde edilebilir.  $f(t)$  nin iki kez Hilbert dönüşümü alınırca  $-f(t)$  bulunur. Her frekans bileşenine ard arda iki kez  $90^\circ$  evre kayması vermek, her frekans bileşenini  $-1$  ile çarpmaya eşdeğerdir. Ancakız açısından gerekmediği için diğer Hilbert dönüşüm çiftleri ve Hilbert dönüşümünün özellikleri üzerinde durmayacağız. Genel olarak  $f(t)$  ve Hilbert dönüşüm  $\hat{f}(t)$  nin zaman dalgabıçimleri birbirine benzemez. (Alıştırma 5.4'e bakınız)

0 halde  $f(t)$  nin her frekans bileşenine  $90^\circ$  evre kayması vererek  $\hat{f}(t)$  bulunur. Daha sonra (5.13) ya da (5.15)'de verilen işaretler oluşturularak TYB işareti elde edilir. Bu ilkeye (yani evre kaydırma yöntemi ya da Hilbert dönüşümü yöntemi) göre çalışan modülatör Şekil 5.6'da gösterilmiştir.



Şekil 5.6 Evre kaydırma yöntemi ile TYB işareti üreten modülatör

Evre kaydırma yöntemi süzgeç yönteminden daha az kullanılır. Bunun nedeni uygulamada evre kaydırma modülatörünün çalışmasında, ortaya çıkan güçlüklerdir. Çarpma işleminin tam olarak gerçekleştirilmesinde güçlükler vardır. Ayrıca oldukça geniş bir bant kaplayan temel-bant işareti  $f(t)$  için, her frekans bileşenine  $90^\circ$  evre kayması vermek kolayca gerçekleştirilebilecek bir iş değildir. Bu sorunların tümü tam olarak ortadan kaldırılmazsa yan bantlardan birisi tümüyle bastırılmaz. Fiziksel dizgelerde, istenilmeyen yan bantın düşük bir düzeyde tutulması kabul edilebilir. Ancak yine de, süzgeç yöntemi daha kolay gerçekleştirilebilir ve bu nedenle daha yaygın olarak kullanılır.

- Bu tartışmayı bitirmeden önce bir nokta daha belirtilmelidir. Süzgeç yöntemi ile elde edilen TYB işaretinin de zaman bölgesi gösterimi



(5.13) ya da (5.15)'deki gibidir. Hangi yöntemle üretilirse üretilsin TYB işaretinin görüngesi aynı olduğundan, Fourier dönüşümünün tek olma özelliği kullanılarak bunlara karşı gelen zaman zaman işlevlerinin de aynı olduğu söylenebilir. Ancak süzgeç yönteminde önce ÇYB işareti  $f(t)\cos\omega_0 t$  elde edilir ve daha sonra bu işaret, bir düşüncel bant geçiren süzgeçten geçirilerek TYB işareti elde edilirse, bu işaretin zaman bölgesi gösterimi

$$f(t)\cos\omega_0 t \mp \hat{f}(t)\sin\omega_0 t \quad (5.19)$$

değildir; bunun yarısına eşittir.

$$c(t) = \frac{f(t)}{2} \cos\omega_0 t \mp \frac{\hat{f}(t)}{2} \sin\omega_0 t \quad (5.20)$$

Bunun nedeni ÇYB işaretinin görüngesinin

$$F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) \quad (5.21)$$

olmayıp

$$C_{\text{ÇYB}}(\omega) = \frac{1}{2} [ F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) ] \quad (5.22)$$

olmasıdır.

**Örnek 5.1.** Bu örnekte, ÇYB işareti ile TYB işaretinin zaman dalgabiçimlerinin genel olarak birbirine benzemediğini ve aralarında gözle izlenebilir açık bir ilişki olmadığı vurgulanacaktır. Bilgi işareti  $f(t)$  yi iki sinuzoidalın toplamı varsayalım.

$$f(t) = \cos 2\pi \cdot 10^3 t + \frac{1}{2} \cos 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t$$

$f(t)$  ile modüle edilmiş, taşıyıcı frekansı  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3$  rad/san olan ÇYB ve TYB işaretlerini düşünelim.  $f(t)$  nin, ÇYB ve TYB işaretlerinin frekans görüngesi Şekil 5.7'de verilmiştir.

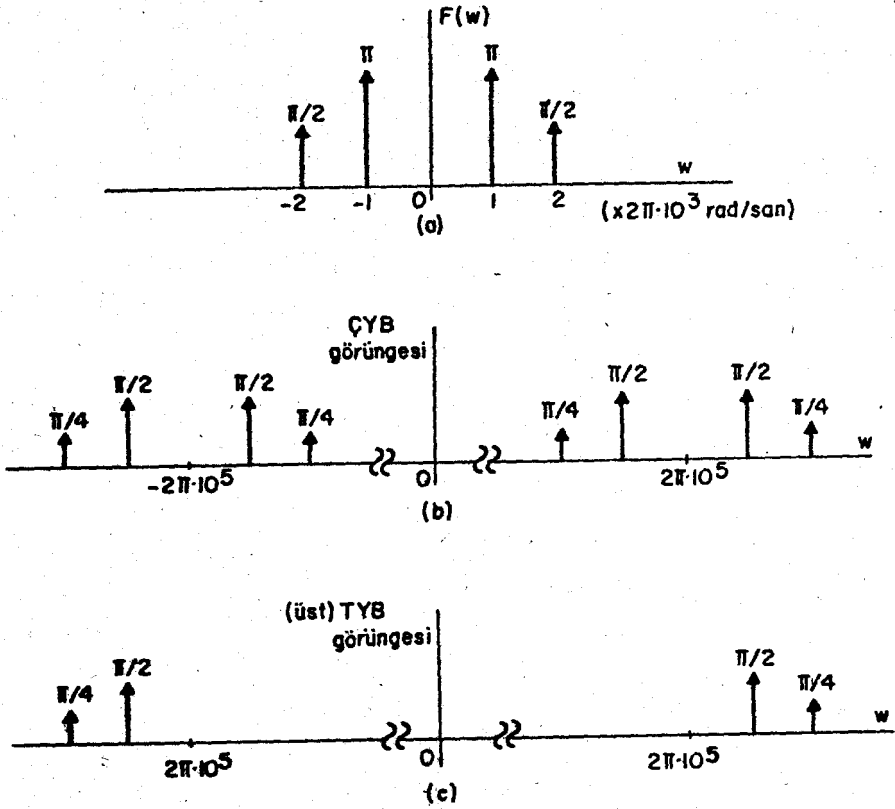
Şekil 5.7'de verilen frekans görüngelerinden, ÇYB ve TYB işaretlerinin zaman bölgesi ifadeleri elde edilebilir.

$$c_{\text{Ç}}(t) = \frac{1}{2} [ \cos 2\pi \cdot 99 \cdot 10^3 t + \cos 2\pi \cdot 101 \cdot 10^3 t ] \\ + \frac{1}{4} [ \cos 2\pi \cdot 98 \cdot 10^3 t + \cos 2\pi \cdot 102 \cdot 10^3 t ]$$

$$c_{\text{T}}(t) = \frac{1}{2} [ \cos 2\pi \cdot 101 \cdot 10^3 t + \frac{1}{4} \cos 2\pi \cdot 102 \cdot 10^3 t ]$$

Bu zaman bölgesi ifadeleri, genel ÇYB ve TYB ifadelerinde  $f(t)$  yerine konarak da kolayca bulunabilir.

Zaman bölgesi gösterimleri yukarıda verilen ÇYB, TYB işaretlerinin zamana karşı çizimi Şekil 5.8'de verilmiştir. Bu basit örnekte de görüldüğü gibi ÇYB işareti ile TYB işareti birbirine benzemezler.



Şekil 5.7  $f(t)$  nin,  $\text{CYB}$  ve  $\text{TYB}$  işaretlerin frekans görüngeleri

Bu örnekte verilen  $\text{CYB}$  ve  $\text{TYB}$  işaretlerinin toplam güçleri, her iki işaretin güç görüğe yoğunlukları bulunarak, elde edilebilir.

$$P_{\text{CYB}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

$$P_{\text{TYB}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

$\text{TYB}$  işareti gücünün,  $\text{CYB}$  işareti gücünün yarısı olacağı zaten bildiğimiz beklenen bir sonuçtur.

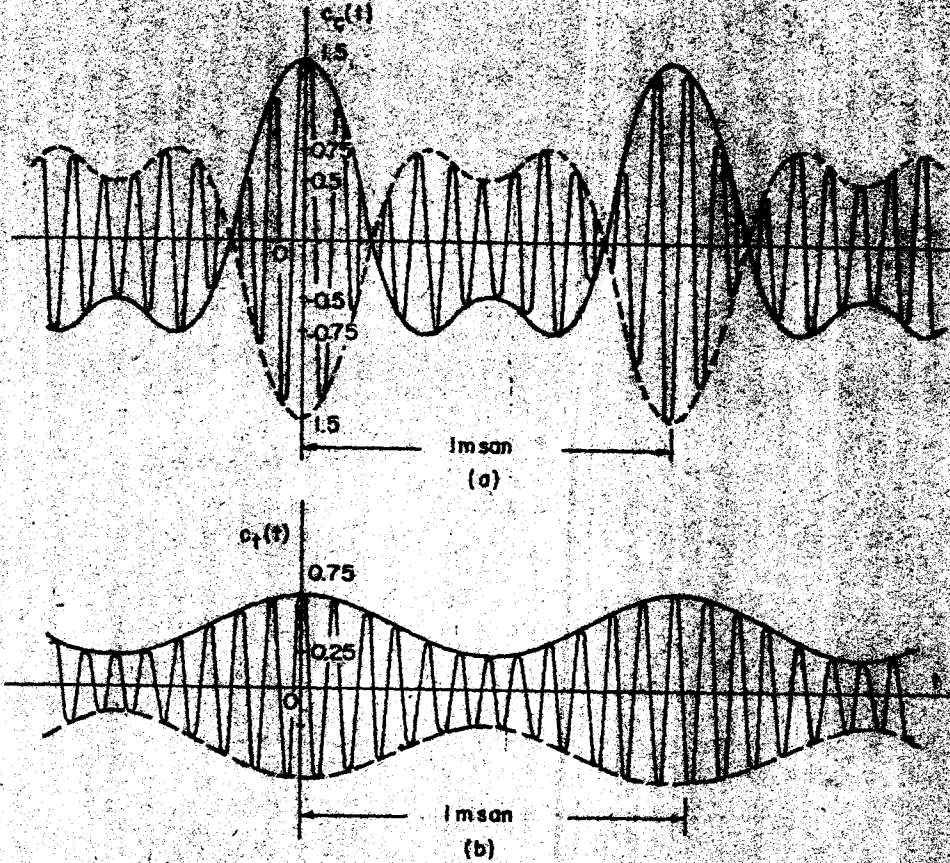
### 5.3. $\text{TYB}$ MODÜLE EDİLMİŞ İŞARETİN DEMODÜLE EDİLMESİ

Burada amaç,  $\text{TYB}$  modüle edilmiş işaret

$$c(t) = f(t)\cos\omega_c t + \hat{f}(t)\sin\omega_c t \quad (5.23)$$

den bilgi işareti  $f(t)$  yi elde etmektir.  $\text{CYB}$  işaretlerinin demodülasyonunda olduğu gibi,  $\text{TYB}$  işaretlerinin demodülasyonunda da yalnızca eşzamanlı demodülasyon yöntemi kullanılabilir.

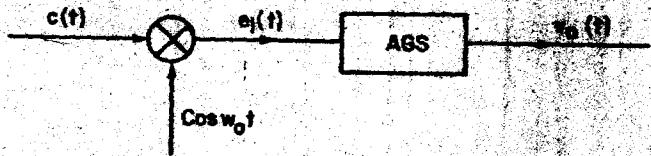
## TYB MODÜLE İZLENİŞ İŞARETİN DEMODÜLE EDİLMESİ



Şekil 5.8 ÇYB ve TYB işaretlerinin zaman dalgabünyeleri

### Eşzamanlı Demodülasyon

Eşzamanlı demodülasyon için Şekil 5.9'da verilen demodülatör önerilebilir.

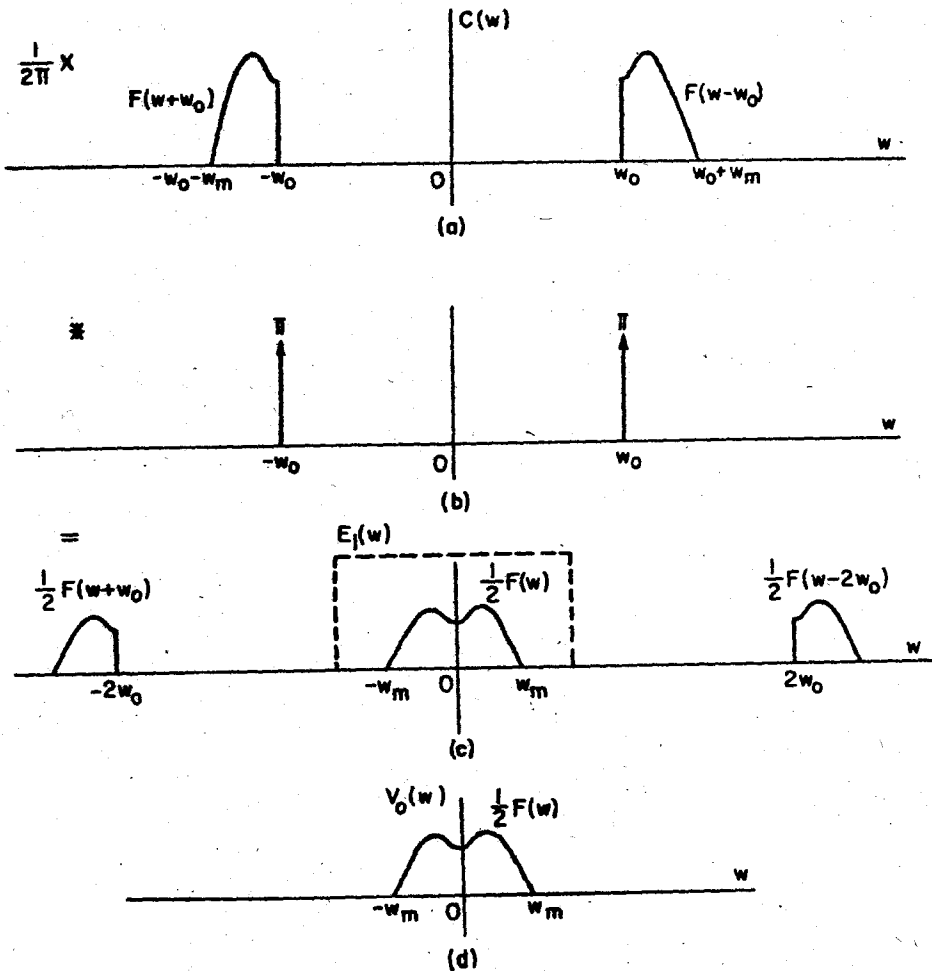


Şekil 5.9 TYB eşzamanlı demodülatörü

TYB işareti önce, frekansı ve evresi modüle eden işaretle aynı olan bir sinüzoidal ile çarpılır ve bir  $e_1(t)$  işareti elde edilir.

$$\begin{aligned}
 e_1(t) &= [f(t)\cos\omega_0 t \mp \hat{f}(t)\sin\omega_0 t] \cos\omega_0 t \\
 &= f(t)\cos^2\omega_0 t \mp \hat{f}(t)\sin\omega_0 t \cos\omega_0 t \\
 &= \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t)\cos 2\omega_0 t \mp \frac{1}{2} \hat{f}(t)\sin 2\omega_0 t \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

İkinci ve üçüncü terimler  $2\omega_0$  dolayındaki yüksek frekans terimleridir. Bu durumda karıştırıcıdan (çarpıcıdan) sonra koyulacak olan bir alçak geçiren süzgeç yardımıyla  $\frac{1}{2} f(t)$  terimi alınır, diğerleri tümüyle zayıflatılır. Böylece alçak geçiren süzgecin çıktısı istenilen bilgi işareti  $f(t)$  ile orantılıdır. Bu demodülatörün çalışmasının frekans bölgesinde açıklanması Şekil 5.10'da verilmiştir.



Şekil 5.10 Eşzamanlı demodülatörün frekans bölgesi çözümü

QM ve ÇYB modüle edilmiş işaretlerin eşzamanlı demodülasyonunda olduğu gibi,  $f(t)$  yi  $\cos \omega_c t$  ile çarpmak yerine bir kare dalga  $p(t)$  ya da bir dönemli  $s(t)$  işareti ile çarparsak, aynı demodülatör ile  $f(t)$  yi geri elde edebiliriz. Dönemli  $s(t)$  işlevinin sağlanması gereken koşullar Altbölüm 4.3 de tartışılmıştır. Altbölüm 4.3 de verilen taşıyıcı demodülatörü, TYB modüle edilmiş işaretleri demodüle etmekte de kullanılabilir. TYB işaretlerinin demodülasyonu için öngörülen bu demodülatörlerin çözümlenmesi, QM ve ÇYB durumlarında bu demodülatörler için yapılan çözümlere çok benzer.

Evre ve frekans eşzamanlamasından sapmalar olduğunda TYB demodülasyonunda ortaya çıkan sorunlar üzerinde Altbölüm 5.5 de durulmuştur. Bu altbölümde soruna genel bir bakış getirilecek, QM ve ÇYB demodülasyonundaki benzer sorunlar da incelenecektir.

### Büyük Taşıyıcılı TYB'nin Demodülasyonu

Hem ÇYB modülasyonunda hem de TYB modülasyonunda eşzamanlı demodülasyon tekniklerinin kullanılması bir zorunluktur. Taşıyıcı planlaması nedeniyle, zarf seziciler kullanılamaz. Ancak bazı uygulamalarda TYB modülasyonu büyük bir taşıyıcı ile kullanılır. Bu durumda gönderilen bilgi te yapılan tutumdan bir ölçüde vazgeçilir ve yan bantlardan birinin bant kırılmasına karşın işarete taşıyıcı eklenir. Güçten çok bantgenişliği kısıtlamasının önemli olduğu durumlarda bu tür bir uygulama yapılabilir. Taşıyıcılı TYB'nin bantgenişliği QM işaretinin bantgenişliğinin yarısına eşittir, ancak bu iki tür modülasyonda gönderilen güçler arasında çok önemli bir değişiklik yoktur.

Büyük taşıyıcılı bir TYB işareti nasıl demodüle edilir? Büyük taşıyıcılı bir TYB işareti şu biçimde ifade edilebilir:

$$c(t) = A \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t \mp \hat{f}(t) \sin \omega_c t \quad (5.25)$$

Burada  $A \gg f(t)$  dir ve bu  $A \gg \hat{f}(t)$  anlamına da gelir. Bu biçimde modüle edilmiş işaretin eşzamanlı demodülasyonu da olanaklıdır. Eşzamanlı demodülatörün çıktısı bu durumda  $\frac{1}{2} [A + f(t)]$  olur. Aşağıda büyük taşıyıcılı bir TYB işaretinin, bir zarf sezici kullanılarak da demodüle edilebileceği gösterilecektir.

(5.25)'de verilen büyük taşıyıcılı TYB işareti tek bir sinüsoidal olarak şu biçimde yazılabilir.

$$c(t) = e(t) \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad (5.26)$$

Burada

$$e(t) = \sqrt{(A + f(t))^2 + \hat{f}^2(t)} \quad (5.27)$$

$$\theta(t) = -\tan^{-1} \frac{\hat{f}(t)}{A + f(t)}$$

Zarf sezici,  $e(t)$  zarfını izler.  $e(t)$  zarfı ise şu biçimde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \sqrt{A^2 + 2Af(t) + f^2(t) + \hat{f}^2(t)} \\
 &= A \sqrt{1 + 2 \frac{f(t)}{A} + \left[\frac{f(t)}{A}\right]^2 + \left[\frac{\hat{f}(t)}{A}\right]^2}
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

$A \gg f(t)$  ve  $A \gg \hat{f}(t)$  olduğundan, karekök işareti içindeki kare terimleri diğer terimlere göre önemsizdir. Buna göre

$$e(t) \cong A \sqrt{1 + 2 \frac{f(t)}{A}} \quad (5.29)$$

elde edilir. Bu karekök terimi, binom açılımını kullanılarak açılır ve yüksek derece terimleri atılırsa

$$e(t) \cong A \left[1 + \frac{f(t)}{A}\right] = A + f(t) \quad (5.30)$$

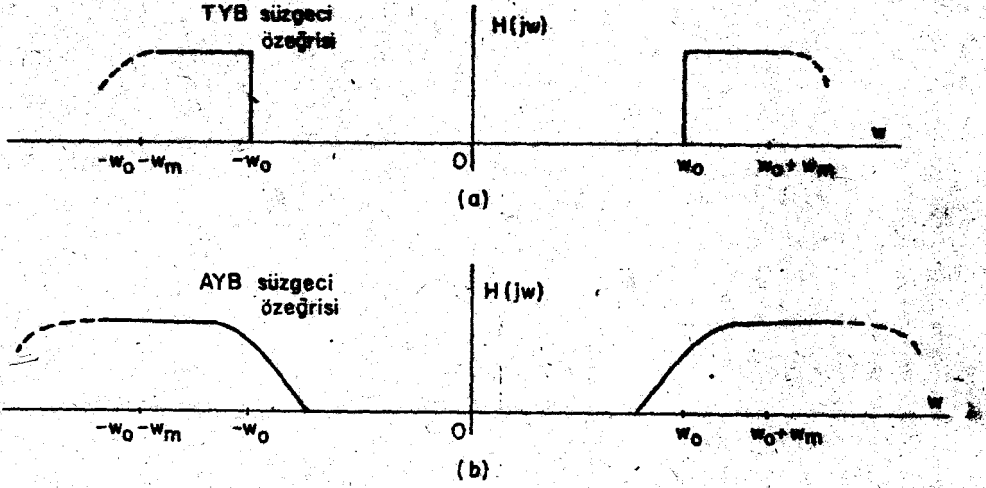
bulunur.  $A$  sabitinden kolayca kurtulunabilir. Böylece büyük taşıyıcılı TYB işareti bir zarf sezici kullanılarak demodüle edilebilir. Bu işaret aynı zamanda bir ortalama zarf sezici kullanılarak da demodüle edilebilir.

#### 5.4. ARTIK YAN BANT (AYB) MODÜLASYONU

TYB modülasyonun güç indirimi ve bantgenişliği indirimi gibi bazı üstünlükleri olduğu görülmüştü. Ancak TYB işaretlerini üretmek kolay değildir. En basit yöntem olan süzgeç yönteminde bile,  $\omega_0$  daki kesimin çok keskin olması gerektiği belirtilmişti. ÇYB ve TYB arasında bir modülasyon tekniği tasarımı olarak, oldukça katı olan bu kısıtlama hafifletilebilir. Bu modülasyon *Artık Yan Bant (AYB) modülasyonu* diye adlandırılır. Bu modülasyon tekniğinde, yan bantlardan birini tümüyle atmak ve diğerini de tümüyle geçirmek yerine, yan bantlardan biri çok zayıflatılarak diğeri de çok az zayıflatılarak geçirilir. Bu modülasyon tekniğinin artık yan bant diye adlandırılmasının nedeni yan bantlardan birisinin yalnızca artık sayılabilecek bir bölümünün geçirilmesidir. İstenilen bu sonuçları veren bir süzgecin özgeçirisi Şekil 5.11'de verilmiştir.

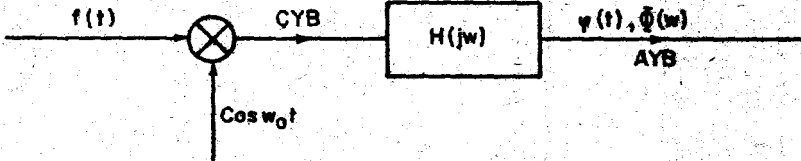
TYB ile kıyaslandığında, AYB modülasyonunda süzgeç üzerindeki kısıtlamalar daha gevşektir. AYB modülasyonunda TYB modülasyonun üstünlüklerinden fazla birşey kaybedilmez. AYB işaretinin gücü, TYB işaretinin gücünden çok değişik değildir. AYB işaretinin bantgenişliği de TYB işaretinin bantgenişliğinden (ÇYB işareti bantgenişliğinin yarısından) yalnızca biraz fazladır.

Şekil 5.11b'den görülebileceği gibi, AYB süzgeciyle, gönderilen yan bantın taşıyıcı yanındaki bölümünün biraz bastırılması, tümüyle bastırılması gereken yan bantın bir bölümünün gönderilmesi ile karşılanır. Bu düzen yoluyla, bilgi işareti modüle edilmiş işareten uygun bir sezici kullanılarak geri elde edilebilir.



Şekil 5.11 Bir TYB ve bir AYB süzgecinin özeğrileri

Şimdi ÇYB işaretinden AYB işaretini üretmek için gereken, uygun süzgeç özeğrilerini saptayalım. Bulacağımız süzgeç özeğrileri, AYB işaretini eşzamanlı demodülasyon -genlik modülasyonunda en güçlü demodülasyon tekniği - yöntemiyle demodüle etmemizi sağlamalıdır. AYB işaretinin Şekil 5.12'de gösterilen modülatör yardımıyla üretildiğini varsayalım. Süzgecin karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$ 'yi bulalım. AYB süzgecinin



Şekil 5.12 AYB işaretini üreten modülatör

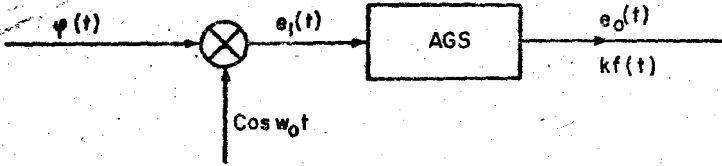
giriş işaretinin görünüşü şöyledir:

$$\frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (5.31)$$

Buna göre AYB işaretinin görünüşü

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] H(j\omega) \quad (5.32)$$

dir. AYB işareti  $\Phi(t)$  yi Şekil 5.13'de gösterilen eşzamanlı demodülatör ile demodüle etmek isteriz.



Şekil 5.13 AYB işaretini demodüle eden bir eşzamanlı demodülatör

Karıştırıcının çıkışındaki işaret şu biçimde yazılabilir.

$$e_1(t) = \phi(t) \cos \omega_0 t \quad (5.33)$$

$e_1(t)$  nin görüngesi  $\phi(\omega)$  ile  $\cos \omega_0 t$  nin Fourier dönüşümü katlanarak elde edilir.

$$E_1(\omega) = \frac{1}{4} \{ [F(\omega + 2\omega_0) + F(\omega)] H[j(\omega + \omega_0)] + [F(\omega) + F(\omega - 2\omega_0)] H[j(\omega - \omega_0)] \} \quad (5.34)$$

$F(\omega + 2\omega_0)$  ve  $F(\omega - 2\omega_0)$  terimleri  $\pm 2\omega_0$  a merkezlenmiş yüksek frekans terimleridir ve bunlar alçak geçiren süzgeç tarafından tümüyle zayıflatılır. Bu nedenle alçak geçiren süzgecin çıktısının görüngesi şu biçimdedir.

$$E_0(\omega) = \frac{1}{4} F(\omega) \{ H[j(\omega + \omega_0)] + H[j(\omega - \omega_0)] \} \quad (5.35)$$

İstenilen, eşzamanlı demodülatör çıktısının bilgi işareti  $f(t)$  ye ya da bilgi işaretinin bir değişimle çarpımı  $kf(t)$  ye eşit olmasıdır. Bu durumda

$$e_0(t) = kf(t) \quad (5.36)$$

Çıktı işaretin frekans görüngesi ise

$$E_0(\omega) = kF(\omega) \quad (5.37)$$

dir. (5.35) ve (5.37) kullanılarak,  $F(\omega)$  nın sıfırdan farklı olduğu frekanslarda, AYB süzgecinin karmaşık geçiş işlevinin şu bağıntıyı sağlaması gerektiği bulunur.

$$H[j(\omega + \omega_0)] + H[j(\omega - \omega_0)] = \text{değişmez} \quad (5.38)$$

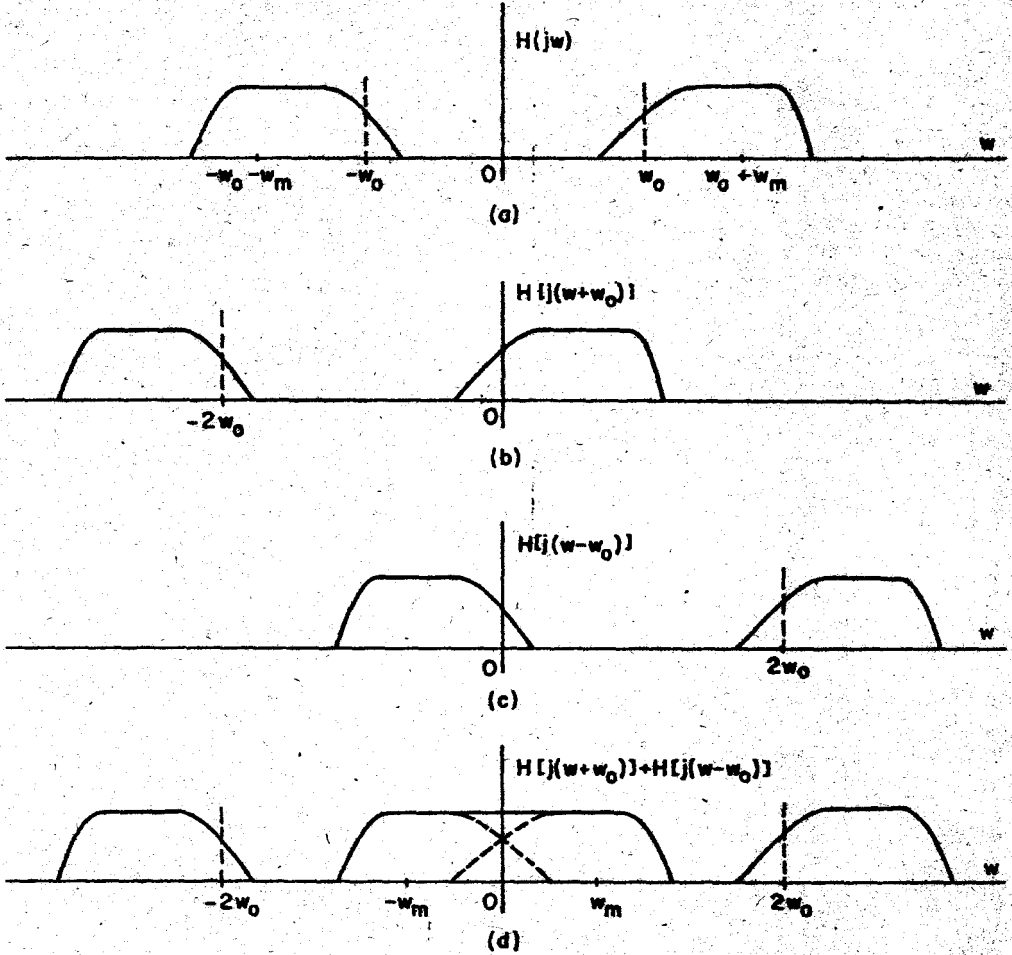
$|\omega| > \omega_m$  için  $F(\omega) = 0$  olduğundan,  $H(j\omega)$  nin yalnızca  $|\omega| < \omega_m$  için (5.38)'i sağlaması yeterlidir.

(5.38)'i sağlayacak bir  $H(j\omega)$  için  $\{H[j(\omega + \omega_0)] + H[j(\omega - \omega_0)]\}$  ifadesinin çizimi Şekil 5.14'de verilmiştir. Şekil 5.14 incelendiğinde,  $H(j\omega)$  için (5.38)'de verilen koşulun,  $H(j\omega)$  nin  $\omega_0$  dolayında tek simetrik olmasına eşdeğer olduğu görülür. AYB işareti  $\phi(t)$  nin bir eşzamanlı demodülatör ile demodüle edilebilmesi için  $H(j\omega)$  nin sağlaması gereken



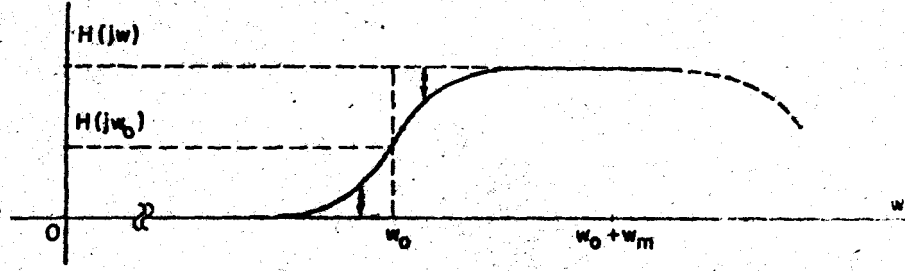
gerekli ve yeterli koşul  $[\omega_0, H(j\omega_0)]$  noktasına göre tek simetrik olmasıdır. Bir AYB süzgecinin özgeçirisi daha açık olarak Şekil 5.15'de verilmiştir.  $\omega_0$  da olmayan düşüşün biçimi,  $|\omega| < \omega_m$  için  $H[j(\omega + \omega_0)] + H[j(\omega - \omega_0)]$  sabit olduğu sürece sorun yaratmaz. Şekil 5.14 ve Şekil 5.15'de  $H(j\omega)$  gerçel varsayılmış ve çizim buna göre yapılmıştır.

Yukarıda yapılan tartışmada, üst yan bant ve alt yan bantın bir artığından oluşan bir AYB işareti düşünülmüştü. Bunun tersi de yapılabil-



Şekil 5.14 AYB süzgeci özgeçirileri

ilir. Bu durumda da  $H(j\omega)$  nın sağlaması gereken koşul yine (5.38)'dir ve bu koşulu sağlayan  $H(j\omega)$  ise Şekil 5.15'de gösterilen  $H(j\omega)$  nın  $\omega_0$  a göre ayna görüntüsüdür.



Şekil 5.15 Artı frekanslar için AYB süzgeci öz eğrisi

Kare dalga, ya da başka bir dönemli işaret kullanan diğer eşzamanlı demodülatör türleri, ya da bir kıyııcı demodülatörü de AYB işaretlerini demodüle etmekte kullanılabilir. Dönemli işaretin ve demodülatörün diğer öğelerinin sağlanması gereken koşullar, ÇM, ÇYB ve TYB için verilenlerle aynıdır.

AYB işaretine büyük bir taşıyıcı eklenirse, zarf (ya da ortalama zarf) sezici kullanılarak demodülasyon yapılabilir. Bunun için şu biçimde bir nitel açıklama verebiliriz. Eğer taşıyıcı genliği  $\phi(t)$  ye göre çok büyükse, taşıyıcılı AYB işaretinin sıfır geçişleri taşıyıcının sıfır geçişleri ile aynı noktalar olur. Bu nedenle böyle bir işaretin doğrultulması bu işareti  $p(t)$  ile çarpmaya eşdeğerdir. Eşzamanlı demodülasyonda yapıldığı gibi, bundan sonra konacak olan bu alçak geçiren süzgecin çıkışında  $f(t)$  elde edilir.

### AYB İşaretinin Zaman Bölgesi Gösterimi

AYB modüle edilmiş işaret için bir zaman bölgesi gösterimi bulmak mümkündür. AYB modülasyonunun, ÇYB ve TYB modülasyonları arasında bir yöntem olduğu daha önce belirtilmişti. Buna göre AYB işaretini bir ÇYB işareti ve bir TYB işareti olarak ifade edebilir miyiz? Şimdi bu sorunun yanıtını arayalım.

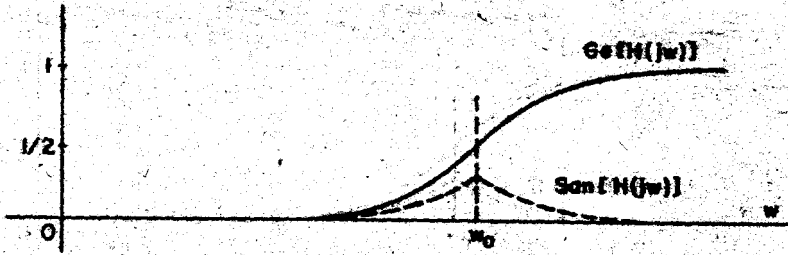
AYB süzgeci  $H(j\omega)$  nin (5.38)'i sağlanması gerektiği bulunmuştu. Öte yandan bu süzgecin dürtü tepkesinin gerçel olması şu koşulun da sağlanmasını gerektirir:

$$H(\omega) = H^*(-\omega) \quad (5.39)$$

(5.38) ve (5.39)'da verilen koşullar birleştirilerek  $H(j\omega)$  nin gerçel bölümünün  $\omega_0$  taşıyıcı frekansı dolayında tek simetrik olduğu, ve  $\omega_0$  'daki göresel değerinin 1/2 olduğu bulunur.  $H(j\omega)$  nin sanal bölümü ise  $\omega_0$  dolayında çift simetriktir. Böyle bir süzgeç öz eğrisi Şekil 5.16'da verilmiştir.

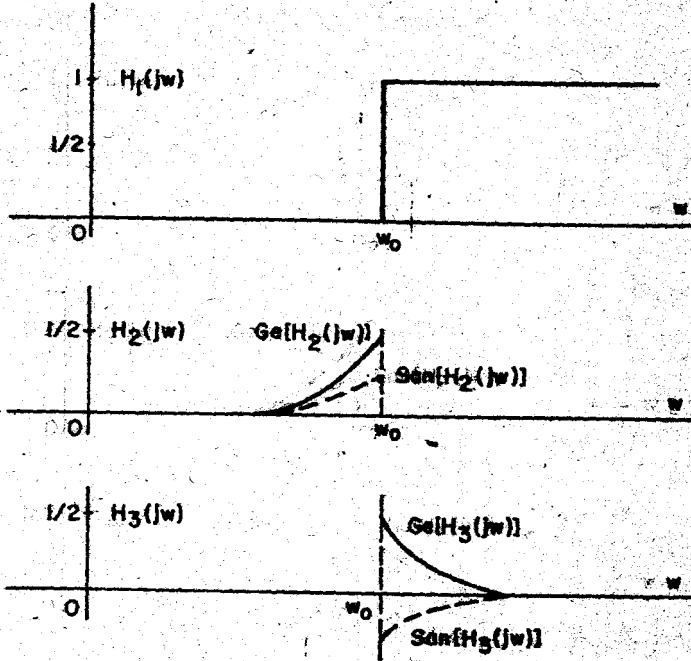
Şekil 5.16 incelendiğinde AYB süzgeci karmaşık geçiş işlevinin şu biçimde üç terimin toplamı olarak ifade edilebileceği görülür.

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega) - H_3(j\omega) \quad (5.40)$$



Şekil 5.16 Bir AYB süzgeci karmaşık geçiş işlevinin gerçel ve sanal bölümleri

$H_1(j\omega)$ ,  $H_2(j\omega)$  ve  $H_3(j\omega)$  Şekil 5.17'de çizilmiştir.  $f(t)$  temel bant işaretini olsun.  $H_2(j\omega) + H_3(j\omega)$  nin alçak geçiren eşdeğenisini  $H_4(j\omega)$  ve bunun evrik Fourier dönüşümününün de  $h_4(t)$  olduğunu varsayalım.



Şekil 5.17 AYB süzgeci  $H(j\omega)$  nin parçalara ayrılması

$$g(t) = f(t) * h_4(t)$$

(5.41)

olarak tanımlanırsa, AYB modüle edilmiş işaret şu biçimde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
c(t) &= [f(t) \cos \omega_0 t - \hat{f}(t) \sin \omega_0 t] \\
&+ \frac{1}{2} [g(t) \cos \omega_0 t + \hat{g}(t) \sin \omega_0 t] \\
&- \frac{1}{2} [g(t) \cos \omega_0 t - \hat{g}(t) \sin \omega_0 t]
\end{aligned} \quad (5.42)$$

Ortak terimler birleştirilirse, AYB işareti şu biçime indirgenir.

$$c(t) = \underbrace{f(t) \cos \omega_0 t - \hat{f}(t) \sin \omega_0 t}_{\text{TYB}} + \underbrace{\hat{g}(t) \sin \omega_0 t}_{\text{ÇYB}} \quad (5.43)$$

Böylece AYB işaretinin zaman bölgesi gösterimi elde edilmiş olur. Bu gösterimden AYB işaretinin bir ÇYB işareti ve bir TYB işareti toplamı olarak ifade edilebileceği görülür.

**Büyük Taşıyıcılı Bir AYB İşaretinin Zarf Sezici Kullanarak Demodülasyonu**

(5.43)'de verilen  $c(t)$ 'ye oldukça büyük bir taşıyıcı  $A \cos \omega_0 t$  eklenirse şu dalgabıçımı elde edilir.

$$c_1(t) = [A + f(t)] \cos \omega_0 t - [\hat{f}(t) - \hat{g}(t)] \sin \omega_0 t \quad (5.44)$$

Bu işaret tek bir sinüzoidal olarak ifade edilirse zarfı şu biçimdedir.

$$e(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + [\hat{f}(t) - \hat{g}(t)]^2} \quad (5.45)$$

Zarf sezici  $e(t)$  yi izleyecektir.  $A$  oldukça büyük olduğundan  $A \gg f(t)$ ,  $A \gg \hat{f}(t)$  ve  $A \gg \hat{g}(t)$  varsayımları geçerli olur. Bu varsayımlar kullanılarak  $e(t)$  zarfı şu biçime indirgenir.

$$\begin{aligned}
e(t) &= \sqrt{A^2 + 2Af(t) + f^2(t) + \hat{f}^2(t) - 2\hat{f}(t)\hat{g}(t) + \hat{g}^2(t)} \\
&= A \sqrt{1 + 2 \frac{f(t)}{A} + \left[\frac{f(t)}{A}\right]^2 + \left[\frac{\hat{f}(t)}{A}\right]^2 - 2 \left[\frac{\hat{f}(t)}{A}\right] \left[\frac{\hat{g}(t)}{A}\right] + \left[\frac{\hat{g}(t)}{A}\right]^2} \\
&\cong A \sqrt{1 + 2 \frac{f(t)}{A}} \\
&\cong A \left[1 + \frac{f(t)}{A}\right] = A + f(t)
\end{aligned} \quad (5.46)$$

Buna göre büyük taşıyıcılı AYB işareti zarf sezici kullanılarak demodüle edilebilir.

Büyük taşıyıcılı AYB işareti çok yaygın kullanılan bir modülasyon tekniğidir. TV yayınlarında görüntü işaretleri artık yan bant modülasyonu ile gönderilirler. Artık yan bant ile birlikte büyük bir taşıyıcı da gönderilir. Bu nedenle bu tür işaretleri zarf sezici kullanarak demodüle etmemiz olanaklıdır.

## TYB ve AYB Modülasyonun Diğer Genlik Modülasyonu Türleri ile Karşılaştırılması

TYB nin ÇYB ye üstünlükleri aşağıda özetlenmiştir.

1. Belirli bir bilgi işareti  $f(t)$  yi TYB kullanarak göndermek için gereken bantgenişliği ÇYB için gerekenin yarısıdır.
2. TYB de yan bantlardan birisi bastırıldığından, TYB de gönderilen güç ÇYB deki gücün yarısıdır.
3. Seçmeli sönmelenme TYB ye göre ÇYB de daha önemli sorunlar yaratır. Bunun nedeni ÇYB de iki yan bantın değişik miktarlarda bozulmaya uğramasıdır. Oysa TYB de böyle bir sorun yoktur.
4. Demodülasyon açısından fazla bir ayrım yoktur. Büyük bir taşıyıcı olmadıkça, hem TYB hem de ÇYB için eşzamanlı demodülasyon kullanmak gerekir. Büyük bir taşıyıcı varsa her iki işaret de zarf sezici ile demodüle edilebilir.
5. TYB modülasyonu uzak menzilli yüksek frekans uzuletişiminde, özellikle evre bozulmasının (TYB işaretinin üretiminde ortaya çıkan) oldukça önemsiz olduğu ses işaretlerinde kullanılır. Birçok amatör radyo ve telsiz araçları TYB modülasyonu kullanırlar.
6. TYB nin bir dezavantajı vardır. Yüksek güç düzeylerinde TYB işareti üretmek, yüksek güç düzeylerinde ÇYB işareti üretmeye göre daha zordur. Öte yandan, AYB modüle edilmiş işaretlerde böyle bir dezavantaj yoktur.

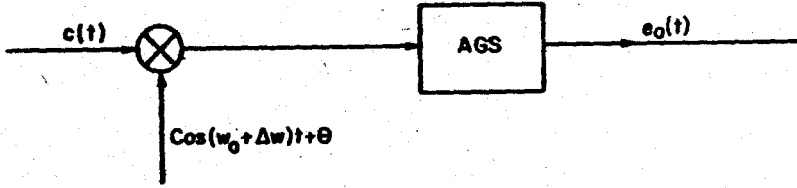
Şimdi de AYB modülasyonunun çeşitli özelliklerini diğer modülasyon türleri ile karşılaştıralım. AYB işareti TYB işaretinin birçok üstünlüklerine sahiptir. Buna ek olarak TYB modülasyonun bazı dezavantajları AYB modülasyonunda yoktur.

1. AYB de bantgenişliği TYB nin bantgenişliğine (ÇYB bantgenişliğinin yarısına) çok yakındır, yalnızca biraz fazladır. TV yayınlarında, örneğin, iki yan bantı ile birlikte görüntü işareti 10.5 MHz'lik bir bant kaplar, oysa aynı işaret AYB modüle edildiğinde 6.5 MHz'lik bir bant kaplar. Böylece kullanılan bantgenişliğinde oldukça önemli bir tutum yapılmış olur. Aynı işaret için TYB kullanılsaydı 5.25 MHz'lik bir bant gerekecekti.
2. AYB de gönderilen güç TYB de gönderilen güçten (ÇYB de gönderilen gücün yarısı) biraz fazladır.
3. ÇYB işaretinden AYB işareti elde edilirken kesimi hafif eğimli basit süzgeçler kullanılır. Oysa TYB için keskin kesimli süzgeçler gereklidir.
4. ÇYB ye göre AYB seçmeli sönmelenmeye fazla duyarlı değildir ve hemen hemen TYB kadar iyidir.
5. Demodülasyon açısından, AYB de ÇYB ve TYB gibi eşzamanlı demodülas-

yon gerektirir. Büyük bir taşıyıcı varsa, ÇYB ve TYB işaretlerinde olduğu gibi, AYB işareti de zarf sezici kullanılarak demodüle edilebilir.

### 5.5. ÇEŞİTLİ GM TÖRLERİ İÇİN EŞZAMANLI DEMODOLASYONDA EVRE VE FREKANS KAYMASININ ETKİLERİ

Eşzamanlı sezme, genliği modüle edilmiş işaretlerin bütün türlerine uygulanabilen bir demodülasyon tekniğidir. Genliği modüle edilmiş işaretlerin belirli bazı türleri için ise kullanılacak tek demodülasyon tekniği budur. Bu altbölümde, eşzamanlı demodülatörün bir sinüzoidal ile çarpan bir karıştırıcı ve bir alçak geçiren süzgeçten oluştuğu düşünülecektir. (Şekil 5.18'e bakınız). Almaçtaki salıngacın (osilatör) ürettiği sinüzoidal frekans ve evresinde, modüle edilmiş işaretkine göre, sapma olduğunda demodülatör çıktısının bu saptmadan nasıl



Şekil 5.18 Evre ve frekansı saptması olan eşzamanlı demodülatör

etkilendiği aşağıda incelenmiştir. Eşzamanlı demodülasyonun diğer türlerinde, örneğin  $p(t)$  ya da  $s(t)$  ile çarpma ya da kıyııcı demodülatöründe, frekans ve evre saptmaları, aşağıda incelenen demodülatörün çıktısında oluşan etkilere benzer sonuçlar yaratır.

#### ÇYB

ÇYB işareti

$$c(t) = f(t)\cos\omega_0 t \quad (5.47)$$

ise, alçak geçiren süzgecin girişindeki işaret şu biçimdedir.

$$\begin{aligned} c(t)\cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] &= f(t)\cos\omega_0 t \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] \\ &= \frac{1}{2} f(t)\cos(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{2} f(t)\cos[(2\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] \end{aligned} \quad (5.48)$$

İkinci terim alçak geçiren süzgeç tarafından tümüyle zayıflatılır. Buna göre demodülatör çıktısı  $f(t)$  olmayıp şu biçimdedir.

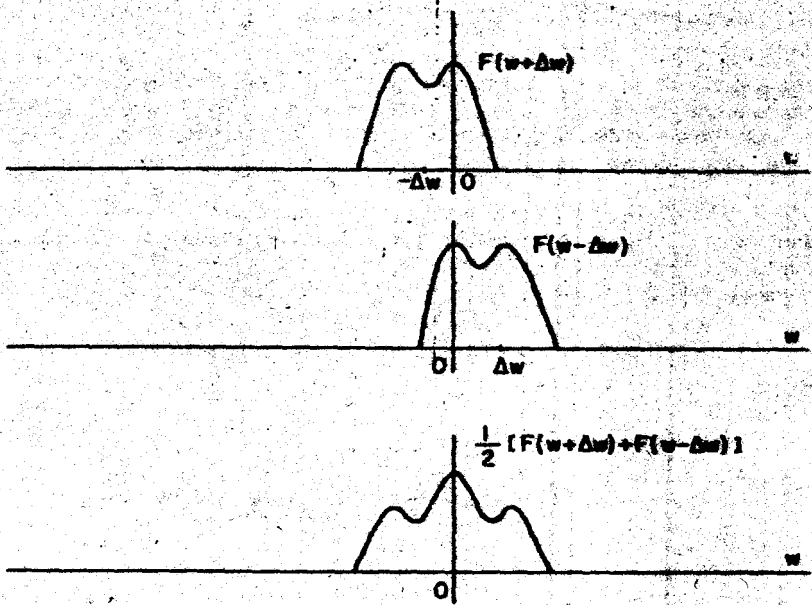
$$e_0(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos(\Delta\omega t + \theta) \quad (5.49)$$

Görüldüğü gibi, genel olarak, bir bozulma söz konusudur.

$\Delta\omega = 0$  ve  $\theta = 0$  ise  $e_0 = \frac{1}{2} f(t)$  dir. Bu durumda bozulma yoktur.

$\Delta\omega = 0$  ve  $\theta \neq 0$  ise  $e_o = \frac{1}{2} f(t)\cos\theta$  dir.  $\cos\theta$  değişmez olduğundan, demodülatör çıkışı  $f(t)$  ile orantılıdır.  $\cos\theta$  nedeniyle bir ölçüde zayıflama vardır, ancak dalgabüçümünde bozulma yoktur. Bununla birlikte, iletim ortamının zamanla değişme özelliği nedeniyle,  $\theta$  genellikle değişmez değil, zamanla değişen bir niteliktir. Bunun sonucunda ortaya zamanla değişen bir zayıflama çıkar, bu ise bir bozulmadır. Ayrıca  $\theta = 90^\circ$  olması halinde demodülatör çıkışı sıfır olur.

$\Delta\omega \neq 0$  ve  $\theta = 0$  ise,  $e_o(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos \Delta\omega t$  olur. Çıktı  $f(t)$  değil,  $f(t)$  ile modüle edilmiş, frekansı  $\Delta\omega$  olan bir sinüzoidaldir. Bu oldukça ciddi bir bozulmadır. Bu nedenle frekans eşzamanlamasının sağlanması önemlidir. Çeşitli geri hesleme devreleri ile bu yapılabilir. Frekans sapması olduğunda demodülatör çıkışının görüncesinin nasıl bozulacağı Şekil 5.19'da gösterilmiştir.



Şekil 5.19 ÇYB de  $\Delta\omega \neq 0$  olduğunda demodülatör çıkışının görüncesi

Taşıyıcılı bir GM işareti de bir eşzamanlı demodülatör ile demodüle edilirse, frekans ve evre sapmalarının etkileri, ÇYB de görülen etkilerle aynıdır.

TYB

TYB modüle edilmiş işaret

$$c(t) = f(t)\cos_0 t - \hat{f}(t)\sin_0 t \quad (5.50)$$

olduğundan, süzgeç girdisi şu biçindedir.

$$c(t)\cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] = \frac{1}{2} f(t)\cos(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{2} f(t)\cos[(2\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] \\ + \frac{1}{2} \hat{f}(t)\sin(\Delta\omega t + \theta) - \frac{1}{2} \hat{f}(t)\sin[(2\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta] \quad (5.51)$$

Yüksek frekans terimleri süzgeç tarafından yok edilir ve demodülatör çıkışı şu biçimde ifade edilebilir:

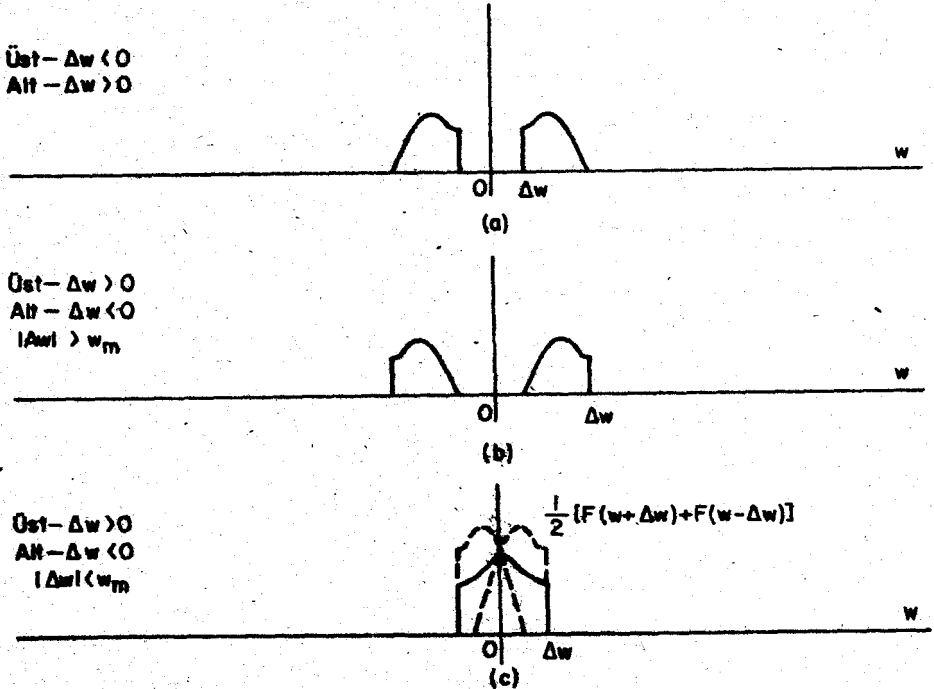
$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{2} \hat{f}(t)\sin(\Delta\omega t + \theta) \quad (5.52)$$

$\Delta\omega = 0$ ,  $\theta = 0$  ise  $e_o(t) = \frac{1}{2} f(t)$  dir ve bozulma yoktur.

$\Delta\omega = 0$ ,  $\theta \neq 0$  ise  $e_o(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos\theta + \frac{1}{2} \hat{f}(t)\sin\theta$  dir.

Bu bozulma,  $f(t)$  nin her frekans bileşeninin evresinin  $\theta$  kadar kaymasına karşı gelir. Buna göre almaç salıngacındaki evre sapması, demodülatör çıktısında evre bozulmasına neden olur. Eğer  $f(t)$  bir ses işareti ise, evre bozulması ciddi bir sorun yaratmaz. Bunun nedeni insan kulağının evreye karşı duyarlı olmamasıdır.

$\Delta\omega \neq 0$  için, ÇYB deki bozulmaya benzer bir bozulma görülür. TYB durumu için, frekans sapmasında demodülatör çıktısının görüncesinin nasıl olacağı Şekil 5.20'de verilmiştir.  $\Delta\omega$ 'nın çeşitli değerleri için, alt ya da üst TYB durumlarının görüngeleri çizilmiştir.



Şekil 5.20  $\Delta\omega \neq 0$  için TYB de demodülatör çıktısının görüngesi



AYB işaretlerinin eşzamanlı demodülasyonunda, evre ve frekans sapmaları olduğunda ortaya ne tür bozulmaların çıkacağı, (5.44)'de verilen AYB işaretinin gösterimi kullanılarak bulunabilir. AYB işareti için demodülatör çıktısı şu biçimdedir.

$$e_o(t) = f(t)\cos(\Delta\omega t + \theta) + \hat{f}(t)\sin(\Delta\omega t + \theta) - \hat{g}(t)\sin(\Delta\omega t + \theta) \quad (5.53)$$

### Taşıyıcısı Bastırılmış İşaretlerin Seziminde Sonradan Taşıyıcı Ekleme Yöntemi

Daha önce söz edildiği gibi, taşıyıcısı bastırılarak genliği modüle edilmiş işaretler (ÇYB ve TYB) zarf sezici kullanılarak demodüle edilemezler. Bu işaretlerin demodüle edilmesi için eşzamanlı demodülasyon gereklidir. Yukarıda söz edildiği gibi eşzamanlı demodülasyon kullanıldığında bazı eşzamanlama sorunları ortaya çıkar. Ancak ortada bir başka seçenek daha vardır. Almacıta demodülatörden önce (bir salıngaç tarafından üretilen) büyük bir taşıyıcı, taşıyıcısı bastırılmış işarete eklenir. Böylece taşıyıcılı GM ya da büyük taşıyıcılı TYB elde edilir. Daha sonra bu işaret zarf sezici kullanılarak demodüle edilebilir. Böylece çok kolay bir demodülasyon yöntemi olan zarf seziminin kullanılması olanaklı olur. Ancak bu yöntemde dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır.

Bu nokta, eklenen taşıyıcının evresinin ve frekansının modüle eden işaretle eşzamanlı olmasının gerekliliğidir. Eklenen taşıyıcının evre ve frekansında sapma varsa zarf sezicinin çıktısında bozulma olur. Burada görülen bozulma, eşzamanlı demodülasyonda eşzamanlama olmamasının yarattığı bozulma ile aynı niteliktedir. Bu nedenle taşıyıcı ekleyip daha sonra zarf sezici kullanmak, eşzamanlı demodülasyona göre fazla bir şey kazandırmaz. Almacıta taşıyıcı ekleme yöntemi sonradan taşıyıcı ekleme diye adlandırılır.

Bazı uygulamalarda, taşıyıcısı bastırılmış işaret (ÇYB ya da TYB) ile birlikte kılavuz taşıyıcı diye adlandırılan küçük bir taşıyıcı da gönderilir. Bu taşıyıcı bir zarf sezici kullanmamızı sağlayacak kadar büyük değildir. Almacıta özel süzgeçler ve geribesleme devreleri kullanılarak bu küçük taşıyıcı süzülüp alınır. Daha sonra istenilen düzeye yükseltilir ve işarete tekrar eklenir. Bu durumda eklenen sinüzoidalın evresi ve frekansı modüle edilmiş işareti ile eşzamanlı olur ve eklenen sinüzoidal yeteri kadar büyük olduğundan işaret zarf sezici kullanılarak demodüle edilebilir.

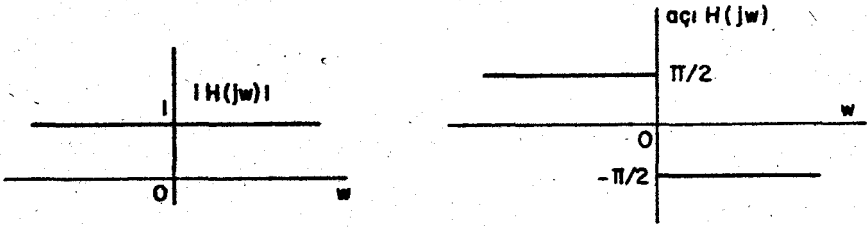
## AL I Ş T I R M A L A R

5.1. Tek bir sinüzoidalden oluşan bilgi işareti

$$f(t) = A \cos 2\pi \cdot 10^3 t$$

veriliyor. Bu işarette modüle edilen, modülasyon derecesi 0.75 ve taşıyıcı frekansı 10 KHz olan GM dalgabıçimini çiziniz. Bu  $f(t)$  ile modüle edilen ÇYB ve TYB (üst yan bant) işaretlerini çiziniz.

5.2. Şekil 5.A.1'de verilen evre kaydırıcının girişine  $A \cos(\omega_0 t + \theta)$  işareti uygulanıyor. Çıkış işaretini bulunuz.

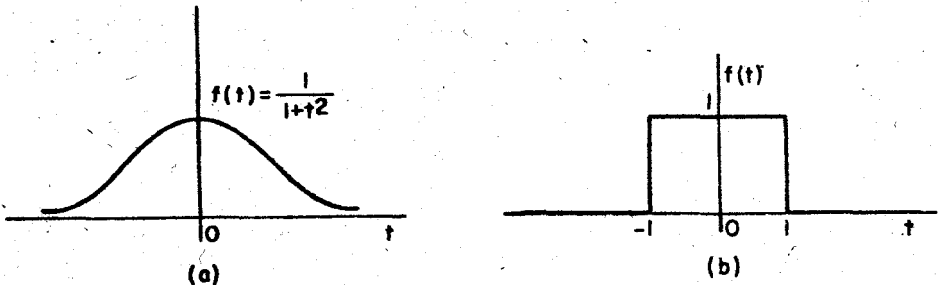


Şekil 5.A.1

5.3. Aşağıda verilen Hilbert dönüşüm özelliklerini kanıtlayınız.

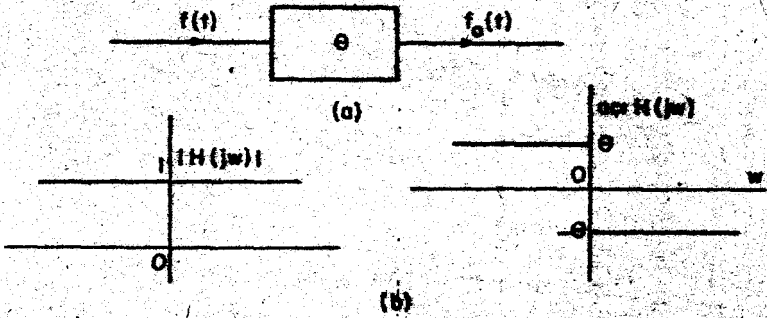
- (a)  $f(t) = f(-t)$  ise  $\hat{f}(t) = -\hat{f}(-t)$  dir.  
 (b)  $f(t) = -f(-t)$  ise  $\hat{f}(t) = \hat{f}(-t)$  dir.  
 (c)  $\hat{f}(t)$  nin Hilbert dönüşümü  $-f(t)$  dir.

5.4. Şekil 5.A.2'de verilen işaretlerin Hilbert dönüşümlerini bulunuz. Daha sonra  $f(t)$  ve  $\hat{f}(t)$  yi çiziniz. Bu çizimleri kullanarak,  $f(t)$  ve  $\hat{f}(t)$  dalgabıçimlerinin, genel olarak, birbirlerine benzemediklerini gösteriniz.



Şekil 5.A.2.

- 5.5. Bir  $f(t)$  işlevi karmaşık geçiş işlevi Şekil 5.A.3b'de verilmiş olan bir dizgeden (Şekil 5.A.3a) geçirilerek bütün frekans bileşenleri  $\theta$  kadar kaydırılıyor.



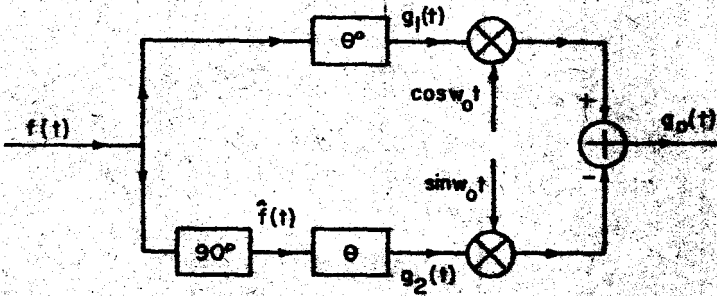
Şekil 5.A.3

Çıktının

$$f_0(t) = f(t)\cos\theta + \hat{f}(t)\sin\theta$$

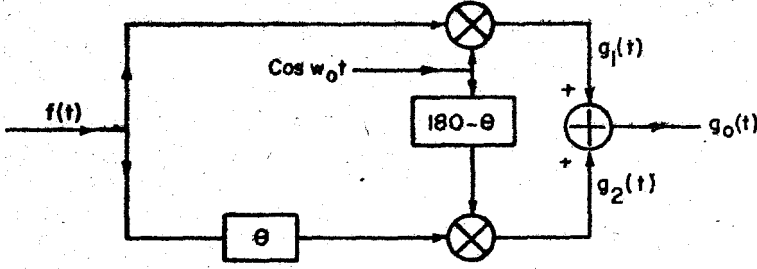
olduğunu gösteriniz.

- 5.6. Evre kaydırma yöntemi ile çalışan bir TYB modülatörüne Alıştırma 5.5'de incelenen devre eklenerek Şekil 5.A.4'deki devre elde ediliyor.



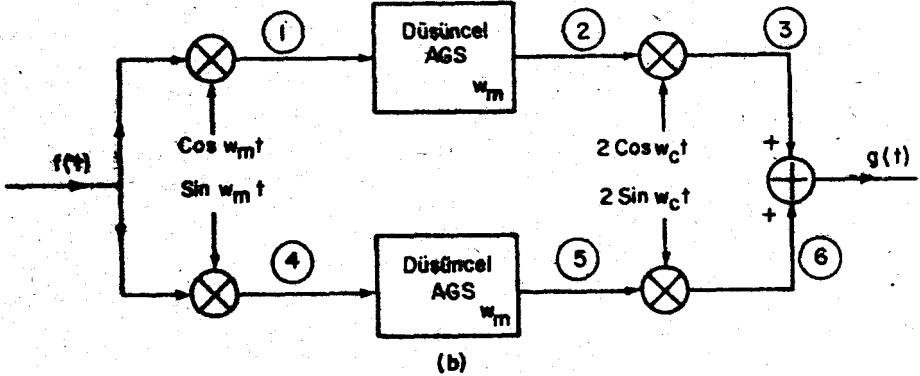
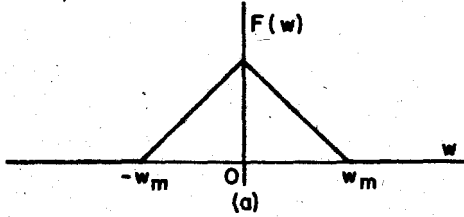
Şekil 5.A.4

- (a)  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  ve  $g_0(t)$  işaretlerinin zaman bölgesi ifadelerini bulunuz.
- (b)  $g_0(t)$  dan  $f(t)$  yi geri elde etmek için nasıl bir demodülatör önerirsiniz?
- 5.7. Şekil 5.A.5'de verilen devreyi düşünelim.
- (a)  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  ve  $g_0(t)$  nin zaman bölgesi ifadelerini bulunuz.
- (b)  $g_0(t)$  bir TYB işareti midir?  $\theta = 90^\circ$  için  $g_0(t)$  ne olur?



Şekil 5.A.5

- 5.8. Şekil 5.A.6b'de verilen dizgeyi düşününüz. Bilgi işareti  $f(t)$  nin frekans görünüşü Şekil 5.A.6a'de gösterilmiştir. 1,2,3,4,5 ve 6 noktalarındaki işaretlerin frekans görüngelerini çiziniz.  $g(t)$  işaretinin TYB modüle edilmiş bir işaret olduğunu gösteriniz.



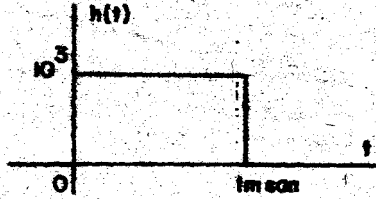
Şekil 5.A.6

- 5.9. (a) Aşağıda verilen zaman dalgabıçımının bir TYB modüle edilmiş işaret olduğunu gösteriniz.  $\omega_0 > \omega_M$  varsayınız. Hangi yan bant bastırılmıştır?

$$v(t) = \sum_{i=1}^M [ \cos \omega_0 t \cos(\omega_i t + \theta_i) - \sin \omega_0 t \sin(\omega_i t + \theta_i) ]$$

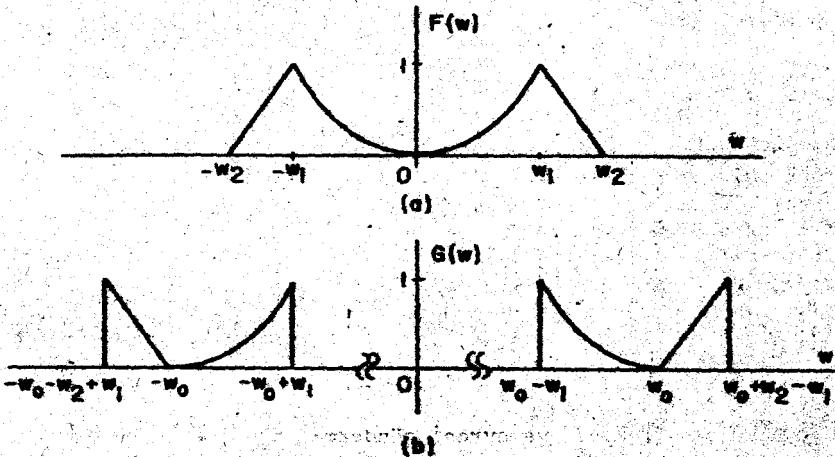
- (b) Bastırılmış olan yan bantın zaman bölgesi ifadesini yazınız.  
 (c) Bu TYB işaretinin elde edildiği ÇYB işaretinin zaman bölgesi ifadesi nedir?

5.10. Dürtü tepkisi  $h(t)$ , Şekil 5.A.7'de verilen bir dizgenin girişine  $c(t) = (\cos 2\pi \cdot 250t)(\cos 2\pi \cdot 4250t)$  işareti uygulanıyor.



Şekil 5.A.7

- (a) Çıktının frekans görünüşünü ve zaman bölgesi ifadesini bulunuz.  
 (b) Girdi ve çıktının ortalama güçlerini bulunuz.
- 5.11. Şekil 5.A.8a'da görünüşü verilen temelbant işareti  $f(t)$  yi düşününüz. Bu işaret kullanılarak elde edilecek olan  $g(t)$  işaretinin görünüşü ise Şekil 5.A.8b'de verilmiştir.  $\omega_0 > \omega_2$  varsayınız.



Şekil 5.A.8

(a) Girişine  $f(t)$  uygulandığında çıkışında  $g(t)$  yi veren bir iletişim dizgesi tasarımı yapınız. Tasarımın çeşitli noktalarında frekans görüngesini çiziniz.

(b)  $f(t)$  işareti

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $f_1(t)$  nin Fourier dönüşümü  $\omega_1$  kesimine göre  $F(\omega)$  nin alt yan bandını,  $f_2(t)$  nin Fourier dönüşümü ise  $\omega_1$  kesimine göre  $F(\omega)$  nin üst yan bandını oluşturur.  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  türünden,  $g(t)$  için bir zaman bölgesi ifadesi bulunuz.

5.12. İki GM radyo istasyonu A ve B'nin taşıyıcı frekansları sırasıyla  $f_A = 800$  KHz ve  $f_B = 806$  KHz'dir. Görüldüğü gibi bu iki radyo istasyonu taşıyıcı frekansları arasındaki uzaklık, uluslararası kurallara uygun bir biçimde 10 KHz olmayıp, 6 KHz dir. Yani, frekans bölgesinde A istasyonunun üst yan bandı ile B istasyonunun alt yan bandı çakışır.

Düşüncel alçak geçiren süzgeçler, düşüncel bant geçiren süzgeçler ve karıştırıcılar (çarpıcılar ile istenilen frekans ve evredeki sinusoidaller üreten salıngaçlar) kullanarak,

(a) A istasyonunun yayınladığı bilgi işaretini,

(b) B istasyonunun yayınladığı bilgi işaretini

herhangi bir bozulma olmadan sezecek bir demodülatör tasarımı yaparak, Şek çizimini yapınız. Çizimin çeşitli noktalarında işaretin frekans görüngesini çiziniz.

5.13. Bu alıştırma bir kuramsal stereo yayını düşünülecektir.

$x(t)$  → sağ kanal  
 $y(t)$  → sol kanal

olarak,  $x(t)$  ve  $y(t)$  işaretlerini gönderen bir stereo yayın istasyonu düşününüz. Her iki bilgi işareti de  $2\pi \cdot 30$  ile  $2\pi \cdot 10^4$  rad/san arasında bant sınırlıdır. İstasyonun yayınladığı  $c(t)$  işareti iki TYB işaretinden oluşmaktadır. Birincisi üst yan bandı  $\omega_0$  a TYB modüle edilmiş  $x(t)$ , ikincisi alt yan bandı  $\omega_0$  a TYB modüle edilmiş  $y(t)$  dir. Taşıyıcı frekansı  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^5$  rad/san'dir.

(a)  $x(t)$  ve  $y(t)$  nin frekans görüngelerini değişik varsayarak  $c(t)$  nin frekans görüngesini kabaca çiziniz.  $x(t)$  ve  $y(t)$  cinsinden  $c(t)$  nin zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

(b) Alınmakta, frekansı ve evresi göndermecinkine eşzamanlı olan büyük bir taşıyıcı  $c(t)$  ye ekleniyor.  $x(t)$  ve  $y(t)$  yi ayrı ayrı elde etmek için bir zarf sezici kullanılabilir mi? Zarf sezicinin çıktısının zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

(c)  $c(t)$  yi demodüle ederek iki ayrı çıktıda  $x(t)$  ve  $y(t)$  yi veren bir demodülatörün öbek çizimini yapınız. Öbek çiziminin çeşitli noktalarında ya zaman işaretini ya da işaretin frekans görünüşünü belirtiniz.

5.14. Bir ÇYB işareti bir artık yan bant süzgecinden geçirilerek AYB işareti elde ediliyor. AYB süzgecinin geçiş işlevi Şekil 5.A.9'da verilmiştir. ÇYB işareti

$$c(t) = 4f(t) \cos 2\pi \cdot 10^4 t$$

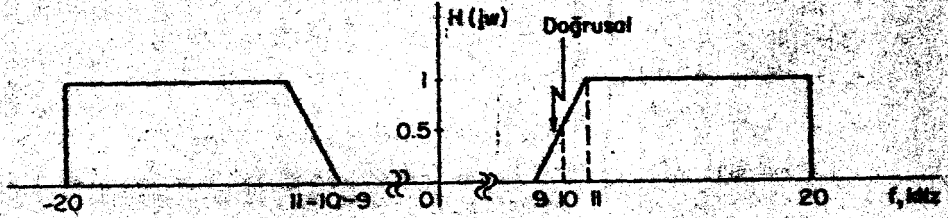
ise, aşağıda verilen  $f(t)$  bilgi işaretleri için AYB modüle edilmiş işaretin zaman bölgesi ifadesini bulunuz ve frekans görünüşünü çiziniz.

(a)  $f(t) = A \sin(10^3 \pi t)$

(b)  $f(t) = A \sin(10^3 \pi t) + \cos(2 \cdot 10^3 \pi t)$

(c)  $f(t) = \sin(500 \pi t) \cos(10^3 \pi t)$

5.15. Aşağıda verilen bilgi işaretleri için Alıştırma 5.14'ü tekrarlayınız.



Şekil 5.A.9

(a)  $f(t) = Ss(10^3 \pi t)$

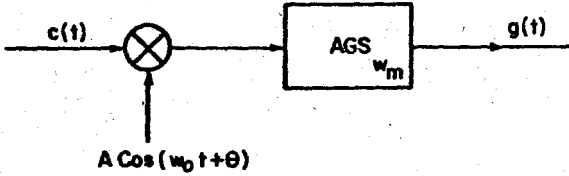
(b)  $f(t) = Ss^2(10^3 \pi t)$

5.16. (a) Bir taşıyıcı GM işareti

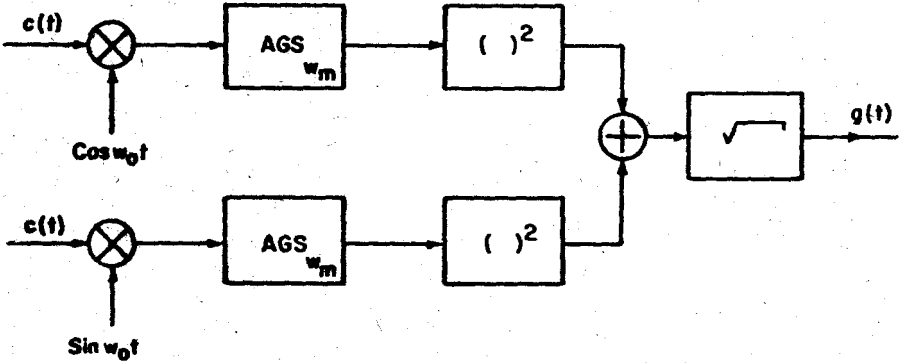
$$c(t) = A [1 + f(t)] \cos(\omega_c t + \theta)$$

olarak veriliyor. Bu işareti bir eşzamanlı demodülatör (Şekil 5.A.10) ile demodüle etmek için, evresi ve frekansı taşıyıcı ile aynı bir sinüzoidal almalı üretilmelidir. Şekil 5.A.10'da verilen eşzamanlı demodülatörün çıktısını bulunuz, ( $f(t)$  nin en yüksek frekansını ve AGS'nin kesim frekansını varsayınız).

(b) GM işaretlerinin eşzamanlı demodülasyonunda, evresi taşıyıcı ile aynı olan bir sinüzoidal almalı üretilmelidir. Şekil 5.A.11'de verilen almalı kullanılarak bu zorlukta kurtulabiliriz.  $f(t)$  nin en yüksek frekansı ve AGS nin kesim



Şekil 5.A.10



Şekil 5.A.11

frekansı  $\omega_m$  dir.  $\omega_0 \gg \omega_m$  ve bütün  $t$  değerleri için  $1 > |f(t)|$  varsayınız. (a) kısmında verilen taşıyıcılı GM işareti  $c(t)$  için çıktının zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

(c) Şekil 5.A.11'deki almanın girişine bir ÇYB işareti

$$c(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$$

uygulanıyor. Çıktının zaman bölgesi ifadesini bulunuz ve bu demodülatörü zarf sezici ile karşılaştırınız.

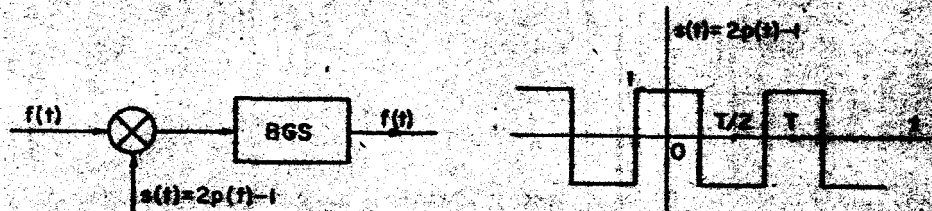
(d) Şekil 5.A.11'deki iki AGS kaldırılarak, karekök alma işleminin sonra tek bir AGS konuluyor. Bu demodülatörün girişine (a) kısmında verilen taşıyıcılı GM işareti  $c(t)$  uygulandığında çıktıyı bulunuz.

5.17. Bir  $f(t)$  işareti Şekil 5.A.12'de verilen çift-kutuplu kıyıcıdan ve bir bant geçiren süzgeçten geçirilerek modüle ediliyor. Daha sonra bu kıyılmış işaret, başka bir çift-kutuplu kıyıcı ile demodüle ediliyor. Demodülatördeki çift-kutuplu kıyıcı, modülatördeki kıyıcının  $\alpha T$  kadar gerisindedir. Bu nedenle demodülatördeki çift-kutuplu kıyıcının çıkışındaki işaret

$$\frac{4A}{\pi} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)s(t-\alpha T)$$

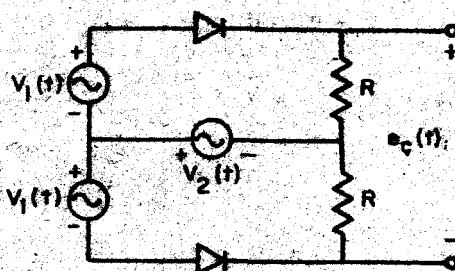


olarak ifade edilebilir. Daha sonra bu işaret bir alçak geçiren süzgeçten geçirilerek  $f(t)$  elde edilmek isteniyor. Değişik  $\alpha$  değerleri için demodülatörün çıkışındaki işaretin bulunması.

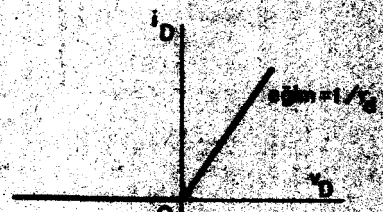


Şekil 5.A.12

5.18. (a) Şekil 5.A.13a'da verilen devreyi düşününüz. Diyodun parçalı doğrusal modeli Şekil 5.A.13b'de verilmektedir.



(a)



(b)

Şekil 5.A.13

$v_1(t)$  ve  $v_2(t)$  aşağıdaki gibi olursa, bu devre ve bir AGS, bir eşzamanlı demodülatör olarak kullanılabilir.

$$v_1(t) = f(t) \cos \omega_0 t$$

$$v_2(t) = A \cos \omega_0 t$$

Bütün  $t$  değerleri için  $A > |f(t)|$  varsayınız.  $e_c(t)$  nin zaman bölgesi ifadesini bulunuz.  $e_c(t)$  den  $f(t)$  nasıl geri elde edilebilir?

(b) Şekil 5.A.13a'da verilen devre bir evre ayırt edici olarak da kullanılabilir.  $v_1(t)$  ve  $v_2(t)$  sinüzoidal gerilimler ise, devrenin çıkışında bir sinüzoidalın değerine göre evresi ölçülebilir.

$$v_1(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

ve

$$v_2(t) = A \cos \omega_0 t$$

ise  $e_c(t)$  nin  $\cos \theta$  ile doğru orantılı bir DA terimi içerdiğini gösteriniz. ( $A \gg 1$  varsayınız).

### 5.19. Bir taşıyıcılı GM işareti

$$c(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega_0 t$$

nin taşıyıcı frekansının, yükseltip ya da düşürülerek yeni bir taşıyıcı frekansı  $\omega'_0 = \omega_0 \pm \Delta\omega$  ya getirilmesi isteniyor. Bu işlem *frekans çevrimi* olarak bilinir. Frekans çevriminden sonra elde edilecek taşıyıcılı GM işareti şu biçimdedir.

$$c'(t) = A [1 + mf(t)] \cos \omega'_0 t$$

- $\cos \Delta\omega t$  ile  $c(t)$  yi çarparak ve daha sonra çarpımı bir bant geçiren süzgeçten geçirerek, bu frekans çevriminin yapılabilirliğini gösteriniz. Taşıyıcı frekansı  $\Delta\omega$  rad/san kadar yükseltmek, ya da  $\Delta\omega$  rad/san kadar düşürülmek istenirse, süzgecin orta frekansı ne olmalıdır?
- Geçiş işlevi  $e_c = \alpha_1 e_g + \alpha_2 e_g^2$  ile verilen bir doğrusal olmayan aygıtın girişine  $c(t) + \cos \Delta\omega t$  işareti uygulanıyor. Çıktı için simgesel bir frekans görünüşü çiziniz. Frekans çevrimi için doğrusal olmayan aygıtın çıkışına nasıl bir süzgeç konulmalıdır?

# BÖLÜM 6

## FREKANS MODÜLASYONU

### 6.1. FREKANSI MODÜLE EDİLMİŞ DALGABİÇİMİ

Bir sinüzoidal taşıyıcı dalganın genliği bilgi işaretine bağlı olarak değiştirildiğinde genlik modülasyonu elde edildiği daha önceki bölümlerde görülmüştü. Bölüm 4 ve 5 de genlik modülasyonunun çeşitli biçimleri ayrıntılı olarak incelenmişti. Bir sinüzoidal taşıyıcı dalgaya modüle etmenin tek yolu genlik modülasyonu değildir. Bir sinüzoidal (taşıyıcı) üç değişken-genlik, frekans ve evre- ile belirlendiğine göre, bu sinüzoidal frekansı ya da evresi bilgi işaretine bağlı olarak değiştirilerek de modüle edilebilir. Bu tür modülasyon yöntemleri, özellikle taşıyıcının frekansı değiştirilerek elde edilen frekans modülasyonu, kitle iletişiminde olduğu gibi özel amaçlı iletişim dizgelerinde pek yaygın olarak kullanılır.

Frekans modülasyonu bir SD (sürekli dalga) modülasyonu türüdür ve sinüzoidal taşıyıcının frekansı bilgi işareti (modüle eden işaret)  $f(t)$  ye bağlı olarak değiştirilir. Buna göre taşıyıcının frekansı şu biçindedir.

$$\omega_0 = kf(t) \quad (6.1)$$

Burada  $f(t)$  bilgi işaretidir,  $k$  bir diğe değişmezdir ve  $\omega_0$  ise taşıyıcı frekansıdır. Ancak bu ifadenin kullanılmasında kavramsal bir güçlük vardır. Bu güçlük, bir sinüzoidalın frekansından söz etmek için bu fre-

kansın değişmez olması gerektiği düşüncesidir, oysa burada değişen bir frekanstan söz edilmektedir.

Ortaya çıkan bu güçlüğü'nü nedeni, yalnızca "bir açının sinüsünün (ya da kosinüsünün)" kesinlikle tanımlanmış bir kavram olmasıdır.  $\theta(t)$  açısının kosinüsü denilmekle  $\cos\theta(t)$  anlaşılır.  $\theta(t)$  açısı zamanla değiştiğinden  $\cos\theta(t)$  bir zaman dalgabıçimidir. Eğer bu  $\theta(t)$  açısı zamanla doğrusal olarak değişirse, yani

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad (6.2)$$

ise,  $\theta(t)$  nin türevi  $\omega_0$  sinüzoidalın frekansı olarak belirlenir.  $\omega_0$  frekansında bir sinüzoidal dalga, açısı zamanla doğrusal olarak değişen bir sinüzoidaldir ve açısının türevi  $\omega_0$  dir.

$\theta(t)$  açısı zamanla doğrusal olarak değişmezse ne olur? Bu durumda, kuşkusuz, evrenin değişim hızı ( $\theta(t)$  açısı t ye göre doğrusalsa, değişim hızı frekans olarak adlandırılır) zamanla değişir. Ancak bu durumda da açının değişim hızından, yani  $\frac{d\theta(t)}{dt}$  türevinden bahsedilebilir. Bu nicelik sinüzoidalın ansal frekansı  $\frac{d\theta(t)}{dt}$  olarak tanımlanır.

$$\omega_a(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (6.3)$$

$\theta(t)$  açısı zamanla doğrusal olarak değiştiğinde, yani  $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$  olduğunda, iki tanım aynı olur. Bir başka deyişle  $\omega_a = \frac{d\theta}{dt}$  ansal frekansı ile sinüzoidalın frekansı olarak adlandırılan  $\omega_0$  niceliği aynı olur.

$\theta(t)$  açısı,  $\omega_a(t)$  nin tümlevi alınarak yeniden geri elde edilebilir.

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega_a(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

Burada  $\theta(t_0)$  tümlev değişmezidir.

Bu açıklamalardan sonra, taşıyıcı açısının  $f(t)$  ile modüle edildiği modülasyon türlerini tartışabiliriz. Bu tür modülasyon açı modülasyonu olarak adlandırılır. Açı modülasyonunun iki türü vardır.

- (1) Evre modülasyonu (EM)
- (2) Frekans modülasyonu (FM)

$\theta(t)$  açısı, bilgi işareti  $f(t)$  ye bağlı olarak doğrusal değişirse, yani

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 + kf(t) \quad (6.5)$$

ise, evre modülasyonu (EM) elde edilir. Buna göre

$$A \cos[\omega_0 t + \theta_0 + kf(t)] \quad (6.6)$$

sinüzoidalı, evresi modüle edilmiş bir taşıyıcıyı gösterir. (6.6) da

verilen evresi modüle edilmiş dalgabiçiminin ansal frekansı  $\omega_a$  şöyledir:

$$\omega_a(t) = \frac{d}{dt}[\omega_o t + \theta_o + k_f f(t)] = \omega_o + k_f \frac{df(t)}{dt} \quad (6.7)$$

Bu nedenle evre modülasyonunda, ansal frekans modüle eden işaretin türevi ile doğrusal olarak değişir.

Ahsal frekans, bilgi işareti  $f(t)$  ile doğrusal olarak değişirse, yani

$$\omega_a(t) = \omega_o + k_f f(t) \quad (6.8)$$

ise, frekans modülasyonu (FM) elde edilir. Frekansı modüle edilmiş sinüzoidalın açısı ise şu biçimdedir:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_o + \int_{t_o}^t \omega_a(\tau) d\tau ; \quad \theta_o = \theta(t_o) \\ &= \theta_o + \omega_o(t-t_o) + k_f \int_{t_o}^t f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.9)$$

Buna göre frekansı modüle edilmiş sinüzoidal şu biçimde gösterilebilir:

$$c(t) = A \cos [\omega_o t - \omega_o t_o + \theta_o + k_f \int_{t_o}^t f(\tau) d\tau] \quad (6.10)$$

Tümlev değişmezi sıfır alınarak, frekansı modüle edilmiş dalgabiçimi genel olarak şöyle ifade edilebilir:

$$c(t) = A \cos [\omega_o t + k_f \int_{t_o}^t f(\tau) d\tau] \quad (6.11)$$

Yukarıdaki tartışmadan EM ile FM nin birbirleriyle yakından ilişkili oldukları görülür. EM'de açı, bilgi işareti ile doğrusal olarak değişir; FM'de ise açı, bilgi işaretinin tümlevi ile doğrusal olarak değişir.  $f(t)$  nin tümlevini alıp, bu işaretle taşıyıcının evresini modüle etmek FM işaretlerini üretmekte kullanılan bir yöntemdir. Benzer biçimde önce  $f(t)$  nin türevi alınır ve bu işaretle bir taşıyıcının frekansı modüle edilirse, evresi modüle edilmiş bir dalgabiçimi elde edilir. Modüle edilmiş bu iki işaretin çözümlenmesi, bunları üretme yöntemleri ve demodüle etme yöntemleri birbirlerine çok benzer. Bu nedenle EM ve FM in her ikisinin de ayrı ayrı incelenmesi gereksizdir. Burada yalnız frekansı modüle edilmiş dalgabiçimi ayrıntılı olarak incelenecektir.

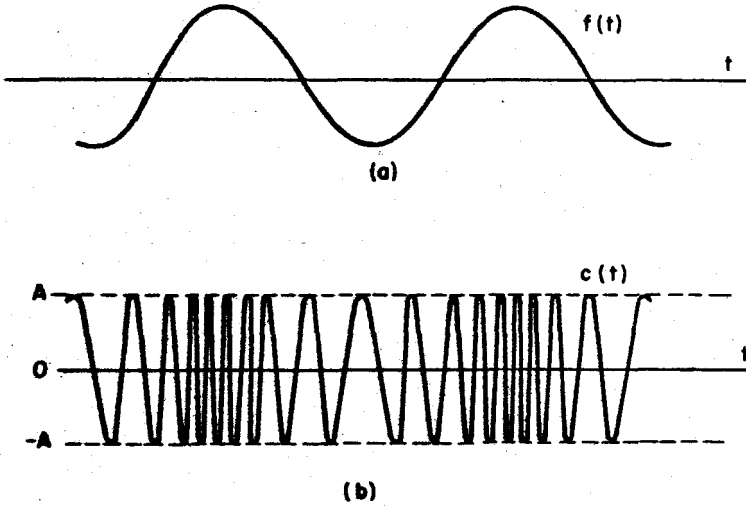
(6.11) de verilen frekansı modüle edilmiş dalgabiçimi, bir karmaşık üstel işlevin gerçel kısmı olarak da gösterilebilir.

$$c(t) = Ge \left[ A e^{j\omega_0 t + jk_f \int f(\tau) d\tau} \right] \quad (6.12)$$

Frekansı modüle edilmiş dalgabıçımını bu ifade ile göstermek çoğunlukla daha uygun olur. Bir sinüzoidal bilgi işareti  $f(t)$  için, frekansı modüle edilmiş dalgabıçımını Şekil 6.1 de gösterilmiştir. Frekansı modüle edilmiş dalgabıçımının genliği (genliği modüle edilmiş dalgabıçımının tersine) değişmezdir.

(6.11) de verilen frekansı modüle edilmiş dalgabıçımı ifadesinde  $A$  taşıyıcının genliğidir. Çözümlemedeki genelliği bozmadığı için  $A = 1$  varsayılabilir.  $\omega_0$  taşıyıcı frekansı diye adlandırılır,  $k_f$  ise dizgenin bir değişmezidir. (6.8) de verilen  $\omega_a(t)$  ansal frekansı, bilgi işareti  $f(t)$  nin değerlerine bağlı olarak, taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  dan sapar. Ansal frekansın  $\omega_0$  a göre en büyük sapması (artı ya da eksi) frekans sapması diye adlandırılır ve  $\Delta\omega$  ile gösterilir. Başka bir deyişle;

$$\Delta\omega \stackrel{\Delta}{=} k_f |f(t)|_{eb} \quad (6.13)$$



Şekil 6.1 Bilgi işareti  $f(t)$  ve frekansı  $f(t)$  ile modüle edilmiş dalgabıçımı  $c(t)$

Bilgi işareti  $f(t)$  düzgülenmiş biçimde ise yani,

$$\overline{f(t)} = 0 \quad \text{ve} \quad |f(t)|_{eb} = 1 \quad (6.14)$$

ise  $\Delta\omega = k_f$  dir.

$\omega(t)$  ansal frekansı  $\omega_0 - \Delta\omega$  ile  $\omega_0 + \Delta\omega$  arasında değişir. Bundan giderek şu biçimde düşünülebilir. Modüle edilmiş dalgabıçımının frekans bileşenleri yalnız  $\omega_0 - \Delta\omega$  ile  $\omega_0 + \Delta\omega$  arasındadır. Bu yanlış bir yak-

laşımıdır. Taşıyıcının ansal frekansı ile modüle edilmiş dalgabiçiminin frekans bileşenleri arasındaki bağıntı o kadar kolay değildir. Genel olarak, modüle edilmiş dalgabiçimi  $c(t)$  nin  $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$  bandı dışında da frekans bileşenleri vardır. Frekansı modüle edilmiş işaretlerin frekans görüngesi incelendikten sonra bu konu açıklığa kavuşacaktır.

FM dalgabiçiminin çözülmesi GM dalgabiçimininkine göre daha karışıktır. GM dalgabiçimi (taşıyıcı dışında) şu özelliği sağlar:  $f_1(t)$  ile modüle edilmiş dalgabiçimi ve  $f_2(t)$  ile modüle edilmiş dalgabiçiminin toplamı  $f_1(t) + f_2(t)$  ile modüle edilmiş dalgabiçimine eşittir. Bir başka deyişle GM doğrusal bir işlemdir. FM ise değildir. Genel olarak,  $f_1(t) + f_2(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  ile ayrı ayrı modüle edilmiş dalgabiçimleriyle hiçbir ilişkisi yoktur. Bu nedenle, basit işlevlerle, örneğin sinüzoidallerle, modüle edilmiş dalgabiçimlerinin çözümlemesinden giderek, herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş dalgabiçimi için genel sonuçlar çıkarmak olanaksızdır.

Herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin frekans görüngesini bulmak, genel olarak olanaksızdır. Bu nedenle, burada tek bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin çözümlemesi yapılacaktır. Tek bir sinüzoidalın herhangi bir bilgi işareti  $f(t)$  için iyi bir yaklaştırma olmadığı açıktır. Ancak tek bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin çözümlemesi ve özellikleri, genel bir FM dalgabiçiminin özellikleri üzerine ışık tutacaktır. Herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin frekans görüngesi üzerine ancak şu iki özel durum için bazı şeyler söylenebilir.

(i)  $k_f f(t)$  çok küçük ve

(ii)  $k_f f(t)$  çok büyük.

İlk durum darbant FM olarak bilinir.

Bir sinüzoidal ile modüle edilen FM dalgabiçiminin çözümlemesini yapacağımız yukarıda belirtilmişti. Bilgi işareti,

$$f(t) = a \cos \omega_m t \quad (6.15)$$

ile gösterilebilir ve ansal frekans

$$\omega_a(t) = \omega_0 t + ak_f \cos \omega_m t \quad (6.16)$$

olur. Burada  $\Delta\omega = ak_f$  dir. Buna karşılık gelen evre değişmezi ise şöyledir:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_a(\tau) d\tau = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t + \theta_0 \quad (6.17)$$

Uygun bir zaman başlangıcı seçilerek,  $\theta_0$  sıfır alınabilir ve FM dalgabiçimi şuna indirgenir:

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t) \quad (6.18)$$

$\Delta\omega/\omega_m$  oranı  $\beta$  ile gösterilir,

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \quad (6.19)$$

ve modülasyon derecesi diye tanımlanır. Modüle edilmiş dalgabıçımı modülasyon derecesi türünden şu biçimde ifade edilir:

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t) \quad (6.20)$$

GM deki modülasyon derecesi  $m$  gibi, FM deki modülasyon derecesi  $\beta$  da yalnız modülatörünün ya da yalnız modüle eden işaretin bir değiştirenini değil, (6.20) de verilen modüle edilmiş  $c(t)$  işaretinin bir değiştirenidir. GM deki modülasyon derecesi  $m$  herhangi bir bilgi işareti için tartışmaya yol açmayacak biçimde iyi tanımlanmıştır. FM de ise modülasyon derecesi  $\beta$  yalnız sinüzoidal bilgi işaretleri için tanımlanır. FM de modülasyon derecesi  $\beta$ , frekans sapması  $\Delta\omega$  nin sinüzoidal bilgi işaretinin frekansı  $\omega_m$  ye oranıdır. Frekans sapması  $\Delta\omega$  ise herhangi bir bilgi işareti için tanımlanabilen bir değiştirenidir. Bu nedenle FM deki genel anlatımlar frekans sapması  $\Delta\omega$  türünden ifade edilir.

(6.8) de ifade edildiği gibi  $\omega_a(t)$  ansal frekansı, bilgi işareti  $f(t)$  ile doğrusal olarak değişir. Buna bağlı olarak  $f(t)$  nin büyüklüğündeki artmalar ansal frekansta artmalara neden olur. Daha belirgin belirtmek gerekirse,  $f(t)$  nin büyüklüğündeki bir artma, (6.13) deki frekans sapması  $\Delta\omega$  da bununla orantılı bir artmaya neden olur.  $f(t)$  sinüzoidal ise ( $\beta$  tanımlanmıştır), frekans sapması  $\Delta\omega$  deki bir artma, modülasyon derecesi  $\beta$  da bununla orantılı bir artma ile sonuçlanır. Bundan öte (şu anda) sezisel olarak, modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımının bantgenişliğinin frekans sapması  $\Delta\omega$  (eğer tanımlanmışsa  $\beta$ ) ile orantılı olduğunu söyleyebiliriz. Bu önerüm ileride sinüzoidal bilgi işaretleri için kanıtlanmıştır. Buna göre  $f(t)$  nin büyüklüğündeki bir artma, modüle edilmiş dalgabıçımının bantgenişliğinde bununla orantılı bir artmaya neden olur. GM de ise modüle edilmiş dalgabıçımının bantgenişliği  $f(t)$  deki enbüyük frekansın iki katıdır, ancak  $f(t)$  nin büyüklüğüne bağlı değildir.

Aşağıda FM dalgabıçımının frekans görünüşü ve bantgenişliği araştırılacaktır. Ancak herhangi bir bilgi işareti  $f(t)$  için aynı çözümlemeyi izlemek olası değildir. Bu nedenle aşağıdaki çözümleme yalnız sinüzoidal bilgi işaretleri için yapılmıştır. Çözümleme basamak basamak yapılacak ve mümkün olduğu zamanlarda daha genel durumları içeren biçimde genelleştirilecektir. Örneğin  $k_f \int f(\tau) d\tau$  tümlevi çok küçük olan herhangi bir  $f(t)$  için ya da ortalama değeri sıfır olan herhangi bir önemli  $f(t)$  için, çözümleme sonuçları genelleştirilecektir.

## Darbant FM

$f(t)$  işaretini bir sinüzoidal ve  $\beta$  yı çok küçük varsayalım ve  $\beta < \pi/2$  (radyan türünden) olsun. İleride görüleceği gibi küçük  $\beta$  dar bantgenişliğine karşılık gelir. Bu nedenle, bu yolla elde edilen FM işareti darbant FM olarak bilinir. Bu durum incelendikten sonra  $\beta$  nin



küçük olma varsayımı kaldırılacak ve herhangi bir  $\beta$  için daha genel bir durum düşünülecektir.  $\beta \ll \pi/2$  koşulu genellikle  $\beta < 0.2$  radyan ya da ara sıra  $\beta < 0.5$  radyan olarak anlaşılır.

Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, (6.20) de verilen sinüzoidal bir işarette modüle edilmiş FM dalgabiçimi şöyle ifade edilebilir:

$$c(t) = \cos \omega_o t \cos (\beta \sin \omega_m t) - \sin \omega_o t \sin (\beta \sin \omega_m t) \quad (6.21)$$

Bu ifade modülasyon derecesi  $\beta$  nın bütün değerleri için geçerlidir. Küçük  $\theta$  değerleri için şu yaklaşımlar yapılabilir:

$$\begin{aligned} \cos \theta &\cong 1 \\ \sin \theta &\cong \theta \end{aligned} \quad (6.22)$$

$\cos \theta$  ve  $\sin \theta$  nın seri açınımları kullanılarak bu yaklaşımlar kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} - \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \end{aligned} \quad (6.23)$$

Küçük  $\theta$  değerleri için, her iki serinin ilk terimleri önemlidir, diğerleri yok sanılabilir. Buna göre  $\cos \theta$  ile  $\sin \theta$ , seri açınımlarının ilk terimleri ile yaklaşılabılır ve (6.22) elde edilir.

$\beta = 0.2$  için

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos 0.2 = 0.9801 \cong 1.0 \\ \sin \beta &= \sin 0.2 = 0.1987 \cong 0.2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$\beta = 0.5$  için ise yaklaşımlar o denli iyi değildir, ancak yine de geçerli kabul edilebilir.

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos 0.5 = 0.8776 \cong 1.0 \\ \sin \beta &= \sin 0.5 = 0.4794 \cong 0.5 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Bu nedenle  $\beta \ll \pi/2$  için şu yaklaşımlar yapılabilir.

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin \omega_m t) &\cong 1.0 \\ \sin(\beta \sin \omega_m t) &\cong \beta \sin \omega_m t \end{aligned} \quad (6.26)$$

Bu yaklaşımlar kullanılarak, (6.21) deki modüle edilmiş dalgabiçimi ifadesi şuna indirgenir:

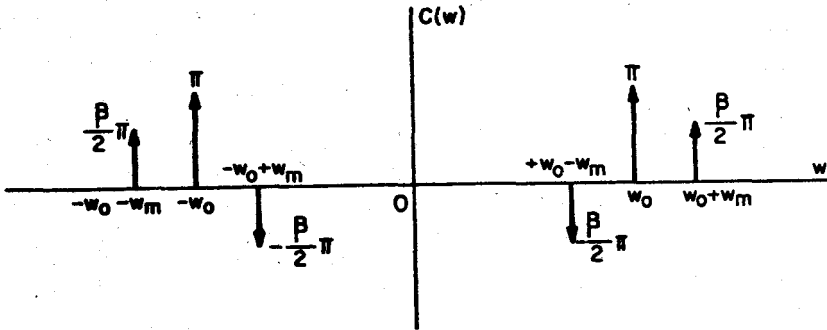
$$c(t) = \cos \omega_o t - \beta \sin \omega_m t \sin \omega_o t \quad (6.27)$$

Bu bir *darbant FM* dalgabiçimi ifadesidir.

Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, (6.27) deki *darbant FM* dalgabiçimi

$$c(t) = \cos \omega_0 t - \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t \quad (6.28)$$

ile ifade edilir. Bu ifade kullanılarak, sinüzoidal bir işaret ile modüle edilmiş *darbant FM* dalgabiçiminin frekans görünüşü kolayca bulunabilir. Görünüşe Şekil 6.2'de gösterilmiştir.



Şekil 6.2 Sinüzoidal bir işaret ile modüle edilmiş *darbantlı FM* dalgabiçiminin görünüşü

Sinüzoidal bir işaret ile modüle edilmiş *darbant FM* dalgabiçiminin ve sinüzoidal bir işaret ile modüle edilmiş *GM* dalgabiçiminin matematiksel ifadelerindeki benzerlik dikkat çekicidir. *Darbant FM* görünüşü de  $\omega_0$  daki bir taşıyıcı ile iki yan banttan oluşur. *GM* durumuna benzer biçimde *darbant FM*'in bant genişliği de  $2 \omega_m$  dir, burada  $\omega_m$  modüle eden sinüzoidal frekansıdır.

Herhangi bir bilgi işareti  $f(t)$  için *FM* dalgabiçimi

$$c(t) = \cos \omega_0 t + k_f \int f(\tau) d\tau \quad (6.29)$$

ile ifade edilebilir. Tümler terimi

$$g(t) \triangleq \int f(\tau) d\tau \quad (6.30)$$

ile tanımlandığında  $k_f g(t) \ll \pi/2$  için, (6.22) deki yaklaşımlar kullanılarak herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş *darbant FM* dalgabiçimi şöyle ifade edilebilir:

$$c(t) = \cos \omega_0 t - k_f g(t) \sin \omega_0 t \quad (6.31)$$

GM ile darbant FM arasındaki benzerlik bu ifadeden de görülebilir.

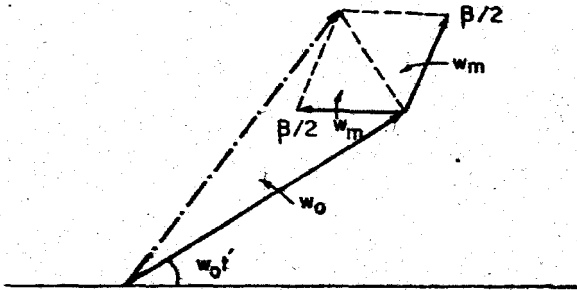
Kabaca, darbant FM görünüşünün taşıyıcı ile iki yanbanttan oluştuğu söylenebilir. Yanbantlar taşıyıcının her iki tarafında yer alır ve biçimi  $g(t)$  nin görünüşüne benzer. Dabant FM bu yönlerden GM'ye benzer. Ancak yan bantlar  $f(t)$  nin değil,  $g(t)$  nin görünüşüdür.  $g(t) = \int f(\tau) d\tau$  olduğuna göre  $G(\omega) = F(\omega)/j\omega$  dir. Buna göre bilgi işareti  $f(t)$  nin alçak frekans bileşenleri önem kazanır, yüksek frekans bileşenleri ise zayıflatılır. Dabant FM dalgabiçiminin bantgenişliği de  $g(t)$  nin (ya da  $f(t)$  nin) en yüksek frekansının iki katıdır.  $G(\omega) = F(\omega)/j\omega$  olduğundan  $f(t)$  ve  $g(t)$  nin en yüksek frekans bileşenleri aynıdır.

GM ve darbant FM benzer görüme ve matematiksel gösterimlere sahip olmalarına rağmen dalgabiçimleri oldukça ayrıdır. GM dalgabiçimi değişmeler genliktedir ve frekans değişmeden kalır. Dabant FM de ise genlik değişmeden kalır, ancak frekans değişir. Ayrım şu biçimde de özetlenebilir: GM de taşıyıcı terimi ile yan bant terimleri aynı evrededir, darbant FM de ise bunlar arasında  $90^\circ$  evre farkı vardır.

Dabant FM dalgabiçimi karmaşık üstel işlevler türünden şöyle ifade edilebilir:

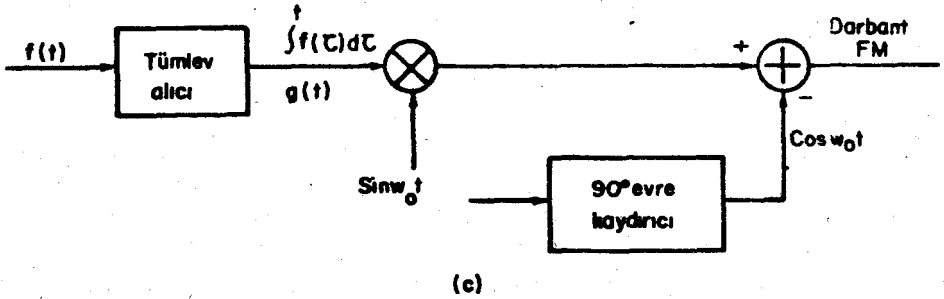
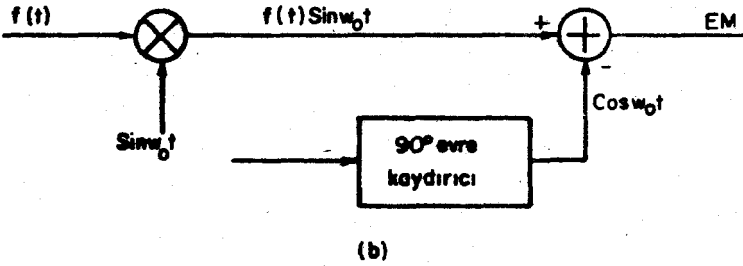
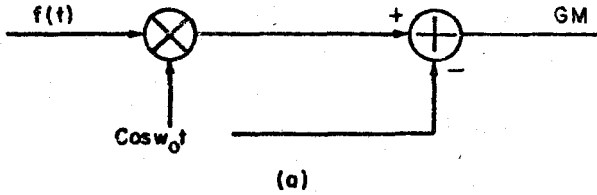
$$\begin{aligned} c(t) &= \cos \omega_0 t - \beta \sin \omega_m t \sin \omega_0 t \\ &= \cos \omega_0 t - \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t \\ &= Ge [e^{j\omega_0 t} (1 - \frac{\beta}{2} e^{-j\omega_m t} + \frac{\beta}{2} e^{j\omega_m t})] \end{aligned} \quad (6.32)$$

Bu ifade kullanılarak darbant FM'nin evreoku çizimi yapılabilir. Çizim Şekil 6.3'de verilmiştir. Dabant FM in evreoku çizimi incelendiğinde, yan bantların bileşkesinin taşıyıcıya dik olduğu görülür. GM de ise (Şekil 4.9) yan bantların bileşkesi taşıyıcı ile aynı evrededir.



Şekil 6.3 Bir darbant FM dalgabiçiminin evreoku çizimi

Darbant FM ifadesi ile GM ifadesi arasındaki benzerlik, darbant FM dalgabiçiminin GM dalgabiçimininkine benzer yolla üretilebileceğini belirtir. Şekil 6.4'de bir GM modülatörü, bir darbant FM modülatörü ve bir evre



- (a) GM modülatörü  
 (b) EM modülatörü (evre sapması  $\ll \pi/2$ )  
 (c) Darbant FM modülatörü

Şekil 6.4 Çeşitli modülatörlerin öbek çizimleri

modülatörünün öbek çizimi verilmiştir. FM modülatörünün yapısı (6.30) ve (6.31) kullanılarak elde edilmiştir. Evresi modüle edilmiş dalgabiçimi için (6.6) da verilen ifade ve en büyük evre sapmasının maks  $k|f(t)| \ll \pi/2$  olması koşulu kullanılarak evre modülatörünün yapısı elde edilebilir.

## Geniş-bant FM

Bu durumu incelerken genişbant FM yerine darbant olmayan FM denmesi daha uygundur. Çünkü darbant FM nin karşıtı olan öteki uç incelenmeyecek, yalnızca  $\beta \ll \pi/2$  olması koşulu kaldırılacaktır. Gerçekte iki uç durumu diye bir şey yoktur.  $\beta \ll \pi/2$  nin geçerli olduğu darbant FM özel durumu ile  $\beta \ll \pi/2$  varsayımının doğru olmadığı genel durum vardır.

Genel durumu incelemeden önce  $\beta$  yi yavaşça arttıralım, yani  $\beta \ll \pi/2$  koşulunu yavaşça kaldıralım ve FM dalgabiçiminde olan değişimleri gözleyelim. FM dalgabiçiminin tüm  $\beta$  değerleri için geçerli olan genel ifadesi (6.21) de verilmiştir.  $\beta$  değeri, (6.26) daki yaklaşımları yapamayacak kadar büyük ve aşağıdaki yaklaşımları yapacak kadar küçük olsun.

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) \cong 1 - \frac{(\beta \sin \omega_m t)^2}{2!} \quad (6.33)$$

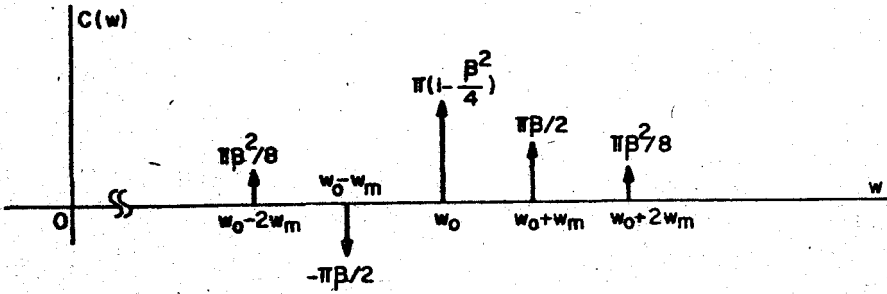
$$\sin(\beta \sin \omega_m t) \cong \beta \sin \omega_m t$$

Bu  $\beta$  değerleri için, FM dalgabiçimi şöyledir:

$$\begin{aligned} c(t) &= \cos \omega_0 t \left[ 1 - \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \omega_m t \right] - \beta \sin \omega_m t \sin \omega_0 t \\ &= \cos \omega_0 t - \frac{\beta^2}{4} \cos \omega_0 t + \frac{\beta^2}{4} \cos \omega_0 t \cos 2\omega_m t \\ &\quad - \frac{\beta}{2} [\cos(\omega_0 - \omega_m)t - \cos(\omega_0 + \omega_m)t] \\ &= (1 - \frac{\beta^2}{4}) \cos \omega_0 t - \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{\beta}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t \\ &\quad + \frac{\beta^2}{8} \cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + \frac{\beta^2}{8} \cos(\omega_0 + 2\omega_m)t \end{aligned} \quad (6.34)$$

$\sin(\beta \sin \omega_m t)$  terimine (6.23) deki sinüs işlevi açılımının ilk terimi ile yaklaşım yapılmış,  $\cos(\beta \sin \omega_m t)$  terimine ise (6.23) deki kosinüs işlevi açılımının ilk iki terimi ile yaklaşım yapılmış ve (6.33) bu biçimde elde edilmiştir. Bir başka deyişle, sinüs açılımında ikinci ve daha sonraki terimler, kosinüs açılımında üç ve daha sonraki terimler ihmal edilmiştir. Bu yaklaşım  $\beta \ll 6$  için geçerlidir. Buna göre  $\beta \ll \pi/2$  koşulu kaldırılır.  $\beta \ll 6$  koşulu konursa, FM dalgabiçimi (6.34) deki gibi ifade edilebilir. (6.34) de verilen  $c(t)$  dalgabiçiminin grüngesi Şekil 6.5'de gösterilmiştir.

(6.34) ve (6.27) deki dalgabiçimlerinin frekans grüngeleri karşılaştırılırsa,  $\beta \ll \pi/2$  koşulu  $\beta \ll 6$  olarak değiştirildiğinde (yani değeri biraz arttırıldığında),  $\omega_0 - 2\omega_m$  ve  $\omega_0 + 2\omega_m$  de yeni frekans bileşenleri görülür. Bunun yanısıra  $\beta$  değeri değişince daha önce var olan frekans bileşenlerinin genlikleri de değişir. Yan bant frekanslarındaki



Şekil 6.5 (6.34) deki FM dalgabiçiminin frekans görünüşü (Eksi frekanslardaki görüme, artı frekanslardakinin ayna görüntüsüdür.)

bileşenlerin sayısı 2 den 4 e artarken, FM dalgabiçiminin bantgenişliği de  $2\omega_m$  den  $4\omega_m$  ye artar.

$\beta$  değeri daha fazla arttırılırsa, sinüs ve kosinüs işlevlerine daha fazla terimle yaklaştırma yapılır. Bunun sonucu olarak modüle edilmiş dalgabiçiminde  $\omega_0 \pm 3\omega_m$ ,  $\omega_0 \pm 4\omega_m$ ,... v.s. frekanslarında yeni yan bantlar görülür. Modüle edilmiş dalgabiçiminin bantgenişliği ise  $6\omega_m$ ,  $8\omega_m$ , vs. ye artar. Buradan şu genel tümceyi söyleyebiliriz:  $\beta$  artarken yanbantların sayısı ve bantgenişliği artar.  $\beta$  artar ve yeni yan bantlar görülürken, daha önce var olan yan bantların büyüklükleri de  $\beta$  ya bağlı olarak değişir. Çünkü yan bant büyüklüklerinin  $\beta$  ya bağlı ifadeleri de değişmektedir. Örneğin,  $\omega_0$  deki bileşenin büyüklüğü,  $\beta \ll \pi/2$  koşulu geçerli iken  $\pi$  olduğu halde,  $\beta \ll 6$  koşulu geçerli iken,  $\pi(1 - \frac{\beta^2}{4})$  olur.  $\beta \ll \pi/2$  koşulu  $\beta \ll 6$  koşulunu da içerir.  $\beta \ll \pi/2$  için  $\omega_0$  daki büyüklük iki ayrı ifade ile belirlenir. Ancak bu iki ayrı ifadenin aynı anda doğru olması olanaksızdır. Gerçekte her iki ifade de tam doğru değildir. Her ikisi de  $\omega_0$  daki büyüklüğün gerçek değerine bir yaklaşımdır.  $\beta$  nın değeri arttıkça, yaklaştırmadaki terim sayısı da artmaktadır.  $\beta \ll \pi/2$  geçerli iken gerçek büyüklük  $\pi$  ile yaklaştırılabilir, ancak  $\pi(1 - \frac{\beta^2}{4})$  gerçek değere daha yakın bir değer verir.  $\beta \ll \pi/2$  geçerli olmayıp  $\beta \ll 6$  geçerli olursa o zaman  $\pi$  gerçek değere yakın değildir,  $\pi(1 - \frac{\beta^2}{4})$  gerçek değere daha yakındır.

FM de bantgenişliğinin, modülasyon derecesi  $\beta$  ile (bir başka deyişle modüle eden işaretin genliği ile) artması, GM de görülmeyen bir durumdur. GM dalgabiçiminin bantgenişliği modülasyon derecesi  $m$  ye bağlı değildir. FM de modülasyon derecesi  $\beta$  için herhangi bir kısıtlama yoktur. GM de ise modülasyon derecesi  $m$  bire eşit ya da birden küçük olmalıdır. Yukarıda da bahsedildiği gibi, FM de bantgenişliği  $\beta$  ile orantılı olarak artar. Bu nedenle bantgenişliği üzerine konacak bir kısıtlama,  $\beta$  ya da bir kısıtlama koyar.

GM ve FM de bilgi işaretinin büyüklüğü arttırılınca, modülasyon dereceleri  $m$  ve  $\beta$  da artar. FM de bilgi işaretinin büyüklüğünün artması, bantgenişliğinde bir artmaya neden olur. GM de ise bantgenişliği bilgi işaretinin büyüklüğündeki değişimlerden etkilenmez.

## Genel Durum

Herhangi bir  $\beta$  için, bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM dalgabıçımı  $c(t)$  aşağıda incelenmiştir. (6.21) de  $c(t)$  şöyle ifade edilmiştir:

$$c(t) = \cos \omega_0 t \cos(\beta \sin \omega_m t) - \sin \omega_0 t \sin(\beta \sin \omega_m t) \quad (6.35)$$

Amacımız  $c(t)$  yi sinüzoidaller türünden ifade etmek ve böylece frekans görünüşünü elde etmektir.

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) \text{ ve } \sin(\beta \sin \omega_m t) \quad (6.36)$$

terimlerinin her ikisi de dönemlidir ve dönemleri  $T = \frac{2\pi}{\omega_m}$  dir. Bu nedenle bunlar bir Fourier serisi açılımı ile gösterilirler.

Önce  $\cos(\beta \sin \omega_m t)$  terimini düşünelim. Bu işlev çift olduğundan Fourier serisi açılımı yalnız kosinüs terimlerinden oluşur.

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_m t \quad (6.37)$$

Burada

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\beta \sin \omega_m t) \cos n \omega_m t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.38)$$

Değişken değiştirip  $x = \omega_m t$  yerine konulursa,  $a_n$  yi veren tümlev şuna indirgenir:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T\omega_m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\beta \sin x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos(\beta \sin x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\beta \sin x - nx) + \cos(\beta \sin x + nx)] dx \end{aligned} \quad (6.39)$$

Birinci tür Bessel işlevleri,  $J_n(x)$ , aşağıdaki tümlev ifadeleriyle tanımlanır:

$$J_n(\beta) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\beta \sin x - nx) dx \quad (6.40)$$

$$J_{-n}(\beta) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\beta \sin x + nx) dx$$

$J_n(\beta)$  ve  $J_{-n}(\beta)$  türünden  $a_n$  katsayıları şu biçimde ifade edilir:

$$a_n = J_n(\beta) + J_{-n}(\beta) \quad (6.41)$$

Ayrıca birinci tür Bessel işlevlerinin aşağıdaki ilişkiyi sağladıkları da bilinmektedir.

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \quad (6.42)$$

Buna göre

$$a_n = J_n(\beta) + (-1)^n J_n(\beta) = \begin{cases} 2J_n(\beta) & n \neq 0, n \text{ çift} \\ 0 & n \text{ tek} \end{cases} \quad (6.43)$$

(6.38) ve (6.40) kullanılarak  $a_0$  katsayısının  $a_n$  nin  $n = 0$  daki değeri olduğu görülür. Buradan

$$a_0 = J_0(\beta) \quad (6.44)$$

bulunur.

Bu katsayılar (6.36) daki Fourier serisi açılımında yerine konulursa,

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos 2n \omega_m t \quad (6.45)$$

elde edilir.

Şimdi de  $\sin(\beta \sin \omega_m t)$  terimini düşünelim. Bu işlev tek olduğundan Fourier serisi açılımı yalnız sinüs terimlerinden oluşur.

$$\sin(\beta \sin \omega_m t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_m t \quad (6.46)$$

Burada

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\beta \sin \omega_m t) \sin n \omega_m t dt \quad (6.47)$$

$x = \omega_m t$  biçiminde değişken değiştirilirse, yukarıdaki tümlev ifadesi şöyle olur. ( $T\omega_m = 2\pi$  dir)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T\omega_m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\beta \sin x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin(\beta \sin x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\beta \sin x - nx) - \cos(\beta \sin x + nx)] dx \end{aligned} \quad (6.48)$$

(6.40) da verilen birinci tür Bessel işlevleri türünden  $b_n$  katsayıları şöyledir:

$$b_n = J_n(\beta) - (-1)^n J_n(\beta) = \begin{cases} 2J_n(\beta) & n \text{ tek} \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases} \quad (6.49)$$



Buradan

$$\sin(\beta \sin \omega_m t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin[(2n+1)\omega_m t] \quad (6.50)$$

bulunur.

(6.45) ve (6.50) deki ifadeler (6.35) de yerine konulursa şu ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} c(t) = & [J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos 2n\omega_m t] \cos \omega_o t \\ & - [2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin(2n+1)\omega_m t] \sin \omega_o t \end{aligned} \quad (6.51)$$

Çarpma işlemleri yapılır ve trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa,  $c(t)$  şu biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} c(t) = & J_0(\beta) \cos \omega_o t + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) [\cos(\omega_o - 2n\omega_m)t \\ & + \cos(\omega_o + 2n\omega_m)t] - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) [\cos(\omega_o - (2n+1)\omega_m)t \\ & - \cos(\omega_o + (2n+1)\omega_m)t] \end{aligned} \quad (6.52)$$

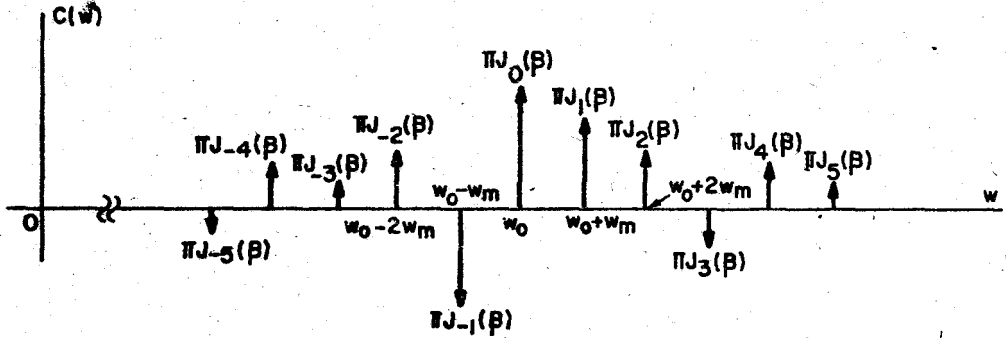
ya da

$$\begin{aligned} c(t) = & J_0(\beta) \cos \omega_o t \\ & - J_1(\beta) [\cos(\omega_o - \omega_m)t - \cos(\omega_o + \omega_m)t] \\ & + J_2(\beta) [\cos(\omega_o - 2\omega_m)t + \cos(\omega_o + 2\omega_m)t] \\ & - J_3(\beta) [\cos(\omega_o - 3\omega_m)t - \cos(\omega_o + 3\omega_m)t] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (6.53)$$

(6.53) de verilen  $c(t)$ , (6.42) kullanılarak daha kısa biçimde ifade edilebilir:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_o + n\omega_m)t \quad (6.54)$$

Bir sinüzoidalde modüle edilmiş FM dalgabіçiminin frekans görünüşü,  $\omega_o$  daki bir taşıyıcı ile bu taşıyıcıdan  $\pm\omega_m, \pm 2\omega_m, \pm 3\omega_m, \dots$  uzaklıktaki frekanslara yerleştirilmiş sonsuz sayıda yan bantlardan oluşur.  $c(t)$  nin frekans görünüşünün çizimi Şekil 6.6'da verilmiştir.



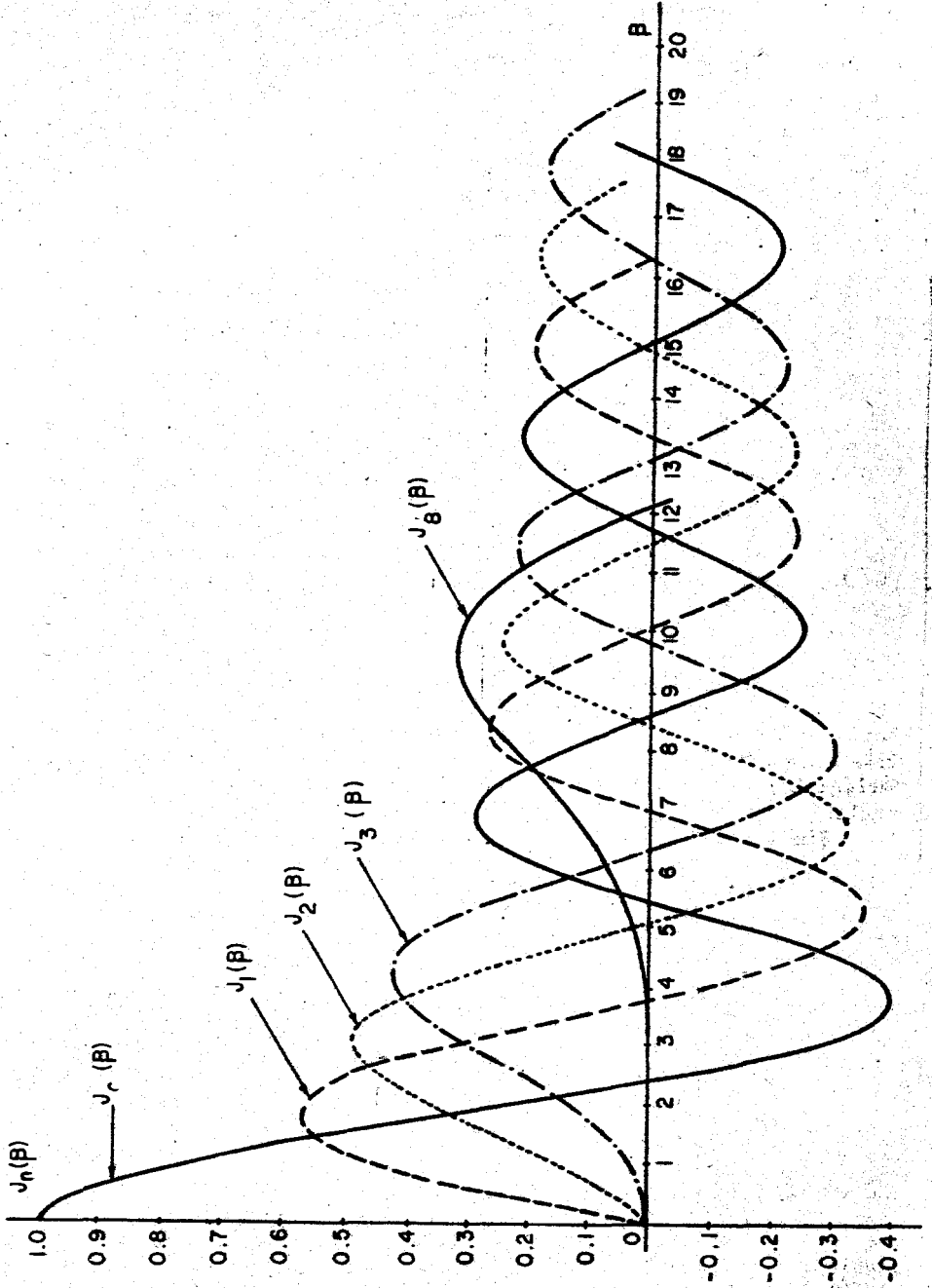
Şekil 6.6 Bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM dalgabıçımının frekans görünüşü (yalnız artı frekanslar için)

(6.34) deki ifadeden de görülebileceği gibi, bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabıçımı sonsuz sayıda yan banttandır ve bant genişliği sonsuzdur. Birinci tür Bessel işlevleri  $J_n(\beta)$  incelendiğinde yüksek frekanslardaki görüğe bileşenlerinin ihmal edilebilir oldukları görülür. Bu nedenle FM dalgabıçımının hemen hemen tüm gücü sonlu bir bant içinde yatan görüğe bileşenlerinde toplanmıştır.

Şekil 6.7'de birinci tür Bessel işlevleri  $J_n(\beta)$  çeşitli  $n$  değerleri için  $\beta$  nın bir işlevi olarak çizilmiştir. Her  $n$  değeri için  $J_n(\beta)$  sıfırdan başlar [yalnız  $J_0(\beta)$ , 1 den başlar] ve gittikçe sönen bir biçimde artı ve eksi değerler arasında salınır. Değişmez  $\beta$  ve büyük  $n$  değerleri için ( $n$  değeri  $\beta$  dan büyük),  $n$  artarken  $n$ 'inci yan bantın büyüklüğü  $\pi J_n(\beta)$  azalır. Buradan öyle bir  $N$  değeri bulunabilir ki  $n > N$  için yan bantların büyüklüğü  $\pi J_n(\beta)$  ihmal edilecek kadar küçüktür. Buna göre FM dalgabıçımı  $c(t)$  nin görünüşünün  $\omega_0$ ,  $\omega_0 \pm \omega_m$ ,  $\omega_0 \pm 2\omega_m$ ,  $\omega_0 \pm 3\omega_m$ , ...,  $\omega_0 \pm N\omega_m$ 'deki frekans bileşenlerinden oluştuğu düşünülebilir. Yani  $2N$  sayıda yan bant önemli olarak düşünülmüştür. Önemli yan bantların bant genişliği ise  $2N \omega_m$  dir.  $N$  değeri ise,  $\beta$  nın değerine ve önemli olarak düşündüğümüz büyüklüğe bağlıdır.

Önemli yan bantlar konusunda yaygın olarak kabul edilmiş iki ölçüt vardır. Birinci ölçüte göre, genlikleri, modüle edilmemiş taşıyıcının genliğinin  $[\pi J_0(0) = \pi]$  en az % 1 i olan yan bantlar önemli yan bantlardır. Bir başka deyişle  $|J_n(\beta)| > 0.01$  ise yan bant önemli olarak düşünülür. Diğer ölçüte göre genlikleri modüle edilmemiş taşıyıcı genliğinin en az % 10 yani  $|J_n(\beta)| > 0.1$  olan yan bantlar önemlidir. Değişmez  $\beta$  değerleri için,  $n$  artarken  $J_n(\beta)$  artı ve eksi değerler arasında salınım yapabilir ve ayrıca  $J_n(\beta)$  değeri 0.1 den küçük olduğu halde  $J_{n+1}(\beta)$  değeri 0.1 den büyük olabilir. Bu durumda  $J_n(\beta)$ , 0.1 den küçük olmasına rağmen o yan bant önemli yanbant olarak sayılır. Ancak  $n$  arttıkça, belli bir  $N$  den büyük  $n$  ler için  $|J_n(\beta)|$  ların tümü 0.1 den küçük olur ve bu yanbantlar o zaman ihmal edilir. Örneğin  $\beta = 7$  için,

$J_0(7) = 0.3$	$J_4(7) = 0.158$	$J_8(7) = 0.128$
$J_1(7) = 0.005$	$J_5(7) = 0.348$	$J_9(7) = 0.059$
$J_2(7) = -0.301$	$J_6(7) = 0.339$	$J_{10}(7) = 0.024$
$J_3(7) = -0.168$	$J_7(7) = 0.234$	$J_{11}(7) = 0.008$



Şekil 6.7 Birinci tür Bessel işlevleri,  $J_n(\beta)$

Buradan görülebileceği gibi,  $|J_1(7)| = |-0.005| < 0.1$  olduğu halde bu yan bant önemsiz olarak düşülmez. Bunun nedeni, bundan ötede önemli yan bantların olmasıdır. Bu örnekte % 10 ölçütüne göre 8 inci yan banta (8 dahil) kadar olan yan bantlar önemlidir; 9 uncu ve daha yukarıdaki yan bantlar önemsizdir. % 1 ölçütüne göre ise 10 uncu yan bant ve bundan öncekiler önemlidir; 11 inci yan bant ve bunun ötesindekiler önemsizdir.

Yukarıdaki tartışmanın ışığı altında % 1 ölçütü şu biçimde ifade edilebilir:  $|J_n(\beta)| > 0.01$  eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayı n ye  $N_1$  dersek,  $N_1$  inci yan bant ve bundan öncekiler önemlidir, diğerleri önemsizdir. % 10 ölçütü ise şöyle ifade edilebilir:  $|J_n(\beta)| > 0.1$  eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayı n ye  $N_{10}$  dersek,  $N_{10}$  uncu yan bant ve bundan öncekiler önemlidir, diğerleri önemsizdir.

% 1 ölçütü gereksiz derecede katıdır. Bu nedenle, % 10 ölçütü daha yaygın kullanılır. Her yan bantın içerdiği güç düşünüldüğünde % 10 ölçütü şu biçimde ifade edilebilir: İçerdiği güç, modüle edilmemiş taşıyıcı gücünün % 1'i olan yan bantlar önemlidir. % 1 ölçütü ise % 0.01 lik bir güç oranına karşı gelir. Bu nedenle % 10 ölçütü oldukça gerçekçi bir ölçüttür ve daha yaygın kullanılır.

% 10 ölçütü ya da % 1 ölçütü kullanıldığında bazı yan bantlar önemli, diğerleri ise önemsiz olarak düşünülür. Önemsiz yan bantlar ihmal edilir ve frekans görüncesinin yalnız önemli yan bantlardan oluştuğu kabul edilir. Bunun sonucu olarak bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının bantgenişliği sonlu varsayılmış olur. % 10 ölçütüne göre önemli frekans bileşenleri  $\omega_0, \omega_0 \pm \omega_m, \omega_0 \pm 2\omega_m, \dots, \omega_0 \pm N_{10}\omega_m$  dır. Buna göre bantgenişliği  $2N_{10}\omega_m$  dir. % 1 ölçütüne göre ise, önemli frekans bileşenleri  $\omega_0, \omega_0 \pm \omega_m, \omega_0 \pm 2\omega_m, \dots, \omega_0 \pm N_1\omega_m$  dır ve bunlara karşı gelen bantgenişliği ise  $2N_1\omega_m$  dir. % 10 ölçütü kullanılarak tanımlanan bantgenişliği %10 bantgenişliği olarak adlandırılır ve  $BG_{10}$  ile gösterilir. Benzer biçimde, %1 ölçütüne göre tanımlanan bantgenişliği % 1 bantgenişliği olarak adlandırılır ve  $BG_1$  ile gösterilir.

Şimdi birkaç sayısal örnek verelim.  $\beta = 0.2$  için;

$$J_0(0.2) = 0.99 \quad J_2(0.2) = 0.00498$$

$$J_1(0.2) = 0.0995 \quad J_3(0.2) = 0.00017$$

Burada yalnız  $J_0(\beta)$  ve  $J_1(\beta)$  önemlidir. Görünge ise  $\omega_0, \omega_0 \pm \omega_m$  frekanslarındaki bileşenlerden oluşur ve  $BG_{10} = 2\omega_m$  dir. Bu, daha önce darbant FM olarak düşünülen durumdur.  $\beta = 2$  için:

$$J_0(2) = -0.224 \quad J_2(2) = 0.353 \quad J_4(2) = 0.034$$

$$J_1(2) = 0.577 \quad J_3(2) = 0.129 \quad J_5(2) = 0.007$$

Burada görünge  $\omega_0, \omega_0 \pm \omega_m, \omega_0 \pm 2\omega_m, \omega_0 \pm 3\omega_m$  frekanslarındaki bileşenlerden oluşur ve  $BG_{10} = 6\omega_m$  dir. Benzer biçimde herhangi bir  $\beta$  değeri için, yan bantların büyüklükleri saptanabilir ve modüle edilmiş dalgabıçımının bantgenişliği hesaplanabilir. Birinci tür Bessel işlevleri  $J_n(\beta)$ ,  $\beta$  ve n nin çeşitli değerleri için, çizelgeler halinde verilmiştir. Birinci tür Bessel işlevleri  $J_n(\beta)$  nin bir seri gösterimi şöyledir:

$$J_n(\beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}\beta^2)^k}{k!(n+k)!} \quad (6.55)$$

Çizelge 6.1 de çeşitli  $\beta$  değerleri için, bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgaseklinin  $Z$  10 bantgenişliği  $BG_{10}$  ve  $Z$  1 bantgenişliği  $BG_1$  değerleri verilmiştir. Aynı çizelgede bantgenişliğinin  $2\Delta\omega$  ya oranı, yani  $BG_{10}/2\Delta\omega$  ve  $BG_1/2\Delta\omega$  da verilmiştir. Bu çizelgeden de görülebileceği gibi  $\beta$  artarken bantgenişliği artar.  $BG_{10}$  nun  $\beta$  ya bağımlılığı şu matematiksel ifade ile özetlenebilir:

$$BG_{10} = 2(\beta + 1)\omega_m \quad (6.56)$$

Çizelge 6.1 incelenirse, tamsayı  $\beta$  değerleri için bu eşitliğin sağlandığı görülür. Carlson (Karlson) kuralı olarak bilinen bu ifade bantgenişliği hesaplanmasında çok kullanılır. Bu kural, yaklaşık bir ifadedir ve yalnız tamsayı  $\beta$  değerleri için geçerlidir. Bu çözümsel olarak çıkarılmış bir ifade değildir, yalnızca Çizelge 6.1 deki değerlerle uyduğu gözlenmektedir. Ancak  $Z$  1 bantgenişliği  $BG_1$  için,  $BG_1$ 'i  $\beta$  türünden veren ve bütün tamsayı  $\beta$  değerleri için geçerli kolay bir bağıntı yoktur.

$\beta$ 'nın tanımı yerine konularak, (6.56) da verilen Carlson kuralı şu biçimde de ifade edilebilir:

$$BG_{10} = 2(\Delta\omega + \omega_m) \quad (6.57)$$

$BG_{10}$  nun frekans sapması  $\Delta\omega$  ya ve modüle eden işaret frekansı  $\omega_m$  ye bağımlılığı bu ilişkiden açıkça görülebilir. Sabit  $\omega_m$  için bantgenişliliği  $\Delta\omega$  ile doğrusal olarak artar. Çok küçük  $\Delta\omega$  için de  $\omega_m$  değişmez ise bu durum çok küçük  $\beta$  ya karşılık gelir. Bu ifadeden elde edilen bantgenişliği, bantgenişliğinin gerçek değeri olan  $2\omega_m$  ye yakındır. Büyük  $\beta$  ya karşılık gelen büyük  $\Delta\omega$  için ( $\omega_m$  değişmez) bantgenişliği  $2(\Delta\omega + \omega_m) \approx 2\Delta\omega$  dir. Bir başka deyişle, küçük  $\beta$  için (darbant FM) bantgenişliği ifadesinde  $\omega_m$  baskındır, büyük için ise (geniş bant FM) bantgenişliği ifadesinde  $\Delta\omega$  baskındır.

Çizelge 6.1 den görülebileceği gibi  $\beta$  artarken  $BG/2\Delta\omega$  oranı 1 e yaklaşır. Büyük  $\beta$  için bantgenişliğinin kabaca  $2\Delta\omega$  ya eşit olduğu buradan da söylenebilir. (6.57) kullanılarak  $BG_{10}/2\Delta\omega$  oranı şu biçimde ifade edilebilir:

$$\frac{BG_{10}}{2\Delta\omega} = 1 + \frac{1}{\beta} \quad (6.58)$$

(6.56) ve (6.57) gibi (6.58) de yalnız tamsayı  $\beta$  değerleri için geçerlidir. Tamsayı olmayan  $\beta$  değerleri için  $BG_{10}$  doğrudan önemli yan bantların sayısından hesaplanabilir. Daha sonra  $BG_{10}/2\Delta\omega$  oranı bulunabilir. Şekil 6.8 de sürekli değerleri için  $BG_{10}/2\Delta\omega$  nin çizimi verilmiştir.  $\beta$  artarken, belirli değerlerde iki yeni yan bant önemli olur ve bantgenişliği  $2\omega_m$  ile artar. Sonuçta  $BG_{10}/2\Delta\omega$  oranı bu noktada  $\frac{2\omega_m}{2\Delta\omega} = \frac{1}{\beta}$

kadar artar.  $\beta$  artmaya devam ederken, yeni iki yan bant önemli olana kadar  $BG_{10}/2\Delta\omega$  oranı sürekli olarak azalır. Bu durum Şekil 6.8'den de

Çizelge 6.1

$\beta$	$BG_{10}$	$BG_1$	$BG_{10}/2 \Delta\omega$	$BG_1/2 \Delta\omega$
0.2	$2\omega_m$	$2\omega_m$	5	5
0.5	$2\omega_m$	$4\omega_m$	2	4
1	$4\omega_m$	$6\omega_m$	2	3
2	$6\omega_m$	$8\omega_m$	1.5	2
3	$8\omega_m$	$12\omega_m$	1.33	2
4	$10\omega_m$	$14\omega_m$	1.25	1.75
5	$12\omega_m$	$16\omega_m$	1.2	1.6
6	$14\omega_m$	$18\omega_m$	1.17	1.5
7	$16\omega_m$	$20\omega_m$	1.14	1.43
8	$18\omega_m$	$22\omega_m$	1.125	1.38
9	$20\omega_m$	$26\omega_m$	1.11	1.44
10	$22\omega_m$	$28\omega_m$	1.10	1.4
12	$26\omega_m$	$32\omega_m$	1.08	1.33
14	$30\omega_m$	$36\omega_m$	1.07	1.29
16	$34\omega_m$	$40\omega_m$	1.06	1.25
18	$38\omega_m$	$44\omega_m$	1.06	1.22
20	$42\omega_m$	$48\omega_m$	1.05	1.20

görülebilmektedir. Tamsayı  $\beta$  değerlerinde  $BG_{10}/2 \Delta\omega$  nin çizimi (6.58) ile uyusur. Tamsayı değerleri için  $BG_1/2 \Delta\omega$  oranı da Şekil 6.8 de gösterilmiştir.

Bir sinüzoidalde modüle edilmiş FM dalgabıçımı için bantgenişliğini (hem % 10 kuralına göre hem de % 1 kuralına göre) şu sayısal örnek için hesaplayalım.

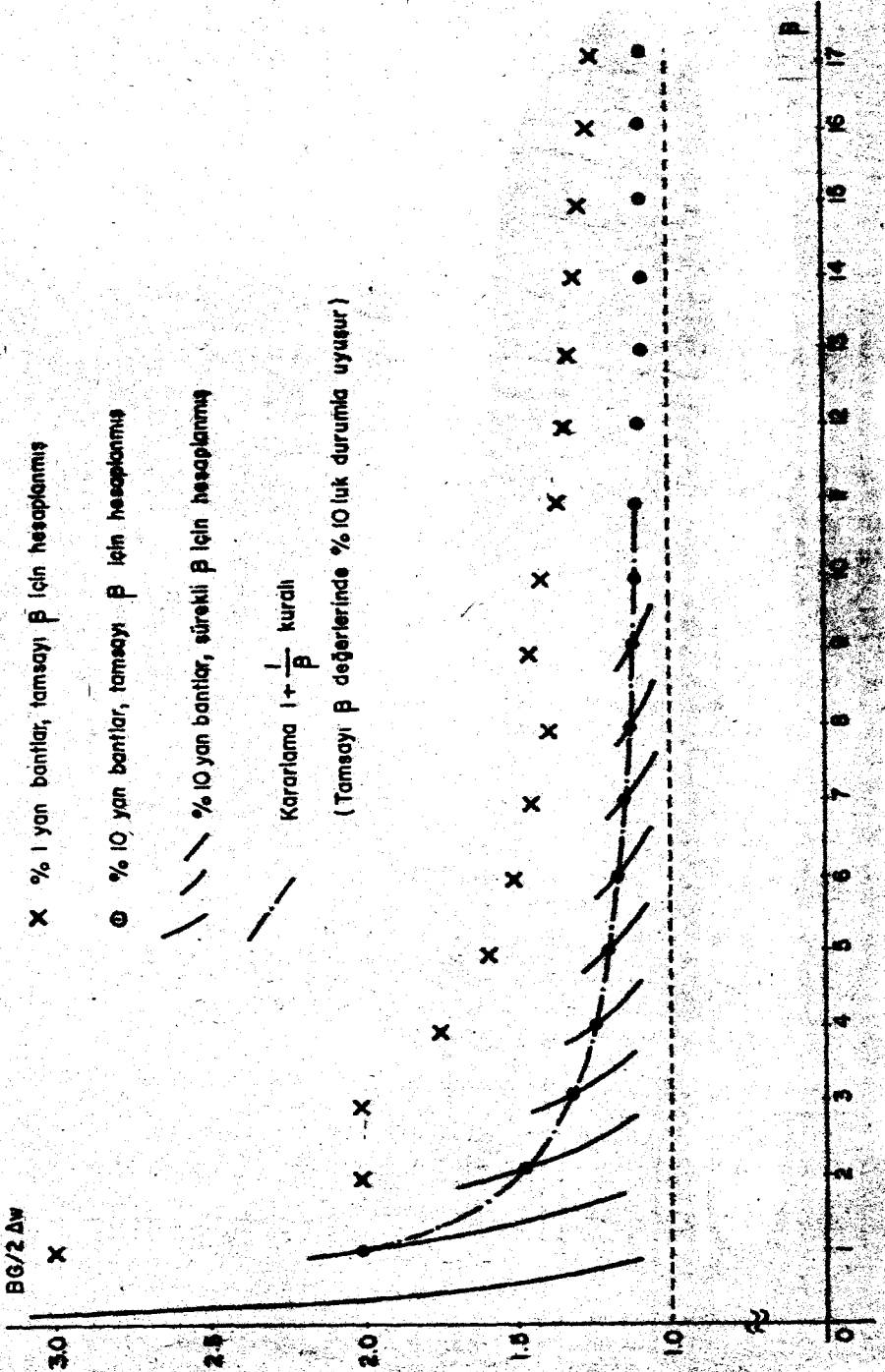
$\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad/san,  $\omega_m = 2\pi \cdot 10^4$  rad/san. Modülasyon derecesi

$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = 10$ . Çizelge 6.1 den % 10 kuralına göre 11 çift önemli yan bant vardır.

Bu nedenle  $BG_{10} = 22\omega_m = 2\pi \cdot 220 \cdot 10^3$  rad/san. % 1 kuralına göre 14 çift önemli yan bant vardır ve  $BG_1 = 2\pi \cdot 280 \cdot 10^3$  rad/san'dir.

$\Delta\omega = 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3$  rad/san ve  $\omega_m = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3$  rad/san için  $BG_{10} = 2(\beta + 1)\omega_m = 2(5 + 1) \cdot 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 = 2\pi \cdot 180 \cdot 10^3$  rad/san'dir. Diğer tarafta  $BG_1 = 16\omega_m = 2\pi \cdot 240 \cdot 10^3$  rad/san'dir.

Kuşkusuz uygulamada bilgi işareti  $f(t)$  bir sinüzoidal değil, belirli bir frekans bandını kapsayan bir işarettir. Örneğin  $f(t)$ , 50 HZ'den 15 KHz'e kadar olan bandı kapsadığı varsayılan, bir ses işareti



Şekil 6.8  $\beta$  ya karşı  $BG/2\Delta w$ 'nin çizimi

olabilir.  $f(t)$  nin en yüksek frekansı  $\omega_m$  olsun. Herhangi bir bilgi işareti  $f(t)$  için modülasyon derecesi  $\beta$  tanımlanmamıştır. Ancak bantgenişliği üzerine niteliksel bir düşünce elde etmek için (6.57) deki ifade bu durum için de kullanılabilir. (6.57) den de görülebileceği gibi değişmez bir frekans sapması  $\Delta\omega$  için, modüle eden işaretin frekansı azaldığında daha küçük bantgenişliği gerekir. Sonuçta  $\omega_m$  ye bantsınırlı herhangi bir  $f(t)$  için,  $f(t)$  nin  $\omega_m$  ye yakın bileşenleri FM işaretinin bantgenişliğinin artmasında daha etkin olurlar;  $\omega = 0$  a yakın bileşenlerin etkileri görece olarak azdır. Bu nedenle erkesi  $\omega_m$  de yoğunlaşmış bir  $\cos \omega_m t$  işareti ile modüle edilmiş bir FM dalgabıçımının bantgenişliği, erkesi  $\omega = 0$  ve  $\omega = \omega_m$  arasındaki frekans bandına dağılmış herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının bantgenişliğinden fazladır. Sonuç olarak (6.57) deki ifade,  $\omega_m$  ye bantsınırlı herhangi bir bilgi işareti ile modüle edilmiş bir FM dalgabıçımının bantgenişliğine bir sınır koyar. Uygulamadaki birçok durum için, en yüksek frekanstaki sinüzoidal yaklaştırması ile bulunan bantgenişliği gerçek durumdakinden daha büyüktür.

Bilgi işareti  $f(t)$  herhangi bir bantsınırlı işaret olsun. Yukarıda verilen tartışmaya göre (6.57) deki ifade modüle edilmiş dalgabıçımının bantgenişliğine bir sınır getirir. Bu nedenle bantı değişmez bir bilgi işareti için bantgenişliği, frekans sapması  $\Delta\omega$  ya bağlı olarak değişir. Her kullanıcının çok fazla bantgenişliği kullanmasını önlemek için, frekans sapması  $\Delta\omega$  sınırlandırılmıştır. Federal İletişim Komisyonu (Federal Communications Commission -FCC), FM yayın istasyonları için  $\Delta\omega$  nun en büyük değerini  $2\pi \cdot 75 \cdot 10^3$  rad/san olarak saptamıştır. Modüle edilmiş işaretin bantgenişliği türünden bunun anlamı nedir? FM iletimindeki en yüksek ses frekansını  $\omega_m = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3$  rad/san kabul edersek, (6.57) kullanılarak bantgenişliğinin  $2\pi \cdot 180 \cdot 10^3$  olması gerektiği bulunur. FM yayın istasyonları, bu gerçeğe uygun olarak, 200 KHz aralıklarla yerleştirilmişlerdir. 88-108 MHz frekans bandı FM yayınlarına ayrılmıştır. Stereo FM yayınlarında ise bantgenişliği 180 KHz'den büyüktür. Bunun nedeni temel-bant işareti  $f(t)$  nin 15 KHz'den yüksek bir frekansa bantsınırlı olmasıdır.

TV yayınlarında ses işaretinin iletiminde frekans modülasyonu kullanılır. Bu yayında en büyük frekans sapması FCC tarafından 25 KHz olarak saptanmıştır. 15 KHz'lik bir ses işareti için bu 80 KHz'lik bir bantgenişliği verir. Daha düşük frekanslardaki ses işaretleri, bu sınırdan küçük bantgenişlikleri gerektirirler.

FM yayınında kullanılan bantgenişliği, frekans sapması  $\Delta\omega$  daki kısıtlamaya bağlı olarak kısıtlanır. Frekans sapması  $\Delta\omega$  bilgi işareti  $f(t)$  nin büyüklüğü ile orantılı olduğundan,  $\Delta\omega$  nun kısıtlanması bilgi işaretinin büyüklüğünün kısıtlanmasına eşdeğerdir.

FM yayınında her istasyonun 200 KHz'lik bir bant kullanmasına izin verilir; GM yayında ise her istasyona 10 KHz'lik bir bant verilir. FM yayınlarında GM yayınlarına göre oldukça büyük bantgenişliği gereksinmesi, gücülü ve girişim etkilerini azaltmak için ödenen bedeldir. GM yayınlarında nitelik çok mükemmel değildir; bunun yanısıra bu yayınlarda ses işaretinin 5 KHz'e bantsınırlanması niteliğin mükemmel olmayışında ikinci bir etkidir.



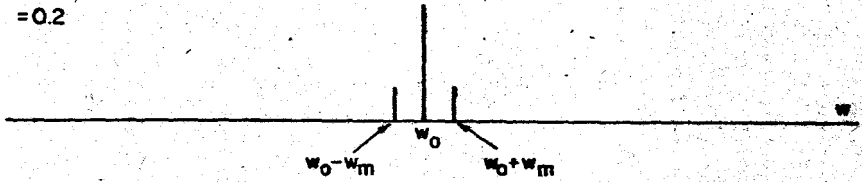
Darbant FM de modüle edilmiş dalgabiçiminin bantgenişliği, GM deki gibi,  $2\omega_m$  dir. Burada akla şu soru gelebilir. Darbant FM de, GM'ye göre daha fazla bantgenişliği kullanmadan, yüksek nitelikli bir yayın elde edebilir miyiz? Ne yazık ki, yanıt hayırdır.  $\Delta\omega$  azaltılıp darbant-FM elde edildiğinde FM yayınının niteliği GM yayınının düzeyine iner. Bu nedenle bu yolla bir şey elde edilmez. FM de bantgenişliği arttıkça, yayının niteliği iyileşir.

Bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM işaretinin frekans görüngesi çeşitli  $\Delta\omega$  ve  $\omega_m$  değerleri için Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da çizilmiştir. Şekil 6.9'da  $\omega_m$  sabit ve  $\Delta\omega$  değişken iken görüncü çizimi verilmiştir. Şekil 6.10'da ise  $\Delta\omega$  sabit ve  $\omega_m$  değişken iken görüncü çizimi yapılmıştır. FM dalgabiçiminin bantgenişliği ile ilgili yukarıda bahsedilen

$$\omega_m = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

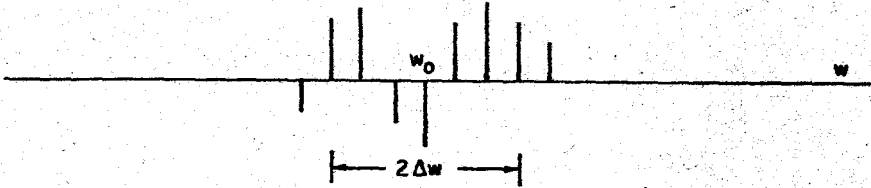
$$\beta = 0.2$$



$$\omega_m = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

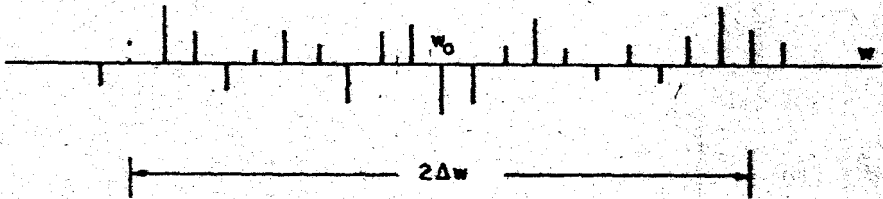
$$\beta = 3$$



$$\omega_m = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ rad/san}$$

$$\beta = 10$$

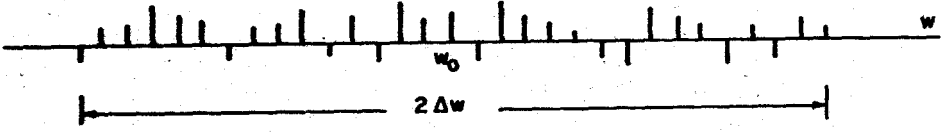


Şekil 6.9 Bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM dalgabiçiminin (artı frekanslar için) frekans görüngesi ( $\omega_m$  değişmez,  $\Delta\omega$  değişken)

$$\omega_m = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

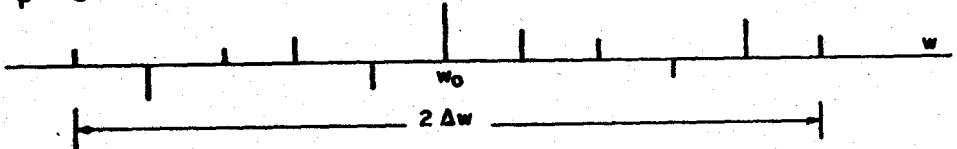
$$\beta = 15$$



$$\omega_m = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

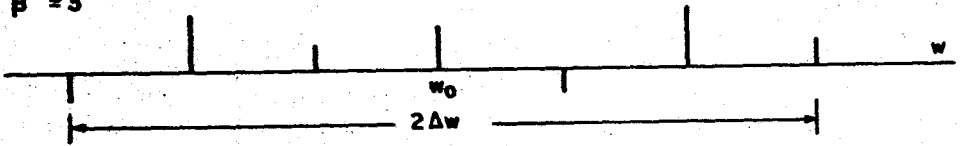
$$\beta = 5$$



$$\omega_m = 2\pi \cdot 25 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

$$\beta = 3$$



Şekil 6.10 Bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının (artı frekanslar için) frekans görünüşü ( $\Delta\omega$  değişmez,  $\omega_m$  değişken)

gerçekler, bu şekillerden de gözlenebilir. Görünge çizgileri arasındaki uzaklık  $\omega_m$  dir. Küçük  $\beta$  için, bantgenişliği  $2\omega_m$  dir. Büyük  $\beta$  için bantgenişliği yaklaşık olarak  $2\Delta\omega$  dir.

FM dalgabıçımının diğer özelliklerini incelemeden önce, bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabıçımı ile ilgili bir gerçeği daha belirtelim. Belirli bazı  $\beta$  değerleri için, taşıyıcı ( $\omega_0$  daki terim) yok olur. Örneğin  $\beta = 2.4, 5.5, 8.6, \dots$  için  $J_0(\beta) \equiv 0$  dir. Buna göre bu  $\beta$  değerleri için,  $\omega_0$  da bileşen yoktur.

Ancak taşıyıcı bileşeninin bastırılması anlamına gelen bu olgu belli bir yarar sağlamaz. GM'de taşıyıcı, "bilgi taşımayan ancak güç harcayan (ve tabii ki zarf seziçili demodülasyona olanak veren) bir bileşendir. Bu bakımdan GM'de taşıyıcının bastırılması önemli bir güç tasarrufu sağlar. Ancak FM'de taşıyıcı bileşeni, bilgi taşıyan işaretin bir parçasıdır ve FM işaretinin toplam gücü  $\beta$  nın değerinden ve dolayısı ile taşıyıcı bileşeninin sıfır ya da sıfırdan farklı olmasının

dan etkilenmez. Bu bakımdan taşıyıcı bileşeninin sınırlanması özellikle istenen bir sonuç değildir. Yalnız yalın bir gözlemdir. Bütün birinci tür Bessel işlevleri salınımlı işlevler olduklarından, her  $n$  için bazı  $\beta$  değerlerinde,  $J_n(\beta) = 0$  olması doğaldır.  $J_n(\beta) = 0$  yapan  $\beta$  değerleri kümesi, kuşkusuz her  $n$  için değişiktir.

FM dalgabiçiminin frekans görüngesi ile ilgili diğer bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

### Evresi Sıfır Olmayan Bir Sinüzoidalle Modüle Edilmiş FM

Yukarıdaki altbölümde bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM dalgabiçiminin frekans görüngesi incelenmişti. İncelenen durumda taşıyıcı ile bilgi işareti, her ikisi de, kosinüs dalgalarından oluşan sinüzoidaller olarak varsayılmıştır. Ancak uygulamada her ikisinin de kosinüs dalgası olması gerekmez. Gerçekte karşılaşılabilecek bu durumda, taşıyıcı bir kosinüs dalgası ve bilgi işareti ise evresi sıfırdan başka bir sinüzoidal varsayılarak modellenenbilir.

Modüle edilmiş dalgabiçimi şöyle gösterilebilir:

$$c(t) = \cos[\omega_0 t + \beta \sin(\omega_m t + \theta)] \quad (6.59)$$

$$\delta = \frac{\Delta\theta}{\omega_m} \text{ ve } t' = t + \delta \quad (6.60)$$

yerine konularak  $c(t)$  şu biçimde yeniden yazılabilir:

$$c(t' - \delta) = \cos\omega_0 \delta \cos(\omega_0 t' + \beta \sin\omega_m t') + \sin\omega_0 \delta \sin(\omega_0 t' + \beta \sin\omega_m t') \quad (6.61)$$

Daha önce şu bağıntı elde edilmişti:

$$\cos(\omega_0 t' + \beta \sin\omega_m t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_0 + n\omega_m)t' \quad (6.62)$$

Benzer biçimde şu bağıntı da elde edilebilir:

$$\sin(\omega_0 t' + \beta \sin\omega_m t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \sin(\omega_0 + n\omega_m)t' \quad (6.63)$$

(6.62) ve (6.63) deki bağıntılar (6.61) de yerine konularsa,

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\theta] \quad (6.64)$$

bulunur.

Sıfırdan ayrı  $\theta$  evresinin etkisi her yan banda bir evre eklemektir.  $n$  inci yan banda bir  $n\theta$  evresi eklenir.  $n = 0$  taşıyıcıya karşı ge-

lir ve eksi  $n$  ise  $\omega_0$  taşıyıcı frekansın altındaki yan bantlara karşı gelir. (6.64) den de görüldüğü gibi, büyüklük görünüşü ve güç görünüşü  $\theta$  evresinden etkilenmezler.

### İki Sinüzoidalın Toplamı ile Modüle Edilmiş FM Dalgabiciimi

Daha önce bahsedildiği gibi, FM de toplamsallık ilkesi geçerli değildir ve bu nedenle FM doğrusal olmayan bir modülasyon türü olarak düşünülür. Bir başka deyişle  $f_1(t) + f_2(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabiciiminin görünüşü,  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  ile ayrı ayrı modüle edilmiş FM dalgabiciimlerinin görünüşlerinden elde edilemez. Bu gerçek aşağıdaki örnek ile açıklanabilir.

Modüle eden işareti şöyle varsayalım:

$$f(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \quad (6.65)$$

Buna göre modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabiciimi şöyle ifade edilebilir:

$$c(t) = \cos \left[ \omega_0 t + \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right] \quad (6.66)$$

$c(t)$  şu biçimde de ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} c(t) = & \cos \left[ \omega_0 t + \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \cos \left( \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \\ & - \sin \left[ \omega_0 t + \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \sin \left( \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \end{aligned} \quad (6.67)$$

(6.62) ve (6.63) kullanılarak,

$$\begin{aligned} c(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \right) J_m \left( \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \right) \cos(\omega_0 + n\omega_1)t \cos m\omega_2 t \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \right) J_m \left( \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \right) \sin(\omega_0 + n\omega_1)t \sin m\omega_2 t \\ = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \right) J_m \left( \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \right) \cos(\omega_0 + n\omega_1 + m\omega_2)t \end{aligned} \quad (6.68)$$

bulunur. (6.68) den görülebileceği gibi,  $c(t)$  nin görünüşü  $\omega_0 \pm n\omega_1$  ve  $\omega_0 \pm m\omega_2$  deki frekans bileşenlerinden oluşur. Ayrıca  $\omega_0 \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$  de çapraz modülasyon terimleri de vardır. Her iki sinüzoidal ile ayrı ayrı modüle edilmiş FM dalgabiciimlerinin görünüşünde bu çapraz modülasyon terimleri yoktur.

(6.68) deki ifade incelendiğinde,  $c(t)$  nin büyüklük görünüşü ile güç görünüşünün taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  a göre bakışımı (simetrik) olma-

sının gerekmediği görülür. Belirli  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  değerleri için  $\omega_0 + \omega^*$  daki bileşenin büyüklüğü  $\omega_0 - \omega^*$  daki bileşenin büyüklüğünden ayrıdır.

Bilgi işareti  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$  olsun. Eğer  $|k_f \int f_1(t) dt| \ll \pi/2$  ve  $|k_f \int f_2(t) dt| \ll \pi/2$  ise bunun sonucu olarak  $|k_f \int [f_1(t) + f_2(t)] dt| \ll \pi/2$  olur. 0 zaman da

$$\begin{aligned} c(t) &= \cos\{\omega_0 t + k_f \int [f_1(\tau) + f_2(\tau)] d\tau\} \\ &\cong \cos\omega_0 t - [k_f \int f_1(\tau) d\tau] \sin\omega_0 t \\ &\quad - [k_f \int f_2(\tau) d\tau] \sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (6.69)$$

olur.

Bu durum darbant FM'ye karşı gelir ve (6.69) dan görüldüğü gibi bu durumda toplamsallık ilkesi sağlanır. Yani  $f_1(t) + f_2(t)$  toplamıyla modüle edilmiş FM dalgabiçiminin görünüşü,  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  ile ayrı ayrı modüle edilmiş FM dalgabiçimlerinin görünüşlerinin toplamıdır. Yalnız taşıyıcı terimi  $\cos\omega_0 t$  terimi eklenmemiştir. Darbant FM'nin birçok yölerden GM'e benzemesi ve GM'nin de toplamsallık ilkesini sağlaması nedeniyle, bu sonuç şaşırtıcı değildir.

Dönemli ve Sıfır-Ortalamalı bir  $f(t)$  ile Modüle edilmiş FM Dalgabiçimi

Bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabiçimlerinin görünüşü daha önce saptanmıştı. Burada bu çözümleme bir basamak daha ileri götürülecek, dönemli ve ortalaması sıfır bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabiçiminin frekans görünüşü araştırılacaktır.

Amacımız,

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + k_f \int f(\tau) d\tau) \quad (6.70)$$

işaretinin görünüşünü saptamaktır. Burada  $f(t)$  dönemli (dönemi T) ve ortalaması sıfır olan bir işarettir.

$$g(t) \triangleq k_f \int f(\tau) d\tau \quad (6.71)$$

ile bir  $g(t)$  işlevi tanımlanarak,  $c(t)$  şu biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} c(t) &= \cos(\omega_0 t + g(t)) \\ &= \text{Re} [e^{j\omega_0 t} e^{jg(t)}] \end{aligned} \quad (6.72)$$

$f(t)$  dönemli ve sıfır ortalamalı olduğundan  $g(t)$  de dönemlidir. Buna ek olarak  $e^{jg(t)}$  de dönemlidir ve bunun Fourier serisi gösterimi şu biçimde varsayılabilir:

$$e^{jg(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (6.73)$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jg(t)} e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (6.74)$$

Buradan

$$c(t) = G e \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 t + jn \frac{2\pi}{T} t} \right] \quad (6.75)$$

bulunur.  $c_n$  nin büyüklüğü ve evresine bağlı olarak  $c(t)$  şu biçimde ifade edilir:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \cos(\omega_0 t + n \frac{2\pi}{T} t + \text{açı } c_n) \quad (6.76)$$

$c(t)$  nin frekans görünüşü  $t$  ( $\omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T}$ ) deki frekans bileşenlerinden oluşur.

Buna göre dönemli ve sıfır ortalamalı herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının, zaman bölgesi ifadesi ve frekans görünüşü, en azından kuramsal olarak, bulunabilir. Bazı özel durumlar dışında  $e^{jk_f \int f(\tau) d\tau}$  dönemli işlevinin Fourier serisi katsayılarının hesaplanması kolay bir iş değildir.

Örnek 6.1. Şekil 6.11a'da gösterilen bir kare dalga  $f(t)$  ile modüle edilen FM dalgabıçımının görünüşünü bulalım. (6.71) de tanımlanan  $g(t)$  hesaplanarak şu bulunur.

$$g(t) = \begin{cases} k_f t & -T/4 < t < T/4 \\ k_f (\frac{T}{2} - t) & T/4 < t < 3T/4 \end{cases}$$

ve  $g(t) = g(t \pm nT)$  dir. Dönemli  $g(t)$  işlevi Şekil 6.11b'de çizilmiştir.  $g(t)$  hesaplanırken, tümlev değişmezi rasgele seçilir, burada  $g(0) = 0$  olacak biçimde seçilmiştir. Tümlev değişmezi bundan ayrı seçilirse, FM dalgabıçımına değişmez bir evre eklenmiş olur.

$e^{jg(t)}$  işlevi de dönemi  $T$  olan bir dönemli işlevdir ve Fourier serisi gösterimi şöyledir:

$$e^{jg(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t} ; \omega_m = \frac{2\pi}{T}$$

Burada

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{3T/4} e^{jg(t)} e^{-jn\omega_m t} dt$$

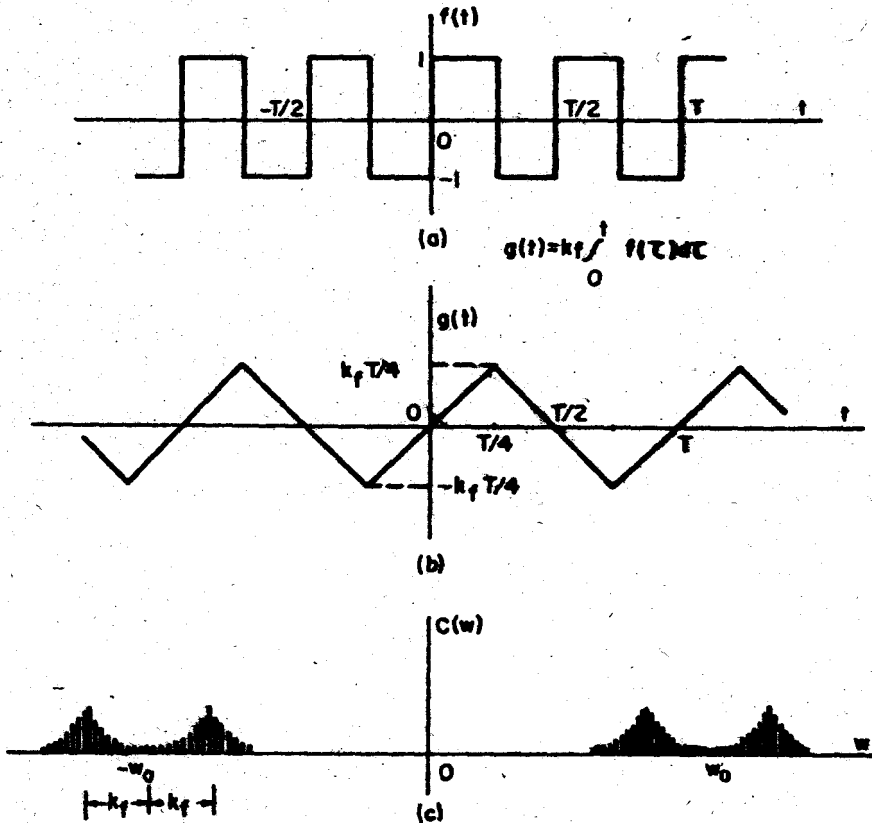
$g(t)$  yerine konur ve tümlen alınrsa,

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \text{Sa} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{k_f}{\omega_m} - n \right) \right] + (-1)^n \text{Sa} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{k_f}{\omega_m} + n \right) \right] \right\}$$

bulunur. Bu durumda  $c_n$  katsayıları gerçeldir ve

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 + n\omega_m) t$$

$c(t)$  nin frekans görüncesi Şekil 6.11c'de verilmiştir.



Şekil 6.11 Bilgi işareti, bunun tñmleni ve FM dalgabiçiminin görüncesi

### Woodward Teoremi

Bütün  $\beta$  değerleri için, bir sinüzoidal ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının görüngesi daha önce saptanmıştı. Her hangi bir bilgi işareti  $f(t)$  için ise, yalnız darbant FM'ye karşı gelen  $|k_f \int f(\tau) d\tau| \ll \pi/2$  özel durumunda FM dalgabıçımının görüngesi incelenmişti. Daha önce herhangi bir  $f(t)$  için,  $|k_f \int f(\tau) d\tau|$  değerine bir kısıtlama koymadan, çözümleme yapılamayacağı da belirtilmişti. Ancak bazı niteliksel sonuçların çıkarılabileceği bir özel durum daha vardır.

Genişbant FM'ye karşı gelen,  $|k_f \int f(\tau) d\tau|$ 'nin büyük olduğu durumda,  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının güç görünge yoğunluğunun biçimi, bilgi işareti  $f(t)$  nin olasılık yoğunluk işlevinin biçimine benzer. Bu önemli sonuç Woodward teoremi olarak bilinir ve bu teoremin kanıtı daha yüksek düzeydeki iletişim kitaplarında bulunabilir.

Bu sonucu birkaç örneğe uygulayalım: Bilgi işareti  $f(t)$ , Şekil 6.11a'da gösterildiği gibi bir kare işlevi ise bunun olasılık yoğunluk işlevi 1 ve -1 deki iki dürtüden oluşur. O halde çok büyük  $k_f$  değerleri için, modüle edilmiş  $c(t)$  dalgabıçımının güç görünge yoğunluğu  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  daki iki dürtüden oluşur.  $k_f$  çok büyük olmazsa, frekans görüngesi Şekil 6.11c'deki gibi iki tepeden oluşur.  $k_f$  nin değeri arttıkça bu tepeler dürtüye döner.

Diğer bir örnek de üçgen  $f(t)$  dalgabıçımı olabilir. Bu  $f(t)$  nin olasılık yoğunluk işlevi düzgün dağılımdır. Bu nedenle büyük frekans sapması için, modüle edilmiş dalgabıçımının güç görünge yoğunluğu düzgündür.  $f(t)$  bir Gauss gürültü ise, olasılık yoğunluk işlevi bir Gauss (normal) dağılımdır. Bu  $f(t)$  ile modüle edilmiş  $c(t)$ 'nin güç görünge yoğunluğunun biçimi, büyük frekans sapması değerleri için, bir Gauss eğrisidir.

### FM Dalgabıçımlarında Güç

Herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabıçımının güç görünge yoğunluğunu ve gücünü tam olarak saptayamayız. Bunun nedeni, modüle edilmiş

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + k_f \int f(\tau) d\tau) \quad (6.77)$$

dalgabıçımının frekans görüngesini saptayamayızdır. Genlik sabit olduğundan özellikle  $\omega_0 \gg \Delta\omega$  için ve  $f(t)$  nin en yüksek frekansı  $\omega_m \ll \omega_0$  için, ki uygulamada genellikle karşılaşılan durum budur, kısa zaman sürelerinde  $c(t)$  tek bir sinüzoidal olarak düşünülebilir.  $c(t)$  nin bir döneminde ortalama frekans sabit varsayılabilir. Buna göre  $c(t)$  nin ortalama gücü  $1/2$  olur.  $c(t)$  nin genliği  $A$  ise, ortalama güç  $A^2/2$  dir. Bu yaklaşım da kullanılan varsayım genellikle yarı-duruk varsayımı olarak adlandırılır.

Sinüzoidal modülasyon için ise, modüle edilmiş dalgabıçımının gücünü veren bir ifade bulunabilir:



$$\begin{aligned}
c(t) &= \cos(\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_0 + n\omega_m)t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(r + n)\omega_m t
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Burada

$$r \triangleq \omega_0 / \omega_m$$

olarak tanımlanmıştır.

$c(t)$  nin karesi şu biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
c^2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) J_m(\beta) \cos(r + n)\omega_m t \cos(r + m)\omega_m t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) J_m(\beta) [\cos(n-m)\omega_m t + \cos(2r + n + m)\omega_m t]
\end{aligned} \tag{6.79}$$

$c(t)$  nin ortalama gücü  $c^2(t)$  nin zaman ortalamasıdır ve  $\overline{c^2(t)}$  ile gösterilir.

$c^2(t)$  aşağıda verilen şu iki durum için ayrı ayrı saptanmalıdır:

1.  $2r$  bir tamsayı değildir.
2.  $2r$  bir tamsayıdır.

Önce  $2r$ 'nin tamsayı olmadığı durumu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\overline{c^2(t)} &= \frac{1}{2} \sum_{n,m} J_n(\beta) J_m(\beta) \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n-m)\omega_m t dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2r + n + m)\omega_m t dt \right]
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Ortalamanın alındığı  $T$  dönemi istenildiği kadar büyük alınabilir. Birinci tümlev  $n \neq m$  için sıfırdır,  $n = m$  için ise bire eşittir. Diğer taraftan bütün  $n$  ve  $m$  değerleri için ikinci tümlev sıfırdır. Buna göre,

$$P = \overline{c^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \tag{6.81}$$

Birinci tür Bessel işlevleri şu bağıntıyı sağlarlar:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (6.82)$$

Buradan

$$P = 1/2 \quad (6.83)$$

bulunur.

2r tamsayı olursa ne olur? (6.80) deki güç ifadesi bu durum için de geçerlidir. Birinci tümlev  $n \neq m$  için sıfırdır ve  $n = m$  için ise birdir. İkinci tümlev ise  $2r + n + m = 0$  olmadıkça sıfırdır,  $2r + n + m = 0$  için ise birdir. Bu nedenle,

$$P = \overline{c^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) J_{-n-2r}(\beta) \quad (6.84)$$

Birinci tür Bessel işlevleri şu bağıntıyı da sağlarlar:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) J_{-n-2r}(\beta) = J_{-2r}(2\beta) \quad (6.85)$$

(6.82) ve (6.85) kullanılarak,

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{2r} J_{2r}(2\beta) \quad (6.86)$$

bulunur.

(6.86) daki güç ifadesi şu biçimde açıklanabilir: 2r nin tamsayı olduğu bu özel durumda, (6.78) deki toplamda bazı frekans bileşenleri üst üste çakışır. Bu nedenle güç görünge yoğunluğu hesaplanırken her terimi diğerlerinden bağımsız olarak düşünemeyiz. Her frekanstaki bileşenin büyüklüğü, (6.78) deki toplamın tek bir terimine bağlı değildir. Görüngelerin çakıştığı düşünülür ve güç görünge yoğunluğu buna göre hesaplanırsa, (6.86) daki güç ifadesi elde edilir.

Herhangi bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş FM dalgabıçımında yukarıdaki duruma benzer durumlar ortaya çıkabilir ve sonuçta ortalama güç tam olarak 1/2 ya eşit olmaz. Ancak bu altkesimin birinci paragrafında yapılan tartışma uyarınca bir FM dalgabıçımının ortalama gücü yaklaşık olarak 1/2 alınabilir.

### Evresi Modüle Edilmiş İşaretin Frekans Görüngesi

Evresi modüle edilmiş işaret şu biçimde ifade edilebilir:

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + k_e f(t)) \quad (6.87)$$

Burada  $f(t)$  modüle eden bilgi işaretidir. FM'de olduğu gibi, herhangi bir  $f(t)$  için, (6.87) de verilen evresi modüle edilmiş EM dalgabıçımının görüngesi saptanamaz. Ancak FM de elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar EM dalgabıçımı için de elde edilebilir. Örneğin evre sarması  $\Delta\phi$  şöyle tanımlanır:

$$\Delta\phi = k_e |f(t)| \text{ enbüyük} \quad (6.88)$$

$\Delta\phi$  evre sarmasının  $\pi/2$  den çok küçük değerleri için, EM işareti  $c(t)$  şu biçimde ifade edilebilir:

$$c(t) = \cos\omega_0 t - k_e f(t) \sin\omega_0 t \quad (6.89)$$

Bu işaret ve bunun görüngesi, darbant FM dekine benzer yollarla, kolayca çözümlenebilir.

Bilgi işareti  $f(t)$  temiz bir sinüzoidal ise,  $c(t)$  nin tam çözümlenmesini elde etmek mümkündür. Bir sinüzoidalle modüle edilmiş EM işareti,

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + k_e \cos\omega_m t) \quad (6.90)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bir sinüzoidalle modüle edilmiş FM dalgabıçımı için yapılan çözümlenmeye benzer bir çözümlenme yapılarak (6.90) daki EM işareti  $c(t)$  şu biçimde gösterilebilir:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(\beta) \cos(\omega_0 + n\omega_m)t \quad (6.91)$$

$c(t)$  nin görüngesi (6.91) deki ifade kullanılarak bulunabilir. (6.91) deki ifade (6.54) deki ifadeye benzemektedir. Buradan EM işaretleri için bantgenişliği ve güç kavramları, FM işaretleri için izlenen yol izlenerek, geliştirilebilir.

EM işaretlerinin belirli özellikleri, ya önce EM işaretini bir FM işareti olarak kabul edip daha önce bulunan sonuçlar kullanılarak, ya da FM işaretlerinde izlenen yola benzer bir yol izlenerek bulunabilir.

## 6.2. FM İŞARETLERİNİN ÜRETİMİ

FM dalgabıçımının üretim yöntemleri pek çok olmakla beraber başlıca şu iki sınıf altında toplanabilir: Diğer bazı yöntemlerden de ayrıca bahsedilecektir.

1. *Dolaylı FM*: Bu yöntemde önce bilgi işareti  $f(t)$  nin tümlevi alınır ve bununla bir taşıyıcının evresi modüle edilerek bir darbant FM dalgabıçımı üretilir. Daha sonra frekans çarpması yöntemiyle darbant FM dalgabıçımından istenilen (genellikle genişbant) FM dalgabıçımı elde edilir. Bu yöntem *Armstrong yöntemi* olarak da bilinir.

2. Doğrudan FM: Bu yöntemde taşıyıcı üretilirken, taşıyıcı frekansı doğrudan, modüle eden işarete bağlı olarak değiştirilir, yani modüle edilir. Bu nedenle bu yöntemin adı doğrudan FM'dir.

### Dolaylı FM

Daha önceki altbölümde darbant FM durumu tartışılmış ve dalgabıçımının şöyle ifade edilebileceği belirtilmiştir:

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \\ = \cos\omega_0 t - [\Delta\omega \int f(\tau) d\tau] \sin\omega_0 t ; |\Delta\omega \int f(\tau) d\tau| \ll \pi/2 \quad (6.92)$$

Şekil 6.4c'de verilen yolla bu darbant FM dalgabıçımı üretilebilir. Önce bilgi işareti  $f(t)$  nin tümlevi alınır ve daha sonra bununla taşıyıcıya göre evresi  $90^\circ$  kaymış bir işaret ( $\sin\omega_0 t$ ) çarpılır. Sonuçta elde edilen dalgabıçımı taşıyıcıdan çıkartılır ve böylece (6.92) de verilen darbant FM işareti üretilir.

Darbant FM dalgabıçımı üretilirken kullanılan (6.92) deki yaklaşım yalnız  $|\Delta\omega \int f(\tau) d\tau| \ll \pi/2$  değerleri için geçerlidir. Bu nedenle frekans sapması  $\Delta\omega$  darbant FM dalgabıçımı elde edecek biçimde küçük tutulmalıdır. Ancak istenilen FM dalgabıçımı genellikle, taşıyıcı frekansı  $\omega_0'$  ve frekans sapması  $\Delta\omega'$  olan bir genişbant FM işaretidir.

(6.92) deki darbant FM dalgabıçımı frekans çarpması yoluyla bir genişbant FM dalgabıçımına dönüştürülür. Frekans çarpıcı, girdinin frekansını belirli bir sayıyla çarpan doğrusal olmayan bir aygıttır. Bir başka deyişle,  $n$  ile çarpan bir frekans çarpıcısının girdisi  $\cos\theta(t)$  ise, çıktısı  $\cos n\theta(t)$  dir. Dolaylı yoldan FM dalgabıçımının üretimi tartışıldıktan sonra, frekans çarpıcı üzerinde daha ayrıntılı durulacaktır.

(6.92) de verilen darbant FM dalgabıçımı bir frekans çarpıcısının ( $n$  ile çarpan) girişine uygulanırsa, çıktı şu biçimde ifade edilebilir:

$$c_1(t) = \cos(n\omega_0 t + n \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.93)$$

Çıktı da  $f(t)$  ile modüle edilmiş bir FM dalgabıçımıdır. Aneak taşıyıcı frekansı ve frekans sapması  $n$  ile çarpılmıştır. Büyük  $n$  için  $n\Delta\omega \int f(\tau) d\tau \ll \pi/2$  artık geçerli değildir ve bu nedenle  $c_1(t)$  bir darbant FM dalgabıçımı değildir. Uygun bir  $n$  tamsayısı seçilerek istenilen frekans sapması  $\Delta\omega'$  elde edilebilir. Bir başka deyişle  $n$  (frekans çarpanı) şöyle seçilir.

$$\Delta\omega' = n \Delta\omega \quad (6.94)$$

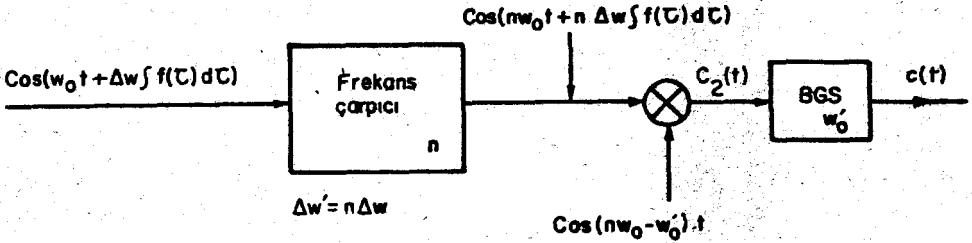
Bu yolla  $f(t)$  ile modüle edilmiş ve frekans sapması  $\Delta\omega'$  olan bir FM dalgabıçımı elde edilir. Frekans sapması  $\Delta\omega' = n \Delta\omega$  olacak biçimde FM dalgabıçımı üretilirken taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  da  $n$  ile çarpılır.  $n\omega_0$  in daha önce belirlenen taşıyıcı frekansına ( $\omega_0'$ ) eşit olmadığı durumlara karşılaşılabılır. Aradaki fark  $\Omega$  olsun, yani  $\Omega = n\omega_0 - \omega_0'$  dir. Yukarıda elde edilen FM dalgabıçımı  $\cos\Omega t$  ile çarpılır  $\omega_0$  a merkezlenmiş bir bant geçiren süzgeçten geçilirse, taşıyıcı frekansı istenilen frekansa çevrilir (Şekil 6.12). Çarpma işlemiyle

$$c_2(t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega'_0 t + \Delta\omega' \int f(\tau) d\tau + \cos(2n\omega_0 t - \omega'_0 t + \Delta\omega' \int f(\tau) d\tau)] \quad (6.95)$$

işareti elde edilir.  $\omega'_0$  ne merkezlenmiş bant geçiren süzgeç yalnız birinci terimi geçirir. Buna göre bant geçiren süzgecin çıkışındaki

$$c(t) = \frac{1}{2} \cos(\omega'_0 t + \Delta\omega' \int f(\tau) d\tau) \quad (6.96)$$

işareti, belirlenen taşıyıcı frekansı ve frekans sapmasında  $f(t)$  ile modüle edilmiş istenilen FM dalgabiçimidir. Bu yolla, bir darbant FM dalgabiçiminden istenilen FM dalgabiçiminin üretilmesi Şekil 6.12'de gösterilmiştir.



Şekil 6.12 Darbant FM'den genişbant FM'nin üretilmesi

Burada şu varsayım yapılmıştır:  $n\omega_0$  ve  $\omega'_0$  frekansları, (6.95) deki iki görüncü çakışmayacak şekilde, birbirlerinden uzaktırlar. Bir başka deyişle  $\Omega$  yeteri kadar büyüktür ve  $2\Omega$  (6.93) deki işaretin bantgenişliğinden büyüktür. Eğer bu koşul sağlanmazsa,  $n\omega_0$  ve  $\omega'_0$  birbirlerine yakın demektir. Bu durumda (6.92) deki  $\omega_0$  hafifçe değiştirilerek yalnız frekans çarpması yoluyla  $\omega'_0$  elde edilebilir. O zaman bir frekans çevrimi işlemine gerek kalmaz.

### Frekans Çarpımı

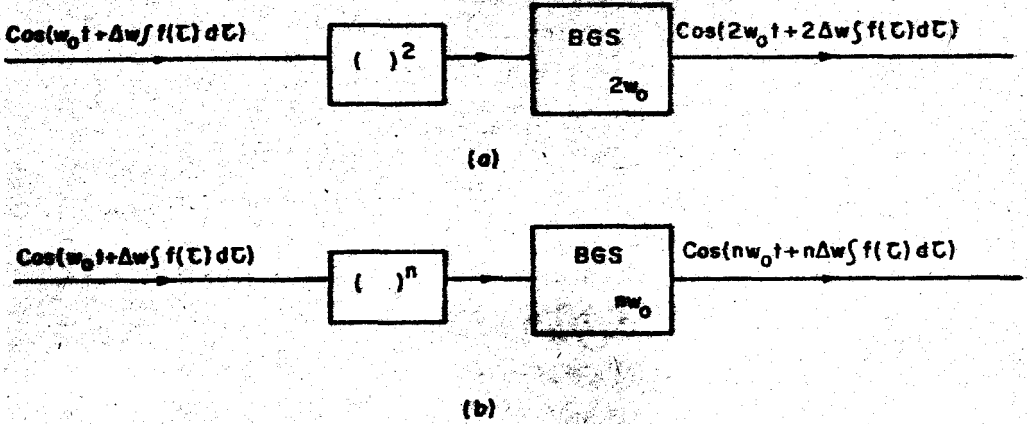
Şekil 6.13a'da verilen kare kuralı aygıtı ve bunun çıkışına konmuş bir bant geçiren süzgeç düşününüz. Karekuralı aygıtın girişine  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  FM işareti uygulandığında, çıkış işareti şu biçimdedir:

$$\frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\Delta\omega \int f(\tau) d\tau)] \quad (6.97)$$

$2\omega_0$  a merkezlenmiş ve uygun bir bantgenişliğine sahip bant geçiren süzgeç çıkışında ise şu işaret vardır:

$$\frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.98)$$

Bu nedenle Şekil 6.13a'da verilen dizge, taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  olan bir FM dalgabiçiminin frekansını 2 ile çarpan bir frekans çarpıcıdır.



Şekil 6.13 Frekans çarpıcılar

Benzer biçimde bir n inci derece kuralı aygıtı ve bunun çıkışına  $n\omega_0$  a merkezlenmiş bir bant geçiren süzgeç konularak, (6.92) deki FM dalgabıçımının frekansını n ile çarpan bir frekans çarpıcı elde edilir. n ile çarpan bir frekans çarpıcı Şekil 6.13b'de verilmiştir.

n'inci derece kuralı aygıtının girişine  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  işareti uygulandığında, çıktı  $\cos^n(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  olur. Trigonometrik özdeşliklerin ard arda kullanımıyla, çıktı şu biçimde de ifade edilebilir:

$$\cos^n(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n/2} \alpha_m \cos(2m\omega_0 t + 2m\Delta\omega \int f(\tau) d\tau); & n \text{ çift} \\ \sum_{m=0}^{(n-1)/2} \beta_m \cos[(2m+1)(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)]; & n \text{ tek} \end{cases} \quad (6.99)$$

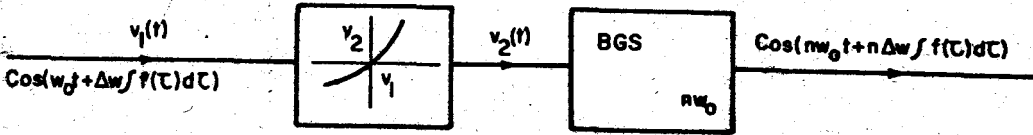
Belirli bir n değeri için  $\alpha_m$  ve  $\beta_m$  değerleri kolayca saptanabilir. (6.99) dan görülebileceği gibi n inci derece kuralı aygıtının çıkışı  $n\omega_0, (n-2)\omega_0, (n-4)\omega_0, \dots$  frekanslarına merkezlenmiş FM dalgabıçımlarından oluşur.  $n\omega_0$  a merkezlenmiş bant geçiren süzgeç yalnız  $n\omega_0$  a merkezlenmiş FM dalgabıçımını geçirir. Buna göre süzgeç çıkışı şöyledir.

$$A \cos(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.100)$$

Böylece frekansın n ile çarpılma işlemi gerçekleştirilmiş olur.

Bir düşüncel n inci derece kuralı aygıtını tasarlamak kolay bir iş değildir. Ancak frekansını n ile çarpmak için bir düşüncel n'inci

derece kuralı aygıtı gerekli değildir. Doğrusal olmayan herhangi bir aygıtın (belleği olmayan) çıkışına  $n\omega_0$  a merkezlenmiş bir bant geçiren süzgeç kullanılarak frekansı  $n$  ile çarpan bir frekans çarpıcı gerçekleştirilebilir. Bu tür bir dizge Şekil 6.14'de gösterilmiştir.



Şekil 6.14 Frekans çarpıcı

Doğrusal olmayan aygıt özgeğrisinin şu biçimde bir Taylor serisi açılımı ile ifade edildiğini varsayalım:

$$v_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i v_1^i \quad (6.101)$$

$v_1$  için  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  konular ve (6.99) dakine benzer trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa, doğrusal olmayan aygıtın çıktısı şöyle ifade edilebilir.

$$v_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos(m\omega_0 t + m \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.102)$$

Bant geçiren süzgeç yalnız  $n\omega_0$ 'a merkezlenmiş FM işaretini geçirir. Buna göre bant geçiren süzgecin çıktısı şu biçimdedir:

$$A \cos(n\omega_0 t + n \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.103)$$

Böylece frekansın  $n$  ile çarpılması gerçekleştirilmiş olur. Ancak burada bir noktayı açıklamak gerekir. Doğrusal olmayan aygıtın çıkışındaki işarette  $n\omega_0$  dolaylarında kuvvetli bir bileşen olması için, aygıt özgeğrisinin (6.101)deki açılımında  $n$  inci (ya da  $n+2$  inci, ya da  $n+4$  üncü...) teriminin kuvvetli olması gereklidir. Bir başka deyişle (6.101) deki  $a_n$  (ya da  $a_{n+2}$ , ya da  $a_{n+4}$ , ...) sıfırdan farklı olmalıdır.

Şekil 6.14'deki frekans çarpıcısının çözümlenmesi Fourier benzeri seriler kullanılarak yapılabilir. Bu çözümlenme buraya yalnız öğretici amaçlarla konulmuştur. Şekil 6.14 deki doğrusal olmayan aygıtın (belleği yoktur) girdisi  $\cos n\omega_0 t$  ise, çıktı çift bakışlımlı bir dönemli işaretlerdir. Bu nedenle çıktı şu Fourier serisi gösterimine sahiptir:

$$\text{çıkıtı} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (6.104)$$

Doğrusal olmayan aygıtın girdisi  $\cos[\omega_0(t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \int f(\tau) d\tau)]$  ise, yani

$\tau = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \int f(\tau) d\tau$  ise, buna karşılık gelen çıktı (6.104) de  $\tau$  yerine değeri konularak bulunabilir.

$$\text{çıkıtı} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos [n\omega_0 t + n \Delta\omega \int f(\tau) d\tau] \quad (6.105)$$

Bant geçiren süzgeç  $n\omega_0$  daki FM işaretini geçirir ve frekans çarpıcısının çıktısı  $a_n \cos [n\omega_0 t + n \Delta\omega \int f(\tau) d\tau]$  olur.

Doğrusal olmayan aygıtın belleği olmadığı ve (6.104) deki ifadenin her  $\tau$  değeri için geçerli olması nedeniyle (6.105) deki ifade geçerlidir. Bir başka deyişle, girdide herhangi bir yolla ölçekleme yapılması, örneğin  $\tau = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \int f(\tau) d\tau$ , olması, çıktıda da aynı ölçeklemenin yapılmasına karşı gelir. Bunun nedeni doğrusal olmayan aygıtın belleğinin olmasıdır. Girdi  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ise, çıktı dönemi olmamasına karşın bir Fourier-benzeri seri (6.105) ile gösterilebilir ve bu serinin  $a_n$  katsayıları, girişe bir sinüzoidal uygulandığında elde edilen çıktının Fourier katsayıları ile aynıdır. Bu nedenle (6.105) deki seri 'Fourier-benzeri seri' olarak adlandırılır ve bu ölçeklemenin önemi buradan gelir.

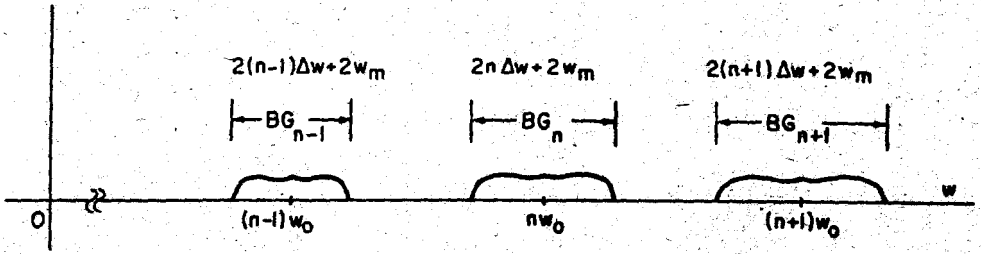
İstenilen genişbant FM işareti üretilirken darbant FM'nin frekansına çok büyük bir  $n$  ile çarpmak gerekebilir. Gerçekte  $n$ ,  $10^3$  derecesinde olabilir. Böyle durumlarda frekansı  $n$  ile çarpmak ard arda birkaç basamakta gerçekleştirilebilir. Örneğin önce  $n_1$  ile frekans çarpımı, sonra  $n_2$  ile frekans çarpımı ve en sonunda  $n_r$  ile frekans çarpımı,  $n_1 n_2 \dots n_r$  ile frekans çarpımına eşdeğerdir.

Frekans çarpımının tek bir işlemde değil de, ard arda birkaç basamakta gerçekleştirilmesi şu iki nedenden dolayı gereklidir: Uygulamada bir  $n$  inci derece kuralı aygıtını tasarlamak ya da büyük  $n$  değerleri için  $n$  inci terimi kuvvetli olan doğrusal olmayan bir aygıt bulmak kolay değildir. İkinci olarak, verilen bir darbant FM işaretinde frekansın tek bir basamakta ve bozulmasız bir biçimde  $n$  ile çarpılması, büyük  $n$  değerleri için mümkün olmayabilir. Bu ikinci kısıtlama aşağıda ayrıntılarıyla incelenmiştir.

(6.105) den görülebileceği gibi doğrusal olmayan aygıt çıktısı  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$  daki FM işaretlerinden oluşur. Bu işaretlerin bantgenişlikleri de frekans sapsmaları ile yani  $\Delta\omega, 2\Delta\omega, 3\Delta\omega$ , ile orantılıdır. Doğrusal olmayan aygıt çıktısı görüngesinin bir kısmı Şekil 6.15'de verilmiştir.  $n\omega_0$  daki FM işareti istenildiğinde, bunun görüngesinin bitişik harmoniklerle çakışmadığından emin olunmalıdır.  $n$  arttıkça bantgenişliği de arttığından,  $n\omega_0$  daki FM işareti ile  $(n+1)\omega_0$  daki FM işaretinin çakışıp çakışmadığını anlamak yeterlidir. Bunun için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması yeterlidir:

$$\frac{BG_n}{2} + \frac{BG_{n+1}}{2} < \omega_0 \quad (6.106)$$





Şekil 6.15 Doğrusal olmayan aygıt çıktısının frekans görünüşünün bir bölümü

$n\omega_0$  daki FM işaretinin bantgenişliği  $BG_n$  ile ve  $(n+1)\omega_0$  daki FM işaretinin bantgenişliği de  $BG_{n+1}$  ile gösterilmiştir.

$$BG_n = 2(n\Delta\omega + \omega_m) \quad (6.107)$$

$$BG_{n+1} = 2[(n+1)\Delta\omega + \omega_m]$$

Bu nedenle (6.106) daki eşitsizlik şu biçimde de ifade edilebilir:

$$n\Delta\omega + \omega_m + (n+1)\Delta\omega + \omega_m < \omega_0 \quad (6.108)$$

$$n < \frac{\omega_0 - 2\omega_m}{2} - \frac{1}{2}$$

Böylece tek basamakta, bozulma olmadan frekans çarpabileceğimiz  $n$  değerine bir üst sınır bulunmuş olur. Eğer  $n$  bu sınırı aşarsa,  $n\omega_0$  ve  $(n+1)\omega_0$  daki FM işaretleri üst üste çakışır ve bant geçiren süzgecin çıktısı  $\cos(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int f(\tau)d\tau)$  ye eşit olmaz.

Frekans çarpımı ard arda bir kaç basamakta yapılacaktır (6.108) daki üst sınırın her basamakta sağlanması gerekir. Frekans çarpımına istenildiği kadar basamak konulabilir ve böylece çok büyük frekansları ile frekans çarpımı gerçekleştirilmiş olur. Frekans çarpımının her basamağında, taşıyıcı ve frekans çarpması aynı sayıyla çarpıldığında, (6.108) daki üst sınır kabaca aynı kalır.

Örnek 6.2. Aşağıda verilen darbant FM dalgabiçimini düřünüñüz.

$$c_1(t) = \cos [2\pi \cdot 10^5 t + (2\pi \cdot 25) \int f(\tau)d\tau]$$

Burada  $f(t)$ , 100 Hz ile 10 KHz arasındaki frekans bandını kaplayan bir ses işaretidir. Bu darbant FM işaretini kullanarak aşağıda verilen ge-nişbant FM işaretini nasıl üretebiliriz?

$$c(t) = \cos [2\pi \cdot 10^8 t + (2\pi \cdot 75 \cdot 10^3) \int f(\tau)d\tau]$$

Frekans sapmalarının oranı,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1} = \frac{2\pi \cdot 75 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 25} = 3000$$

olarak bulunur. Buna göre darbant FM işaretinin frekansı 3000 ile çarpılmalıdır.

(6.108) den,  $n > 1600$  için frekans çarpıcısının çıkışındaki FM işaretinin bozulacağı görülebilir. Bu nedenle frekansın 3000 ile çarpılması, birden fazla basamakta gerçekleştirilir. Örneğin frekans önce 50 daha sonra da 60 ile çarpılarak frekansın 3000 ile çarpılması gerçekleştirilebilir. Ya da sırasıyla  $4 \times 5 \times 5 \times 6$  ile çarpılarak, bu işlem gerçekleştirilebilir.

Frekans 3000 ile çarpıldığında taşıyıcı frekansı da 3000 ile çarpılır ve şu FM işareti elde edilir:

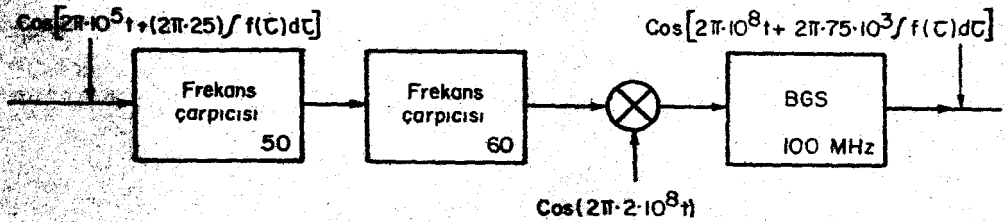
$$\cos[2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 t + (2\pi \cdot 75 \cdot 10^3) \int f(\tau) d\tau]$$

Burada taşıyıcı frekansı 300 MHz'dir; oysa istenilen taşıyıcı frekansı 100 MHz idi. Bu FM işareti ile  $\cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 t)$  karıştırılarak

$$\frac{1}{2} \cos[2\pi \cdot 10^8 t + (2\pi \cdot 75 \cdot 10^3) \int f(\tau) d\tau]$$

$$+ \frac{1}{2} \cos[2\pi \cdot 5 \cdot 10^8 t + (2\pi \cdot 75 \cdot 10^3) \int f(\tau) d\tau]$$

elde edilir. 100 MHz'e merkezlenmiş bant geçiren süzgeç yalnız birinci terimi geçirir. Böylece istenilen genişbant FM işareti elde edilir. İstenilen FM işaretini elde etmek için, darbant FM işaretine uygulanan çeşitli işlemler Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Frekans çarpımının kaç basamakta yapılacağı ve her basamakta kaç ile çarpılacağı konusunda çözüm tek değildir. Bundan başka, taşıyıcı frekansının istenilen frekansa çevrilmesi de birkaç basamakta gerçekleştirilebilir.



Şekil 6.16 Darbant FM işaretinin genişbant FM işaretine çevrilmesi.

### Doğrudan FM

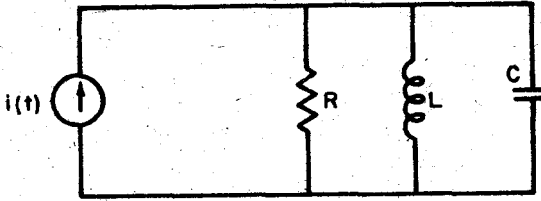
İsminden de anlaşılacağı gibi, doğrudan FM dizgelerinde, bilgi işareti  $f(t)$  taşıyıcı frekansını doğrudan denetler. Bir FM dalgabıçımının

taşıyıcısını üreten üreteç (salıngaç), genellikle bir akortlu devre salıngaçtır. Bu tür salıngaç devrelerinin çıkışındaki sinüzoidal dalga biçiminin frekansı endüktans-sığaç birleşiminin rezonant frekansı tarafından saptanır. Salıngaçtaki akortlu devrenin sığası C ve endüktansı L ise, salınım frekansı  $\omega_a$  şu biçimde saptanır.

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.109)$$

L ya da C değeri  $f(t)$  ile doğrusal olarak değişirse, ansal salıngaç frekansının,  $f(t)$  nin çok küçük değişimleri için,  $f(t)$  ile doğrusal olarak değiştiği gösterilebilir. Genellikle bilgi işareti  $f(t)$ , taşıyıcıya göre yavaş değişir. Bu nedenle taşıyıcının birkaç dönemi süresince, C deki (ya da L deki) değişimler çok küçük varsayılabilir. Bunun sonucu olarak salıngaçın ansal frekansının (6.109) ile belirlenebileceği beklenir. Frekansı bilgi işareti gerilimi ile denetlenen salıngaçlar gerilim denetimli salıngaçlar ya da kısaca GDS ("VCO") diye adlandırılırlar.

Şekil 6.17'de verilen salıngaç devresini düşünelim.



Şekil 6.17 Bir salıngaç devresi

C sığasının bilgi işareti  $f(t)$  ile doğrusal olarak değiştiğini varsayalım.

$$C = C_0 + \Delta C = C_0 - kf(t) \quad (6.110)$$

$$= C_0 \left[ 1 - \frac{kf(t)}{C_0} \right]$$

Buradan salıngaçın ansal frekansı şu biçimde bulunur:

$$\omega_a(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[ 1 - \frac{kf(t)}{C_0} \right]^{-1/2} \quad (6.111)$$

Karekök içindeki ifade binom açılımı ile şöyle de ifade edilebilir:

$$\left[ 1 - \frac{kf(t)}{C_0} \right]^{-1/2} = 1 - \left( \frac{-1}{2} \right) \frac{kf(t)}{C_0} + \left( \frac{-1}{2} \right) \left( \frac{-3}{2} \right) \frac{1}{2!} \left[ \frac{kf(t)}{C_0} \right]^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{kf(t)}{2C_0} + \frac{3}{8} \frac{k^2 f^2(t)}{C_0^2} + \frac{15}{48} \frac{k^3 f^3(t)}{C_0^3} + \dots \quad (6.112)$$

Küçük  $\frac{kf(t)}{C_0}$  değerleri için  $[1 - \frac{kf(t)}{C_0}]^{-1/2}$  ye serinin ilk iki terimi ile yaklaştırma yapılabilir. Bu yaklaştırma ve  $\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$  kullanılarak, (6.111) deki ansal frekans şu biçimde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \omega_a(t) &= \omega_0 \left[ 1 + \frac{kf(t)}{2C_0} \right] \\ &= \omega_0 + \frac{k\omega_0}{C_0} f(t) \end{aligned} \quad (6.113)$$

Bu nedenle sığağtaki değişmeler bilgi işareti ile doğrusal ise, ansal frekansta bilgi işareti ile doğrusal değişmeler elde edilir. Gereken tek koşul  $\frac{kf(t)}{C_0}$  ın çok küçük olmasıdır. Dikkat edilecek olursa sığağtaki değişme ile ansal frekanstaki değişme ters işaretlidir.

Kare kök içindeki ifadeye, seri açılımının ilk iki terimi ile yaklaştırma yapılabilmesi için  $\frac{kf(t)}{C_0}$  ne kadar küçük olmalıdır? İhmal edilen ilk terim  $\frac{3k^2 f^2(t)}{8C_0^2}$ , yaklaştırmaya alınan son terim  $\frac{1}{2} \frac{kf(t)}{C_0}$  a göre küçük olmalıdır. İhmal edilen ilk terimin, yaklaştırmaya katılan son terimin % 1 i olması mantıklı bir ölçüt sayılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \frac{k^2 f^2(t)}{C_0^2} \\ \frac{1}{2} \frac{kf(t)}{C_0} < 0.01 \end{aligned} \quad (6.114)$$

Buna göre  $\frac{kf(t)}{C_0} < 0.013$  olması gerekir. Bu sonuç ve (6.110) birleştirilirse, ansal frekansın bilgi işareti  $f(t)$  ile doğrusal değişmesi için, sığadaki değişmelerin modülasyon olmadığındaki  $C_0$  değerinin % 1.3 ünden büyük olmaması gerektiği görülür.

Sığadaki değişmelerin küçük olması gerektiği halde, modüle edilmiş işaretin frekansı  $\omega_0$  yeteri kadar büyükse, frekans sapması  $\Delta\omega$  oldukça büyük olabilir. Örneğin  $\frac{kf(t)}{C_0} = 0.01$  ve  $\omega_0 = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^6$  rad/san ise

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{kf(t)}{C_0} = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{2}\right) (0.01) = 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \text{ rad/san}$$

Bu yolla ansal frekans doğrudan değiştirilerek, büyük frekans sapması  $\Delta\omega$  değerleri elde edilebilir. Bu nedenle doğrudan yöntemde dolaylı yöntemle göre daha az sayıda frekans çarpması ve frekans çevrimi işlemi

gerekir. Frekans sapması  $\Delta\omega$  yı daha iyi ayarlamak için frekans çarpımı işlemi yine de gerekebilir, ancak bunun düzeyi dolaylı yöntemdekine göre daha düşüktür. Bu nedenle bu yöntemde, frekans çarpımındaki kısıtlamalar ( $n$ 'nin üst sınırı) kolayca sağlanmış olur. (6.109) dan görülebileceği gibi, ansal frekans ifadesi  $C$  ve  $L$  ye göre simetriktr. Bu nedenle sığacın değeri yerine,  $L$  endüktansının değeri  $f(t)$  ile doğrusal olarak değişirse, ansal frekansta benzer bir etki görülür. Endüktansının değeri

$$L = L_0 - kf(t) \quad (6.115)$$

ile değişir ve  $\frac{kf(t)}{L_0} < 0.013$  ise, ansal frekans  $f(t)$  ile doğrusal olarak değişir.

$$\omega_a = \omega_0 + \frac{k\omega_0}{2L_0} f(t) \quad (6.116)$$

Bu kuramsal çözümlerden sonra akla şu soru gelir.  $C$  sığacı (ya da  $L$  endüktansı, (6.10) ya da (6.115) de gösterildiği biçimde bilgi işareti  $f(t)$  ile doğrusal olarak nasıl değiştirilir? Bilgi işareti  $f(t)$  ile orantılı olarak, sığa (ya da endüktans) değişimleri elde etmekte kullanılan çeşitli yollar vardır. Çok fazla ayrıntıya girmeden, aşağıda birkaç örnek verilmiştir.

#### Reaktans-Tüpü Kullanan Modülatör

Reaktans-tüpü devresi olarak adlandırılan devrenin giriş empedansı bilgi işareti  $f(t)$  ile orantılı bir değişken (sığasal ya da endüktif) reaktanstır. Şekil 6.18a'da reaktans tüpü devresinin çizimi verilmiştir ve bunun eşdeğer devresi Şekil 6.18b'de gösterilmiştir.  $r_p$  genellikle büyük olduğundan ihmal edilebilir. Buna göre akım yaklaşık olarak

$$I = g_m E_g + \frac{V_p}{Z_1 + Z_2} \quad (6.117)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $g_m$  tübün geçiş iletkenliğidir ve

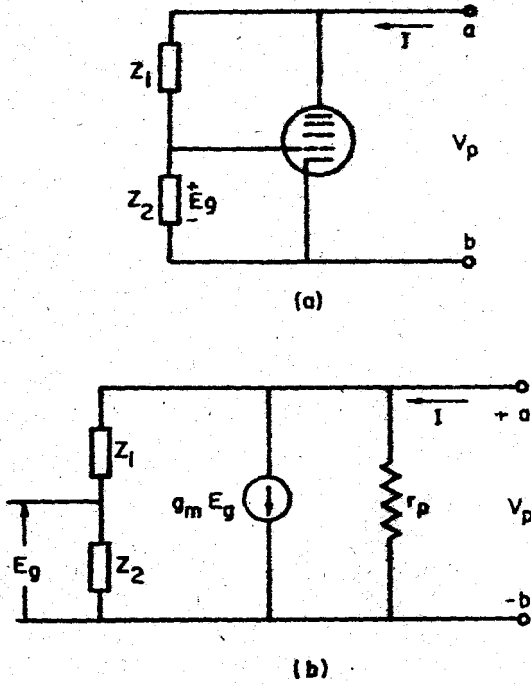
$$E_g = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_p \quad (6.118)$$

(6.118) i (6.117) de yerine koyarak

$$I = \left( \frac{g_m Z_2 + 1}{Z_1 + Z_2} \right) V_p$$

Buradan a-b uçlarından görünen  $Y_{ab}$  admitansı şu şekilde bulunabilir.

$$Y_{ab} = \frac{I}{V_p} = \frac{1 + g_m Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



Şekil 6.18 Reaktans tüpü kullanan modülatör ve eşdeğer devresi

Genellikle  $|g_m Z_2| \gg 1$  dir ve buna ek olarak  $Z_1 \gg Z_2$  ise,

$$Y_{ab} \cong \frac{g_m Z_2}{Z_1}$$

elde edilir. Tüpün geçiş iletkenliği  $g_m$ , ızgara geriliminin bir işlevi-  
dir. ızgaraya  $f(t)$  ile orantılı bir gerilim uygulanırsa

$$g_m = g_{m0} - kf(t)$$

ve

$$Y_{ab} = \frac{[g_{m0} - kf(t)]Z_2}{Z_1} \quad (6.119)$$

Bu eşitlikte  $Z_1 = 1/j\omega C$  ve  $Z_2 = R$  olursa,  $Y_{ab}$  zamanla değişen bir sığa-  
cın admitanansı olur.

$$C = C_0 - k_1 f(t)$$

Benzer şekilde  $Z_1 = R$  ve  $Z_2 = j\omega L$  olursa,  $Y_{ab}$  yine zamanla değişen bir  
sığacın admitanansı olur.

Yukarıda reaktans tübü kullanılarak değişken bir sığaç elde etmeye yarayan iki düzenleme verilmiştir. Reaktans tübü kullanarak değişken endüktans da elde etmek olasıdır. Değişken endüktans elde edebileceğimiz iki düzenleme şu biçimdedir: (6.119) da  $Z_1 = R$  ve  $Z_2 = 1/j\omega C$  yerine konulursa, ab uçlarında görünen empedans endüktans olur.

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{Z_1}{Z_2} [g_{mo} - kf(t)]^{-1}$$

$$= j\omega RC [g_{mo} - kf(t)]^{-1}$$

Eğer  $kf(t)$  değeri  $g_{mo}$  ya göre küçükse,  $[g_{mo} - kf(t)]^{-1}$  e seri açılımının ilk iki terimi ile yaklaştırma yapılabilir ve

$$Z_{ab} \approx j\omega \frac{RC}{g_{mo}} \left[ 1 + \frac{kf(t)}{g_{mo}} \right] \quad (6.120)$$

elde edilir. Bu biçimde devre bir değişken endüktans gibi davranır. Benzer biçimde  $Z_1 = j\omega L$  ve  $Z_2 = R$  ise, devre yine bir değişken endüktans gibi davranır.

Reaktans tüplü modülatör taşıyıcının frekansını doğrudan modüle etmekte kullanılan tek yol değildir. Bir tübün Miller-etkisi sığacı (tüp kazancıyla ve bu nedenle  $g_m$  ile orantılıdır), bir salıngaç tank devresinin etkin sığacını değiştirmekte kullanılabilir. Ancak bu yöntemde sığaçtaki değişmeler, reaktans tübündeki değişmeler gibi, büyükçe olmaz. Bu nedenle bu yöntemde o kadar büyük frekans sapmaları elde edilemez.

### Değişken-Sığaç Diyodu Kullanan Modülatör

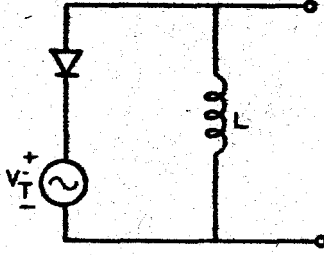
Ters-yönde öngerilimlenmiş diyot bir sığaç gibi davranır. Bu nedenle değişken reaktans elde etmekte çok yaygın kullanılan bir yöntem de, ters-yönde öngerilimlenmiş diyot kullanmaktır. Ters yönde öngerilimlenmiş diyodun sığası uçlarına uygulanan gerilimin bir işlevidir. Bu nedenle ters yönde öngerilimlenmiş bir diyodun üzerine bilgi işareti  $f(t)$  uygulanarak, eklem sığacı istenildiği biçimde değiştirilebilir.

Ters yönde öngerilimlenmiş bir değişken-sığaç diyodunun sığası şöyle ifade edilebilir:

$$C = \frac{K}{(V_0 + V_T)^r} \quad (6.121)$$

Burada  $V_0$  diyodun eşik gerilimi (silikon diyot için 0.6-0.7 V, germanyum diyot için 0.2-0.3 volt),  $V_T$  ise diyot üzerine uygulanmış ters yön gerilimidir.  $K$  ve  $r$  ise yarıiletkenin fiziksel yapısına bağlı parametrelerdir.  $r$ 'nin değeri 1/3 den 4 e kadar değişebilir.

Şekil 6.19 da gösterilen devreyi düşününüz.  $V_T = A + kf(t)$  volt,  $A > 0$  ve  $|kf(t)| \ll A$  olsun.  $f(t)$  nin en yüksek frekans bileşeni  $\omega_m$  için



Şekil 6.19 Değişken sığalı diyot kullanan modülatör

endüktans kısa devre kabul edilebilirse, diyot ters yönde öngerilimlenmiş olur ve bir sığaç gibi davranır ve bu nedenle diyot bir sığaç ile modelenebilir. Şekil 6.19 da diyot yerine konacak sığaçın sığası şu biçimde ifade edilebilir:

$$C = \frac{K}{[V_0 + A + kf(t)]} = \frac{K}{(V_0 + A)^r} \frac{1}{[1 + \frac{kf(t)}{V_0 + A}]^r}$$

$$= \frac{C_0}{[1 + \frac{kf(t)}{V_0 + A}]^r} \quad (6.122)$$

Burada

$$C_0 \triangleq \frac{K}{(V_0 + A)^r}$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre bu devrenin ansal rezonans frekansı şu biçimde ifade edilebilir:

$$\omega_a(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC_0}} [1 + \frac{k}{V_0 + A} f(t)]^{r/2}$$

" $|x| \ll 1$  için  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ " yaklaştırması yapılabildiğinden  $|\frac{k}{V_0 + A} f(t)| \ll 1$  için, ansal frekans şu biçimde yaklaşık olarak ifade edilebilir:

$$\omega_a(t) = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} [1 + \frac{rK}{2(V_0 + A)} f(t)]$$



$$= \omega_0 + \frac{\omega_0 r k}{2(A + V_0)} f(t) \quad (6.123)$$

Burada

$$\omega_0 \triangleq 1/\sqrt{LC_0} \quad (6.124)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle Şekil 6.19 daki devrede üretilen sinüzoidal ansal frekansı  $f(t)$  ile doğrusal orantılıdır ve üretilen sinüzoidal ise bir FM işaretidir. Reaktans tübü kullanılan modülatöre göre bu yöntemde daha az gürültü üretilir, bozulma daha azdır ve frekans sapması bilgi işareti ile daha doğrusal olarak değişir. Ancak ters-yönde öngeri-limlenmiş diyot kullanıldığında bir bozulmaya neden olmadan elde edilen frekans sapması, reaktans tübü kullanılan modülatörde elde edilen frekans sapması kadar büyük olmaz.

### Değişken Endüktans Kullanan Modülatör

Değişken endüktans kullanan modülatörde, endüktansbilgi işareti- $f(t)$ 'ye bağlı olarak değişir. Bir demir çekirdeğin geçirgenliği dışarıdan uygulanan manyetik alanın bir işlevidir. Bu manyetik alan çekirdek etrafına sarılmış bir bobinden akım geçirerek oluşturulabilir. Bobinden geçen akım bilgi işareti ile orantılı ise, bu bobinin sarılı olduğu çekirdeğe sarılmış ve ana bobin olarak adlandırılan ikinci bir bobinin reaktansı bilgi işareti ile orantılı olarak değişir. Basitliği ve büyük frekans sapmalı FM işaretleri üretmede kullanılabilmesi nedeniyle FM işaretlerinin üretiminde bu yöntem de yaygın olarak kullanılır.

### FM İşaretinin Üretiminde Diğer Yöntemler

Daha önce tartışılan doğrudan FM ve dolaylı FM yöntemlerinin yanısıra, FM işaretlerini üretmekte başka yollar da kullanılır. Bu yöntemlerden bazıları şunlardır:

1. FM türevsel denkleminin örneksel benzetişimi
2. Bir üçgen dalga FM'nin üretimi ve bu dalganın doğrusal olmayan biçimlendirilmesi,
3. Bir kare dalga FM'nin üretimi ve süzgeçlenmesi,
4. Özel aygıtlarla FM üretimi,

Aşağıda bu yöntemlerin çalışma ilkelerinden kısaca bahsedilecektir.

#### FM Türevsel Denklemi

Aşağıda verilen ikinci-derece, doğrusal ve biryapımlı türevsel denklemi düşünelim.

$$c(t) - \frac{\dot{c}(t)\omega_a(t)}{\omega_a^3(t)} + \frac{\ddot{c}(t)}{\omega_a^2(t)} = 0 \quad (6.125)$$

Bu türevsel denklemin çözümü şu biçimdedir:

$$c(t) = A \cos \left[ \int_0^t \omega_a(\tau) d\tau + \theta_0 \right]$$

$\omega_a(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t)$  olarak alınır ve  $\omega_a(t) > 0$  ise, türevsel denklemin çözümü istenilen FM işaretini verir ve

$$c(t) = A \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau + \theta_0 \right] \quad (6.126)$$

bulunur. Başlangıç koşullarının değiştirilmesi A genliğini ve  $\theta_0$  evresini değiştirir; bu ikisinin doğurduğu sonuçlar ise önemsizdir. (6.126) deki FM türevsel denkleminin benzetişimi ile FM işaretinin üretilmesi özellikle bir örneksel bilgisayara çok uygundur. (6.125) deki türevsel denklem şu biçimde de yazılabilir:

$$c(t) + \frac{1}{\omega_a(t)} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{c}(t)}{\omega_a(t)} \right] = 0$$

ya da

$$c(t) \omega_a(t) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{c}(t)}{\omega_a(t)} \right] = 0$$

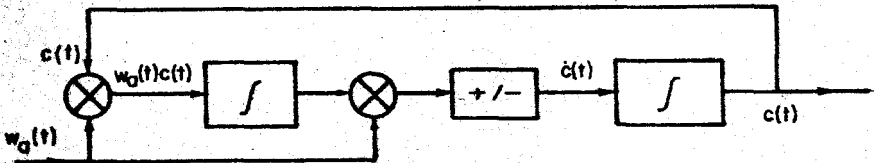
Her iki tarafın tümlevi alınarak,

$$\int c(t) \omega_a(t) dt + \frac{\dot{c}(t)}{\omega_a(t)} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\dot{c}(t) = -\omega_a(t) \int c(t) \omega_a(t) dt \quad (6.127)$$

elde edilir. (6.127) yı kullanarak FM dalgabıçimini üreten bir modülatörün öbek çizimi Şekil 6.20'de verilmiştir.



Şekil 6.20 FM türevsel denklemini kullanarak FM dalgabıçimini üreten modülatör

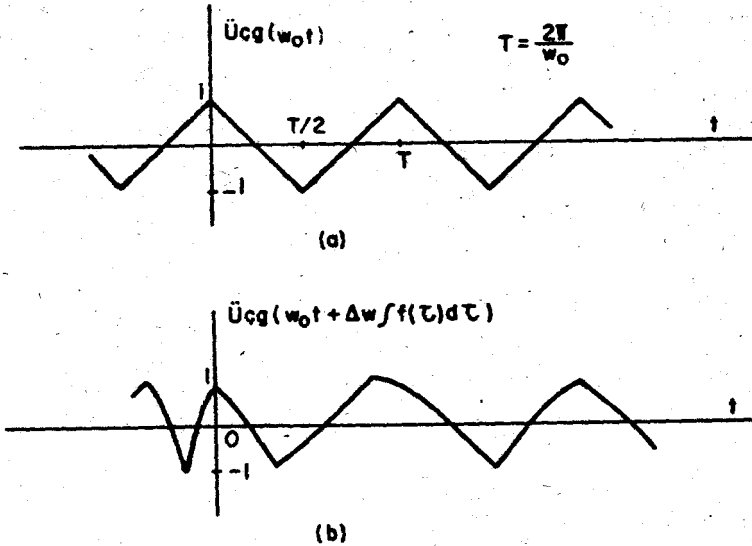
FM türevsel denkleminin benzetişini, yalnız bir örneksel bilgisayarda değil, bir bağımsız FM üreticinde de yapılabilir. İyi nitelikli elektronik bileşenler kullanılarak FM işaretleri tam olarak üretilebilir. FM türevsel denkleminin çözümü kuramsal olarak mükemmel bir FM işareti olduğundan, FM işaretinin bu yolla üretiminde hiçbir yaklaştırma yoktur. Tek kısıtlama  $\omega_a(t)$  nin pozitif olmasıdır. Bu nedenle, verilen bir taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  için, frekans sapması  $\Delta\omega$  ile ilgili kısıtlama çok daha esneklerdir. Frekans sapması  $\Delta\omega$  istenirse taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  kadar büyük olabilir ve frekans sapması  $\Delta\omega$  nin büyük olması FM işaretinde bir bozulmaya neden olmaz.

### Üçgen-Dalga FM

FM işaretlerinin üretiminde çok yaygın kullanılan bir yöntem de, bunu sinüzoidal olmayan FM işaretleri kullanarak üretmektir. Frekans bilgisi  $f(t)$  ile modüle edilmiş üçgen dalga, üçgen-dalga FM işareti olarak adlandırılacaktır. Üçgen dalga FM işareti bu tür bir işarettir. Üçgen  $(\omega_0 t)$  ile göstereceğimiz dönemli bir üçgen dalga Şekil 6.21a'da gösterilmiştir. Bu dönemli dalgabıçımının dönemi  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  ve ana frekansı  $\omega_0$  dir. Bu dönemli işlevin Fourier serisi gösterimi ise şu biçimdedir:

$$\text{Üçgen}(\omega_0 t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} [\cos (2n-1)\omega_0 t] \quad (6.128)$$

Bu üçgen dalganın açısı zamanla doğrusal olarak değişir. Açı başka bir biçimde değiştirilseydi, örneğin  $\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau$  olsa idi, sonuçta



Şekil 6.21 Bir dönemli üçgen-dalga dalgabıçımı ve üçgen-dalga FM işareti.

elde edilen dalgabıçımı  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  olurdu. Bu genel olarak dönemli olmayan bir dalgabıçıdır: Bu dalgabıçımı  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$ , Şekil 6.21b'de gösterilmiştir ve üçgen-dalga FM olarak adlandırılır. Açının türevi ansal frekans olarak tanımlanırsa (sinüzoidal FM de olduğu gibi), üçgen-dalga FM işareti  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ın ansal frekansı  $\omega_0 + \Delta\omega f(t)$  olur. Bir başka deyişle üçgen dalga FM işaretinin ansal frekansı bilgi işareti  $f(t)$  ye bağlı olarak değişir.

Üçgen-dalga FM işareti  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ne dönemlidir ne de üçgendir. Bu nedenle bunun Fourier serisi gösterimi yoktur. (6.128)deki eşitlik her nokta için geçerlidir. Bu nedenle her iki tarafta da  $t$  yerine aynı şey konulursa eşitlik bozulmaz.  $t$  yerine  $t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \int f(\tau) d\tau$  konularak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2n-1)^2} \cos[(2n-1)(\omega_0 t + \\ &= \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)] \end{aligned} \quad (6.129)$$

Böylece dönemli olmayan dalgabıçımı  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  için bir gösterim elde edilir. Fourier serisi açınımdan elde edildiği için bu gösterim "Fourier-benzeri" açınım olarak adlandırılır.

Yukarıdaki açınımın göre üçgen-dalga FM işareti  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$ ,  $\omega_0$ ,  $3\omega_0$ ,  $5\omega_0$ ,... frekanslarındaki sinüzoidal FM işaretlerinin toplamıdır. Buna göre üçgen-dalga FM işareti  $\omega_0$  a merkezlenmiş bir bant geçiren süzgeçten geçirilirse, süzgecin çıktısı istenilen FM işareti  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  olur. Süzgecin bantgenişliği  $\omega_0$  daki FM işaretini geçirmeye yetecek kadar büyük olmalıdır.

Sayısal elektronik aygıtlarında son yıllarda elde edilen gelişmeler nedeniyle üçgen dalga FM işareti  $\text{Üçg}(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  nin üretilmesi zor değildir. Bu işaret bir bant geçiren süzgeçten geçirilerek istenilen sinüzoidal FM işareti  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  elde edilir. Ancak bu yolla FM işareti üretilirken bir kısıtlama vardır.  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ve  $\cos(3\omega_0 t + 3\Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  FM işaretlerinin görüngeleri üst üste binmemelidir, yoksa  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ın bir bant geçiren süzgeç yoluyla bulunmadan elde edilmesi olanaksızlaşır. Bir başka deyişle,

$$\frac{BG_1}{2} + \frac{BG_3}{2} < 2\omega_0$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Burada  $BG_1$  ve  $BG_3$  sırasıyla  $\omega_0$  ve  $3\omega_0$  daki sinüzoidal FM işaretlerinin bantgenişlikleridir.  $f(t)$  nin  $\omega_m$  e bant sınırı olduğu varsayılır ve bantgenişlikleri için Carlson kuralı uygulanırsa, şu eşitsizlik elde edilebilir.

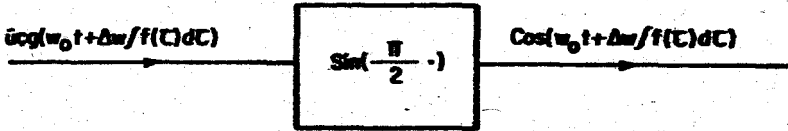
$$\frac{2(\Delta\omega + \omega_m)}{2} + \frac{2(3\Delta\omega + \omega_m)}{2} < 2\omega_0$$

$$2\Delta\omega + \omega_m < \omega_0$$

$$(6.130)$$

(6.130) katı bir kısıtlama olmasına karşın, üçgen-dalga FM işaretinden sinüzoidal FM işareti başka yollarla, böyle kısıtlamalar olmadan da elde edilebilir. Şekil 6.22'de verilen sıfır bellekli doğrusal olmayan aygıtı düşünelim. Aygıtın giriş-çıkış özgeçirisi şu biçimde verilmiştir.

$$v_{\zeta}(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2} v_g(t)\right] \quad (6.131)$$



Şekil 6.22 Üçgen dalga FM'den sinüzoidal FM'nin bir doğrusal olmayan aygıt kullanılarak üretimi

Girişe üçgen-dalga FM işareti uygulandığında çıkışta sinüzoidal FM işareti elde edilir. Bir doğrusal olmayan aygıt kullanılarak üçgen dalga FM'den sinüzoidal FM üretilirken  $\omega_0$  ve  $\Delta\omega$  üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. Aşağıda verilen FM işareti üretim yöntemlerinde kuramsal olarak, mükemmel bir FM işareti üretilir.

- i. FM türevsel denkleminin örneksel benzetimini
- ii. Bir üçgen-dalga FM'in üretimi ve bu dalganın doğrusal olmayan şekillendirilmesi

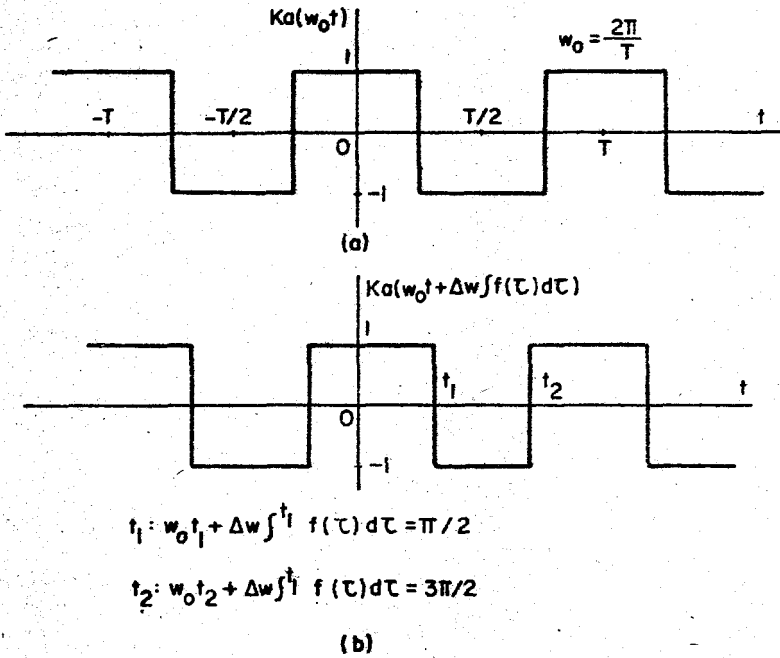
Bu yöntemlerde frekans sapması  $\Delta\omega$  ya da maksimum modülasyon frekansı  $\omega_m$  taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  kadar büyük olabilir.

### Kare-Dalga FM

Sinüzoidal FM işareti üretiminde kullanılan, sinüzoidal olmayan diğer bir FM işareti de frekans bilgisi işareti ile modüle edilmiş kare-dalgadır. Bu kare dalga, kare dalga FM olarak adlandırılacaktır. Şekil 6.23a'da frekansı  $\omega_0$  olan, +1, -1 dönemli kare dalga gösterilmiştir. Bu dalga  $K_a(\omega_0 t)$  ile gösterilirse, Şekil 6.23b'de gösterilen kare-dalga FM  $K_a(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  olur. Fourier serisi açılımı kullanılarak dönemli kare dalga şu biçimde ifade edilir:

$$K_a(\omega_0 \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 \tau) \quad (6.132)$$

Bu açılımı kullanarak kare dalga FM'nin Fourier-benzeri seri açılımını elde edilebilir:



Şekil 6.23 Kare dalga ve kare-dalga FM

$$Ka(\omega_0 t + \Delta \omega \int f(\tau) d\tau) = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{tek}}}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) \times \text{Cos}(n\omega_0 t + n \Delta \omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.133)$$

Buna göre kare dalga FM,  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$  frekanslarındaki sinüzoidal FM işaretinden oluşur.  $\omega_0$  ve  $3\omega_0$  daki görüncü bileşenleri çakışmazsa, bir bant geçiren süzgeç yardımıyla  $\omega_0$  daki sinüzoidal FM işareti bozulmadan çekip alınabilir.  $\omega_0$  ve  $3\omega_0$  daki görüncü bileşenlerinin çakışmaması için  $\omega_0, \Delta \omega$  ve  $\omega_m$  nin sağlaması gereken koşul, (6.130) da üçgen dalga FM için verilen koşulla aynıdır. Bu koşul sağlanırsa bant geçiren süzgeç kullanılarak kare dalga FM'den sinüzoidal FM elde edilebilir. Üçgen dalga FM'de olduğu gibi, kare dalga FM de bir doğrusal olmayan aygıt kullanarak sinüzoidal FM elde edilemez. Kare dalga FM üretip, bundan süzme yoluyla sinüzoidal FM'in elde edilmesi uygulamada çok yaygın kullanılan bir yöntemdir.

## 6.3 FM İŞARETLERİNİN DEMODOLASYONU

Aşağıdaki FM işaretinin verildiğini düşününüz:

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.134)$$

Amacımız modüle edilmiş  $c(t)$  işaretinden bilgi işareti  $f(t)$  yi yeniden geri elde etmektir.  $f(t)$  nin geri elde edilmesi için çeşitli yollar vardır. Burada en yaygın kullanılan ve frekans ayırtacı olarak adlandırılan demodülasyon tekniği ayrıntılarıyla incelenecek, sonra daha özel diğer tekniklerden kısaca bahsedilecektir.

Amacımız önce frekansı modüle edilmiş  $c(t)$  işaretini, genliği,  $c(t)$  işaretinin frekansı  $\omega_0 + \Delta\omega f(t)$  ile doğrusal orantılı bir dalgabıçımına dönüştürmektir. Frekansı genliğe çevirerek demodülasyon işlemini yapan FM demodülatörleri frekans ayırtacı olarak adlandırılır. Frekansın genliğe çevrilme işlemi,  $c(t)$  nin türevi alınarak gerçekleştirilebilir. (6.134) da verilen  $c(t)$  nin türevini düşünelim.

$$\frac{dc(t)}{dt} = -(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.135)$$

Bu dalgabıçımı hem genliği hem de frekansı modüle edilmiş bir taşıyıcı biçimindedir. Frekanstaki değişmelere karşın  $dc(t)/dt$  dalgabıçımının zarfı şöyle tanımlanır:

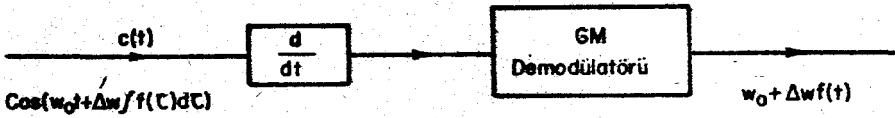
$$e(t) = |\omega_0 + \Delta\omega f(t)| \quad (6.136)$$

Taşıyıcı frekansındaki ufak değişmeler zarfı etkilemez. Bunun nedeni uygulamada karşılaşılan bütün durumlarda, ansal frekansın en düşük değerinin bile  $f(t)$  nin en yüksek frekansı  $\omega_m$  ye göre çok büyük olmasıdır.

Uygulamada karşılaşılan bütün durumlarda  $\omega_0 > \Delta\omega$  olduğundan,  $\frac{dc(t)}{dt}$  nin genliğinin işareti her zaman aynıdır. Bu nedenle  $e(t)$  zarfı, FM işareti  $c(t)$  nin ansal frekansına eşittir.

$$e(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t) \quad (6.137)$$

Türev alınıp daha sonra zarf sezimiyle,  $c(t)$  nin ansal frekansı (ve sonuçta bilgi işareti  $f(t)$ ) elde edilebilir. Gerçekte diğer GM demodülasyon teknikleri, eşzamanlı demodülasyon ve ortalama zarf sezimi ile de  $\frac{dc(t)}{dt}$  nin genliği elde edilebilir. Bir türevalıcı ile bir GM demodülatöründen oluşan bir frekans ayırtacının öbek çizimi Şekil 6.24'de verilmiştir.



Şekil 6.24 Bir frekans ayırtacı

FM demodülatörlerinin çoğunun yapısı Şekil 6.24'deki gibidir. Türev alma ve GM demodülasyonlarının değişik biçimlerde gerçekleştirilmeleri ile değişik frekans ayırtacı türleri elde edilir. Çeşitli frekans ayırtacılarını ayrı ayrı incelemeden önce, bütün frekans ayırtacılarında ortak olan bir sorunu ele alalım:

#### Sınırlandırıcı

FM dalgabıçımı  $c(t)$  nin genliğinin sabit olduğu varsayılmıştı. Ancak uygulamada FM dalgabıçımının genliği genellikle zamanla-değişen bir niceliktir. Bir başka deyişle, frekans ayırtacının girişindeki işaret şöylece:

$$c(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.138)$$

Genlik değişiminin nedenleri, iletim ortamında ya da almanın giriş katlarında olan olaylar olabilir.

(6.138) de verilen değişken genlikli FM işareti, türev alıcının girişine uygulanırsa, çıkışta şu işaret görülür.

$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \\ &\quad - A(t) (\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \end{aligned} \quad (6.139)$$

Buna göre zarf sezici çıktısı şu biçimdedir:

$$e(t) = \left\{ \left[ \frac{dA(t)}{dt} \right]^2 + [A(t)(\omega_0 + \Delta\omega f(t))]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.140)$$

Görüldüğü gibi zarf  $(\omega_0 + \Delta\omega f(t))$  ye eşit değildir. Eğer  $A(t)$  çok yavaş değişiyorsa,  $e(t)$  yaklaşık olarak  $(\omega_0 + \Delta\omega f(t))$  ile orantılı olur. Ancak yine de FM işaretindeki bozulmaların önemli bir nedeni genlikteki değişimlerdir ve bu nedenle genlik değişimleri ortadan kaldırılmalıdır.



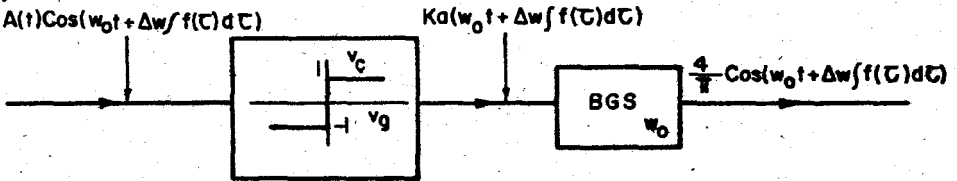
Sınırlandırıcı olarak adlandırılan bir aygıt yoluyla FM işaretindeki genlik değişmelerinden kurtulabiliriz. Sınırlandırıcı, bir keskin-sınırlandırıcı ile bir bant geçiren süzgeçten oluşur. Keskin-sınırlandırıcının giriş-çıkış özegrisi şu biçimdedir.

$$v_g(t) = \begin{cases} +1 & v_g(t) \geq 0 \text{ ise} \\ -1 & v_g(t) \leq 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (6.141)$$

Bu nedenle keskin-sınırlandırıcının girişine (6.138) de verilen değişken genlikli FM işareti uygulanırsa, çıktısı Şekil 6.23b'de verilen kare-dalga FM işareti  $Ka(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  olur. Böylece genlik değişmelerinden

kurtulmuş oluruz. Bir bant geçiren süzgeç kullanılarak kare-dalga  $Ka(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  FM işaretinden genliği değişmeyen sinüzoidal FM işareti elde edilebilir. (6.133) dan da görülebileceği gibi kare-dalga FM işareti  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$  frekanslarındaki sinüzoidal FM işaretlerinden oluşur.  $\omega_0$  a merkezlenmiş bant geçiren süzgecin çıktısı  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$

olur ve bu genliği değişmeyen bir sinüzoidal FM işaretidir. Keskin-sınırlandırıcı ve bant geçiren süzgeç, ikisi birlikte, *sınırlandırıcı* olarak adlandırılır. Bir sınırlandırıcının öbek çizimi Şekil 6.25'de gösterilmiştir. İyi sayılabilecek bütün FM almaçlarında, ayırtaçtan önce bir sınırlandırıcı vardır. Bazı FM almaçlarında ise sınırlandırıcı ayırtaçla birleştirilmiştir.



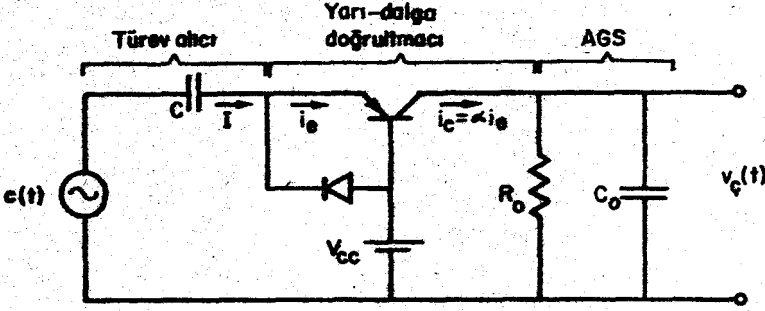
Şekil 6.25 Bir sınırlandırıcı

## FM Ayırtaçları

FM işareti  $c(t)$  nin türevinin alınması ayırtaçta ilk yapılan işlemdir ve çeşitli yollarla gerçekleştirilebilir. Tam türev alma yapılabileceği gibi türeve bir çeşit yaklaştırma da yapılabilir. Frekans ayırtaçlarını düzenli bir biçimde sınıflandırmak zordur. Aşağıda çok bilinen birkaç frekans ayırtaç incelenmektedir. Göz önüne alınacak frekans ayırtaçlarında değişik FM demodülatörleri kullanılmıştır.

## Tam Türev Alma

Şekil 6.26'da verilen frekans ayırtacını düşününüz. Bu frekans ayırtacı, bir tam türev alıcı ile bir ortalama zarf seziciden oluşur.



Şekil 6.26 Bir frekans ayırtacı

Ayırtacın çeşitli kısımları devre çizimi üzerinde işaretlenmiştir. Diyot düşüncel ise C sığası üzerindeki gerilim şöyledir:

$$v_c(t) = c(t) - V_{cc} = A \cos(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau) - V_{cc} \quad (6.142)$$

C sığasından geçen akım ise şöyledir:

$$\begin{aligned} I(t) &= C \dot{v}_c(t) \\ &= -AC(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau) \\ &= AC(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cos[\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau + \frac{\pi}{2}] \end{aligned} \quad (6.143)$$

$I(t)$  nin negatif olduğu yarı dönemlerde akım diyottan geçer.  $I(t)$  nin pozitif olduğu yarı dönemlerde ise akım transistörün yayıcısına girer. Buna göre yayıcı akımı  $i_e(t)$  şu biçimde ifade edilebilir:

$$i_e(t) = AC(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cos(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau + \frac{\pi}{2}) \cdot s(t) \quad (6.144)$$

Burada  $s(t)$  0-1 değerleri alan bir kare dalgadır.

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \cos(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau + \frac{\pi}{2}) \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \cos(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau)d\tau + \frac{\pi}{2}) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Fourier benzeri seriler kullanılarak,  $s(t)$  şu biçimde gösterilebilir:

$$s(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 t + n\Delta\omega f(\tau) d\tau + n\frac{\pi}{2}) \quad (6.145)$$

(6.145)'i (6.144)'de yerine koyarak yayıcı akımı  $i_e(t)$  bulunur.  $i_c(t) = \alpha i_e(t)$  olduğundan toplayıcı akımı ise şöyle ifade edilebilir:

$$i_c(t) = \alpha \left\{ AC(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cos(\omega_0 t + \Delta\omega f(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2}) \right\} \times \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 t + n\Delta\omega f(\tau) d\tau + n\frac{\pi}{2}) \right\} \quad (6.146)$$

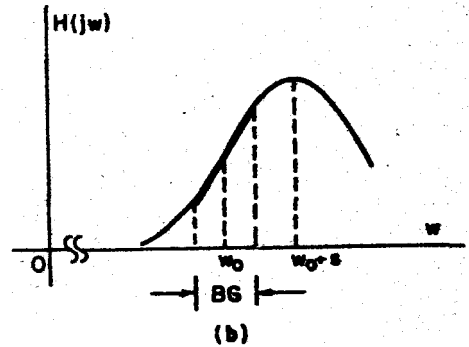
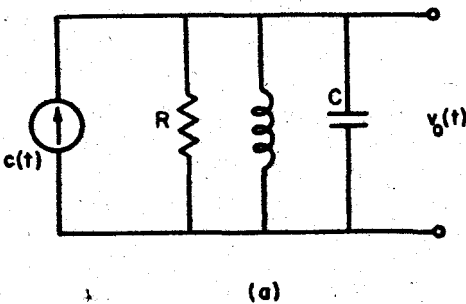
Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak  $i_c(t)$  nin temelbantta ve  $\omega_0, 2\omega_0, \dots$  frekanslarında bileşenlerden oluştuğu bulunabilir. Alçak geçiren süzgeç temelbant işaretini geçirir. Buna göre çıkış gerilimi,

$$v_c(t) = \frac{\alpha AC}{\pi} (\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \quad (6.147)$$

Bu frekans ayırtacının çıktısı FM işaretinin ansal frekansıdır. Bu ayırtaçta türev alma işlemi tam olarak yapılmıştır.

### Akortlu Devre Demodülatörü

Zaman bölgesinde türev alma, frekans bölgesinde  $j\omega$  ile çarpmaya eşdeğerdir. Bu nedenle girdinin kapsadığı frekans bandında, karmaşık geçiş işlevi  $j\omega$  ile doğrusal olarak değişen bir dizge, bir türev alıcı işlevini görür. Şekil 6.27a'da gösterilen akortlu devre bir türev



Şekil 6.27 Akortlu devre FM demodülatörü ve bunun karmaşık geçiş işlevi

alıcı gibi çalışabilir. Girişe FM işaretini  $\cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  uygulandığında, koçut RLC devresinin rezonans frekansı  $\omega_0 + \delta$  ise ve FM işaretinin düştüğü bölgede  $H(j\omega)$  işlevi  $j\omega$  ya göre yaklaşık olarak doğrusal ise, çıktı girdinin yaklaşık olarak türevidir. Karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  Şekil 6.27b'de verilmiştir. Akortlu RLC devresinin rezonans frekansı  $\omega_0 + \delta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ve bantgenişliği  $= \frac{1}{RC}$  o biçimde seçilmelidir ki,

FM işaretinin kapladığı frekans bandı üzerinde  $H(j\omega)$ ,  $j\omega$  ile yaklaşık olarak doğrusal değişsin. Aşağıdaki koşullar sağlandığında iyi bir yaklaştırma yaptığımızı söyleyebiliriz.

i.  $\Delta\omega \ll \delta \ll \omega_0$

ii.  $\delta \ll \frac{1}{RC}$

Akortlu devreden sonra bir GM demodülatörü eklenerek frekans ayırtacı tamamlanır. Bu frekans ayırtacında türey alma işlemi yaklaşık olarak yapılmıştır.  $\omega_0 - \delta$  ya akortlanmış bir RLC devresi için de aynı sonuçlar elde edilir.

Belirli bir düzenleme ile, biri  $\omega_0 - \delta$  ya diğeri  $\omega_0 + \delta$  ya akortlanmış iki akortlu devre kullanılarak, karmaşık geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nın  $j\omega$  ya göre daha doğrusal olması sağlanabilir ve  $H(j\omega)$  nın doğrusal olduğu frekans bölgesi daha genişletilebilir. İki akortlu devre Şekil 6.28a da gösterildiği gibi düzenlenirse, toplam çıktı iki çıktının farkıdır ve sonuçta Şekil 6.28b'de gösterilen geçiş işlevi elde edilir. Şekilden de görülebileceği gibi  $\omega_0$  ve dolayındaki geniş bir frekans bandında geçiş işlevi doğrusala çok yakındır. Akortlu devrelerin özel bir biçimde yerleştirilmeleri nedeniyle, bu frekans ayırtacı dengeli FM demodülatörü olarak adlandırılır. Akortlu devreleri kuşkusuz, birer GM demodülatörü izlemelidir. Burada GM demodülasyonu, akortlu devrelerin çıktılarının farkları alınmadan önce yapılmıştır. Dengeli FM demodülatörlerinde taşıyıcı terimi dengelenip atılır ve çıktı doğrudan bilgi işareti  $f(t)$  ile orantılıdır. Bu demodülatör eşim demodülatörü olarak da adlandırılır.

### RL Demodülatörü

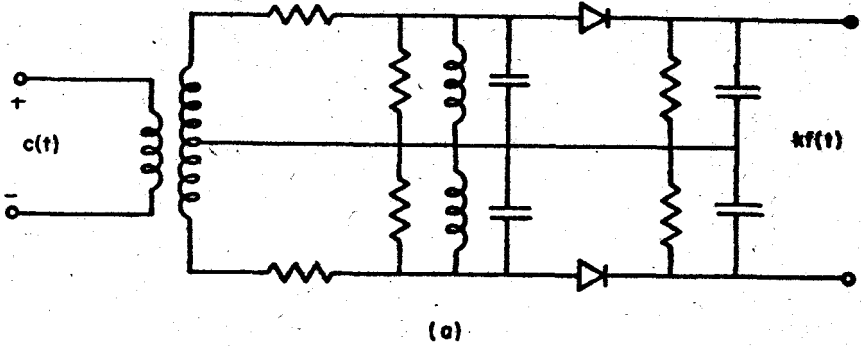
Şekil 6.29a'da gösterildiği gibi RL devresine bir zarf sezici eklenerek bir frekans ayırtacı yapılabilir. RL devresinin geçiş işlevi şu biçimdedir.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \quad (6.148)$$

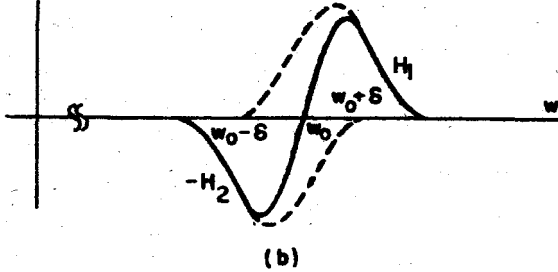
R büyükse,  $R \gg \omega L$  olduğu frekanslarda şu yaklaştırma yapılabilir.

$$H(j\omega) \approx j\omega \frac{L}{R} \quad (6.149)$$

Buna göre  $R \gg \omega L$  olduğu frekanslarda RL devresi bir türevalıcı gibi çalışır. R ve L değerleri  $R \gg \omega_0 L$  olacak biçimde seçilirse FM işareti, geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nın  $j\omega$  ile yaklaşık olarak doğrusal değiştigi frekans



$$H(j\omega) = H_1(j\omega) - H_2(j\omega)$$



Şekil 6.28 Dengeli FM demodilatörü ve eşdeğer geçiş işlevi

bölgesine düşer. Bu nedenle ayırtacın çıktısı FM işaretinin ansal frekansıdır. RL devresinin geçiş işlevi Şekil 6.29b'de gösterilmiştir.

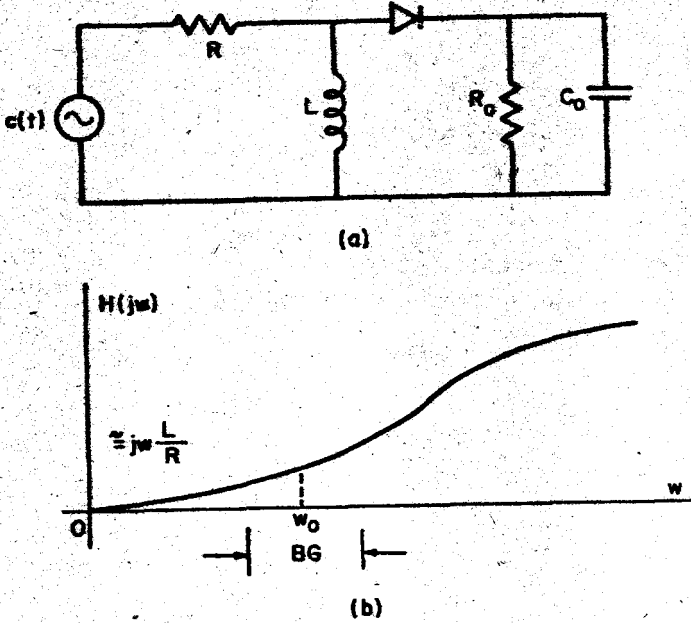
### Foster-Seeley Ayırtacı

Türev alma işlemi yaklaşık olarak şöyle de gerçekleştirilebilir:

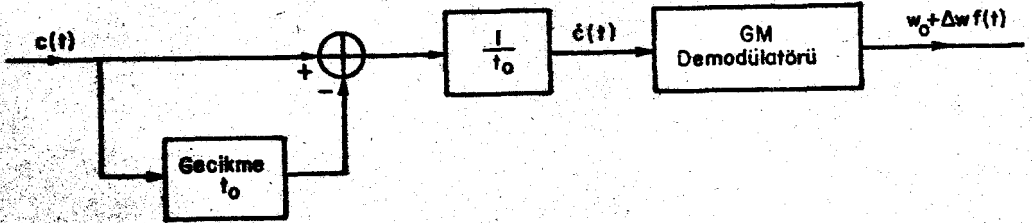
$$\frac{dc(t)}{dt} \cong \frac{c(t) - c(t-t_0)}{t_0} \quad (6.150)$$

Bu yolla yaklaşık bir türev alma işlemi yapan ayırtaç Şekil 6.30'da verilmiştir. Bu ilkeyle çalışan ayırtaç zaman-gecikmeli demodilatör olarak adlandırılır. Bu tür iki FM demodilatörü uygun bir biçimde bağlanarak çıktısında doğrudan  $f(t)$  yi veren bir demodilatör yapılabilir. Foster-Seeley ayırtacı ve Oran-Sezici zaman gecikmesi ilkesine göre türev alan iki FM demodilatörüdür.

Şekil 6.31'de gösterilen Foster-Seeley ayırtacında türev alma zaman gecikmesi ilkesine göre yapılır ve ayırtacın son katı bir zarf sezicidir. Devre çiziminde gösterilen  $v_B$  gerilimi  $c(t)$  nin zamanda geciktirilmiş bir biçimidir. Devre denklemleri çözümlenerek



Şekil 6.29 RL ayırtacı ve bunun geçiş işlevi



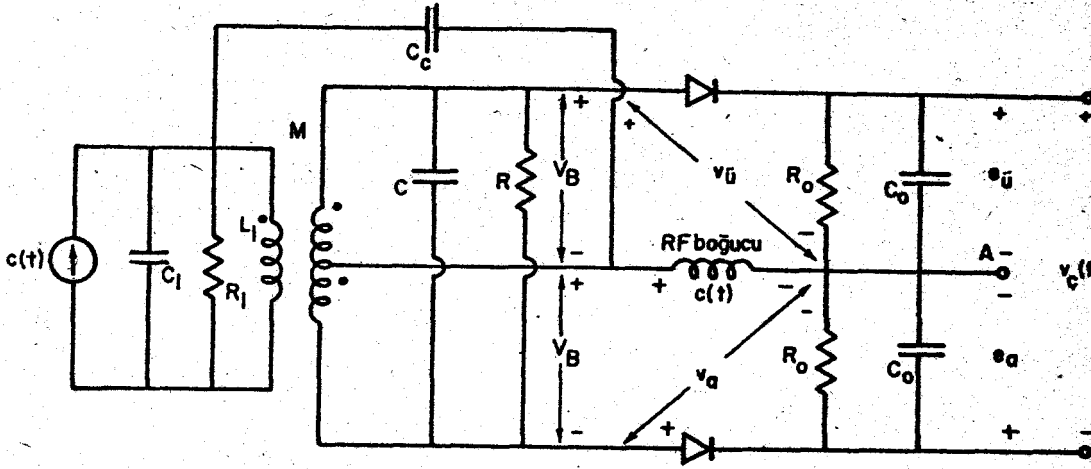
Şekil 6.30 Zaman-gecikmeli demodülatör

$$v_B(t) = \cos \left[ \omega_0 t + \varphi(t - t_0) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.151)$$

bulunabilir. Burada  $\varphi(t) = \Delta\omega \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$  olarak tanımlanmıştır.

$$v_B(t) = c(t) + v_B(t) \quad (6.152)$$

$$v_a(t) = c(t) - v_B(t)$$



Şekil 6.31 Foster-Seeley ayırtacı

denklemlerinde  $v_B(t)$  yerine konulursa şu denklemler elde edilir.

$$v_{\bar{u}}(t) = \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] + \cos [\omega_0 t + \varphi(t-t_0) - \frac{\pi}{2}]$$

$$v_a(t) = \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] - \cos [\omega_0 t + \varphi(t-t_0) - \frac{\pi}{2}]$$

Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak  $v_{\bar{u}}(t)$  ve  $v_a(t)$  şöyle de ifade edilebilir:

$$v_{\bar{u}}(t) = 2 \cos \left[ \frac{\varphi(t) - \varphi(t-t_0)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \omega_0 t + \frac{\varphi(t) + \varphi(t-t_0)}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$v_a(t) = -2 \sin \left[ \frac{\varphi(t) - \varphi(t-t_0)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \sin \left[ \omega_0 t + \frac{\varphi(t) + \varphi(t-t_0)}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

(6.153)

$t_0$  küçük ise,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t-t_0)}{2} \cong \frac{t_0 \dot{\varphi}(t)}{2}$$

(6.154)

yaklaştırması yapılabilir.  $\frac{t_0 \dot{\varphi}(t)}{2}$  yeteri kadar küçükse, bir başka deyişle  $\left| \frac{t_0 \dot{\varphi}(t)}{2} \right| \ll \frac{\pi}{4}$  ise, zarf sıfır eksenini kesmez. Bu durumda

zarf sezicilerin çıktıları şu biçimdedir:

$$e_u(t) = 2\cos \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (6.155)$$

$$e_a(t) = 2\sin \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

Çıkış gerilimi  $v_c(t)$ , zarf sezicilerinin çıktılarının farkıdır.

$$\begin{aligned} v_c(t) &= e_u(t) - e_a(t) \\ &= 2\cos \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] - 2\sin \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= 2\sqrt{2} \cos \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= -2\sqrt{2} \sin \left[ \frac{t\omega\phi(t)}{2} \right] \end{aligned} \quad (6.156)$$

$t_0$  küçük olduğundan  $\left| \frac{t\omega\phi(t)}{2} \right| \ll \frac{\pi}{4}$  varsayılmıştır. "Küçük  $x$  için  $\sin x = x$ " yaklaşımını kullanılarak, çıkış gerilimi yaklaşık şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= -2\sqrt{2} \frac{t\omega\phi(t)}{2} \\ &= -\sqrt{2} t_0 \Delta\omega f(t) \end{aligned} \quad (6.157)$$

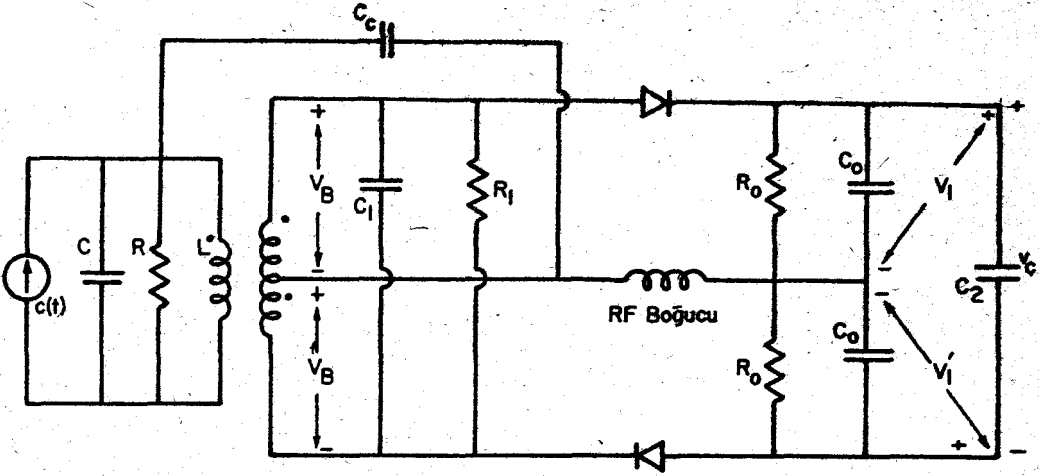
Buna göre ayırtacın çıktısı bilgi işareti  $f(t)$  ile orantılıdır.

Birincil sarımdaki akortludevrenin bantgenişliği yeteri kadar büyük olmalı ve FM işaretini bozmadan geçirmelidir. RF (radyo frekansı) boğucu bobini, değeri çok büyük olan bir endüktanstır ve FM işaretinin kapladığı frekanslarda açık devre, temelbant frekanslarında ise kısa devre gibi davranır.  $C_0$  ve  $C_c$  sığaçları  $\omega_0$  etrafındaki frekanslarda kısa devre var sayılır. Bu varsayımlara göre FM işareti  $c(t)$  doğrudan RF boğucu üzerinde görülür. Ancak RF boğucu zarf sezicinin çalışmasını etkilemez. Ticari FM almaçlarının çoğunda ya bir Foster-Seeley ayırtacı ya da bir oran sezici kullanılmaktadır.

### Oran Sezici

Foster-Seeley ayırtacında diyotlardan birinin yönü değiştirilir ve çıkış uçları arasına çok büyük bir sığaç bağlanırsa, oran sezici olarak adlandırılan FM demodülatörü elde edilir. Şekil 6.32 de oran sezicinin devre çizimi verilmiştir. Oran sezici hem bir dinamik sınırlandırıcının hem de bir ayırtacın işlevlerini yapar.





Şekil 6.32 Oran sezici

Foster-Seeley ayırtıcında yapılan çözülemeye benzer bir çözüleme yapılırsa, şu ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= 2\cos \left[ \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= 2\cos \left[ \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} \right] \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin \left[ \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} \right] \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (6.158)
 \end{aligned}$$

$\frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2}$  çok küçükse

$$\cos \left[ \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} \right] \cong 1$$

ve

$$\sin \left[ \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} \right] \cong \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2}$$

yaklaştırmaları yapılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= \sqrt{2} \left[ 1 - \frac{t_o \dot{\varphi}(t)}{2} \right] \\
 &= \sqrt{2} \left[ 1 - \frac{t_o \Delta\omega}{2} f(t) \right] \quad (6.159)
 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned}
v_1'(t) &= -2\sin\left[\frac{t_0 \dot{\phi}(t)}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \\
&= -2\left\{\sin\left[\frac{t_0 \dot{\phi}(t)}{2}\right]\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left[\frac{t_0 \dot{\phi}(t)}{2}\right]\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= -2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0 \dot{\phi}(t)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= -\sqrt{2}\left[1 + \frac{t_0 \Delta\omega}{2} f(t)\right] \quad (6.160)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çıkış gerilimi  $v_c(t)$  ise şöyledir:

$$\begin{aligned}
v_c(t) &= v_1(t) - v_1'(t) \\
&= 2\sqrt{2} \quad (6.161)
\end{aligned}$$

Bu nedenle bu ayırtacın çıktısı olarak ya  $v_1(t)$  ya da  $v_1'(t)$  alınmalıdır. Foster-Seeley ayırtacının tersine, oran sevicide DA terimi dengelenip atılmaz. Bilgi işaretinin genliği ise yarıya inmiştir. Dönüştürgecin ikincil sarımlarına, diyotlarla birlikte, seri olarak konulmuş  $C_2$  sığacı bir dinamik sınırlandırıcı olarak çalışır ve  $c(t)$  nin genliğindeki ufak değişmelere karşı  $v_B(t)$  nin genliği ile RF boğucu üzerindeki gerilimin değişmez kalmasını sağlar.

### FM Ayırtaçlarındaki GM Demodülatörleri

Ayırtacın ilk işlemi olarak FM işareti  $c(t)$  nin türevi alındığında

$$\frac{dc(t)}{dt} = -(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.162)$$

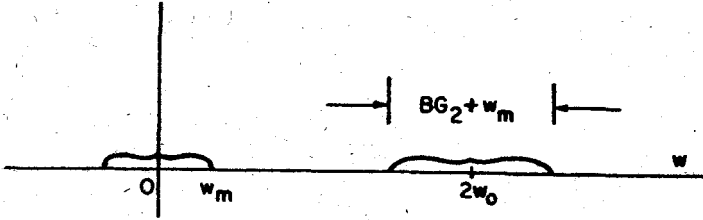
elde edilir. Daha sonra bir GM demodülatörü kullanarak, ansal frekans elde edilir. Daha önce bahsedildiği gibi FM demodülasyonunda üç tür GM demodülasyonu, 1) eşzamanlı sezme, 2) ortalama zarf sezme 3) zarf sezme, kullanılabilir. Ancak her yöntemde GM demodülasyonunun bozulmadan yapılabilmesi için  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega$  ve  $\omega_m$  nin ( $f(t)$  nin en yüksek frekans bileşeni) bazı koşulları sağlaması gerekir. Şimdi bu koşulları saptayalım.

1. Eşzamanlı Sezme: Eşzamanlı sezmede, (6.162) de verilen FM işareti önce alınmakta herhangi bir yolla üretilen,  $-\sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ile çarpılır. Bu çarpmanın sonucunda

$$\frac{1}{2}[\omega_0 + \Delta\omega f(t)] - \frac{1}{2}[\omega_0 + \Delta\omega f(t)] \cos(2\omega_0 t + 2\Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (6.163)$$

elde edilir. Birinci bileşen ansal frekanstır ve temelbant terimidir. Bir alçak geçiren süzgeç  $2\omega_0$  a merkezlenmiş ikinci terimi atar ve alçak geçiren süzgecin çıkışında  $\frac{1}{2}[\omega_0 + \Delta\omega f(t)]$  elde edilir. Ancak bu işlemin

yapılabilmesi için (6.163) deki iki terimin frekans görüngülerinin çakışmaması gerekir. (6.163) deki terimlerin frekans görüngesi Şekil 6.33 de gösterilmiştir. İkinci terim  $2\omega_0$  a merkezlenmiştir ve bantgenişliği şöyledir:



Şekil 6.33 (6.163) deki işaretin görüngesi

$$BG_2 + 2\omega_m = 2(2\Delta\omega + \omega_m) + 2\omega_m \quad (6.164)$$

$\cos(2\omega_0 t + 2\Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  ve  $(\omega_0 + \Delta\omega f(t))$  nin frekans görüngelerinin katlanmasıyla bu bantgenişliği bulunabilir. Şekil 6.33'den de görülebileceği gibi, iki görüngenin çakışmaması için,

$$\frac{BG_2 + 2\omega_m}{2} + \omega_m < 2\omega_0 \quad (6.165)$$

$$2\Delta\omega + 3\omega_m < 2\omega_0$$

olmalıdır. Eşzamanlı sezmenin kullanılabilmesi için  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega$  ve  $\omega_m$  nin bu koşulu sağlaması gerekir. Bu koşul  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$  ve sapma oranı  $D = \frac{\omega_m}{\omega_0}$  türünden şu biçimde de ifade edilebilir:

$$D < \frac{2\beta}{2\beta + 3} = D_{eb} \quad (6.166)$$

Eşzamanlı sezme için  $\beta$  ya karşı  $D_{eb}$  nin ( $eb = en$  büyük) çizimi Şekil 6.34 de verilmiştir. Aynı biçimde aynı çizim diğer demodülasyon yöntemleri için de yapılmıştır. FM işaretinin modülasyon derecesi  $\beta$  ve sapma oranı  $D$  değerleri Şekil 6.34 de verilen eğrinin altındaki bir noktaya karşı gelirse, bir eşzamanlı sezici kullanarak bu işareti demodüle edebiliriz. Ancak bu nokta eğriye yakınsa, eşzamanlı sezicinin son katı olan süzgecin yapısı önemli ölçüde karmaşıklaşır.

Eşzamanlı sezicide referans işareti  $\sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  yi üretmek için girişe gelen FM işareti alınır ve bir devreden geçirilerek evresi

$\pi/2$  kadar kaydırılır. Uygulamada çok sık kullanılan diğer bir eşzamanlı sezme yöntemi de şu biçimdedir: Türev alıcının çıktısındaki işaretin evresi  $-\pi/2$  kaydırılarak

$$+(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$$

elde edilir ve bu işaret ile türevi alınmış FM işareti çarpılır. Daha sonra çarpım bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir.

**2. Ortalama Zarf Sezme:** Bu yöntemde türevi alınmış FM işareti  $-(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$  önce bir yarı-dalga doğrultmacından daha sonra da bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir. İlk FM ayırtacı örneğinden de görülebileceği gibi, yarı dalga doğrultulmuş bu işaret, türevi alınmış FM ile bir 0-1 kare dalganın çarpımı olarak ifade edilebilir. Buna göre yarı-dalga doğrultulmuş işaretin Fourier benzeri seri açılımı şu biçimdedir:

$$\frac{1}{2} (\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cos \tau(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) (\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \times [\cos(n-1) \tau(t) + \cos(n+1) \tau(t)] \quad (6.167)$$

Burada  $\tau(t) = \omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2}$  dir. Bu nedenle bu işaret temelbant teriminin yanısıra  $\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0, 6\omega_0, \dots$  dolayındaki bileşenleri içerir.

Alçak geçiren süzgeç temelbant terimini geçirir ve temelbant terimi ile  $\omega_0$  etrafındaki terim çakışmazsa geri kalan bütün terimleri ayıklar. Bu iki görünüşün üst üste çakışmaması için

$$\frac{2(\Delta\omega + \omega_m)}{2} + \omega_m < \omega_0 \quad (6.168)$$

$$\Delta\omega + 3\omega_m < \omega_0$$

olmalıdır. Modülasyon derecesi  $\beta$  ve sapma oranı  $D$  cinsinden bu koşul şöyle ifade edilebilir:

$$D < \frac{\beta}{\beta + 3} = D_{eb} \quad (6.169)$$

Ortalama zarf sezici için  $\beta$  ya karşı  $D_{eb}$  nin çizimi Şekil 6.34'de verilmiştir. Bir FM demodülatöründe ortalama zarf sezicinin kullanılabilmesi için, verilen  $\beta$  ve  $D$  değerlerine göre,  $(\beta, D)$  noktasının eğrinin altında kalması gerekir.

**3. Zarf Sezici:** Zarf seziminde bozulmanın başlıca iki nedeni dalgacık ve çapraz kırpmadır. Dalgacık ve çapraz kırpmanın etkilerini azaltmak için GM modülasyonunda taşıyıcı frekansı  $\omega_0$ ,  $f(t)$  nin en az 100 katı olmalıdır.

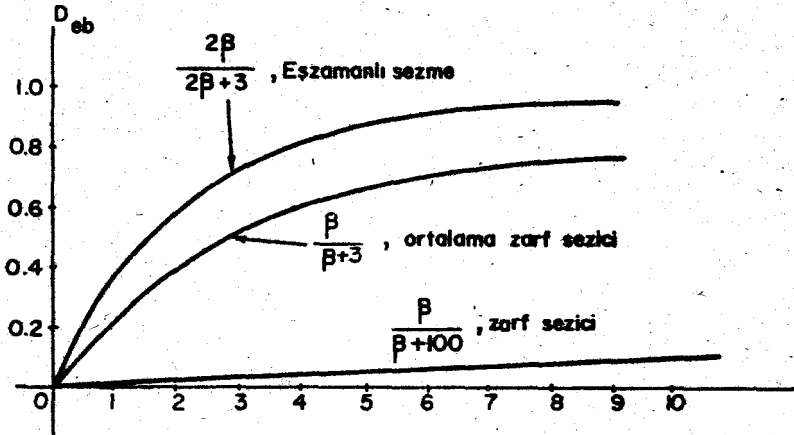
Türevi alınmış FM işaretinde ise, taşıyıcı frekansı değil de, ana frekans  $\omega_a(t) = \omega_o + \Delta\omega F(t)$  sezici çıkışındaki dalgacığa neden olur. Dalgacığın ve çapraz kırpmanın etkilerini en aza indirmek için

$$|\omega_a(t)|_{ek} = \omega_o - \Delta\omega > 100 \omega_m \quad (6.170)$$

olmalıdır. (ek=en küçük)  $\beta$  ve  $D$  cinsinden bu koşul şöyle ifade edilebilir:

$$D < \frac{\beta}{\beta + 100} = D_{eb} \quad (6.171)$$

Zarf sezici için  $\beta$  ya karşı  $D_{eb}$  nin çizimi de Şekil 6.34'de verilmiştir.



Şekil 6.34 Frekans ayırtaçlarındaki GM demodülatörleri için  $\beta$  ya karşı  $D_{eb}$  nin çizimleri

Bu nedenle verilen  $\beta$  ve  $D$  için, FM ayırtacında zarf sezici kullanabilmemiz için  $(\beta, D)$  noktasının eğrinin altında kalması gerekir.

Şekil 6.34'de verilen üç eğri incelendiğinde, eşzamanlı sezmenin en az kısıtlayıcı ve zarf sezmenin ise en çok kısıtlayıcı koşullara sahip yöntemler oldukları görülür. Ancak uygulamada zarf sezicinin en kısıtlayıcı koşulu bile sağlanır.  $\Delta\omega = 2\pi(75)10^3$  rad/san ve  $\omega_m = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3$  rad/san olan bir FM yayını düşünelim. Taşıyıcı frekansı  $\omega_o = 2\pi \cdot 10.7 \cdot 10^6$  rad/san ise  $\beta = 5$  ve  $D = 0.007$  dir. Görüldüğü gibi uygulamada (6.171) deki koşul kolayca sağlanır. Gerçekte  $D = 0.007$  olduğunda,  $\beta$  değeri 0.7 ye kadar düşürülse bile bu koşul sağlanır. Uygulamada ise  $\beta$  asla 5 den küçük seçilmez.

### Vurum-sayıcı FM Demodülatörü

Burada, daha önce incelenen frekans ayırtaçlarına göre tümüyle değişik bir yöntemle çalışan bir frekans demodülatörü incelenecektir. FM sezicilerinde keskin-sınırlandırıcıların kullanılabilmesi FM bilgisinin FM işareti  $c(t)$  nin sıfır geçişlerinde saklı olduğunu vurgular.  $c(t)$  işaretinin ansal frekansı  $\omega_a(t)$  ansal dönemin birbölüsüdür.

$f(t)$  deki en yüksek frekans  $\omega_m$  ansal frekansın en küçük değeri  $\omega_0 - \Delta\omega$  ya göre çok küçükse, taşıyıcının bir dönemi üzerinde ansal frekans  $\omega_a(t)$  değişmez varsayılabilir. Bu varsayıma göre, taşıyıcının belirli bir yarı döneminde ansal frekans şöyle ifade edilebilir:

$$\omega_a(t) \cong \frac{\pi}{\tau_2 - \tau_1} \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \quad (6.172)$$

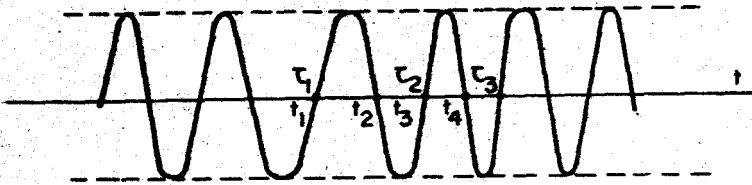
Burada  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  düşünülen yarı dönemin başlangıç ve bitişini gösteren bitişik iki sıfır-geçişidir. Tüm bir dönem düşünülürse, ansal frekans şu biçimde ifade edilebilir:

$$\omega_a(t) = \frac{2\pi}{\tau_2 - \tau_1} \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \quad (6.173)$$

Burada  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  düşünülen dönemin başlangıç ve bitişini gösteren sıfır-geçişleridir. (6.173) de verilen ansal frekans hertz biçiminde ifade edilebilir.

$$f_a(t) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \quad (6.174)$$

Bir FM işaretinin sıfır-geçişleri Şekil 6.35'de gösterilmiştir.



Şekil 6.35 Bir FM işaretinin sıfır-geçişleri

Sıfır-geçişleri arasındaki süreyi ölçmenin kolay bir yolu, verilen bir zaman süresinde sıfır-geçişlerinin sayısını saymaktır. Saymanın yapılacağı aralık  $T_s$  ve bu aralıkta artıya giden sıfır-geçişlerinin sayısı  $n_s$  ise, bir dönemin ortalama süresi oran alınarak bulunabilir.

$$\tau_2 - \tau_1 \cong \frac{T_s}{n_s} \quad (6.175)$$

Bu nedenle  $T_s$  aralığı üzerinde ortalama ansal frekans şu biçimde ifade edilebilir:

$$f_a(t) \cong \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \cong \frac{n_s}{T_s} \quad (6.176)$$

(6.176) deki ifade sadece ansal frekansa bir yaklaştırmadır. Sayma aralığı  $T_s$  çok küçük ya da çok büyük olmadıkça bu yaklaştırmaya mantıklıdır. Sayma süresi  $T_s$ , önemli sayıda sıfır-geçişinin sayılabileceği ve sağlıklı bir ortalamanın alınabileceği kadar büyük olmalıdır. Ancak bu zaman aralığı,  $f(t)$  nin (ve sonuçta  $\omega_a(t)$  nin) çok fazla değişmeyeceği kadar kısa olmalıdır. Bu iki koşul şöyle özetlenebilir:

$$\frac{2\pi}{\omega_o - \Delta\omega} < T_s \ll \frac{2\pi}{\omega_m} \quad (6.177)$$

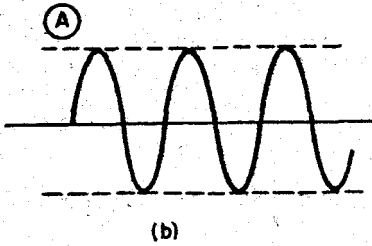
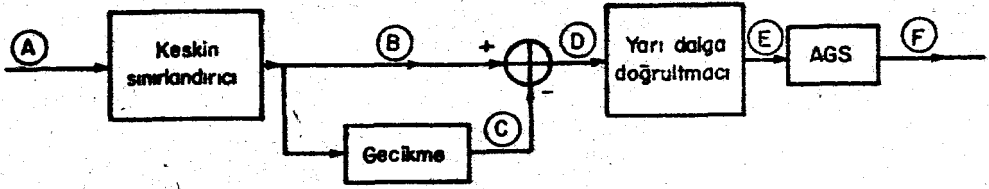
Sayma aralığının (6.177) deki koşulu sağlayacak biçimde seçilebilmesi için  $\omega_m \ll \omega_o - \Delta\omega$  olmalıdır. Bu varsayım tartışmanın başında yapılan varsayımla aynıdır. Buna göre ansal frekansın kendisinin taşıyıcının birkaç dönemi süresince değişmediği varsayılır. Sıfır-geçişlerindeki bilgiyi kullanarak çalışan FM demodülatörleri sıfır-geçiş sezicileri diye adlandırılır.

Uygulamadaki bir sıfır-geçiş sezici örneği Şekil 6.36a'da gösterilmiştir. Bu FM demodülatörünün işleyişi şöyledir: Keskin-sınırlandırıcıdan geçirilerek FM işareti bir kare dalgaya dönüştürülebilir. Kare dalga FM ningeciktirilmiş biçimi kendisinden çıkarılır ve artı-eksi olarak değişen bir vurum dizisi elde edilir. Artıya giden sıfır-geçişlerinde artı vurumlar, eksiye giden sıfır geçişlerinde ise eksi vurumlar ortaya çıkar. Bu vurum dizisi bir yarı-dalga doğrultmacıdan geçirilirse eksi vurumlar atılır ve geriye yalnız artı vurumlar kalır. Daha sonra bir alçak geçiren süzgeç kullanılarak son  $T_s$  saniyedeki artı vurumların sayısı orantılı bir çıktı elde edilir. Böylece alçak geçiren süzgeç çıktısı taşıyıcının ansal frekansı ile orantılı olur. [(6.176) ya bakınız.] Yarı-dalga doğrultmacı yerine bir tam-dalga doğrultmacı kullanılırsa, hem artıya hem de eksiye giden sıfır-geçişleri sayılacağından, süzgeç çıktısı iki katına çıkar. Bu modülatörün çeşitli noktalarındaki işaret Şekil 6.36b,c,d ve e'de gösterilmiştir.

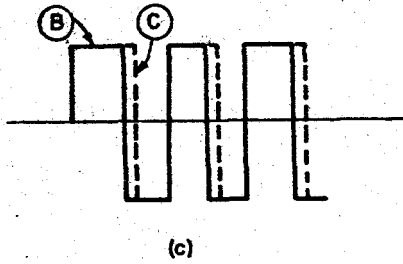
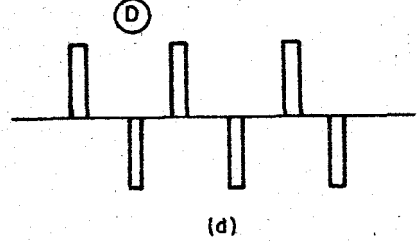
Yukarıda incelenenin yanısıra, başka FM sezici türleri de geliştirilmiştir ve uygulamada kullanılmaktadır. Bu FM demodülatörlerinden bazıları, örneğin evre-kilitleyici döngü, geribeslemeli FM demodülatörleri ve frekans-kilitlemeli FM demodülatörleri, daha özel uygulamalarda kullanılır.

#### 6.4 STEREO FM YAYINI

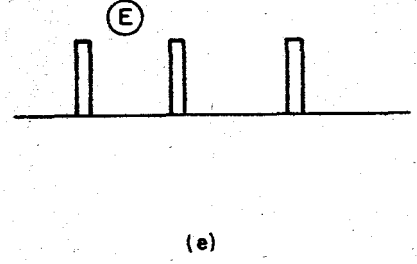
Monofonik ses yayınlarında, tek bir temelbant işareti uygun bir biçimde modüle edilir ve gönderilir. Almaçta demodülasyon işlemi ile geri elde edilen ses işareti sesyarara (hoparlör) uygulanır ve ses yeniden üretilir. Temelbant dalgabıçımının özgün kaynağı tek bir sesalırdır (mikrofondur). Birden çok sesalır kullanılıyorsa bütün sesalırların



(a)



(c)



(e)

Şekil 6.36 Bir sıfır geçiş sezici

çıkışları eklenerek, tek bir temelbant ses işareti elde edilebilirdi. Ancak stereofonik yayınlarda amaç iki ayrı temelbant ses işaretini göndermektir. Bunun için yayın stüdyosunda iki mikrofon (ya da iki grup mikrofon) birbirlerinden uzağa yerleştirilir. Mikrofonlardan birindeki işareti  $L(t)$  diğerkindeki işareti  $R(t)$  ile gösterelim. Genel olarak  $L(t)$  ve  $R(t)$  değişik işaretlerdir. Yayına verilen şey bir orkestra ise,  $L(t)$  işaretinde bazı enstrümanlar baskındır,  $R(t)$  işaretinde ise diğer bazı enstrümanlar baskındır.  $L(t)$  ve  $R(t)$  birbirlerinden uzağa yerleştirilmiş iki sesyaya verilirse, dinleyen birisi sanki yayın stüdyosundaymış gibi ayrı sesler işitir. Bu nedenle stereo yayınlarda amaç, iki temelbant ses işareti  $L(t)$  ve  $R(t)$  yi almaçta yeniden üretebilmektir. Bu yolla sesin yüksek nitelikli bir biçimde geri elde edilmesi olasıdır.  $L(t)$  ve  $R(t)$  işaretleri genellikle sol kanal ve sağ kanal olarak adlandırılır.



$L(t)$  ve  $R(t)$  işaretleri ayrı ayrı modüle edilerek birbirleriyle çakışmayan frekans bantları üzerinden gönderilebilir. Alıcı uçta ise, iki ayrı almaç kullanarak  $L(t)$  ve  $R(t)$  işaretleri ayrı ayrı elde edilebilir. Ancak bu yöntem  $L(t)$  ve  $R(t)$  nin gönderilmesindeki en kolay ve en ekonomik yöntem değildir. Kullanılan bantgenişliğini arttırmadan, iki FM modülatörü ve iki FM demodülatörü gerektirmeden aynı sonuca erişebilir miyiz? Diğer önemli bir gereksinme de, aynı modüle edilmiş işaret ( $L(t)$  ve  $R(t)$  nin yeniden elde edileceği işaret) kullanılarak monofonik bir almaçta  $L(t) + R(t)$  yi (yayın monofonik olsaydı gönderilecek ses işareti) geri elde edebilmektir. Bir başka deyişle stereo yayında, monofonik almaç kullanılırsa  $L(t) + R(t)$  yi, stereofonik almaç kullanılırsa  $L(t)$  ve  $R(t)$  yi ayrı ayrı elde edebilmeliyiz. Bu koşul, stereo yayının daha önce yapılmış monofonik almaçlarla bağdaşabilirliği olarak adlandırılır. Stereo dizgeleri için çeşitli öneriler yapılmıştır. Burada tartışılacak olan 1961 de benimsenmiş olan ve şu anda kullanılmakta olan dizgedir.

Sol kanal işareti  $L(t)$  ve sağ kanal işareti  $R(t)$  kullanılarak, taşıyıcının frekansını modüle edecek temelbant işareti  $f(t)$  birkaç basamakta oluşturulur. Önce bu işaretler toplanıp, çıkarılarak  $L(t) + R(t)$  ve  $L(t) - R(t)$  elde edilir.  $L(t)$  ve  $R(t)$  nin her ikisi de 15 kHz'e bant sınırını olduklarından toplam ve fark işaretleri de 15 kHz'e bant sınırlıdır. Bu arada göndermeçteki bir salınışta kılavuz taşıyıcı diye adlandırılan  $\omega_p = 2\pi \cdot 19 \cdot 10^3$  rad/san frekansında bir sinüzoidal üretilir. Daha sonra kılavuz taşıyıcının frekansı 2 ile çarpılarak 38 kHz'de bir sinüzoidal elde edilir ve bu sinüzoidal alt-taşıyıcı olarak adlandırılır. 38 kHz'deki alttaşıyıcı ve fark işareti  $L(t) - R(t)$  bir dengeli modülatöre uygulanarak, 38 kHz'de  $L(t) - R(t)$  ile modüle edilmiş bir ÇYB işareti elde edilir. Bu ÇYB işareti,  $L(t) + R(t)$  toplam işareti ve kılavuz taşıyıcıya eklenerek temel-bant işareti  $f(t)$  elde edilir.

$$f(t) = [L(t) + R(t)] + [L(t) - R(t)] \cos 2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 t + K \cos 2\pi \cdot 19 \cdot 10^3 t \quad (6.178)$$

Burada  $K$  kılavuz taşıyıcının genliğini diğer bileşenlerinkine göre belirleyen bir sabittir.

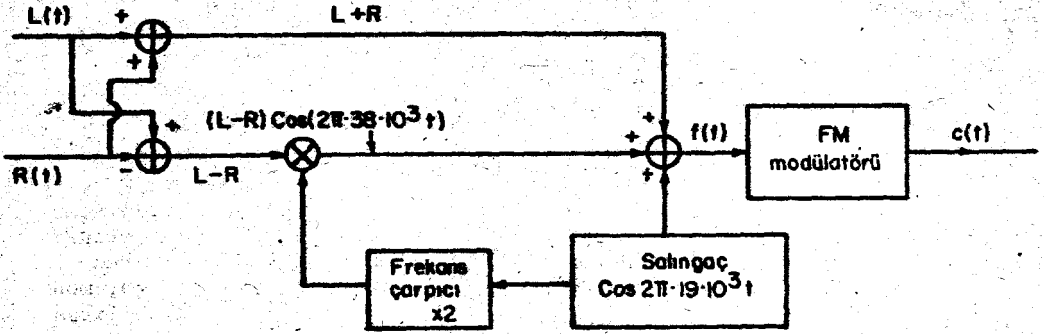
Daha sonra bileşik temelbant işareti  $f(t)$  kullanılarak  $\cos \omega_p t$  taşıyıcısının frekansı modüle edilir.  $f(t)$  işaretini ve modüle edilmiş  $\cos(\omega_p t + \Delta\omega) f(t) dt$  dalgabiciğini üreten bir stereo FM göndermeçinin öbek çizimi Şekil 6.37'de verilmiştir.

$f(t)$  işaretinin frekans görüngesi için simgesel bir gösterim Şekil 6.38'de verilmiştir.  $L(t) + R(t)$  toplam işareti 0 ile 15 kHz arasındaki frekans bandını kaplar. Dengeli modülatör çıktısı

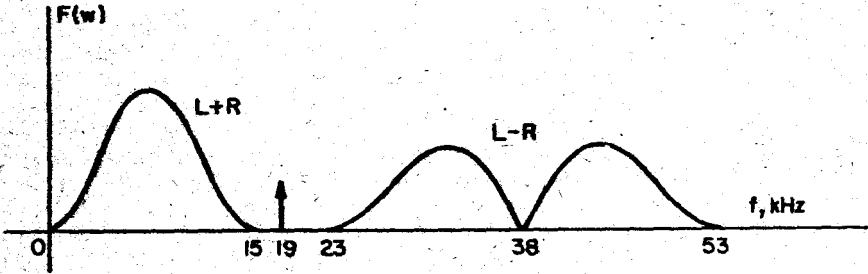
$$[L(t) - R(t)] \cos(2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 t)$$

işareti ise 23 kHz ile 53 kHz arasındaki frekans bandını kaplar. 38 kHz'de taşıyıcı yoktur, kılavuz taşıyıcı 19 kHz'dedir.

Bileşik  $f(t)$  işaretinin bu özel yapısının arkasındaki nedenler şu anda açık olarak anlaşılabilir. Ancak  $f(t)$  nin bu özel biçimi sayesinde  $L(t)$  ve  $R(t)$  yi almaçta kolayca geri elde edebiliriz. Bileşik  $f(t)$  işaretiyle bir taşıyıcının frekansını modüle ettiğimizi ve bu FM işaretini gönderdiğimizi düşünelim. Almaçta FM işaretinin demodüle



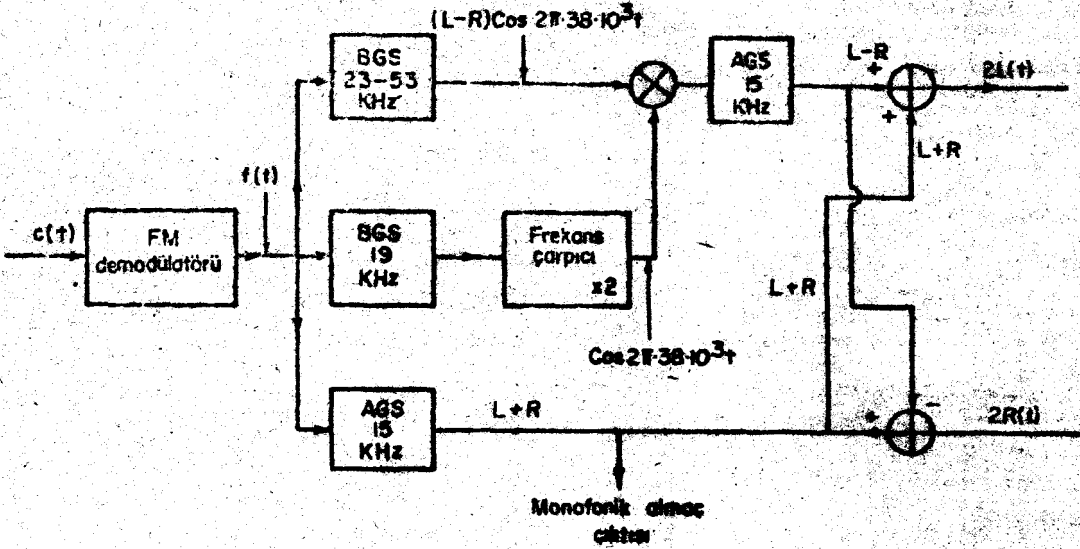
Şekil 6.37 Stereo FM göndermeci



Şekil 6.38 Bileşik stereo temelbant işaretinin frekans görünüşü

edildiğini ve  $f(t)$  işaretinin geri elde edilmiş olduğunu varsayalım.  $L(t)$  ve  $R(t)$  yi ayrı ayrı nasıl geri elde edebiliriz?

Bir stereo FM alıcısının öbek çizimi Şekil 6.39'da verilmiştir. Bileşik işaretin üç bileşeni süzgeçler kullanarak ayrılır. Kılavuz taşıyıcının her iki yanında 4 kHz'lik bir boş bant olduğundan süzme işi zor değildir.  $L+R$  işaretini kesim 15 kHz'de olan bir alçak geçiren süzgeç yardımıyla elde edebiliriz. Kılavuz taşıyıcı 19 kHz'e merkezlenmiş dar bantlı bir bant geçiren süzgeç kullanılarak elde edilebilir. Daha sonra bu kılavuz taşıyıcının frekansı 2 ile çarpılır ve 38 kHz'de bir sinüzoidal elde edilir. Bu sinüzoidalın evresi ve frekansı ÇYB modüle edilmiş taşıyıcınınıki ile eşzamanlıdır. Böylece 38 kHz'deki sinüzoidal, ÇYB işareti  $(L-R)\cos(2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 t)$  nin eşzamanlı demodülasyonunda kullanılır. Eşzamanlı demodülâtörün çıktısı  $L(t)-R(t)$  dir. Buna göre  $L(t)+R(t)$  ile  $L(t)-R(t)$  nin toplanmasıyla sol kanal işareti  $L(t)$ ,



Şekil 6.39 Stereo FM alıcısı

$L(t) + R(t)$  den  $L(t) - R(t)$  nin çıkarılmasıyla sağ kanal işareti  $R(t)$  elde edilebilir.

19 kHz'in her iki yanındaki 4 kHz'lik bant içinde başka görülmeye değer bileşeni olmadığından, bu frekanstaki kılavuz taşıyıcıyı elde etmek oldukça kolaydır. Bu nedenle kılavuz taşıyıcı 38 kHz'de değil de 19 kHz dedir. Eğer taşıyıcı 38 kHz de olacak olsaydı ÇYB işaretinin ortasında olacağından bu taşıyıcıyı çıkartıp almak için çok dar bantlı oldukça keskin eğimli bir akortlu bant geçiren süzgeç gerekcekti. Ayrıca 38 kHz'e bir taşıyıcı yerleştirip, daha sonra zarf seçme yoluyla  $L-R$  nin elde edilebilmesi için bu taşıyıcının genliğinin çok büyük olması gerekir. Oysa kılavuz taşıyıcının genliği oldukça küçük olabilir. Yeri gelmişken bir noktayı daha belirtelim: FM stereo alıcılarında stereo göstergesinin lambasını yakan 19 kHz'deki kılavuz taşıyıcıdır.

Şekil 6.39'dan görülebileceği gibi, bir FM demodülatörü ile bir alçak geçiren süzgeçten oluşan bir monofonik FM alıcısının çıktısında  $L(t) + R(t)$  işareti elde edilir. Yayın monofonik olsaydı alıcının çıktısı bu olacaktı. Kılavuz taşıyıcı ve ÇYB işareti alçak geçiren süzgeçten geçemez. Bu bileşenler monofonik alıcının çıktısına birşey katmadıkları gibi, alıcının çalışmasını da etkilemezler. Böylece stereo FM yayını ile monofonik FM alıcıların bağdaşabilirliği sağlanmış olur. Bütün bu işler bir FM modülatörü ve bir FM demodülatörü ile gerçekleştirilebilir.

Monofonik yayında bilgi işareti 15 kHz'e bant sınırılıydı, stereo yayında ise bilgi işareti 53 kHz'e bant sınırılıdır. Bu nedenle stereo yayınlarda FM işaretinin bant genişliği monofonik duruma göre fazladır. Ancak yine de stereo FM işaretinin bant genişliği, her FM istasyonunun kullanmasına izin verilen 200 kHz'e sığacak kadardır.

Bazı FM istasyonları, bileşik stereo işareti  $f(t)$  ye ek olarak, 53 kHz'in ötesine de bazı işaretler yerleştirirler. Bu ek işaretler, stereo işaret ile ilgisi olmayan bazı işaretlerdir ve 53 kHz'in ötesinde oldukları için normal bir stereo FM almasını etkilemezler. Bu ek işaretler, başka kullanıcılar tarafından kullanılması amaçlanan başka bir yayındır. Örneğin, normal stereo yayınına ek olarak ve ondan ayrı olarak restoran ya da büyük mağazalar için konuşmasız hafif müzik yayını bu yolla yapılır. Böylece bir verici kullanarak iki yayın yapılmış olur. Bu ek işaretlerin özel biçimde kodlanarak 53 kHz'in ötesine yerleştirilmesi, stereo işaretin kodlanmasına benzer biçimde yapılır. Bu ikinci yayını almak isteyen kullanıcı özel biçimde kodlanmış bu yayını çözecek özel çözücü kullanır. Bu durumda bileşik işaret 53 kHz den büyük bir frekans bant sınırılı olduğundan FM işaretinin bant genişliği artar. Ancak frekans sarması  $\Delta\omega$  biraz azaltılarak, gereken 200 kHz'lik bant genişliği kısıtlanması sağlanır. Dörtkanallı FM yayınları kullanılmaya başlanırsa, 53 kHz'in ötesi üçüncü ve dördüncü kanallara ayrılabilir.

## 6.5 FM VE GÖRÜLTÜ

Her FM yayın istasyonunun 200 kHz'lik bir frekans bandı kullanmasına izin verildiği belirtilmişti. GM yayın istasyonlarının kullanacağı bant ise yalnız 10 kHz'dir. Aradaki bu ayrımın nedenlerinden birisi, GM'de bilgi işaretinin 5 kHz'e bant sınırılı olmasına karşın, FM'de bilgi işaretinin 15 kHz'e bant sınırılı olmasıdır. Bir an için karşılaştırmadaki bu etmeni kaldırdığımızı ve GM'de de bilgi işaretinin 15 kHz'e bant sınırılı olduğunu düşünelim. Bu varsayım altında bile GM işaretinin bant genişliği olan 30 kHz, FM işaretinin bant genişliği olan 200 kHz'e göre çok azdır.

Her iki modülasyonda (GM ve FM), uygun bir demodülasyon yöntemiyle bilgi işareti  $f(t)$  olduğu gibi geri elde edilir. Olabildiği kadar küçük bant genişliği kullanmak ortak amaç olduğu halde, GM'ye göre 6-7 kat fazla bant genişliği gerektiren FM neden kullanılır? Şu ana kadar edinilen bilgi ile bu soruyu yanıtlamayız. Yanıt, iletişim dizgelerinin çalışmasının düşünce koşullar altında olmadığı gerçeği altında yatar. Almacın aldığı işaret yalnız başına modüle edilmiş işaret değildir. Modüle edilmiş işarete gürültü olarak adlandırılan başka bir işaret eklenir. Gürültünün kaynakları çeşitlidir. Başlıcaları atmosferik olaylar, iletim ortamında ortaya çıkan doğal kaynaklı ya da insan yapısı elektriksel girişimlerdir. Gönderme ve almanın giriş katlarında, bazı elektrik aygıtları kendileri istenilmeyen işaretler üretirler ve bu işaretler gürültü olarak düşünülebilir. Uygulamada demodülatörün girişinde her zaman modüle edilmiş taşıyıcıya ek olarak bir gürültü işareti vardır ve bu işaret demodülatörün çalışmasını her zaman olumsuz yönde etkiler. Bu nedenle demodülatör çıktısı bilgi işaretinin bozulmuş biçimindedir. Bozulma türü ve bozulma miktarı, modülasyonun türüne, demodülasyon türüne ve gürültünün büyüklüğüne bağlıdır.

Genel olarak bir FM iletişim dizgesinin başarımı (performansı) bir GM iletişim dizgesinin başarımına göre gürültüye daha az duyarlıdır. Bir başka deyişle bir FM dizgesinde, demodülatör çıktısındaki bozulma, bir GM dizgesindekine göre daha azdır. Bu nedenle, kullandıkları bantgenişliği GM dizgelerine göre çok fazla olmasına karşın bazı uygulamalarda FM dizgeleri yeğlenir.

İletişim dizgelerinde gürültü bir rasgele süreç olarak modellenir. Gürültü çözümlenmesi ve iletişim dizgelerinin gürültü altındaki başarımlarının incelenmesi, iyi bir olasılık kuramı ve rasgele süreç bilgisi gerektirir. Ancak bu kitap okuyucularının, bu bilgiye sahip olmadıkları varsayılmıştır. Bu nedenle burada iletişim dizgelerinin başarımlarının gürültü altında çözümlenmesi yapılmayacaktır. Gürültü altında FM dizgeleri GM dizgelerine göre, neden ve nasıl, daha iyi davranır sorusu niceliksel olarak yanıtlanmayacaktır. Bundan dolayı okuyucuların aşağıdaki tümceleri niteliksel bir açıklama olarak kabul etmeleri gerekmektedir.

Bir FM dizgesinin başarımı GM'ye göre  $3\beta^2$  kadar daha iyidir. Burada  $\beta$  modülasyon derecesidir. Modülasyon derecesi  $\beta$  arttırıldığında, gürültü altında FM dizgesinin başarımı daha iyileşir. Ancak  $\beta$ 'nin artması, kuşkusuz, bantgenişliğinde bir artmaya neden olur. Bu nedenle bantgenişliği ile FM dizgelerinin başarımı arasında bir denge kurulmalıdır. Bütün kullanıcıların aynı frekans görüngesini paylaşmaları zorunlu olduğu için, bantgenişliği istenildiği kadar arttırılamaz. FM işaretlerinin yayında kullanılan 200 kHz bantgenişliğinde dizgenin başarımı oldukça iyidir ve bu bantgenişliği fazla büyük değildir.

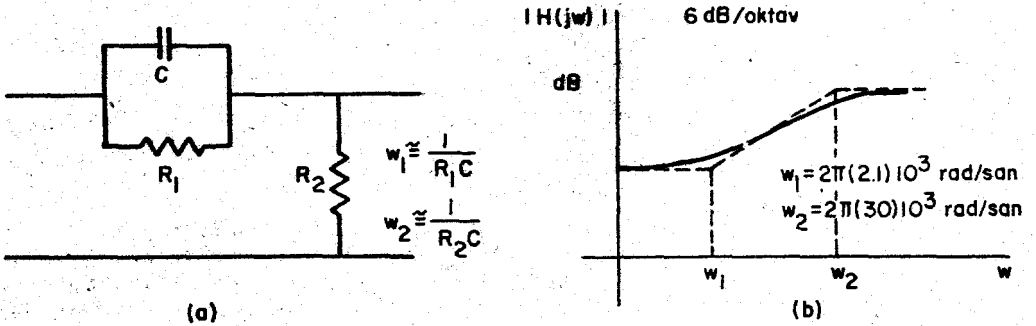
Yukarıdaki paragrafta verilen tartışma, işaretin gürültüye göre büyük olduğu durumlarda geçerlidir. Eğer işaret düzeyi azaltılır, (ya da gürültü düzeyi arttırılır) ve belirli bir düzeyin öteki tarafına geçilirse, FM dizgelerinin başarımı hızla kötüleşir. Bu etki eşit etkisi olarak bilinir.

Bir FM dizgesinin başarımı bir GM dizgesininki ile karşılaştırılırsa, FM dizgesinin başarımı  $3\beta^2$  kere daha iyidir. Büyük  $\beta$  değerleri için, FM ve GM dizgelerinin başarımları arasındaki ayırım çok büyüktür. Örneğin  $\beta = 5$  için, FM'nin başarımı GM'nin başarımına göre 75 kere daha iyidir. Diğer tarafta  $\beta$  çok küçükse, örneğin darbant FM, FM dizgelerinin GM dizgelerine olan üstünlükleri artık geçerli değildir. Darbant FM de bantgenişliği  $2\omega_m$  dir ve bu GM işaretinin bantgenişliğine eşittir. Bu durumda FM'nin başarımı GM'ye göre çok daha iyi değildir. Bütün iletişim dizgeleri için geçerli olan şu genel yargıya varılabilir: Bantgenişliği arttıkça başarımlar iyileşir. Bu nedenle aynı bantgenişliğini kullanan GM ve FM dizgelerinin başarımları da aşağı yukarı aynıdır.

FM'deki türev alma işlemi nedeniyle, demodülatör çıktısındaki işaretin yüksek frekans bileşenlerinde gürültünün etkileri daha fazladır. Ses işaretlerinde yüksek frekans bileşenlerinin büyüklükleri genellikle oldukça düşük düzeydedir. Bundan dolayı işaretin en zayıf bileşenlerinin olduğu frekanslarda gürültünün etkisi en fazladır. İşarette büyük bir bozulmaya yol açan bu istenilmeyen durum şu işlemlerle ortadan kaldırılabılır.

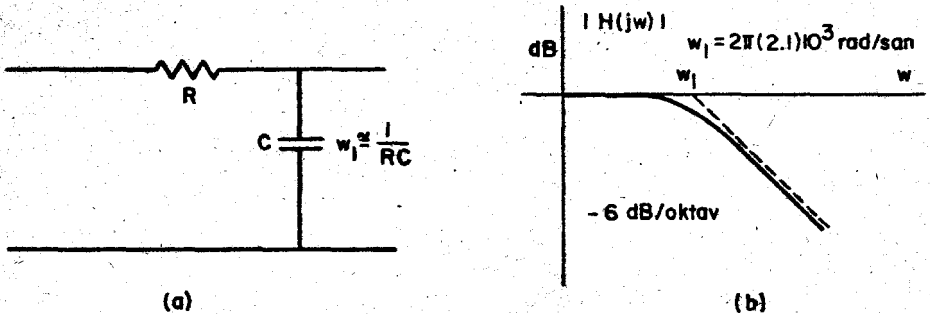
Zayıf yüksek frekans bileşenleri içeren bilgi işareti  $f(t)$  önce bir süzgeçten geçirilerek, yüksek frekans bileşenleri güçlendirilir. Bu yolla elde edilen işaret  $f'(t)$  olsun. Daha sonra  $f'(t)$  kullanılarak bir taşıyıcının frekansı modüle edilir. Almaçta demodülatör FM işaretini demodüle eder. Demodülatör çıktısı  $f'(t)$  dir ve gürültünün yüksek frekans bileşenlerinin büyüklükleri oldukça fazladır. Daha sonra demodülatör çıktısı bir süzgeçten (örneğin bir alçak geçiren süzgeçten) geçirilerek, yüksek frekans bileşenleri zayıflatılır ve böylece  $f'(t)$  özgün ses işareti  $f(t)$  ye geri dönüştürülür. Bu arada süzgeçte gürültünün de yüksek frekans bileşenleri zayıflatılır. İki süzgecin net etkisi, gürültünün yüksek frekans bileşenlerinin büyüklüğünü azaltmaktır. Her iki süzgecin etkileri birbirlerini götürdüğünden, işaretin kendisi etkilenmez. Bu yolla demodülatör çıktısındaki gürültü bileşeni zayıflatılmış olur.

Göndermeçte işaretin yüksek frekans bileşenlerini arttırmak işlemi *ön-vurgu* olarak adlandırılır ve bu işi yapan süzgeçler *ön-vurgu süzgeci* olarak adlandırılır. Şekil 6.40a'da bir ön-vurgu süzgecinin devresi verilmiştir. Bu devrenin geçiş işlevi Şekil 6.40b' dedir. Almaçta yüksek



Şekil 6.40 Ön-vurgu süzgeci ve bunun geçiş işlevi

frekans bileşenlerinin zayıflatılma işlemi *ters-vurgu* işlemi olarak adlandırılır ve bu işi yapan süzgeç *ters-vurgu süzgeci* olarak adlandırılır. Bir ters-vurgu süzgecinin devresi Şekil 6.41a'da verilmiştir. Bu devrenin geçiş işlevi ise Şekil 6.41b'de gösterilmiştir.



Şekil 6.41 Ters-vurgu süzgeci ve bunun geçiş işlevi

## ALİŞTIRMALAR

- 6.1.  $\cos(\omega_0 t + k \sin \omega_m t)$  dalgabiçimi evresi modüle edilmiş bir taşıyıcıdır. Modüle eden işaretin dalgabiçimini çiziniz. Eğer bu taşıyıcının frekansı modüle edilmiş ise, modüle eden işaretin dalgabiçimi ne olur?  
 (a)  $k = 0.1$  (b)  $k = 5$
- 6.2. Frekansı 100 MHz olan bir taşıyıcının tepe gerilimi 3 voltur. Frekansı 2 kHz olan bir sinüzoidal bu taşıyıcının frekansını modüle etmekte ve taşıyıcı frekansındaki sapma 75 kHz olmaktadır.  $t = 0$  anında modüle eden işaretin değeri sıfırsa, modüle edilmiş taşıyıcı dalgabiçiminin zaman bölgesi ifadesi nedir?
- 6.3. Frekansı 500 Hz ve tepe değeri 1 volt olan bir sinüzoidal dalgabiçimi, frekansı 1 MHz ve genliği 3 volt olan bir taşıyıcının frekansını modüle etmektedir. Sonuçta taşıyıcının frekansında 1 kHz'lik bir frekans sapması görülmektedir. Modüle edilmiş dalgabiçiminin ifadesini yazınız. Modüle eden işaretin genliği 5 volta arttırılır ve frekansı da 2 kHz'e kaydırılırsa, modüle edilmiş dalgabiçiminin zaman bölgesi ifadesi ne olur?
- 6.4. Darbant FM de toplamsallık ilkesinin geçerli olduğunu gösteriniz.  $v(t) = \cos(\omega_0 t + \phi(t))$  işaretinde  $\phi(t) = \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t$  olduğunu düşününüz.  $|\phi(t)| \ll \pi/2$  olacak biçimde  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  yi küçük varsayıp  $v(t) = \cos \omega_0 t - (\beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t) \sin \omega_0 t$  olduğunu gösteriniz.
- 6.5. (a) 10 MHz'lik bir taşıyıcının frekansı 1 kHz'lik bir sinüs dalgasıyla modüle edilmektedir. En büyük frekans sapması 2 kHz'dir. Frekans modüle edilmiş bu taşıyıcının kapladığı bantgenişliği ne kadardır?  
 (b) Modüle eden işaret 2 kHz'lik bir sinüs dalgası ise, (a) kısmını yineleyiniz.  
 (c) (b) kısmındaki 2 kHz'lik sinüs dalgasının genliği iki katına çıkarılıyor ve  $\Delta f = 4$  kHz oluyor. Gereken bantgenişliğini bulunuz.
- 6.6. 100 MHz'lik bir sinüzoidal taşıyıcı dalgasının frekansı 10 kHz'lik bir sinüs dalgasıyla modüle edilmektedir. Dizgeyi tasarımı yapan mühendis modüle eden işaretin genliğini azaltarak bantgenişliğini azaltacağını düşünmektedir. En büyük frekans sapması  $\Delta f$ ,  $\pm 10$  Hz olunca 20 Hz'lik bir bantgenişliği gerekeceğini varsayar.  
 (a) Bu yaklaşımdaki yanılğı nerededir ve gerçek bantgenişliği ne kadardır?

(b) Modüle eden işaretin genliği değiştirilerek  $\Delta f, 1 \text{ MHz}$ 'e çıkarılıyor. Bu durumda bantgenişliğinin  $2 \text{ MHz}$  varsayılması doğru mudur?

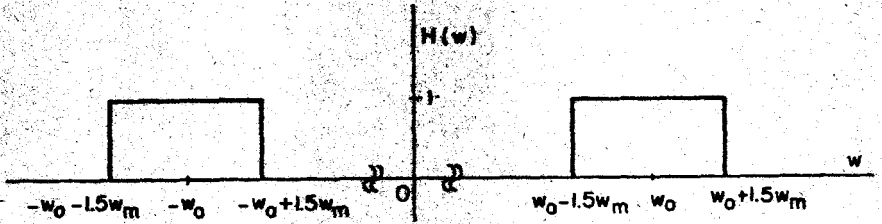
(c) (a) ve (b) kısımlarında bulunan sonuçlar arasındaki ayrımı açıklayınız.

6.7.  $\cos(2\pi \cdot 4t + 5\sin 2\pi t)$  dalgasının görünüşünü çiziniz. Görünge çiziminden'de görülebileceği gibi bu işaretin bir DA bileşeni vardır. Bu işaretin zaman dalgabıçımını çizerek beklenen DA bileşenini gösteriniz.

6.8. Aşağıda verilen FM dalgabıçımı

$$c_M(t) = A \cos(\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t) \quad ; \quad \omega_0 \gg \omega_m$$

Şekil 6.A.1'de verilen bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçiriliyor. Süzgecin çıkışındaki dalganın ansal frekansını bulunuz.



Şekil 6.A.1

Bangi  $\beta$  değerleri için ansal frekans bir sinüs dalgasıdır? Sonuçları darbant FM ile karşılaştırınız.

6.9. (a)  $1 \text{ MHz}$ 'lik bir taşıyıcının frekansı modüle edilmektedir. Modüle eden işaret frekansı  $\omega_m = 2\pi \cdot 10^4$  rad/san olan bir sinüzoidaldir ve frekans sapması  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 8 \times 10^4$  rad/san olacak biçimde sinüzoidalin genliği ayarlanmıştır. Carlson kuralına göre bu FM dalgabıçımının bantgenişliğini bulunuz.  $\omega_m$  deki değişmeler bantgenişliğini nasıl etkiler?

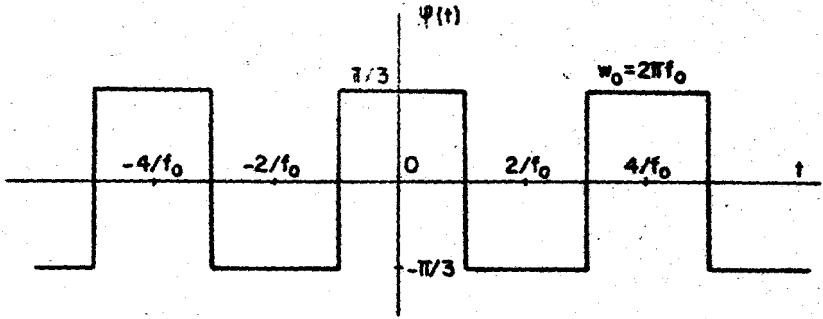
- i.  $\omega_m$  frekansı  $\omega_m + \delta$  olursa,
  - ii.  $\omega_m$  frekansı iki kat olursa,
  - iii.  $\omega_m$  frekansı yarıya düşürülürse,
- bantgenişliği ne olur?



(b) Aynı 1 MHz'lik taşıyıcının evresi, frekansı  $\omega_m = 2\pi \cdot 10^4$  rad/san olan, bir sinüzoidal ile modüle edilmekte ve en büyük evre sapması 10 radyan olmaktadır. Bu EM dalgabıçımının bantgenişliğini bulunuz.  $\omega_m$  deki değişmeler bantgenişliğini nasıl etkiler? En büyük evre sapması değişmez tutulur ve

- i.  $\omega_m$  frekansı  $\omega_m + \delta$  olursa,
  - ii.  $\omega_m$  frekansı iki kat olursa,
  - iii.  $\omega_m$  frekansı yarıya düşürülürse,
- bantgenişliği ne olur?

6.10.  $\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$  işaretini düşününüz.  $\varphi(t)$  işareti Şekil 6.A.2'de verilmiştir.



Şekil 6.A.2

- (a)  $\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$  yi çiziniz.
- (b) Evreyi zamana karşı çiziniz.
- (c) Frekansı zamana karşı çiziniz.

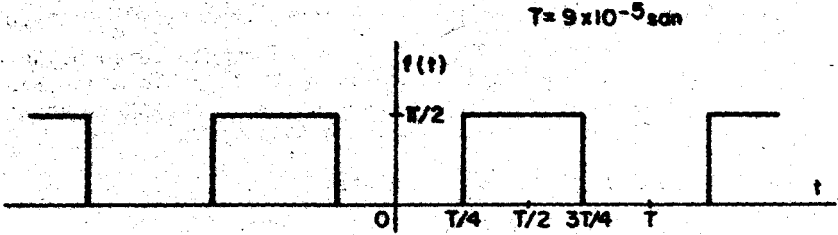
6.11. Bir sinüzoidal dalganın açısı modüle edilerek

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + 2g(t))$$

işareti elde ediliyor. Burada  $\omega_0 = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^5$  rad/san ve

$$g(t) = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4 t + f(t)$$

dir ve  $f(t)$  nin dalgabıçımını Şekil 6.A.3'de verilmiştir.  $c(t)$  nin frekans görünüşünü bulunuz.



Şekil 6.A.3

6.12. Aşağıda verilen FM dalgabıçımını düşününüz.

$$c(t) = \cos [ 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t + 2 \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t) ]$$

$\beta = 2$  için  $J_n(\beta)$  değerleri şu biçimdedir:

$$J_0(2) = 0.224$$

$$J_1(2) = 0.577$$

$$J_2(2) = 0.353$$

$$J_3(2) = 0.129$$

$$J_4(2) = 0.034$$

$$J_n(2) = 0 \quad n \geq 5$$

( $J_5(2) = 0.007 < 0.01$  olduğundan,  $n \geq 5$  için  $J_n(\beta)$  ihmal edilebilir.)

(a) Bu işaretin güç görüğe yoğunluğunu çiziniz ve  $2\pi \cdot 2 \cdot 10^3$  rad/san ile  $2\pi \cdot 5 \cdot 10^3$  rad/san arasındaki işaret gücünü bulunuz.

(b)  $c(t)$  nin toplam ortalama gücünü bulunuz.

6.13. Aşağıda verilen açısı modüle edilmiş dalgabıçımını düşününüz.

$$v(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^6 t + 10 \cos 2\pi \cdot 10^3 t)$$

Bu işaretin frekansının mı, yoksa evresinin mi modüle edildiğini saptayabilir misiniz?

(a)  $v(t)$  nin toplam ortalama gücünü bulunuz.

(b) En büyük frekans sapmasını bulunuz.

(c) En büyük evre sapmasını bulunuz.

(d)  $v(t)$  nin bantgenişliğini bulunuz.

6.14. Aşağıda verilen FM dalgabiçimini düşününüz.

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau)$$

Burada  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad/san dir. Aşağıda verilen  $f(t)$  ler için taşıyıcının ve bir çift yan bantın taşıdıkları gücü bulunuz.

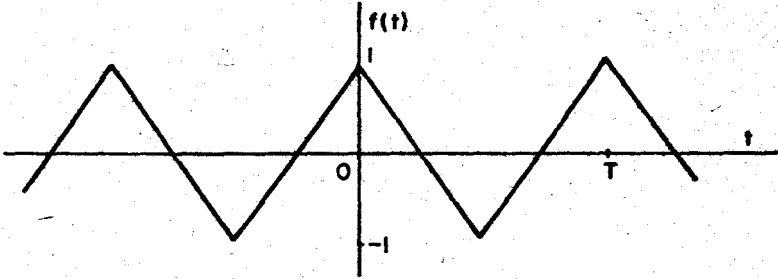
(a)  $f(t) = 0.1 \cos \pi \cdot 5 \cdot 10^3 t$

(b)  $f(t) = 0.4 \sin \pi \cdot 5 \cdot 10^3 t$

6.15. Bir işaret üreticinin frekansı aynı hızla 99 kHz ile 101 kHz arasında değiştiriliyor. İşaretin genliği ise 2 voltta değişmez tutuluyor. İşaret üreticinin çıkış gerilimi şu biçimde ifade edilebilir.

$$v(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + 2\pi \cdot 10^3 \int f(\tau) d\tau)$$

$f(t)$  nin dalgabiçimi Şekil 6.A.4'de gösterilmiştir.  $c(t)$  nin güç görünge yoğunluğunu çiziniz. ( $T \gg 10^{-5}$  varsayınız.)



Şekil 6.A.4

6.16. 10 MHz'lik bir taşıyıcının evresi, frekansı 10 kHz ve genliği bir olan, bir sinüzoidalle modüle ediliyor. En büyük evre sapması 2 radyandır. Bu EM dalgabiçiminin bantgenişliğini bulunuz.

6.17. 10 MHz'lik bir taşıyıcının evresi, frekansı 10 kHz ve genliği bir olan, bir sinüzoidalle modüle ediliyor. En büyük evre sapması 10 radyandır. EM dalgabiçiminin bantgenişliğini hesaplayınız. Modüle eden işaretin frekansı 5 kHz'e indirilince bantgenişliği nasıl değişir? Modüle eden işaretin frekansı 10 kHz iken genlik iki katına çıkarılırsa EM dalgabiçiminin bantgenişliği ne olur?

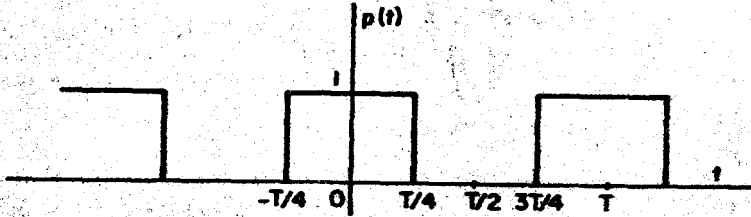
## 6.18. Açısı modüle edilmiş

$$c(t) = \cos \theta(t)$$

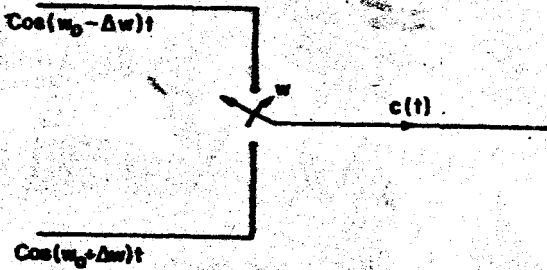
İşareti veriliyor. Aşağıdaki  $\theta(t)$  değerleri için  $c(t)$  nin frekans görünüşünü bulunuz. [  $p(t)$  nin dalgabıçımı Şekil 6.A.5 de verilmiştir.  $T \gg 2\pi/\omega_0$  varsayınız. ]

$$(a) \theta(t) = \omega_0 t + \pi p(t)$$

$$(b) \omega_s(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega [ 2p(t) - 1 ]$$



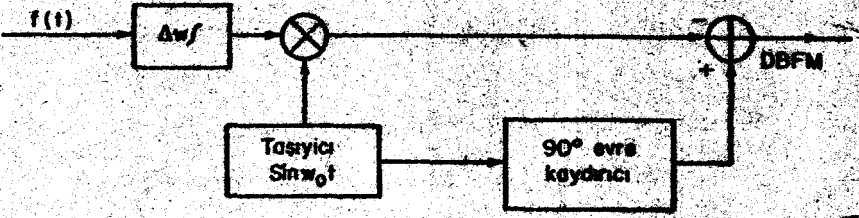
Şekil 6.A.5

6.19. Açısal hızı  $\omega = 2\pi/T$  olan bir anahtar yardımıyla Şekil 6.A.6'da

Şekil 6.A.6

gösterildiği biçimde  $c(t)$  işareti üretiliyor.  $c(t)$  nin frekans görünüşünü bulunuz ve elde ettiğiniz sonucu Alıştırma 6.18b'de bulunanla karşılaştırınız. ( $\omega \gg \omega_0$  varsayınız.)

## 6.20. Şekil 6.A.7'de gösterilen dizge yoluyla darbant FM üretilebileceği



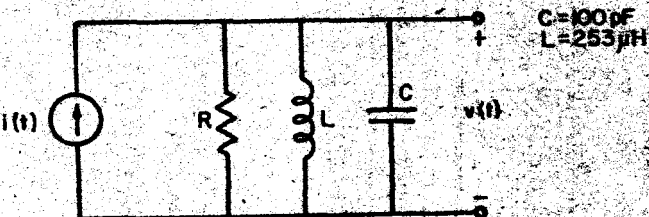
Şekil 6.A.7

daha önce görülmüştü.  $90^\circ$  evre koymasının tam olarak gerçekleştirilemediğini ve evrenin  $\theta^\circ$  kaydırıldığını düşününüz. (Burada  $\theta^\circ < 90^\circ$  dir ve  $90^\circ$  ye yakındır.) Dizgenin girişine modüle eden işaret olarak bir sinüzoidal uygulanıyor, yani

$$\Delta\omega \int f(\tau) d\tau = \beta \sin \omega_m t \text{ dir.}$$

- $\theta^\circ$  evre kayması olduğundan dizgenin çıkışında elde edilen darbant FM işaretinin ifadesini yazınız.
- $\theta = 60^\circ$  ve  $\theta = 90^\circ$  için çıkış işaretinin evreoku çizimini yapınız.
- Bu darbant FM işareti bir FM demodülatörün girişine uygulanmaktadır. Demodülatör bir sınırlandırıcı ile bir ayırıcıtan oluşmaktadır ve çıkış işareti sınırlandırıcının çıkışındaki işaretin anşal frekansına eşittir. Bu demodülatörün girişine yukarıda elde edilen darbant FM işareti uygulanırsa, çıkış işareti ne olur?
- $\beta = 0.1$  olursa ve  $\theta$  değeri  $\cos\theta < 0.1$  i sağlarsa çıkış işareti neye eşittir?

6.21. Şekil 6.A.8'de gösterilen akortlu devreyi düşününüz.



Şekil 6.A.8

(a) Rezonans frekansını hesaplayınız.

(b) Devrenin girişine uygulanan akım şu biçimdedir:

$$i(t) = 5 \times 10^{-4} [1 + 0.5 \cos 2\pi \cdot 10^4 t] \cos \omega_0 t$$

Burada  $\omega_0$  (a) kısmında bulunan rezonans frekansıdır. Devrenin 3 dB bantgenişliğinin, giriş akımının bantgenişliğine eşit olması için R değeri ne olmalıdır?

(c) Aşağıda verilen akım dalgabіçimi için (b) kısmını yeniden çözünüz. (Carlson kuralını kullanınız.)

$$i(t) = 5 \times 10^{-4} \cos(\omega_0 t + 5 \sin 2\pi \cdot 10^4 t)$$

(d) (b) ve (c) kısımlarında bulunan R değerleri için

$$i(t) = 5 \times 10^{-4} \cos \omega_0 t$$

akımının oluşturduğu  $v(t)$  geriliminin tepe değerini bulunuz. Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

6.22. (a) Aşağıda verilen aygıtları kullanarak, girişine uygulanan sinüzoidal frekansını 3 ile çarpan bir iletişim dizgesi tasarım-layınız.

i. İki kare-kuralı aygıtı

ii. Bir toplayıcı

iii. Bantgenişliği ve merkez frekansı ayarlanabilen bir bant geçiren süzgeç.

BGS'in merkez frekansını da belirleyiniz.

(b) (a) kısmında tasarımılanan dizgenin girişine

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + 5 \sin 2\pi \cdot 10^4 t)$$

uygulanarak, bu işaretin frekansı 3 ile çarpılmak istenmektedir. Çıkış işaretinde bozulma olmaması için gereken en küçük  $\omega_0$  değerini saptayınız. (Bantgenişliğini hesaplarırken Carlson kuralını kullanınız.)

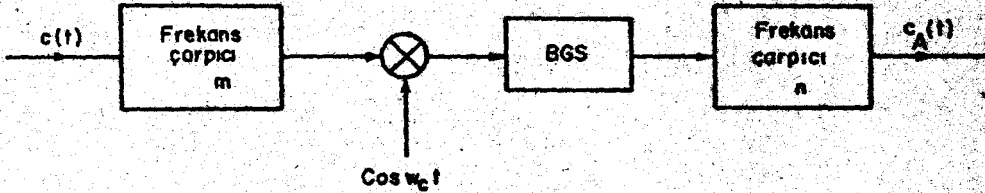
6.23. Bir Armstrong modülatörü kullanarak

$$c(t) = \cos \omega_0 t - \beta \sin \omega_m t \sin \omega_0 t$$

darbant FM işareti üretiliyor. Burada  $\omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^5$  rad/san,

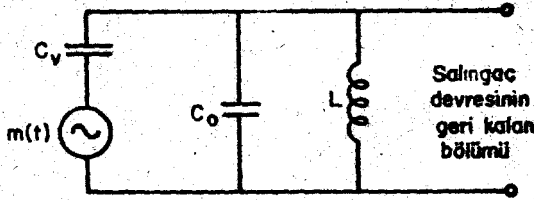
$\beta = 0.2$  ve  $\omega_m = 2\pi \cdot 40$  rad/san'dir. Bu darbant FM işaretinin önce frekansı  $m$  ile çarpılıyor ve daha sonra bu işaret  $\cos \omega_c t$  ile karıştırılıyor. Çarpıcı çıkışındaki işaret önce bir BGS'den, daha sonra frekansı  $n$  ile çarpan bir aygıttan geçirilerek, taşıyıcı

frekansı 108 MHz ve frekans sapması 80 kHz olan bir FM işareti üretiliyor. (Şekil 6.A.9). Dizge parametreleri  $m, n, \omega_c$  ile BGS'nin merkez frekansı ve bantgenişliğini saptayınız.



Şekil 6.A.9

6.24. Şekil 6.A.10'da verilen devrede gerilimle değişen bir sığaç kullanılarak FM işareti üretilmektedir.



Şekil 6.A.10

Gerilimle değişen sığaç olarak ters yönde öngerilimlenmiş bir diyot kullanılmaktadır ve ters yön gerilimi ile sığaç arasında şu bağıntı vardır.

$$C_v = \frac{100}{\sqrt{1+2v}} \text{ pF}$$

Modüle eden gerilim  $m(t) = 4 + 0.045 \sin 2\pi \cdot 10^3 t$  olarak verilmektedir.

(a) Rezonans frekansının

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_0 + C_v)}}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Gerilimle değişen sığacın üzerine  $v = 4$  voltluk bir gerilim uygulandığında, rezonans frekansının 5 MHz olması için  $L$  ne olmalıdır?

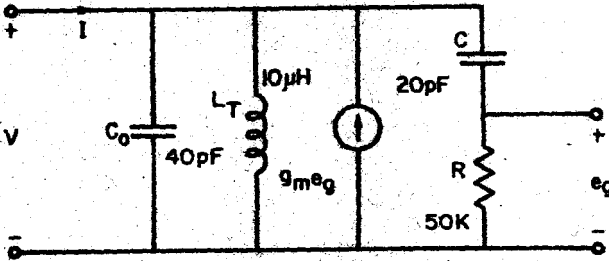
(c)  $m(t)$  nin kapladığı frekanslarda endüktans kısa devre kabul edilebilir ve bu bölgede  $v \approx m(t)$  dir. Bunu kullanarak

$$C_v = \frac{100}{3} (1 - 0.005 \sin 2\pi \cdot 10^3 t) \text{ pF}$$

olduğunu gösteriniz.

(d) Salıngaç geriliminin tepe değeri 1 volta ayarlandığında, tank devresi üzerinde görülen açısı modüle edilmiş dalgabıçımının ifadesini yazınız.

6.25. Bir salıngaçın akortlu devresi Şekil 6.A.11'de gösterilmiştir.  $g_m$ ,  $e_g$  akım kaynağı,  $R$  üzerinde oluşan  $e_g$  gerilimine bağlıdır.



Şekil 6.A.11

(a) Devrenin admitansının

$$Y = \frac{I}{V} = j\omega C_0 + \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega C + j\omega g_m RC}{1 + j\omega RC}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Rezonans frekansı  $1/RC$  ye göre çok büyükse, yani  $\omega_c \gg 1/RC$  ise devrenin toplam etkin sığasının

$$C_T = C_0 + C + g_m RC$$

ile belirlenebileceğini gösteriniz.

(c)  $g_m = 40 \mu\text{ho}$  ise, rezonans frekansını bulunuz?

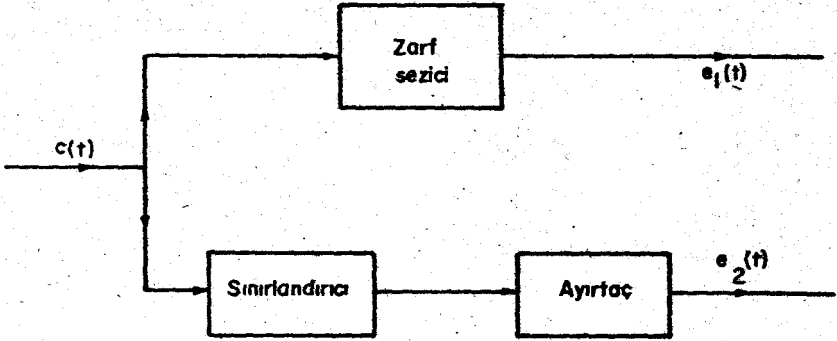
(d)  $g_m = 40 + \sin 2\pi \cdot 10^3 t$  ise, modülasyon derecesi  $\beta$  nedir?



6.26. Şekil 6.A.12'de gösterilen demodülatörlerin her ikisinin de girişine aynı işaret

$$c(t) = A \cos \omega_0 t$$

uygulanıyor.



Şekil 6...12

(a)  $e_1(t)$  ve  $e_2(t)$  çıktılarını bulunuz.

(b) Yukarıda verilen taşıyıcıya ikinci bir taşıyıcı

$B \cos [(\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta]$  karışıyor ve demodülatörlerin girişine uygulanan işaret

$$c(t) = A \cos \omega_0 t + B \cos [(\omega_0 + \Delta\omega)t + \theta]$$

oluyor. ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ).  $A \gg B$  varsayarak (yani  $A^2 + B^2 \approx A^2$ )

$e_1(t)$  ve  $e_2(t)$  dalgabiçimlerinin ifadelerini yaklaşık olarak bulunuz. Bu sonuçlarla (a) kısmında bulunan sonuçları karşılaştırınız. GM ve FM dizgelerinin girişimi bastırma özellikleri konusunda neler söylenebilir?

(Not: Sınırlandırıcının yalnız zarftaki değişimleri kaldırdığını varsayınız. Sınırlandırıcının girdisi  $a(t)\cos\theta(t)$  ise çıktısı  $\cos\theta(t)$  dir.)

# BÖLÜM 7

## SÜPERHETERODİN ALMAÇLAR VE TELEVİZYON DİZGELERİ

### 7.1. FREKANS BÖLMELİ ÇOKLAMA

Önceki bölümlerin bazılarında sözü edilen Frekans Bölmeli Çoklama ilkesi bu altbölümde daha ayrıntılı bir biçimde incelenecektir.

İletişimde, bilgi işareti bir noktadan diğer bir noktaya bir iletim ortamı kullanılarak gönderilir. Bu iletim ortamı, telefon haberleşmesindeki gibi bir iletim hattı (kablo) olabileceği gibi, radyo ya da televizyon haberleşmesindeki gibi uzay da olabilir. Gönderilecek olan işaretin bantgenişliği çoğunlukla iletim ortamının bantgenişliğinin çok küçük bir bölümünü oluşturur. Bu nedenle iletim ortamından tek bir işaretin gönderilmesi büyük bir savurganlık olur.

Özellikle uzay gibi tek olan bir iletim ortamının tek bir kullanıcı tarafından kullanılması düşünülemez. Ancak, aynı frekans bandını kapsayan birden çok işaretin birbirlerine eklenerek tek bir iletim ortamından gönderilmesi olası değildir. Çünkü bu işaretlerin almaç tarafından birbirlerinden ayrılması olanaksızdır.

Bu sorun şöyle çözülebilir: Birbirleriyle aynı frekans bandını kapsayan işaretlerin frekans görüngeleri birbirlerine göre ayrı frekans bantlarına kaydırılırlar. Böylece birbirleriyle çakışmayan frekans bantlarını kapsayan işaretler elde edilmiş olur. Bu işaretler zaman bölgesinde toplanarak tek bir iletim ortamı üzerinden gönderilirler. Ayrı frekans bantlarını kapsayan bu işaretler alıcı uçta süzgeçler kullanılarak birbirlerinden ayrılırlar. Daha sonra birbirlerinden ayrılmış olan bu işaretlerin frekans görüngeleri ilk kapsadıkları frekans bandına kaydırılır. Bu biçimde birden çok işaret tek bir iletim ortamı kullanılarak

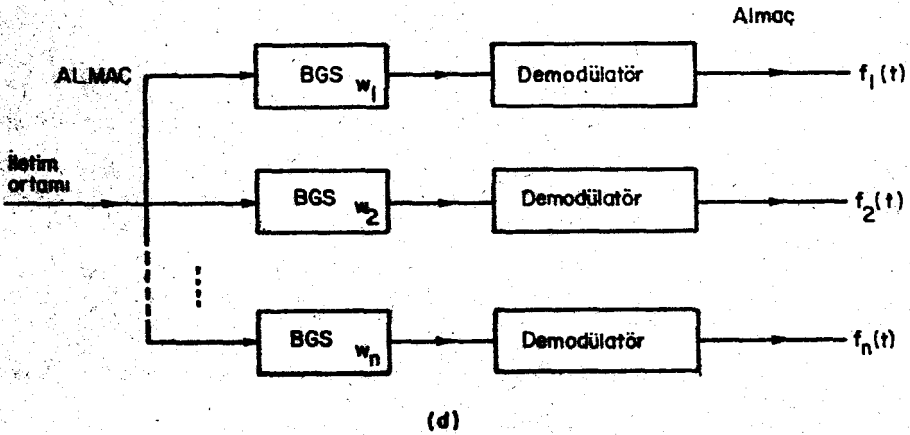
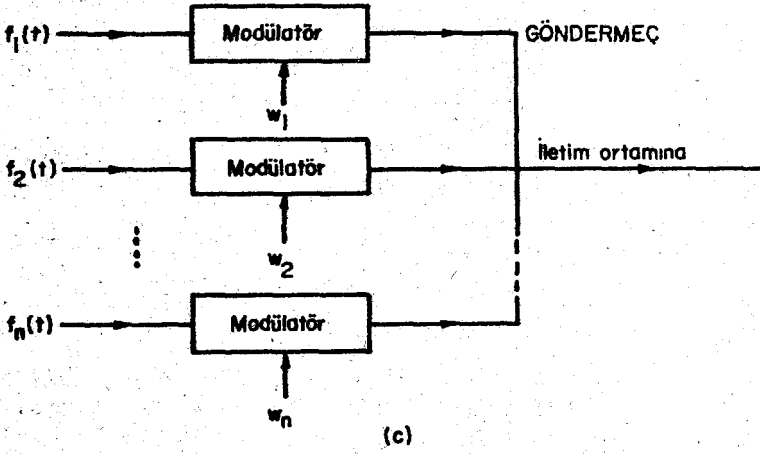
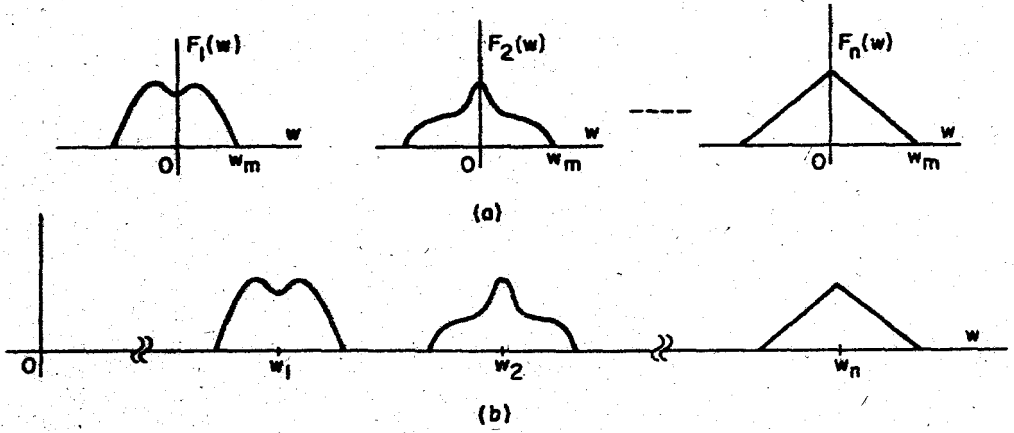
gönderilir ve alıcı tarafta ayrı ayrı elde edilebilir. Değişik işaretlerin değişik frekans aralıklarını kullanmaları ilkesi *Frekans Bölmeli Çoklama* olarak adlandırılır. Frekans Bölmeli Çoklama kullanılırken işaretler zaman bölgesinde birbirleriyle karışmış durumdadırlar. Ancak herbiri başka frekans bandını kapsadığı için frekans bölgesinde kendi özdeşliklerini korurlar ve istenince uygun süzgeçler kullanılarak birbirlerinden ayrılırlar.

Frekans bölmeli çoklama elde edebilmek için işaretlerin ayrı frekans bantlarına kaydırılmaları işaretlerin frekansları ayrı sinüzoidaller ile çarpılması (ve gerekirse uygun süzgeçlerden geçirilmesi) ile sağlanır. Bu ise işaretin çift yan bant genlik modülasyonuna uygulanmasından başka birşey değildir. İşaretler almaçta birbirlerinden ayıldıktan sonra, ilk frekans bantlarına geri kaydırılması işi de ÇYB modüle edilmiş işaretin demodülasyonu demektir. Bu tür frekans kaydırmalarda işaretin frekans görünüşü değişmez, yalnızca yeri değişir. Frekans kaydırma işlemi başka biçimde de yapılabilir. Örneğin, bilgi işaretiyle bir sinüzoidal frekansını modüle ederek de işaretin görünüşü taşıyıcı frekans  $\omega_0$  etrafındaki frekans bandına taşınır. Bu taşıma sırasında işaret bir dönüşüme uğrar, frekans görünüşünü biçimi ve bantgenişliği değişir. Bu işlem frekans modülasyonundan başka birşey değildir. Frekans kaydırılmış ve dönüştürülmüş işaretin yeniden ilk bandına kaydırılması ve eski biçimine dönüştürülmesi ise bu FM işaretinin demodülasyonudur.

Frekans bölmeli çoklama için gereken frekans kaydırma işlemi modülasyon işlemi yoluyla sağlanmış olur. Bölüm 1'de de belirtildiği gibi modülasyon işlemi gerekli kılan önemli nedenlerden biri frekans bölmeli çoklama yapabilmektir. Modülasyonu gerektiren diğer önemli bir neden de işaretin iletim ortamında iletime uygun bir biçime sokulmasıdır. Bu ise çoğunlukla işaretin yüksek frekanslara kaydırılması ile sağlanır. Böylece, modülasyon işlemi yoluyla hem frekans bölmeli çoklama hem de işaretin iletime uygun biçime sokulması gerçekleştirilmiş olur.

Frekans bölmeli çoklama üzerindeki tartışmayı bir örnekle sürdürelim. Bir iletim ortamı (örneğin uzay) kullanarak, aynı anda  $n$  tane, herbiri  $\omega_m$  rad/san ye bantsınırlı, işaret göndermek istediğimiz, modülasyon türü olarak (ÇYB ya da normal) Genlik Modülasyonu kullanıldığını varsayalım. Aynı örnek diğer modülasyon türleri kullanılarak da incelenebilir. Bu  $n$  işaretin taşıyıcı frekansları  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  olan  $n$  tane sinüzoidal genliğini modüle ettiğini düşünelim. Genlik modüle edilmiş her işaret bantgenişliği  $2\omega_m$  olan ve merkezi  $\omega_1$  (ya da  $\omega_2$ , ya da  $\omega_3, \dots$ , ya da  $\omega_n$ ) olan bir frekans bandını kapsar. Buna göre, değişik frekans görüngelerinin birbirleriyle çakışmaması için taşıyıcı frekansları  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  nin birbirlerinden en az  $2\omega_m$  rad/san uzaklıkta olması gerekmektedir. İşaretlerin ayrı ayrı frekans görüngeleri Şekil 7.1a'da ve frekans bölmeli çoklanmış işaretin görünüşü ise Şekil 7.1b'de gösterilmiştir.

Bu işaretler frekans bölmeli çoklanarak tek bir göndermeç tarafından iletim ortamına verilebileceği gibi, başka göndermeçler tarafından iletim ortamına verilmiş de olabilir. Her iki durumda da iletim ortamındaki işaret aynıdır. İletim ortamındaki  $n$  işaretin tümü tek bir almaç tarafından alınabileceği gibi herbiri ayrı birer alıcı tarafından alınabilir.



Şekil 7.1 Frekans bölmele çoklama ile iletişim.

Şekil 7.1c ve d de işaretlerin tümünün tek bir verici tarafından gönderildiği ve tek bir almaç tarafından alındığı durum gösterilmiştir.

Her işaret göndermeçte modüle edilerek istenilen frekansa kaydırılır. Çakışmayan frekans bantlarını kapsayan modüle edilmiş işaretlerin toplamı iletim ortamına verilir. Almaçta ise belli bir işareti almak için o işaretin frekansına merkezlenmiş bir bantgeçiren süzgeç konur. Bantgeçiren süzgeç çıkışında yalnızca istenen işaret vardır. Bu işarettten, demodülasyon yolu ile, ilk bilgi işareti elde edilir.

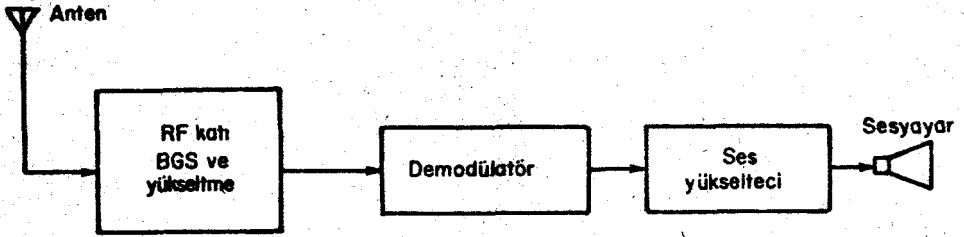
Gerçekte uzayın bir iletim ortamı olarak kullanımı bir frekans bölme çoklama uygulamasından başka birşey değildir. Tüm elektromanyetik görüğe 1 ile 10 KHz'den 100 GHz'e kadar, çizelge 1.2 de gösterildiği gibi çok değişik iletim türleri için aynı anda kullanılmaktadır. Her kullanıcı istediği işaretin bulunduğu frekans bandını geçiren ve diğer tüm işaretleri söndüren bir bantgeçiren-süzgeç ile istediği işareti demodüle edebilecek bir almaç kullanır. Bu işlem sırasında almaçlar birbirlerinden etkilenmezler. Burada önemli olan işaretlerin frekans görüngelerinin çakışmamasıdır. Görüngelerin çakışmaması, uluslararası iletim kuruluşları tarafından değişik amaçlar için öngörülen frekans dilimlerinin kullanılması ile sağlanır. Örneğin, 160 KHz - 250 KHz uzun dalga GM yayımına, 550 KHz - 1600 KHz orta dalga GM yayımına ve 6 MHz - 26 MHz bandı içinde bir takım frekans dilimleri kısa dalga GM yayımına ayrılmıştır. Bu bantları kullanan her radyo vericisine 10 KHz'lik bir bant ayrılmıştır. 88 MHz ile 108 MHz arası FM (ya da çok kısa dalga) yayımına ayrılmıştır ve bu bantta her radyo istasyonuna 200 KHz'lik bir bant verilmektedir. Televizyon yayımı için hangi bandın kullanıldığı ve her istasyona ne genişlikte bant ayrıldığı daha sonraki altbölümlerde açıklanacaktır.

## 7.2. SÜPERHETERODİN ALMAÇ

Önceki bölümlerde modüle edilmiş işaretlerin demodülasyonu üzerinde ayrıntılı biçimde durulmuş, ancak bir almaç bütünüyle incelenmemiştir. Bu altbölümde almaçta ortaya çıkan sorunlar ve bu sorunların çözümüne yardımcı olan süperheterodin almaç ilkesi üzerinde durulacaktır. Süperheterodin almaç ilkesi tüm radyo ve televizyon alıcılarında geçerlidir ve gereklidir. Ancak burada örnek olarak bir GM radyo almaç incelenmektedir.

Uzun, orta ve kısa dalga bir GM radyo alıcısını gerçekleştirmek istediğimizi düşünelim. Yapılmak istenen almaç kuramsal olarak kolaydır. 200 KHz'te yayın yapan TRT 1 Ankara Radyosunu dinlemek istediğimizi varsayalım. Antenden gelen işaretin içinde istediğimiz yayın ile birlikte elektromanyetik görüngüyü oluşturan tüm işaretler de vardır. Zarf sezicinin girişine, tüm elektromanyetik görüngüyü değil de, yalnız 200 KHz'deki işaret verilmelidir. Bu nedenle, antenden sonra gelen RF (radyo frekans) katında 200 KHz'e merkezlenmiş ve bantgenişliği 10 KHz'lik bir bantgeçiren süzgeç yoluyla yalnızca 200 KHz'teki işaret geçirilir, diğer işaretler söndürülür. Bantgeçiren süzgeç çıkışındaki işaret zarf seziciye verildiğinde, zarf sezicinin çıkışı Ankara Radyosu yayınıdır. Kuramsal olarak bu kadar kolay olan bu almaçta sorunlardan biri işaretin

gücü ile ilgilidir. Antendeki işaretin gücü mikrovat basamağında, belki de pikovat basamağında olacak kadar zayıf olabilir. Bu işaretin demodülatörü çalıştırabilmesi için  $10^3$ -  $10^4$  derecesinde güç yükseltilmesine gerek vardır. Büyük ölçüdeki bu güç yükseltilmesi de almanın RF katında yapılmalıdır. Buna ek olarak demodülatör çıkışındaki ses işaretinin sesyayar (hoparlör) çalıştıracak güce yükseltilmesi de ses katındaki yükselteçler ile gerçekleştirilir. Şekil 7.2'de öbek çizimi verilen bu almanın RF katındaki süzme ve yükseltme işlemi son derece önemlidir. Bunun nedeni düşüncele yakın bir süzme ve çok önemli ölçüde yükseltme istenmesidir.



Şekil 7.2 Bir radyo alıcısı

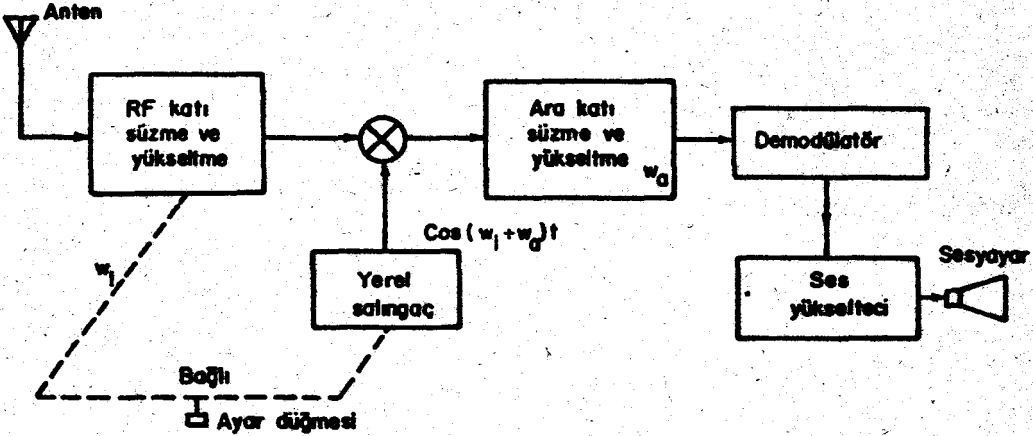
Yukarıda anlatılan almanın kullanımında ortaya çıkan ikinci önemli sorun ise şudur: Doğal olarak bir radyo alıcısı tek bir istasyonu dinlemek için yapılmaz. Aynı radyo alıcısı ile başka istasyonları da dinlemek isteriz. Şekil 7.2 de gösterilen almanın frekansa duyarlı birimi, süzme ve yükseltmenin yapıldığı, RF katıdır. Başka bir radyo istasyonunu, örneğin 182 KHz te yayın yapan TRT-2 Ankara Radyosunu dinlemek için, o istasyonun frekansında bir süzgeç gerekmektedir.

Her istasyon için almaca ayrı bir bantgeçiren süzgeç konamayacağına göre, istenilen merkez frekansına ayarlanabilen ve bantgenişliği 10 KHz olan düşüncele yakın bir bantgeçiren süzgeç gerekmektedir. Bir RLC tank devresinde sığacın değeri C değiştirilerek, merkez frekans değiştirilebilen bir bantgeçiren süzgeç elde edilebilir. Ancak sığacın değeri değiştiğinde bantgeçiren süzgecin bantgenişliği de 10 KHz de değişmez kalmayıp değişir. Bantgeçiren süzgeç merkez frekansının çok geniş bir frekans aralığı içinde değişmesi istenmektedir. Örneğin bir GM almanın uzun dalgadan - kısa dalgaya (160 KBz'den - 160 MHZ'e) 1 e 100 lük bir frekans değişmesi söz konusudur. Merkez frekans bu 1 e 100 lük frekans aralığı içinde değişirken, bantgeçiren süzgecin bantgenişliğinin ve özelliklerinin değişmemesi istenmektedir. Bu ise karşılanması son derece zor bir istektir.

Bantgeçiren süzmeye ek olarak, RF katında yapılması gereken yükseltmeyi de bu kadar geniş bir frekans aralığı üzerinde gerçekleştirmek son derece zordur. Tasarlandığından çok değişik frekanslarda bu yükselteçler salınma neden olurlar ve istenen yükseltmeyi vermezler. Özet olarak,

RF katında çok geniş bir frekans aralığı üzerinde yapılması gereken süzme ve yükseltme işlemlerinin gerçekleştirilmesinde büyük sorunlar vardır. Bu bakımdan öbek çizimi Şekil 7.2 de verilen alıcı artık kullanılmamaktadır. Günümüzde bu sorunları iyice azaltan süperheterodin ilkesi ile çalışan almaçlar kullanılmaktadır. Ancak iletişimin tarihi gelişimi içinde yukarıda incelenen türden almaçlar kullanılmıştır.

Yukarıda sözü edilen sorunlardan kurtulmak için süzme ve yükseltme işlemlerinin değişen değil, değişmez bir frekansta yapılması gerekir. Bu işlem şöyle gerçekleştirilebilir: Değişik frekanslardaki işaret ilk önce bir karıştırma (heterodin) işlemi ile önceden belirlenmiş bir frekansa taşınır. Süzme ve yükseltme işlemleri bu frekansta yapılır ve çıktı demodülatöre gönderilir. Bu ilkeyi kullanarak çalışan bir almaçın öbek çizimi Şekil 7.3 de verilmiştir.



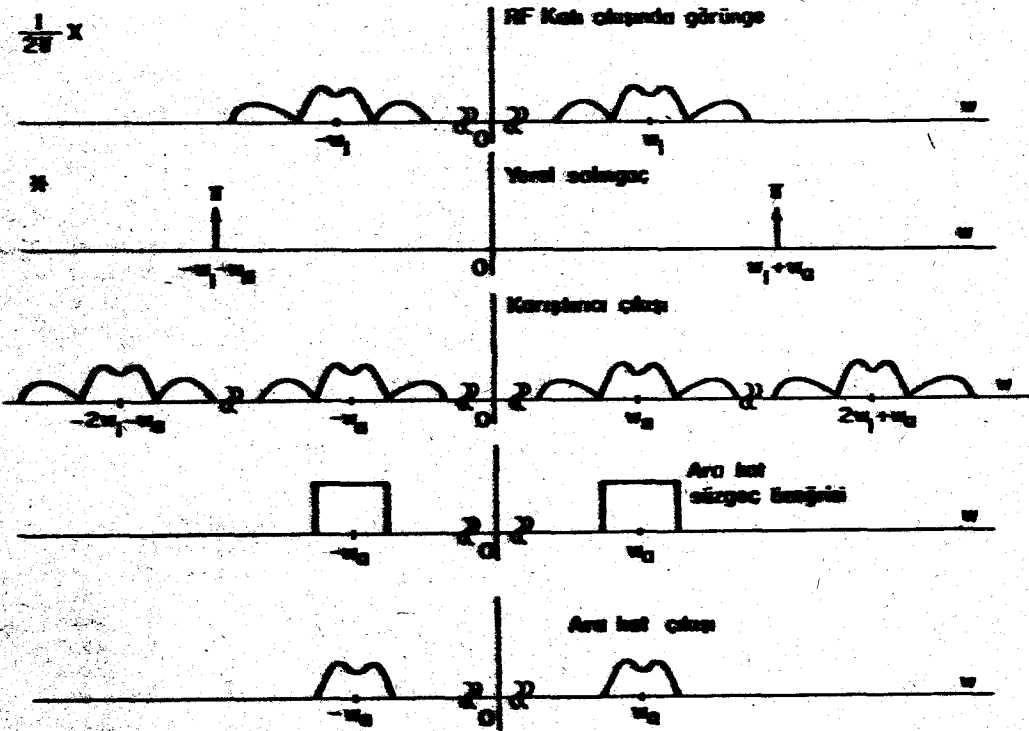
Şekil 7.3 Süperheterodin almaç.

Şekil 7.3 de gösterilen süperheterodin almaçın çalışmasını inceleyelim. Taşıyıcı frekansı  $\omega_1$  olan bir radyo istasyonunu dinlemek istediğimizi varsayalım. Anten üzerinde istenen işarette birlikte tüm elektromanyetik görünmeyi kapsayan bir işaret oluşur. Antende oluşan bu işaret RF katında kaba bir biçimde süzülür ve yükseltilir. Süzmenin kaba olması şu demektir:  $\omega_1$  deki işarette birlikte onun yakın çevresi de geçebilir. RF katındaki yükseltmenin çok yüksek düzeyde olması gerekir. RF katı çıkışındaki işaret  $\omega_1$  deki işarette yakın çevresinin az yükseltilmiş biçimindedir. RF katındaki süzgecin merkez frekansı,  $\omega_1$  e ayarlanır, buna bağlı olarak yerel salıncak ise  $\omega_2 + \omega_1$  frekansında bir sinüsoidal üretir. Burada  $\omega_2$  önceden belirlenmiş değişmez bir frekanstır.

RF katı çıkışındaki işaret ile yerel salıncakın ürettiği sinüsoidal karıştırılırsa (heterodin edilirse)  $\omega_1$  ve çevresindeki işaret hem  $\omega_2$  ve çevresine, hem de  $2\omega_1 + \omega_2$  ve çevresine taşınır. Bu frekans kaydırma işlemi Şekil 7.4'de gösterilmiştir.  $\omega_2$  ve çevresi ile  $2\omega_1 + \omega_2$  ve

çevresindeki işaretler ara katın girdisini oluşturur. Ara katında önceden belirli ve değişmez ara frekansı  $\omega_a$  ya ayarlanmış bantgenişliği 10 KHz olan iyi bir bantgeçiren süzgeç ve yine  $\omega_a$  frekansına ayarlanmış yükselteç vardır. Bu nedenle ara kat çıkışında yalnızca  $\omega_a$  ya taşınmış olan  $\omega_1$  deki işaret vardır ve yükseltilmiş biçimdedir. Demodülatör çıkışında ise  $\omega_1$  deki radyo istasyonunun dinlemek istediğimiz yayını vardır.

Eğer  $\omega_2$  frekansında bir başka radyo istasyonu dinlemek istersek ayar düğmesini  $\omega_2$  frekansına getiririz. Böyle yapınca RF katındaki süzgeç  $\omega_2$  frekansına ayarlanmış olur ve  $\omega_2$  deki işareti ile yakın çevresini geçirir. Ayar düğmesi  $\omega_2$  ye getirildiğinde aynı zamanda yerel salınış çıkışı  $\omega_2 + \omega_a$  ye ayarlanmış olur. Karıştırma sonucunda  $\omega_2$  ve çevresindeki işaret  $\omega_a$  ve çevresi ile  $2\omega_2 + \omega_a$  ve çevresine taşınır. Ara katı ise yalnız  $\omega_a$  deki işareti geçirir. Bu ise  $\omega_2$  deki almak istediğimiz işaretten başkası değildir. Böylece istediğimiz istasyonu dinlemiş oluruz.



Şekil 7.4 Süperheterodin almacının çalışması

Süperheterodin almacının çalışması özetle şöyledir: Dinlenilmek istenen istasyon ve çevresi kabaca süzülür ve önceden belirlenmiş ara frekansa kaydırılır. Burada iyice süzülür ve demodüle edilir.

Süperheterodin almacının ilk incelenen almaca olan üstünlüğü ise şudur: Süperheterodin almacta kritik süzme ve yükseltme işlemleri değişmez



bir frekans  $\omega_a$  üzerinde yapılır. Bu işlemler dinlenmek istenen istasyonun frekansından bağımsızdır. RF katında yapılan süzme ve yükseltme işlemlerinin yine geniş bir frekans aralığı üzerinde yapılmasından kuşku duyulabilir ve ilk almaçta olduğu gibi bu işlemlerin bu geniş frekans aralığı üzerinde gerçekleştirilemeyeceği öne sürülebilir. Ancak bu doğru değildir. Süperheterodin almaçın RF katındaki süzme ve yükseltme kritik işlemler değildir. Yükseltmenin çok yüksek düzeyde olması gerekmez. Süzme için de hoşgörü sınırları geniştir. Örneğin, 1 MHz deki işaretin almak için 900 KHz - 1150 KHz bandını geçiren bir süzgeç kullanılabilir. Kaba da olsa RF katındaki bu süzmenin bir yararı karıştırıcı girişindeki gürültüyü azaltmaktır. RF katındaki yükseltmenin amacı ise işareti karıştırıcıyı çalıştıracak düzeye getirmektir.

Dikkat edilecek olursa  $\omega_1$  deki işareti  $\omega_a$  ya kaydıran ( $\omega_1 + \omega_a$ ) ile karıştırma işlemi aynı zamanda  $\omega_1 + 2\omega_a$  daki işareti de  $\omega_a$  ya kaydırır. Ancak  $\omega_1 + 2\omega_a$  frekansı  $\omega_1$  frekansından  $2\omega_a$  ötededir. RF katında kabaca da olsa  $\omega_1$  e ayarlanmış olan süzgeç  $\omega_1 + 2\omega_a$  ve çevresini geçirmez.  $\omega_1 + 2\omega_a$  hayal frekans olarak adlandırılır.

GM almaçlarında ara frekans, 455 KHz dir. Bu nedenle ara kattaki bantgeçiren süzgeç 455 KHz'e ortalanmış ve 450 KHz - 460 KHz bandını geçiren bir süzgeçtir. Örneğin 1 MHz deki bir istasyonu dinlemek için yerel salınmaç frekansı 1455 KHz olmalıdır. Karıştırma sonucunda 1 MHz deki işaret 455 KHz'e kaydırılmış olur. RF katındaki süzme olmasaydı bu karıştırma 1910 KHz deki işareti de 455 KHz'e kaydırırdı. Ancak RF katındaki süzgeç 1 MHz'den 910 KHz uzakta olan 1910 KHz deki işareti yok eder ve hayal frekansın bir bozulmaya neden olmasını önler. Frekans modülasyonu almaçlarında ara frekans 10.7 MHz, televizyon alıcılarında ise 39 MHz dir.

$\omega_1$  ve çevresini  $\omega_a$  ya kaydırma, işaretin  $\omega_1 + \omega_a$  ile karıştırılması sonucunda olduğu gibi  $\omega_1 - \omega_a$  ile karıştırılarak da sağlanır. Ancak uygulamada  $\omega_1 + \omega_a$  ile karıştırma (heterodin) kullanılmaktadır.  $\omega_1$  den büyük frekansla karıştırıldığı için bu işleme süperheterodin denmektedir. Karıştırmada  $\omega_1 - \omega_a$  değil de  $\omega_1 + \omega_a$  kullanılmasının önemli bir nedeni vardır. Bir orta dalga GM alıcısını düşünelim. Kullanılan frekans bandı 550 KHz - 1600 KHz dir. Karıştırma  $\omega_1 + \omega_a$  ile yapıldığında yerel salınmaç frekansı 1005 KHz - 2055 KHz aralığında olmalıdır. Bu 1 e 2 lik bir orandır. Oysa karıştırma  $\omega_1 - \omega_a$  ile yapılsaydı, yerel salınmaç frekansının 95 KHz - 1145 KHz aralığında olması gerekirdi. Bu 1 e 12 lik bir orandır ve böyle bir yerel salınmaç tasarımı birinciye göre daha zordur.

Günümüzde kullanılmakta olan GM, FM ve TV alıcılarında yukarıda anlatılan ve obek çizimi Şekil 7.3 de verilen süperheterodin almaç ilkesi kullanılmaktadır.

### 7.3 TELEVİZYON DİZGELERİ

Televizyon (TV) yayınında bilgi, bilindiği gibi, ses ve görüntüden oluşur. İlk iş bu bilginin bir elektriksel nicelik olarak ifade edilmesidir. Ses bilgisinin mikrofon kullanılarak elektriksel bir niceliğe dönüştürüldüğünden söz edilmişti. Görüntü bilgisinin bir elektriksel niceliğe dönüştürülmesi ise bu althölümde incelenecektir.

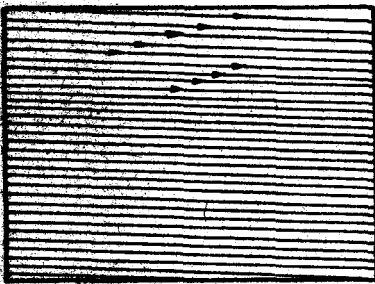
## Görüntünün Elektriksel İşarete Dönüştürülmesi

Siyah-beyaz TV'yi incelediğimizi düşünelim. Görüntüyü bir dikdörtgen siyah-beyaz resim olarak düşünürsek, görüntü bilgisi o dikdörtgen üzerinde her  $(x,y)$  noktasında parlaklığın (siyah, beyaz ya da gri) belirtilemesiyle elde edilir. Başka bir deyişle görüntü bilgisi, dikdörtgen üzerinde her  $(x,y)$  noktasında tanımlanan bir parlaklık işlevi  $p(x,y)$  ile belirlenebilir. Buna ek olarak TV'de duran değil, hareket eden ya da zamanla değişen bir görüntü göndermek istenir. Yani her  $(x,y)$  noktasındaki parlaklığın zamanla değişmesi söz konusudur. Dolayısıyla bilgi, üç değişkenli parlaklık işlevi  $p(x,y,t)$  olarak modellenenebilir.  $(x,y)$  noktasının  $t$  anındaki parlaklığı  $p(x,y,t)$  dir.

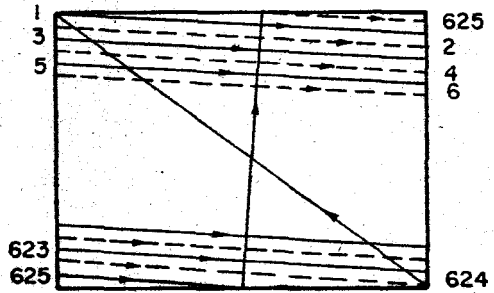
Hareket eden görüntü bilgisi  $p(x,y,t)$  nin elektriksel iletişim ile bir yerden bir yere gönderilebilmesi için bu üç değişkenli işlevin tek değişkenli (zaman) bir işleve dönüştürülmesi gerekir ki, daha sonra, bu tek değişkenli zaman işlevi bir elektriksel işarete dönüştürülebilir.  $p(x,y,t)$  nin tek değişkenli bir zaman işlevine dönüştürülmesi mükemmel ve tam olarak yapılamaz. Ancak kabul edilebilir sonuçlar verecek biçimde yaklaşık olarak yapılabilir. Bunda insan gözünün çok kısa zaman süreleri içinde olan değişimleri algılayamamasından ve yine insan gözünün birbirine çok yakın noktalarındaki parlaklığı ayırt edememesinden yararlanır.

$p(x,y,t)$  nin tek değişkenli bir zaman işlevine dönüştürülmesinde ilk adım, zaman içinde sürekli değişen bir görüntü yerine kısa zaman aralıklarıyla birbirini izleyen duran görüntüler göndermektir. Eğer duran görüntüler birbirlerini hızlı bir biçimde izliyorlarsa, sinemada da olduğu gibi, insan gözü bunu sürekli değişen bir görüntü olarak algılar. Buna göre, bilgi her  $(x,y)$  noktasındaki parlaklığın belli  $t_i$  anlarındaki örneklenmiş hali,  $p(x,y,t_i)$  olarak düşünülebilir.

Bu dönüştürmede ikinci adım, gözün birbirine çok yakın noktaları ayırt edememesinden yararlanarak parlaklığı her noktada göndermek yerine dikdörtgen üzerinde belli noktalarda göndermektir. Bu noktalar öyle seçilmelidir ki hem bütün dikdörtgen kapsanmalı, hem de göz üzerinde sürekli bir resim izlenimi oluşmalıdır. Bunu gerçekleştirmenin bir yolu Şekil 7.5'a da gösterildiği gibi dikdörtgenin yatay çizgilerle taranmasıdır. Böyle yapıldığında parlaklık yalnızca bu yatay çizgiler üzerinde



(a)



(b)

Şekil 7.5 Şekil 7.5 Görüntünün taranması.

düşünülmelidir. Yatay çizgiler birbirlerine yakın olursa, göz çizgiler arasını göremez.

Görüntünün tümünün taranması işlemi bir örnekleme süresi  $T = t_{i+1} - t_i$  içinde tamamlanmalıdır. Görüntünün n tane yatay çizgi ile tarandığını düşünelim. Bu durumda üç değişkenli parlaklık işlevi  $p(x, y, t)$  den elde edilen tek değişkenli zaman işlevi şöyle olacaktır:  $t_i$  örnekleme anından sonra birinci T/n lik süre için birinci yatay çizgi üzerindeki parlaklık ifade edilir, ikinci T/n lik süre içinde ikinci yatay çizgi üzerindeki parlaklık ifade edilir. Böylece n inci T/n lik süre içinde son yatay çizgi üzerindeki parlaklık ifade edilir ve T süresi içinde tüm dikdörtgen üzerinde parlaklık tarama yolu ile zaman işlevine dönüştürülmüş olur. Tarama işlemi tamamlandığında  $t_{i+1}$  anı gelmiş demektir.  $t_{i+1}$  anından sonra taramaya yine birinci çizgiden başlanarak devam edilir. Bu biçimde zamanla değişen görüntüyü ifade eden tek değişkenli zaman işlevi elde edilmiş olur. Bu işlev elektriksel bir niceliğe dönüştürülüp gönderildiğinde, almaçta alınarak aynı tarama işlemiyle görüntü bir ekran üzerinde elde edilir. Bu görüntü, doğal olarak, yukarıda belirtilen kısıtlamaların ışığında, zaman içinde sürekli değişen ve parlaklığı ekranın her noktasında belirlenmiş bir görüntü değildir. Zaman içinde kesikli olarak değişen ve ekranın yalnız belli noktalarında belirlenmiş bir görüntü olacaktır ki, tarama işlemi yeterince hızlı yapıldığı ve çizgiler birbirine yakın olduğu sürece, bu görüntü kabul edilir iyilikte bir görüntü olacaktır.

Yukarıdaki tartışma görüntünün elektriksel işarete nasıl çevrilebileceği konusunda bir kavram oluşturması için verilmiştir. Alıcılardaki tarama işlemi yukarıda anlatıldığı gibi ve Şekil 7.5a'da gösterildiği gibi değildir. Gerçekte tarama Şekil 7.5b'de gösterildiği gibi yapılmaktadır. İlk önce 1., 3., 5. v.b. gibi tek sayılı çizgiler taranmakta sonra da 2., 4., 6. v.b. gibi çift sayılı çizgiler taranmaktadır. Bu biçimde tarama işlemi bir kez tamamlandığında resim iki kez taramış gibi olmaktadır. Her ne kadar tek sayılı çizgilerin oluşturduğu resim ile çift çizgilerin oluşturduğu resim aynı değilse de, komşu çizgiler genellikle birbirlerinden çok ayrı olmadıkları için bu iki resim birbirine çok yakındır.

Önce tek sonra çift sayılı çizgilerin taranması sonucunda, taramanın bir kez yapılmasıyla resim iki kez taramış gibi olmaktadır. Bunun yararı şudur: Bu yöntem kullanılıncaya tarama gerçekte olduğundan iki kat daha hızlı yapılmış gibi iyi sonuç verir. Bu yolla gözümüz oldukça yavaş bir taramayla dahi görüntülerin değişmesini izleyemez, hareketleri sürekli gibi görür. Kullanılan dizgelerde tarama saniyede 25 kez yapılmaktadır ve dolayısı ile görüntü saniye de 50 kez taranmaktadır. Görüntü 50 kez değiştiğinde ise göz değişimleri izleyememektedir. Taramanın saniyede 25 kez olması şebeke frekansının 50 Hz olması bakımından da uygundur. Şebeke frekansının 60 Hz olduğu A.B.D.'de kullanılan dizgelerde tarama saniyede 30 kez yapılmaktadır.

Çift tarama yönteminin bir başka türü sinemada kullanılmaktadır. Sinema filmi saniyede 24 resim gösterecek biçindedir. Ancak bir resim gösterilirken ışık bir kez söndürülür ve yakılır. Bu yolla bir resim iki kez gösterilmiş olur ve bunun sonucu olarak saniyede 48 resim değişir. Gözümüz ise 48 resim/san'lık hızdaki değişimleri izleyemez ve hareketler sürekli imiş gibi görülür.



$y/n$  den daha küçük uzaklıklarda parlaklık değişikliği olması gerekmez. Çünkü gözümüz  $y/n$  den daha küçük olan uzaklıkları ayırt edemez. Bu bakımdan bir çizgi üzerindeki parlaklığı gösteren işaretin bantgenişliğinin belli bir değerden fazla olması görüntü kalitesi açısından bir yarar sağlamaz. Bu nedenle görüntü işareti, bantgenişliği belirli bir değere eşit olacak biçimde oluşturulur. Bu değer nedir ve nasıl bulunur?

Gözümüzün sınırlı ayırım gücü, bantgenişliği için aşılmasına gerek olmayan bir üstsınır koymuştur. Bu üst sınır şöyle bulunabilir: Gözümüzün ayırt edebileceği en ayrıntılı bir görüntü düşünelim. Bu aynı zamanda, gözümüzün ayırt edebileceği en geniş bantlı görüntü işareti olacaktır. Şekil 7.7'de gösterilen satranç tahtası şekli böyle bir görüntüdür. Bu görüntünün bantgenişliğini kabaca bulalım. Bir siyah-bir beyaz nokta çiftinin işareti oluşturan kare dalganın bir dönemini oluşturduğu düşünülürse, saniyede böyle kaç dönem işaret olduğu şöyle hesaplanabilir:

$$\left(\frac{\text{Dönem}}{\text{san}}\right) = \left(\frac{\text{Resim}}{\text{saniye}}\right) \left(\frac{\text{çizgi}}{\text{resim}}\right) \left(\frac{\text{nokta}}{\text{çizgi}}\right) \left(\frac{\text{dönem}}{\text{nokta}}\right)$$

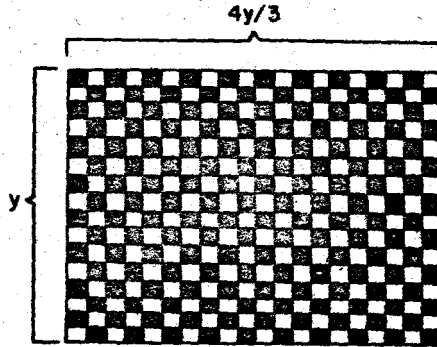
Buradan

$$25 \times n \times \frac{4}{3} n \times \frac{1}{2} = \frac{50}{3} n^2 \quad \text{dönem/san}$$

bulunur.

$n=625$  olduğuna göre, kare dalga işaretin frekansı

$$\frac{50}{3} \times (625)^2 = 6.5 \text{ MHz}$$

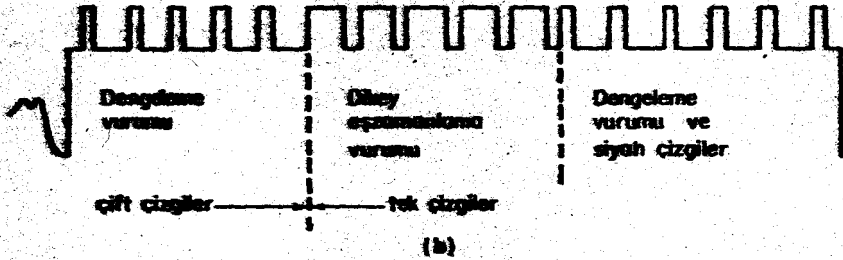
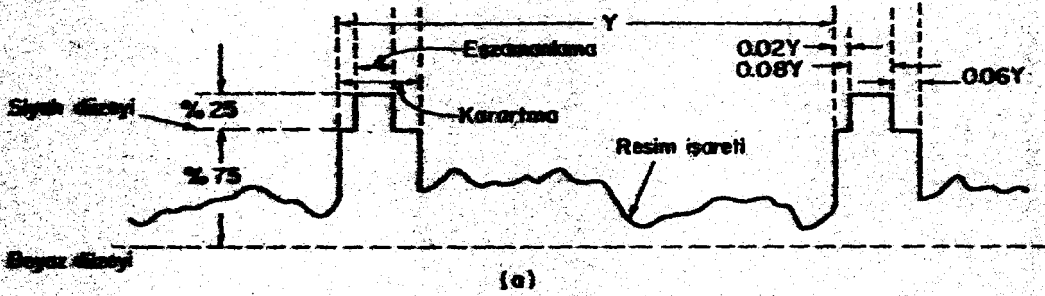


Şekil 7.7 Bir görüntü

olur. Ancak 6.5 MHz kare-dalğanın ana frekansıdır. Bu kare dalğanın aslına yakın olarak üretilmesi için 3., 5., 7., ve 9. harmonikler gerekmektedir ki bu durumda işaretin bantgenişliği 40-50 MHz ı geçer. Bu gözümüzün ayırt edebileceği en geniş bantlı görüntü işaretinin bantgenişliğidir. Gerçekte kullanılan görüntü işaretleri bu kadar ayrıntılı değildir ve ortalama bir TV görüntü işaretinin bantgenişliği 5-8 MHz arasındadır. Görüntü işaretinin bazı özellikleri nedeniyle, frekans görüncesinin

0-5 MHz arasındaki tüm bölgede görüntü bileşenleri vardır.

Görüntünün görüntü işaretine ve görüntü işaretinin yeniden görüntü haline dönüştürülmesinde, kullanılan tarama düzeninin istendiği gibi çalışabilmesi için, dayarlı bir eşzamanlama gerekmektedir. Bunu sağlamak için görüntü işaretinin üzerine, bir çizginin taramasının bittiğini belirten ve bir resim taramasının bittiğini belirten kodlanmış işaretler eklenir. Bu eşzamanlama işaretleri kullanılarak ışının ekran üzerinde istendiği gibi hareket etmesi sağlanır. Görüntü işaretinde çizgi aralarına eklenen yatay eşzamanlama vurumları Şekil 7.8a'da gösterilmiştir. Yatay eşzamanlama vurumu süresince ışın bir sonraki tek ya da çift



(a) Yatay eşzamanlama vurumları eklensmiş görüntü işareti

(b) Dikey eşzamanlama vurumları

### Şekil 7.8 Görüntü işareti dalga biçimi

çizginin başına gider. Bu süre içinde ışının ekranda görünmemesi gerekir. Bu da vurum süresince işaret düzeyinin siyaha karşı gelen değerler içinde olması ile sağlanır. Bu yolla ışın bir sonraki çizgiye geçer ve geçiş sırasında ekranda bir iz bırakmaz.

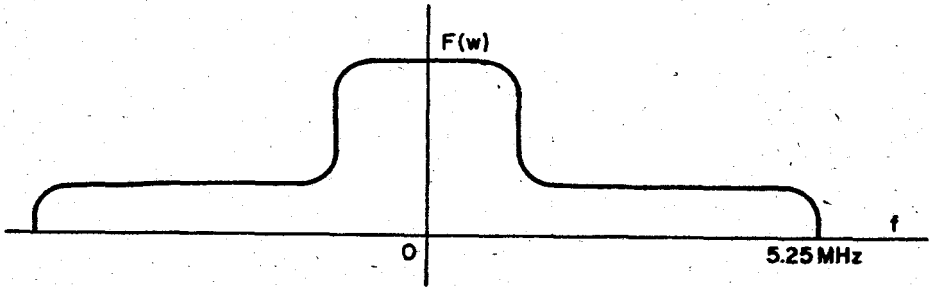
Tek sayılı çizgilerin taraması tamamlandığında ışının çift sayılı çizgilerin taramasına başlaması için gerekli eşzamanlamayı belirten dikey eşzamanlama ve dengeleme vurumları Şekil 7.8b'de gösterilmiştir.

Aynı biçimde çift sayılı çizgiler tarandıktan sonra tek sayılı çizgilerin taranmasına başlanması için gerekli eşzamanlamayı belirten dikey eşzamanlama ve dengeleme vurumları da Şekil 7.8b'de gösterilenlere benzer. Her iki durumda da dikey eşzamanlama vurumları süresince hem eşzamanlama sağlanır, hem de ışının ekranın altından üstüne geçmesi sağlanır. Bu süre içinde ışının ekranda görünmemesi için dikey eşzamanlama vurumlarında işaret, siyaha karşı gelen değer in ötesindedir.

Şekil 7.8a ve b'de değişik bölümleri gösterilen yatay ve dikey eşzamanlama vurumları eklenmiş görüntü işareti bileşik görüntü işareti olarak adlandırılır. Bu nedenle TV yayınında bilgi işaretinin iki bileşeni vardır:

- (1) bileşik görüntü işareti
- (2) ses işareti

Bileşik görüntü işareti için tipik bir frekans görüngesi Şekil 7.9'da gösterilmiştir. Gerçekte bileşik görüntü işaretinin frekans görüngesi



Şekil 7.9 Bileşik görüntü işaretinin frekans görüngesi

bu şekilde gösterildiği gibi sürekli değildir. Bileşik görüntü işaretinde mevcut belirgin dönemlilikler nedeniyle frekans görüngesi çizgilerden oluşan bir çizgi görüngesidir. Yatay eşzamanlama vurumları arasındaki süre  $T = 1/(625 \times 25) = 64 \mu\text{san}'\text{dır}$ . 64 mikrosaniyede bir yinelenen yatay eşzamanlama vurumlarının ortaya çıkardığı dönemlilik nedeniyle frekans görüngesinde yaklaşık olarak 16 KHz aralıklarla frekans bileşenleri vardır. Saniyede 50 kez yinelenen dikey eşzamanlama vurumları ise frekans görüngesinde 50 Hz aralıklı frekans bileşenleri olmasına neden olur.

### TV'de Bilgi İşaretinin Modülasyonu

TV'de bilgi işareti, yukarıda da belirtildiği gibi, iki bileşenden oluşur: (1) (bileşik) görüntü işareti ve (2) ses işareti. Bu bilgi işaretinin modülasyonu ise şu biçimde yapılır:

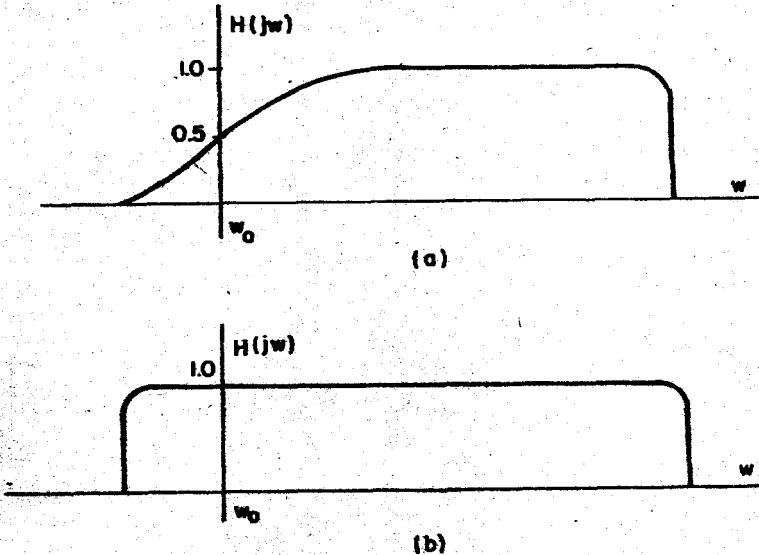
- (1) Görüntü işaretine büyük taşıyıcılı artıkyan bant modülasyonu uygulanır. Taşıyıcı frekansı  $\omega_0$  "görüntü taşıyıcı frekansı" olarak adlandırılır.

(2) Ses işareti ise  $(\omega_0/2\pi) + 5.5$  MHz frekansındaki bir sinüzoidal frekansını modüle eder.

Buna göre görüntü işaretine büyük taşıyıcılı AYB, ses işaretine ise FM modülasyonu uygulanır. Çakışmayan frekans bölgelerini kapsayan bu iki modüle edilmiş işaret toplanarak, modüle edilmiş TV işareti elde edilir.

Görüntü işaretine AYB modülasyonu uygulanmasında başlıca neden bantgenişliği azaltımı sağlamaktır. Frekans görüngesi Şekil 7.9 da gösterilen görüntü işareti ÇYB veya normal GM modülasyonuna uygulansaydı, bantgenişliği 10.5 MHz olurdu. Ancak AYB modülasyonu yapıldığında bu bantgenişliği 6.5 MHz'e kadar indirilmektedir. Bu yolla kazanılan 4 MHz'lik frekans bandı küçümsenmeyecek kadar geniş bir banttır. Büyük taşıyıcı yardımıyla bu AYB modüle edilmiş işareti zarf sezici ile demodüle etmek olasıdır. Büyük taşıyıcılı AYB modüle edilmiş işaretin zarf sezici ile demodüle edilmesi altbölüm 5.4'te incelenmiştir. Ses işaretinin FM modülasyonu ile iyi nitelikli ses iletişimi elde edilmiş olur. FM'de bantgenişliği GM'ye göre çoktur. Ancak ses işaretinin gönderilmesinde FM kullanılması sonucunda ortaya çıkan bantgenişliği modüle edilmiş görüntü işaretinin bantgenişliğine göre oldukça küçüktür.

AYB modülasyonu işareti elde edilmesinde, Bölüm 5'de de belirtildiği gibi, önce ÇYB modülasyonu işareti elde edilir, sonra bu işaret bir AYB süzgecinden geçirilir. TV vericilerinde modüle edilmiş görüntü işareti gerçekten bir AYB modülasyonu işareti değildir. Uygulamada kullanılan modülasyon şöyledir. ÇYB modülasyonu işareti Şekil 7.10a'da gösterildiği gibi bir AYB süzgecinden değil Şekil 7.10b'de gösterilen



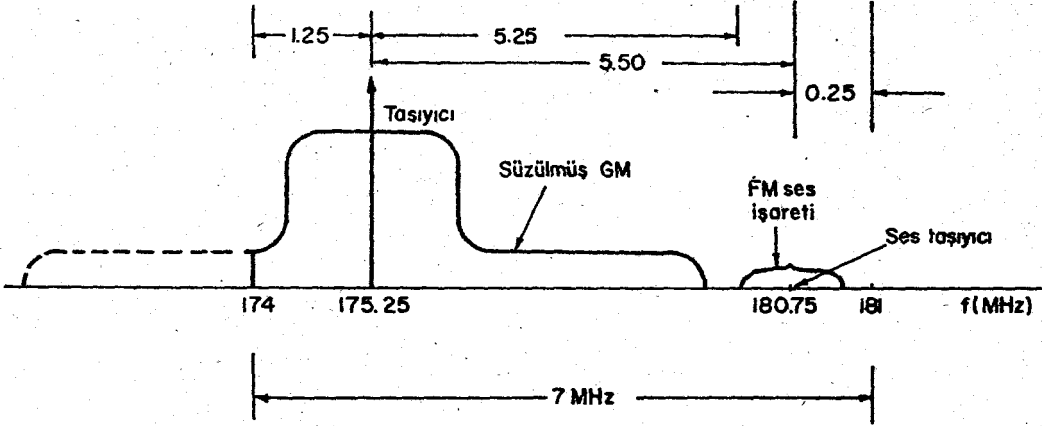
(a) Bir AYB süzgeç özgeçirisi

(b) Bir bantgeçiren süzgeç özgeçirisi

Şekil 7.10 Süzgeç özgeçirileri



süzgeçten geçirilir. Bu biçimde elde edilen işaret ne ÇYB, ne TYB ne de AYB işaretidir. Bu işaretin frekans görüngesi, modüle edilmiş ses işareti de dahil, TRT Ankara Televizyon vericisinin değerleri ile Şekil 7.11 de gösterilmiştir. TRT Ankara TV vericisinden yayımlanan işaretin frekans görüngesi Şekil 7.11'de gösterildiği gibidir.



Şekil 7.11 TRT Ankara TV işareti frekans görüngesi

Yukarıda belirtildiği gibi modüle edilmiş olan görüntü işareti TV alıcısında Şekil 7.10a'da gösterilen türden bir AYB süzgecinden geçirilir ve çıkış işareti doğrudan AYB modüle edilmiş işaretin aynısı olur. Bu nedenle, her ne kadar TV vericisinden yayımlanan görüntü işareti AYB değilse de, alıcıda AYB biçimine sokulduğu için görüntünün AYB modülasyonuna uygulandığı söylenebilir.

Şekil 7.11 den de görüldüğü gibi bir TV işareti (görüntü ve ses) 7 MHz'lik bir bantı kapsamaktadır. Ses taşıyıcısı, görüntü taşıyıcısından 5.5 MHz ötededir. FM modüle edilmiş ses işareti için merkezi ses taşıyıcı frekansı olan 500 KHz'lik bir bant ayrılmıştır. FM modüle edilmiş ses işaretinde frekans sapma 50 KHz alınır. Ses işaretinin 10 KHz'e bant sınırlı olduğunu varsayarsak, bu FM ses işareti bant genişliğinin 120 KHz olduğu bulunur. Bu durumda FM ses işareti 500 KHz lik bant rahatça sığar ve ayrıca altta ve üstte boş frekans aralıkları kalır. FM ses işaretinin, altta görüntü işareti ile, üstte komşu TV istasyonunun görüntü işareti ile aralarındaki bu boş frekans aralıkları, demodülatörde bu işaretlerin süzgeçlerle birbirlerinden kolayca ayrılmasına olanak sağlar.

Türkiye'de ve Avrupa'nın büyük bölümünde geçerli olan CCIR (Comité Consultatif International de Radio) ölçünlerine göre TV yayımlarına ayrılmış olan frekans bantları Çizelge 7.1 de gösterilmiştir. TV dizgeleri konusunda daha geniş kapsamlı ve ayrıntılı bilgi edinmek isteyen okurlara Ergün Tütüncüoğlu'nun Televizyon Tekniği adlı kitabını ve yazarın bu konudaki diğer kitaplarını salık veririz.

Bant	Kanal	Frekans Bandı	Görüntü Taşıyıcı	Ses Taşıyıcı
I	2	47-54 MHz	48.25 MHz	53.75 MHz
	3	54-61 MHz	55.25 MHz	60.75 MHz
	4	61-68 MHz	62.25 MHz	67.75 MHz
II		68-108 MHz	FM Radyo Yayınları	
III	5	174-181 MHz	175.25 MHz	180.75 MHz
	6	181-188 MHz	182.25 MHz	187.75 MHz
	7	188-195 MHz	189.25 MHz	194.75 MHz
	8	195-202 MHz	196.25 MHz	201.75 MHz
	9	202-209 MHz	203.25 MHz	208.75 MHz
	10	209-216 MHz	210.25 MHz	215.75 MHz
	11	216-223 MHz	217.25 MHz	222.75 MHz
12	223-230 MHz	224.25 MHz	229.75 MHz	
IV	21-39	470-622 MHz	(UHF)	
V	40-60	622-790 MHz	(UHF)	

Çizelge 7.1 Televizyon Yayın Bantları

#### 7.4 TELEVİZYON ALICILARI

Televizyon alıcıları başlıca iki kümede toplanabilir:

1. "Ayrı ses ve görüntü" alıcıları
2. "Taşıyıcılararası" alıcılar

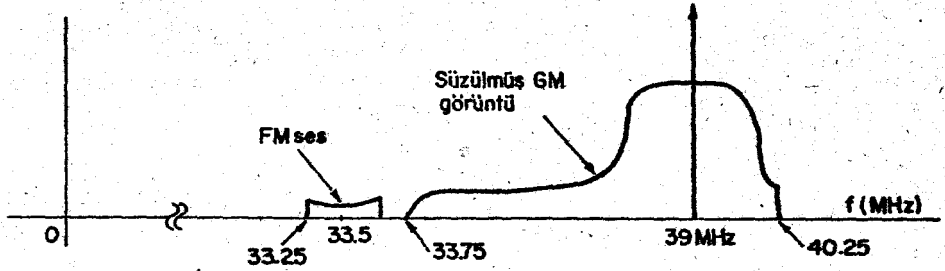
TV alıcılarının tarihi gelişimi içinde önceleri kullanılan alıcılar ayrı ses ve görüntü türü alıcılardır. Uygulamada ortaya çıkan bazı sakıncalar nedeni ile, bu tür alıcıların kullanımı bırakılmıştır. Bugün kullanılmakta olan alıcılar taşıyıcılararası türüdür. Her iki tür alıcının çalışma ilkeleri, ayrı ses ve görüntü alıcılarında ortaya çıkan sorunlar bu altbölümde incelenecektir.

#### Ayrı Ses ve Görüntü Alıcıları

Her iki tür TV alıcısında da süperheterodin ilkesi kullanılmaktadır. Antende elde edilen TV işareti, (izlemek istenen kanala göre) taşıyıcı frekansı  $f_g$  olan AYE (bu işaretin tam AYE olmadığı bir önceki altbölümde belirtilmişti) modüle edilmiş görüntü işareti ile taşıyıcı frekansı  $f_g = f_g + 5.5$  MHz olan FM modüle edilmiş ses işaretinden oluşur. Bu işaret ilk olarak bantgenişliği 10 MHz olan RF (radyo frekans) süzgeç ve yükselticiden geçirilir. RF katı çıkışında izlemek istenenle birlikte alt ve üst kenar kanal işaretlerinden kalıntılar bulunmaktadır. Bu istenmeyen işaretler ileride ara frekans süzgeçleri yoluyla yok edilir.

RF süzgeç ve yükseltici çıkışındaki işaret, yerel salınan üretilen  $f_g + 39$  MHz frekansındaki sinüzoidal ile birlikte karıştırıcıya uygulanır. Karıştırma sonucunda görüntü taşıyıcısı 39 MHz'lik değişmez ara frekansına taşınmış olur; ses taşıyıcısı ise 33.5 MHz'lik ara frekansına

taşınmış olur. Karıştırma sonunda görüntü ve ses işaretlerinin modülasyon türlerinde bir değişiklik olmaz, yalnız karıştırılan sinüzoidal  $f + 39$  MHz'de olduğu için frekans görünüşü tersine dönmüş olur. Karıştırıcı çıkışındaki işaretin görünüşü Şekil 7.12'de gösterilmiştir. Bu şekilde ara frekans katında yok edilecek olan  $2f_g + 39$  MHz deki görüme bileğini

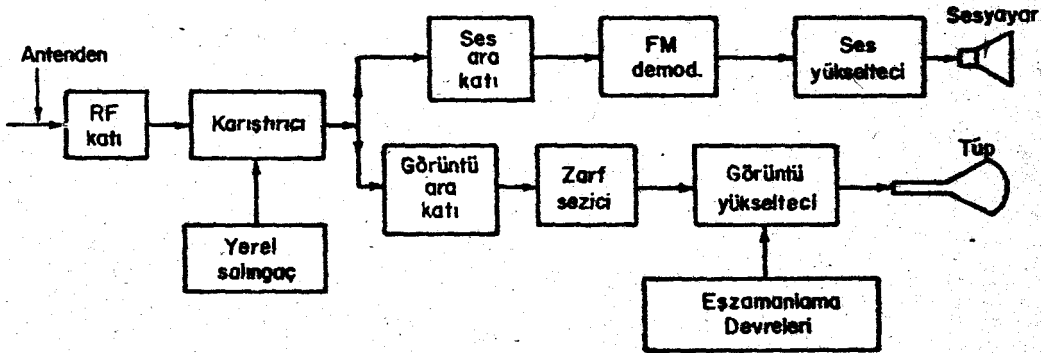


Şekil 7.12 Karıştırıcı çıkışındaki işaretin görünüşü

ve komşu kanal işaretleri kalıntıları gösterilmemiştir.

Ayrı ses ve görüntü alıcının buraya kadar incelenen bölümü her iki alıcı içinde olduğu gibi geçerlidir. İki tür alıcı bundan sonraki işlemlerde birbirlerinden ayrılmaktadırlar.

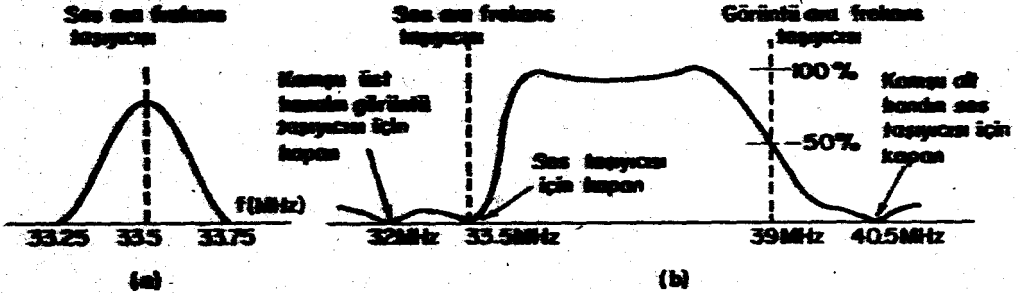
Ayrı ses ve görüntü alıcının öbek çizimi Şekil 7.13'de verilmiştir. Bu tür alıcının çalışmasındaki temel ilke ses ve görüntü işaretlerinin



Şekil 7.13 Ayrı ses ve görüntü alıcı öbek çizimi

birbirlerinden ara frekans katlarında ayrılmaları ve bu işaretlerin ayrı ayrı demodüle edilmeleridir. Ses ara frekans katında merkezi 33.5 MHz, bantgenişliği 200-300 KHz olan süzgeç ve yükselteç kullanılarak FM modüle edilmiş ses işareti ayrı olarak elde edilir. Sonra bu FM işareti bir FM demodülatörü ile demodüle edilir. Elde edilen ses işareti ses yüksel-

taçlarınde yükseltilir ve ses sayara uygulanır. Ses ara frekans katında kullanılan süzgecin özegrisi Şekil 7.14a'da gösterilmiştir.



Şekil 7.14 Ayrı ses ve görüntü alıcıda ara frekans süzgeç özegrileri

Görüntü ara frekans katında ise, özegrisi Şekil 7.14b'de gösterilen süzgeç yardımıyla, görüntü işareti büyük taşıyıcılı AYB işareti dönüştürülür. Ayrıca bir süzgeç yardımıyla alt ve üst komşu kanal işaretleri kalıntıları tamamen söndürülür. Elde edilen büyük taşıyıcılı AYB işareti zarf sezici kullanılarak demodüle edilir. Zarf sezici çıkışındaki işaret, frekans görüngesi Şekil 7.9 da gösterilen görüntü işaretidir. Yükseltildikten sonra TV tübüne uygulanan bu işareten görüntü elde edilir.

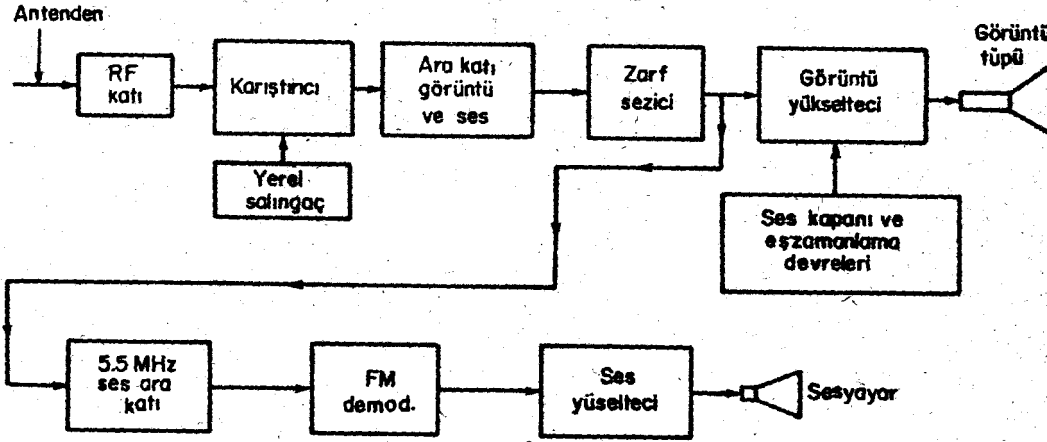
Ayrı ses ve görüntü alıcı, iletişim dizge tasarımcısının aklına ilk gelecek kolay bir alıcıdır. Yukarıda anlatıldığı gibi işleyişinde de kuramsal hiçbir güçlük yoktur. Ancak uygulamada önemli bir güçlük ortaya çıkmaktadır. Örnek olarak Ankara İKT televizyonunu ele alalım. Bu yayının görüntü taşıyıcı frekansı 175.25 MHz dir. Bu yayının izlenebilmesi için yerel salınmaç 214.25 MHz frekansında bir sinüzoidal üretmelidir. Ancak bu salınmaçın kararlılığı önemli bir sorundur. Salınmaç frekansında 20.1 gibi önemli sayılabilecek bir kayma olduğu takdirde, bu, görüngede yaklaşık olarak 200 KHz'lik bir kayma anlamına gelir. Görüntü 39 MHz'den, ses de 33.5 MHz'den 200 KHz kayması olacaktır. Frekansın 200 KHz kayması, 7 MHz bant genişliği olan görüntü ara frekans süzgeci çıkışındaki işarete önemli bir bozulmaya neden olmaz. Ayrıca zarf sezicinin işlemesi frekans kaymasına duyarlı değildir. Bu nedenle zarf sezici çıkışındaki görüntü işareti frekans kaymasından dolayı önemli bir bozulmaya uğramaz. Ancak ses işaretinde durum farklıdır. Ses ara frekans süzgecinin bant genişliği 200-300 KHz kadardır ve görüngede meydana gelen 200 KHz'lik bir kayma sonucunda ses işareti süzgecin tamamen dışına düşer. Daha az kaymalarda bile ses işareti önemli ölçüde bozulmaya uğrar.

Ayrı ses ve görüntü alıcının uygulamasında ortaya çıkan bu sorunu şöyle özetleyebiliriz: Ayrı ses ve görüntü alıcının işleyişi salınmaç frekansına çok duyarlıdır. Salınmaç frekansında  $\pm 0.1$  lik bir kayma 200 KHz'lik büyük bir kaymaya neden olur. Bu ise görüntü işaretinin değilse bile, ses işaretinin önemli ölçüde bozulmasına ya da tüpüyle yok olmasına neden olur. Bu durumu düzeltmek için salınmaç frekansının sürekli ayarlanması gerekir. Kullanımda ortaya çıkan bu güçlük nedeniyle

ayrı ses ve görüntü alıcının kullanılması bırakılmıştır. Taşıyıcılararası alıcının işleyişinde böyle bir güçlükle karşılaşılmaz.

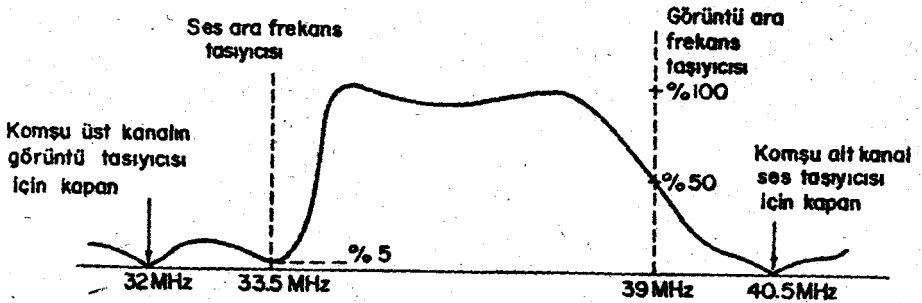
### Taşıyıcılararası Alıcı

Taşıyıcılararası alıcının ilk katlarını, ayrı ses ve görüntü alıcı da olduğu gibi bir RF (süzgeç ve yükselteç) katı ve bir karıştırıcı oluşturur. Taşıyıcılararası alıcının öbek çizimi Şekil 7.15'de gösterilmiştir. Karıştırıcı çıkışındaki işaretin frekans görünüşü Şekil 7.12 de gösterilen görünüşün aynıdır.



Şekil 7.15 Taşıyıcılararası alıcının öbek çizimi

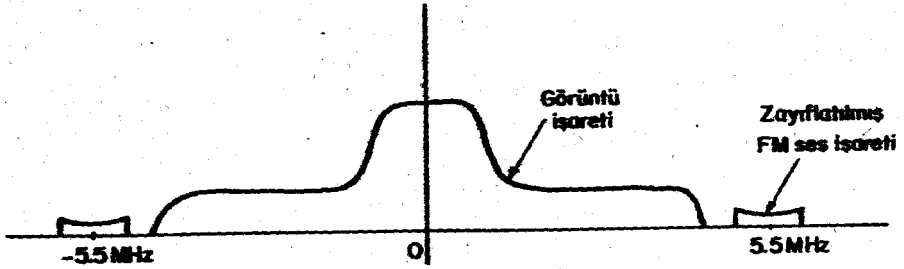
Görünüşü Şekil 7.12 de gösterilen karıştırıcı çıkışındaki ses ve görüntü işareti ara katı girişine uygulanır. Burada dikkate değer olan şey tek bir ara katı olmasıdır. Hem ses hem görüntü aynı ara katı süzgeç ve yükseltecine uygulanır. Ara kattaki süzgeç ve yükseltecinin özgeğrisi Şekil 7.16'da verilmiştir. Bu ara katında süzölmüş GM biçimindeki görüntü



Şekil 7.16 Taşıyıcılararası alıcının ara katı özgeğrisi

işareti büyük taşıyıcılı AYB biçimine dönüştürülür. Kapanlar yardımıyla alt ve üst komşu kanal işaretleri tümüyle söndürülür. Ses işareti, görüntü işaretinin göre Z 5 e kadar zayıflatılır. Burada ses işareti tamamen yok edilmez, ancak iyice zayıflatılmış olur.

Ara katı çıkışındaki büyük taşıyıcılı AYB görüntü işareti ve iyice zayıflatılmış FM ses işareti birlikte büyük taşıyıcılı bir AYB işareti olarak düşünülebilir. Bu işaret zarf seziciye uygulandığında zarf sezici çıkışında bu AYB işaretin demodüle edilmiş biçimi vardır. Zarf sezici çıkışındaki temelbant işaretinin frekans görünüşü Şekil 7.17'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi bu işaret görüntü işareti artı 5.5 MHz'de



Şekil 7.17 Taşıyıcılararası alıcıda zarf sezici çıkışındaki işaretin görünüşü

iyice zayıflatılmış FM ses işaretidir. Bu işarete bu noktadan sonra ses ve görüntü için ayrı ayrı işlem uygulanır. Görüntü tübünden önceki görüntü yükselticinde zayıf olan FM ses işareti iyice zayıflatılarak ya da tümüyle yok edilerek yalnızca görüntü işareti elde edilir ve bu işaret görüntü tübüne uygulanarak görüntü elde edilmiş olur.

Ses işaretini elde etmek için zarf sezici çıkışındaki işarete şu işlemler uygulanır: Bu işaret yeni bir ses ara katından geçirilir. Bu ara katındaki süzgeç ve yükselteç yalnız 5.5 MHz deki zayıf FM ses işaretini geçirir ve yükseltir. Bu nedenle ara katı çıkışında taşıyıcısı 5.5 MHz olan FM ses işareti elde edilmiş olur. Bu işaret bir FM demodülatörü ile demodüle edilir. Elde edilen temelbant ses işareti ses yükseltici ile yükseltilerek ses yayara uygulanır.

Taşıyıcılararası alıcının çalışmasında dikkate değer bir nokta alıcının işleyişinin yerel salıngaçta meydana gelebilecek frekans kaymalarından etkilenmemesidir. Bunun nedeni ise şudur: Zarf sezici frekans kaymasına duyarlı değildir. Bu yüzden zarf sezici çıkışındaki FM ses işareti frekans kayması olsa da olmasa da 5.5 MHz dendir. Zarf sezici görüntü taşıyıcılı frekansını ile ses taşıyıcılı frekansını arasındaki 5.5 MHz'lik uzaklığı korur. Frekans kayması olduğunda iki taşıyıcı frekansını da birlikte kaydiklarından aralarındaki 5.5 MHz değişmez. Zarf sezici ise görüntü taşıyıcılı frekansını (nerede olursa olsun) sifira taşıdığı için, FM ses işareti (frekans kayması olsa dahi) kesin ve tam olarak 5.5 MHz'e taşınmış olur. Bu nedenle ayrı ses ve görüntü alıcıda ortaya çıkan, alıcının

salıngaç frekansına duyarlılığı sorunu taşıyıcılararası alıcının işle-  
yişinde söz konusu olmaz.

Daha önce de belirtildiği gibi bugün kullanılmakta olan televizyon  
taşıyıcılararası alıcı türündendir.

## 7.5. RENKLİ TELEVİZYON DİZGELERİ

Siyah-beyaz televizyon dizgelerini inceledikten sonra kısaca, renk-  
li televizyon dizgelerinden söz etmek yerinde olur. Siyah-beyaz TV den  
ayrı olarak, renkli TV de amaç görüntünün renkli olmasıdır. Renkli TV  
dizgelerinin geliştirilmesinde önemli bir kısıtlama, geliştirilecek diz-  
gelerin var olan siyah-beyaz TV dizgeleri ile bağdaşabilir olması gere-  
ğidir. Örneğin bir renkli TV yayını, renkli TV alıcıları ile renkli ola-  
rak izlendiği gibi, siyah-beyaz TV alıcıları tarafından da siyah-beyaz  
olarak izlenebilmelidir. Bu, o sırada var olan milyonlarca siyah-beyaz  
TV alıcısının işe yaramaz duruma gelmemesi için, gerekli ekonomik bir  
zorunluluktur. Benzer bir durum stereo FM dizgelerinin geliştirilmesi sı-  
rasında ortaya çıkmıştı. Altıncı bölümde açıklandığı gibi stereo FM diz-  
gesi öyle geliştirilmiştir ki, stereo FM yayını stereo FM alıcılar tara-  
fından stereo, mono FM alıcılar tarafından da mono olarak alınır.

Yukarıda sözü edilen bağdaşabilirlik kısıtlamasına ek olarak bir de  
bantgenişliği sorunu vardır. Renkli TV yayınında doğal olarak işaretin  
bilgi içeriği daha fazla olduğu için işaret bantgenişliğinin daha büyük  
olması beklenir. Ancak, yaygın biçimde kullanılmakta olan siyah-beyaz  
TV yayın bant ve kanal düzeninin bozulmaması için renkli TV yayınlarında  
da siyah-beyaz TV yayınlarında olduğu gibi her istasyona 7 MHz lik bir  
bant verilmektedir. Bu kısıtlamalar altında geliştirilen renkli TV diz-  
gelerinin, renkli TV yayını gerçekleştirecek en kolay ve en verimli diz-  
geler olduğu söylenemez. Renkli TV dizgelerinin geliştirilmesine sıfır-  
dan başlanabilseydi, ortaya şimdikinden daha kolay, daha verimli ve bel-  
ki de çok değişik dizgeler çıkabilirdi. Ancak ortada uyulması gereken  
bir takım ekonomik ve teknik kısıtlamalar vardır.

Renkli görüntü kırmızı, yeşil ve mavi renklerin karıştırılması ile  
elde edilebilir. Yukarıda sözü edilen kısıtlamalar olmasa bu üç renk  
bilgisinin ayrı ayrı gönderilmesi ile renkli görüntü iletimi sağlana-  
bilirdi. Ancak söz konusu bağdaşabilirlik ve bantgenişliği kısıtlamaları  
altında bu üç renk işareti  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$ 'yi belli işlemlere  
uygulayarak göndermek gerekmektedir. Bu kısıtlamaları sağlayan, bugün  
kullanılmakta olan renkli TV dizgesi 1954 yılında geliştirilmiştir.  
(Proc. IRE Vol. 42, Jan 1954).

Üç renk bilgi işareti  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$ 'nin bağımsız doğrusal  
bileşimleri alınarak üç yeni işaret elde edilir.

$$x_p(t) = 0.30x_k(t) + 0.59x_y(t) + 0.11x_m(t)$$

$$x_I(t) = 0.60x_k(t) - 0.28x_y(t) - 0.32x_m(t) \quad (7.2)$$

$$x_Q(t) = 0.21x_k(t) - 0.52x_y(t) + 0.31x_m(t)$$

Bu denklemlerdeki katsayılar öyle seçilmiştir ki  $x_p(t)$ ,  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  işaretleri  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$  işaretlerinin bağımsız bileşimleridir. Bu nedenle  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$  renk işaretleri  $x_p(t)$ ,  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  işaretlerinden ters bir dönüşüm ile elde edilebilir. Yukarıda verilen doğrusal bileşim denklemlerinin ilkinde katsayılar öyle seçilmiştir ki  $x_p(t)$  işareti siyah-beyaz görüntüdeki parlaklık işaretine eşittir. Diğer iki işaret  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  ise renk işaretleri olarak adlandırılır.

Renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$ , bir vektör biçiminde yazılabilir

$$x_r(t) = x_I(t) + j x_Q(t) \quad (7.3)$$

ve bu vektöre renk vektörü denir. Renk vektörü  $x_r(t)$ 'nin büyüklüğü  $|x_r(t)|$  renk doyma işareti, açısı açı  $\angle x_r(t)$  ise renk tonu işareti olarak adlandırılır.

Renk bilgisi  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$  yi iletmek için  $x_p(t)$ ,  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  işaretlerini iletmek yeterlidir. Sorun bu işaretlerin var olan kısıtlamalar altında nasıl iletileceğidir?  $x_p(t)$  işareti siyah-beyaz görüntüdeki parlaklık işaretidir ve siyah-beyaz görüntü işaretindeki gibi oluşturulur. Renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  bir alt taşıyıcının genliğini ve evresini modüle etmekte kullanılır ve

$$y(t) = |x_r(t)| \cos(\omega_s t + \text{açı } x_r(t)) \quad (7.4)$$

işareti elde edilir. Burada  $x_r(t)$  (7.3)'te tanımlanan renk vektörüdür.  $\omega_s$  ise alt taşıyıcının açısız frekansıdır. Renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$ 'nin  $y(t)$ 'den elde edilebileceği açıktır. Renkli görüntü işareti, parlaklık işareti  $x_p(t)$  ile renk işareti  $y(t)$  nin toplanmasıyla elde edilir. Ayrıca siyah-beyaz görüntü işaretindeki gibi eşzamanlama vurumları da renkli görüntü işaretine eklenir. Renkli görüntü işaretinin zaman dalgabıçımı Şekil 7.18'de gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi çizgi eşzamanlama vurumu üzerine renk alt taşıyıcısının 8 dönemlik bir bölümü eklenmiştir. Bu sinüzoidal, renk işareti  $y(t)$  nin demodüle edilmesinde eşzamanlama için kullanılır.

Parlaklık işareti  $x_p(t)$  ve renk işareti  $y(t)$  nin Şekil 7.18 de gösterildiği gibi toplandığında alıcıda birbirlerini etkilememeleri nasıl sağlanır? Parlaklık işareti  $x_p(t)$  siyah-beyaz görüntü işaretinde olduğu gibi (5.25 MHz'lik) tüm bandı kapsar. Buna göre renk işareti  $y(t)$  yi gönderecek bant kalmamış gibi görünür. İnsan gözü üzerine yapılan deneyler göstermiştir ki renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  sırasıyla 1.3 MHz'e ve 0.6 MHz'e bant sınırlı kabul edilebilir. Ayrıca renk işaretleri  $x_I(t)$





insan gözü izleyemez. Göz bu değişimin ortalaması olan parlaklık işaretini görür. Böylece renkli işaret siyah-beyaz alıcı tarafından siyah-beyaz olarak verilir. Bu biçimde bağdaşabilirlik sağlanmış olur.

Renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  aynı frekansta ve evreleri  $90^\circ$  ayrı iki sinüzoidalın genliğini modüle eder ve modüle edilmiş iki işaret toplanır. Bu yolla (7.4)'de ifade edilen  $y(t)$  işareti elde edilir. Alıcıda renk işareti  $y(t)$  bir takım süzgeçler kullanılarak parlaklık işaretinden ayrılır.  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  ise evresi  $y(t)$  den  $90^\circ$  ayrı iki sinüzoidal eşzamanlı demodülasyon yapılarak ayrılır. Eşzamanlamalı demodülasyon için eşzamanlama vurumu üzerinde gönderilen dayanak sinüzoidalı kullanılır.  $x_p(t)$ ,  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  işaretlerinden ise ters dönüşümle  $x_k(t)$ ,  $x_y(t)$  ve  $x_m(t)$  işaretleri elde edilir. Bu yolla üç renk bilgisi alıcıya iletilmiş olur. Ters dönüşümün ise aşağıda verildiği biçimde olduğu kolayca bulunabilir:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_p(t) - 0.96x_I(t) + 0.62x_Q(t) \\ x_y(t) &= x_p(t) - 0.28x_I(t) - 0.64x_Q(t) \\ x_m(t) &= x_p(t) - 1.10x_I(t) + 1.70x_Q(t) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Bir siyah-beyaz işaret, bir renkli TV alıcısı tarafından alındığında (7.5)'den de görüleceği gibi her üç renk işareti de parlaklık işareti  $x_p(t)$ 'ye eşit olur ve görüntü siyah-beyaz olur. Bu olgu ters bağdaşabilirlik diye adlandırılır.

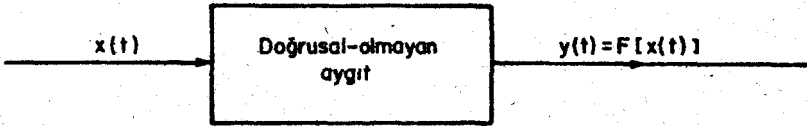
Renkli TV dizgelerinde renk işaretleri  $x_I(t)$  ve  $x_Q(t)$  nin elde edilişi, bunların uygun şekilde modülasyonu, sonra modüle edilmiş işaretin demodülasyonu ve renk işaretlerinin yeniden elde edilmesinde kullanılan iletişim dizgeleri üzerinde yukarıda söz edilenden çok ayrıntıya girmeye gerek yoktur. Bu konuya ilgi duyan okuyucular konuyla ilgili pek çok kiptan yararlanabilirler. (Tütüçoğlu [10], [11] v.s.).

## ALİŞTIRMALAR

- 7.1. Herbiri 10 KHz'e bant sınırlı dört ayrı bilgi işareti verildiğini düşünelim. Bu bilgi işaretleri ve genlik modülasyonu yöntemleri kullanılarak frekans bölmeli çoklama elde edilmektedir.

100 KHz ile 200 KHz arasındaki frekans bandını bu amaçla kullanan ve yukarıda istenilene gerçekleştirecek bir gönderme için blok çizimini yapınız.

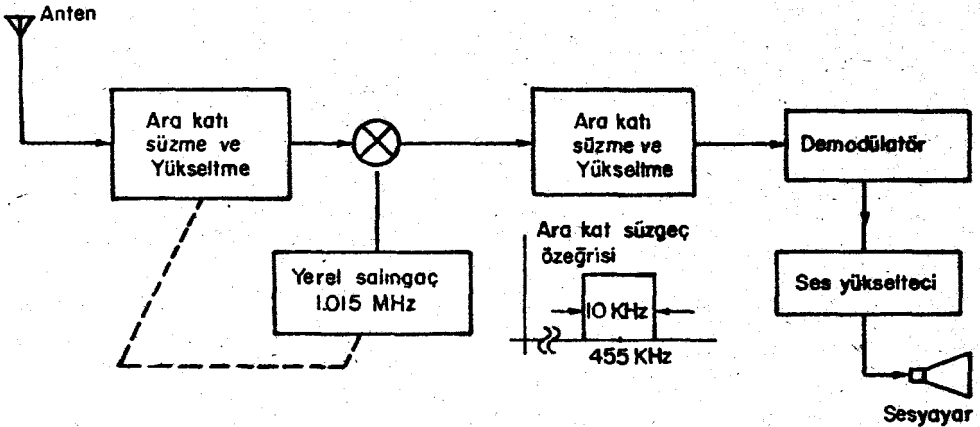
- 7.2. Şekil 7.A.1'de verilen doğrusal olmayan aygıtı düşününüz.



Şekil 7.A.1

Bu aygıtın girişine  $x(t) = \cos \omega_0 t$  işareti uygulanmaktadır. Taylor serisi açılımını kullanarak, bu aygıtla  $\omega_0$  'ın katı olan frekanslarda sinüzoidallerin nasıl üretilebileceğini açıklayınız. Daha sonra bu aygıtın bir frekans bölmeli çoklama dizgesinde nasıl kullanılabileceğini belirtiniz.

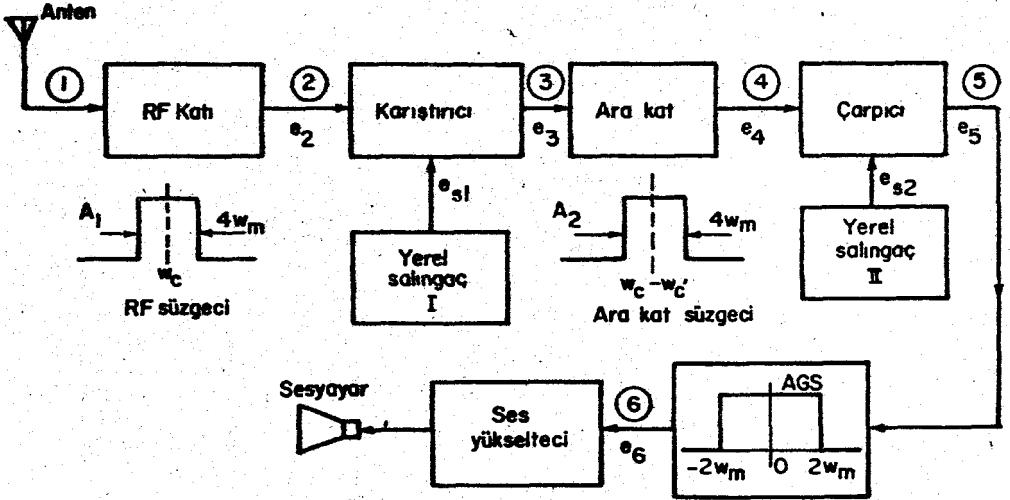
- 7.3. Şekil 7.A.2'de gösterilen süperheterodin almalıca ara kat süzgeci



Şekil 7.A.2

455 KHz'e akortlanmıştır. Yerel salınacağı frekansı ise 650 KHz'deki bir istasyona ayarlıdır. Ancak almalıca 1560 KHz'deki başka bir istasyonu da almaktadır. Bu istenilmeyen durumun nedenlerini açıklayınız ve bu durumu ortadan kaldıracak bir çözüm öneriniz.

7.4. Şekil 7.A.3 de gösterilen radyo almacını düşününüz. RF süzgeci, ara



Şekil 7.A.3

kat süzgeci ve alçak-geçiren süzgecin özeğrileri şekilde gösterilmiştir.

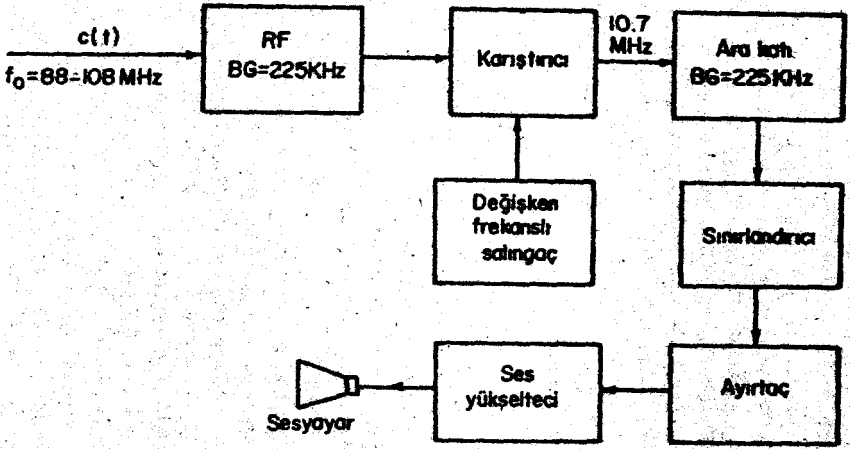
Karıştırıcı özeğri  $e_3 = e_2(\alpha_0 + \alpha_1 e_{s1})$  dir, burada  $\alpha_0$  ve  $\alpha_1$  değişmez sayılardır,  $e_{s1} = A \sin \omega_c' t$  dir. Çarpıcı çıktısı ise  $e_5 = e_4 e_{s2}$  olup burada  $e_{s2} = B \cos(\omega_c - \omega_c') t$  dir. 1 noktasında aşağıdaki işaretler olduğunda, 4 ve 6 noktalarındaki işaretleri bulunuz.

- Normal GM,  $[1 + \sin \omega_m t] \sin \omega_c t$
- Çift yan bant, bastırılmış taşıyıcı,  $\sin \omega_m t \sin \omega_c t$
- Tek yan bant,  $\cos(\omega_c - \omega_m) t$

7.5. Şekil 7.A.3 deki dizgede çarpıcı yerine özeğrisi  $e_5 = be_4^2$  olan bir kare-alıcı konuyor. RF katındaki süzgecin merkez frekansı  $f_c = \omega_c / 2\pi = 535$  ile 1605 KHz arasında değişebilmektedir. Yerel salıngaç I'deki sığaç ile RF katındaki süzgeç sığacı arasında bir bağıntı kurulmuş olup, her zaman  $f_c' = \omega_c' / 2\pi = f_c + 455$  KHz olmaktadır. Süzgeçlerin bantgenişlikleri 10 KHz'dir.

- 1 noktasındaki işaret  $\cos 2\pi \times 10^6 t$  ise, 3 ve 4 noktalarındaki işaretleri bulunuz.
- 1 noktasındaki işaret  $(1 + \sin 2\pi \cdot 10^3 t) \cos 2\pi \cdot 10^6 t$  ise, 3 ve 4 noktalarında hangi işaretler görünür?
- 1 noktasındaki işaret  $\sin 2\pi \cdot 10^3 t \sin 2\pi \cdot 10^6 t$  ise 5 ve 6 noktalarındaki işaretleri bulunuz. Sonuçları Alıştırma 7.4.b ile karşılaştırınız.

7.6. Şekil 7.A.4'de gösterilen süperheterodin FM alması 100 MHz'e ayarlanmıştır.



Şekil 7.A.4

- (a) 100 MHz'lik bir taşıyıcının frekansı 10 KHz'lik bir ses işareti ile modüle edilmiştir ve  $\beta = 0.1$  dir. Bu işaret için gereken RF süzgeci, ara kat süzgeci ve ses yükseltici bantgenişlikleri ne kadardır?
- (b) 100 MHz'deki taşıyıcının frekansını sırasıyla iki işaret modüle etmektedir. Birincisinde işaret frekansı 10 KHz ve  $\beta = 5$  dir. İkincisinde ise frekans 2 KHz ve  $\beta = 25$  dir. Hangisi daha çok bantgenişliği gerektirir? Hangi durumda ses yükselticinin çıkışı daha büyüktür?
- (c) 100 MHz'deki taşıyıcının frekansını sırasıyla iki işaret modüle etmektedir. Birincisinde frekans sapması 10 KHz ve  $\beta = 5$  dir. İkincisinde ise frekans sapması 2 KHz ve  $\beta = 25$  dir. Hangisi daha çok bantgenişliği gerektirir? Hangi durumda ses yükselticinin çıkışı daha büyüktür?
- 7.7. (a)  $f(\cdot) = 0.1 \sin 2\pi \times 10^3 t$  işareti 1 MHz'lik bir taşıyıcının genliğini modüle etmektedir. RF süzgecinin, ara kat süzgecinin ve ses yükselticinin bantgenişlikleri ne olmalıdır? (Şekil 7.A.3)
- (b)  $f(t) = 0.1 \sin 2\pi \times 10^3 t$  işareti 1 MHz'lik bir taşıyıcının frekansını modüle etmektedir. Frekans sapması 100 Hz olduğuna göre RF süzgecinin, ara kat süzgecinin ve ses yükselticinin bantgenişlikleri ne olmalıdır? (Şekil 7.A.4). Bulduğunuz sonuçları (a) kısmında bulunanlarla karşılaştırınız.
- (c) (a) ve (b) kısımlarını  $f(t) = 20 \sin 2\pi \times 10^3 t$  işareti için tekrarlayınız.

7.8. Taşıyıcı frekansı  $\omega_c$  olan bir ÇİB işaretine  $\omega_c - \omega_a$  frekansında büyük genlikli bir taşıyıcı ekleniyor. Elde edilen işaretin zaman bölgesi ifadesi şöyledir:

$$c(t) = A \cos(\omega_c - \omega_a)t + f(t) \cos \omega_c t$$

Burada  $A \gg |f(t)|$  dir ve  $f(t)$  nin en yüksek frekansı  $\omega_m$  dir.

(a) Yukarıda verilen  $c(t)$  ifadesi

$$c(t) = e(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$$

biçiminde yazıldığında  $e(t)$  ve  $\theta(t)$  ne olur?

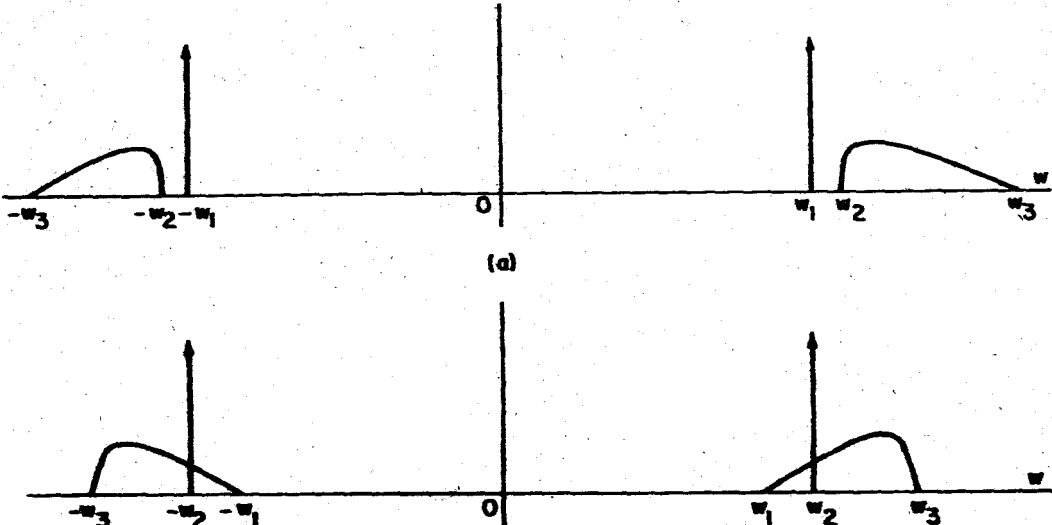
(b)  $c(t)$  işareti zarf seziciye uygulandığında zarf sezicinin çıktısı  $e(t)$  olur  $|x| < 1$  için  $(1+x)^r = [1+r x]$  yaklaştırmasını kullanarak zarf sezici çıktısının

$$e(t) = A + f(t) \cos \omega_a t$$

olduğunu gösteriniz.

(c)  $\omega_m < \omega_a$  ve  $\omega_m > \omega_a$  için zarf sezicinin girişine uygulanan  $c(t)$  ile zarf sezici çıktısının frekans görüngelerini çiziniz.

7.9. A1ıştırma 7.8'den de görülebileceği gibi büyük genlikle bir taşıyıcı eklenmiş darbantlı işaretlerin zarf seziciden geçirilmesi, bu işaretlerin taşıyıcı frekansındaki bir sinüzoidal ile karıştırılması ve bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi ile özdeştir. Büyük taşıyıcılı artık yan bant ve tek yan bant işaretlerinin zarf sezici kullanarak demodülasyonu, bu ilkenin uygulanmasından başka birşey değildir. A1ıştırma 7.8 de gösterilen ve yukarıda özetlenen ilkeyi kullanarak, zarf sezici girişine Şekil 7.A.5'de gösterilen işaretler uygulandığında, bunlara karşı gelen zarf sezici çıktılarının görüngelerini çiziniz.



# BÖLÜM 8

## VURUM

## MODÜLASYONU

## VE

## SAYISAL İLETİŞİM

## DİZGELERİ

### 8.1. GİRİŞ

Bölüm 1'de iletişim dizgelerinin, kullandıkları taşıyıcı türüne göre ve bilgi işaretinin yapısına göre olmak üzere iki yolla sınıflandırılacakları belirtilmişti. Taşıyıcıya göre sınıflandırma sonucunda iki modülasyon türü elde edilir.

1. *Sürekli dalga (SD) modülasyonu*. Bu modülasyon türünde taşıyıcı bir sinüzoidaldir.
2. *Kesikli modülasyon ya da vurum modülasyonu*. Bu modülasyon türünde ise taşıyıcı bir dönemli vurum dizisidir.

Bilgi işareti  $f(t)$  ye göre sınıflandırma yapıldığında şu iki modülasyon türü ortaya çıkar.

- a.  $f(t)$  sürekli bir işarettir ve sonuçta elde edilen modülasyon türü *örneksel modülasyon* diye adlandırılır.
- b.  $f(t)$  kesikli bir işarettir ve sonuçta elde edilen modülasyon türü ise *sayısal modülasyon* diye adlandırılır.

Bu iki sınıflandırmanın birleşimi ile dört tür iletişim dizgesi elde edilir: 1-a, 1-b, 2-a, 2-b.

Daha önceki bölümlerde değişik SD modülasyonu türleri incelenmişti. İncelenen bu türlerde bilgi işareti  $f(t)$  nin sürekli ya da kesikli olduğu belirtilmemişti. Bu nedenle Bölüm 4, 5 ve 6'da elde edilen sonuçlar, sürekli ve kesikli, genel bir  $f(t)$  için geçerlidir. Bu nedenle yukarıdaki

sınıflandırmaya göre 1-a ve 1-b türü iletişim dizgelerinin incelendiği söylenebilir. Diğer taraftan *ikili iletişim dizgeleri* diye adlandırılan özel bir iletişim dizgeleri sınıfı vardır ki burada kullanılan taşıyıcı bir sinüzoidaldir, bilgi işareti  $f(t)$  ise bir ikili dizi (0-1 dizisi ya da  $\pm 1$  dizisi) olup kesiklidir. Bir başka deyişle ikili iletişim dizgeleri yukarıdaki sınıflandırmaya göre 1-b sınıfına girerler. SD modülasyonu için elde edilen sonuçlar, genel olarak, ikili iletişim dizgelerine doğrudan uygulanabilir ise de, bu tür iletişim dizgeleri çok yaygın kullanıldığı için, bunlar üzerinde ayrıca durmak gerekir. Bu bölümün sonunda bazı ikili iletişim dizgeleri incelenecektir.

Bu bölümde amaç çeşitli vuruş modülasyonu türlerinin incelenmesidir. Daha önce de belirtildiği gibi, bu iletişim dizgelerinde taşıyıcı bir önemli vuruş dizisidir. Sinüzoidal taşıyıcının sürekli olması karşın, önemli vuruş dizisi yapısı kesikli olan bir işarettir ve bu nedenle bu işaretin kesikli bir bilgi işareti  $f(t)$  ile modüle edilmesi daha anlamlıdır. Bundan sonraki altbölümlerde kesikli  $f(t)$  ile vuruş modülasyonu türleri (yukarıdaki sınıflandırmaya göre 2-b) ele alınacaktır. Sürekli  $f(t)$  ile vuruş modülasyonu doğrudan uygulanan bir iletişim dizgesidir. Ancak bazı vuruş modülasyonu işaretleri sürekli  $f(t)$  ile vuruş modülasyonu diye yorumlamak olasıdır.

Yukarıdaki açıklamaya karşın, vuruş modülasyonunun kullanımı yalnız kesikli bilgi işaretlerine sınırlandırılmış değildir. Sürekli bir bilgi işareti  $f_1(t)$  verildiğinde bu işareti bir kesikli  $f(t)$  işaretine dönüştürür ve daha sonra bu kesikli  $f(t)$  işaretine vuruş modülasyonu yöntemlerini uygulayabiliriz. Sürekli bilgi işareti  $f_1(t)$  nin kesikli bilgi işareti  $f(t)$  ye dönüştürülmesi modülasyon işleminin ilk basamağı olarak düşünülebilir. Bu dönüşümün anlamlı olabilmesi için, bunun tam olmasa bile tama yakın tersinir olması gereklidir. Bir başka deyişle sürekli bilgi işaretlerinin iletiminde vuruş modülasyonu uygulanacaksa, kesikleme işleminin tersinir olması gereklidir. Daha açmak gerekirse, vuruş modülasyonunun tersinir olduğu ve almaçta kesikli bilgi işareti  $f(t)$  nin bozulmasız elde edildiği varsayılırsa, kesikli bilgi işareti  $f(t)$  kullanılarak özgün sürekli bilgi işareti  $f_1(t)$  geri elde edilebilir demelidir.

En çok kullanılan kesikleme yöntemi, sürekli bilgi işaretinden düzenli aralıklarla örnekler almaktır. Sürekli  $f_1(t)$  işareti belirli bazı koşulları sağlarsa,  $f_1(t)$  nin örneklenmiş (kesiklenmiş) biçimi kullanılarak,  $f_1(t)$  tam ve tek olarak yeniden elde edilebilir. Örneklenmiş işareten sürekli işaretin tam olarak elde edilebileceğini veren sonuç *örnekleme teoremi* diye adlandırılır. Örnekleme teoremi, eğer örnek alma işlemi uygun bir hızla yapılırsa, örneklenmiş değerler kullanılarak  $f_1(t)$  nin tam olarak yeniden elde edilebileceğini söyler. Örnekleme teoremi ve bunun çeşitli sonuçları bundan sonraki altbölümde ayrıntılarıyla incelenmiştir.

Kesikli işaretlere vuruş modülasyonu uygulayabildiğimiz gibi, belirli bazı koşulları sağlayan sürekli bilgi işaretlerine de vuruş modülasyonu uygulayabiliriz. Ancak örnekleme teoreminin kullanılabilmesini düşünerek, bundan sonra vuruş modülasyonu uygulanacak olan bilgi işaretini bir kesikli işaret ya da bir örneklenmiş işaret varsayabiliriz. Bir başka



deyişle, bilgi işareti, kesikli  $t_i$  zaman anlarında  $f(t_i)$  değerlerini alan, bir sayı dizisi  $\{f(t_i)\}$  dir.

Özgün bilgi işareti ya örneklenmiş (kesikli) bir biçimdedir ya da (sürekli bir biçimde ise) örnekleme teoremi kullanılarak örneklenmiş biçime sokulabilir. Bazı iletişim işaretleri yapıları gereği kesiklidir (ya da sayısaldır)–örneğin bilgisayar çıktıları, vurumlu radar ve sonar işaretleri vb. Diğer işaretler örneğin ses, TV, faksimile ve telemetrik veriler yapıları gereği sürekli dirler, ancak bazı durumlarda bunlar da sayısal olarak iletilirler.

Vurum modülasyonu ve diğer kesikli iletişim dizgeleri özellikle son yıllarda çok geniş bir kullanım alanı buldular. Bunun nedenleri şu biçimde özetlenebilir:

1. Tümüleşik devre teknolojisindeki son gelişmeler, sayısal devre tasarımını önemli ölçüde kolaylaştırmıştır,
2. Sayısal işaret işleme tekniklerindeki ilerlemeler sayısal işaretlerin daha verimli bir biçimde kullanımına neden olmuştur.
3. Sayısal bilgisayarların çok yaygın kullanımı sayısal işaretlerin kullanımını kolaylaştırmıştır.

Bunların yanısıra, gürültü ve girişim açısından, bazı kesikli iletişim dizgelerinin bazı koşullarda, sürekli dalga iletişim dizgelerine göre daha güvenilir olduğu da bir gerçektir.

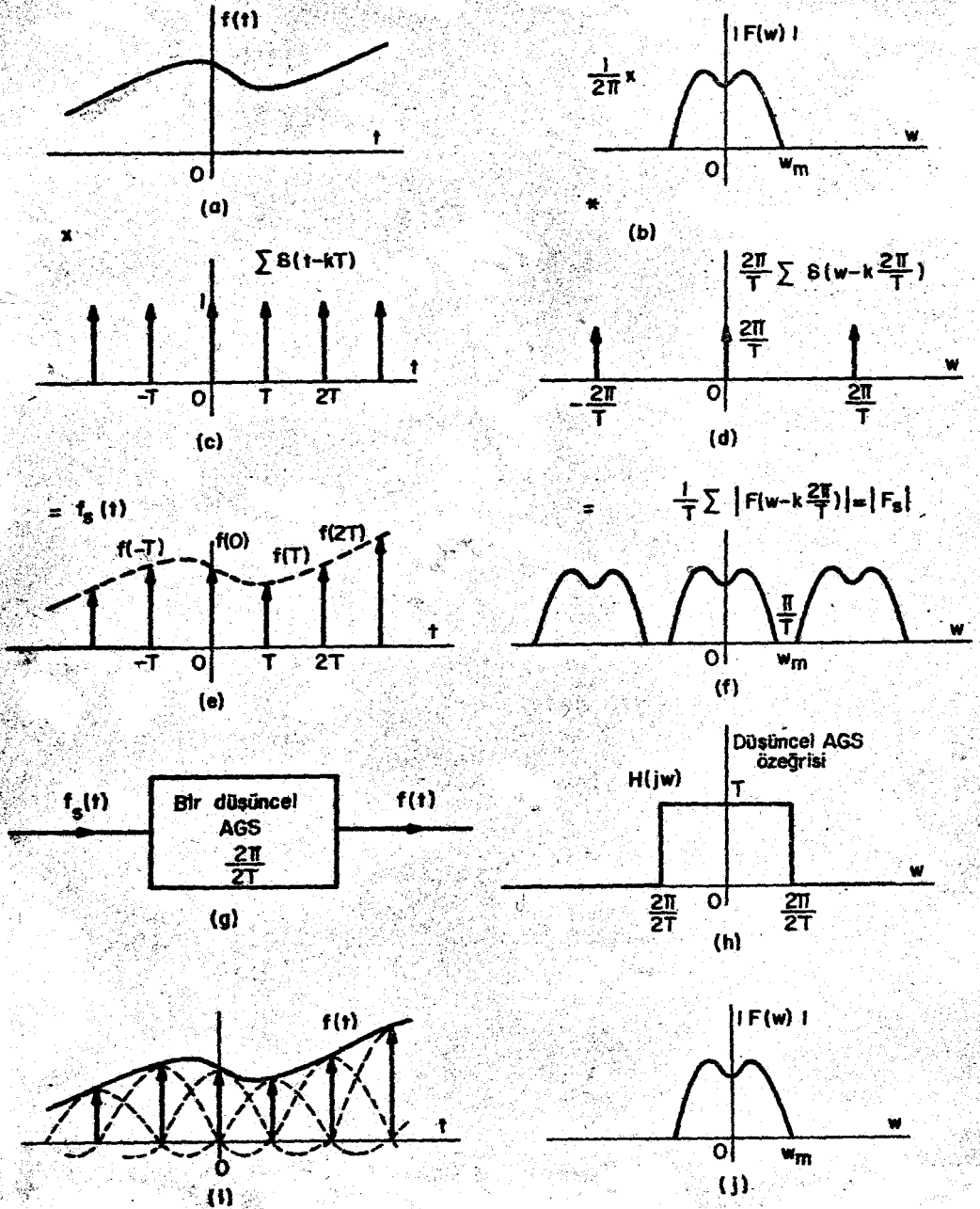
Vurum modülasyonunun yaygın olarak kullanılmasının bir başka nedeni de vurum modülasyonu türlerinin zaman bölmeli çoklama diye adlandırılan ilkenin uygulamasına özellikle elverişli olmasıdır. Zaman bölmeli çoklama, bir iletişim kanalı üzerinden ayrı zaman bölmelerinde ve aynı frekans bandını kapsayan birden fazla işaret gönderilmesine olanak sağlayan bir işlemdir. Zaman bölmeli çoklama ve bunun vurum modülasyonuna uygulanması üzerine ilerideki altbölümlerde daha ayrıntılı olarak durulacaktır.

## 8.2. ÖRNEKLEME TEOREMİ

Örnekleme teoremi, Shannon Teoremi ya da Nyquist Örnekleme teoremi diye de adlandırılır. Aşağıda önce bu teoremin ifadesi ve kanıtı verilecektir. Daha sonra teoremin fiziksel ve sezgisel anlamı geliştirilecek, teoremin çeşitli sonuçları üzerinde durulacaktır. Teoremin ifadesini vermeden önce teoreme kullanılan bir kavramın, bantsınırlı olma kavramının, üzerinde durulacaktır.  $f(t)$  nin frekans görüngesi

$$F(\omega) = 0 \quad |\omega| \geq \omega_m \text{ için}$$

koşulunu sağlarsa,  $f(t)$  işareti  $\omega_m$  rad/san'ye bantsınırlı denir.  $\omega_m$  rad/san'ye bantsınırlı bir  $f(t)$  işaretinin görüngesi Şekil 8.1b'de verilmiştir.



Şekil 8.1 Örneklemiş değerler kullanılarak zaman bölgesinde ve frekans bölgesinde  $f(t)$  nin elde edilmesi

**Örnekleme Teoremi:**  $\omega_m$  rad/san'ye bant sınırlı bir  $f(t)$  işareti, bu işaretten eşit  $T$  aralıklarında ( $T < 2\pi/2\omega_m$ ) alınan örnek değerler kullanılarak tek ve bozulmasız olarak geri elde edilebilir ve  $T < 2\pi/2\omega_m$  için

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.1)$$

**Kanıt:** (8.1)'de verilen ifade, bant sınırlı  $f(t)$  işaretini  $T < 2\pi/2\omega_m$  saniye aralıklarında alınan örnekler türünden veren bir matematiksel gösterimdir.

$\omega_m$  rad/san'ye bant sınırlı  $f(t)$  işaretinin dönemi  $T$  olan bir dönemli dürtü dizisi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

ile çarpıldığını düşünelim. Elde edilen örneklenmiş işaret  $f_s(t)$  dir. Zaman bölgesinde çarpma, frekans bölgesinde  $f(t)$  nin görünüşü  $F(\omega)$  ile dönemli dürtü dizisinin Fourier dönüşümünün katlanmasına karşı gelir.

Dönemli dürtü dizisinin Fourier dönüşümü  $\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$  dir ve bu da bir dönemli dürtü dizisidir. Buna göre

$$\begin{aligned} F[f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)] &= \frac{1}{2\pi} [F(\omega) \star \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \triangleq F_s(\omega) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Zaman bölgesindeki çarpma ve frekans bölgesindeki katlanma işlemleri çizimsel olarak Şekil 8.1'de gösterilmiştir.

(8.2)'den ve Şekil 8.1f'den görülebileceği gibi örneklenmiş işaretin görünüşü  $F(\omega)$  nin dönemli bir uzatmasıdır ve bir değişmez katsayı dışında  $[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  rad/san üzerindeki frekans bölgesinde  $f(t)$  nin görünüşü  $F(\omega)$  ye eşittir. Bu nedenle örneklenmiş işaret  $f_s(t)$  kesimi  $\frac{\pi}{T}$  rad/san ve kazancı  $T$  olan, bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilirse, özgün sürekli  $f(t)$  işareti süzgeç çıktısında elde edilir. Böylece bant sınırlı sürekli  $f(t)$  işareti, örneklenmiş biçimi kullanılarak yeniden elde edilmiş olur. Örnekleme teoreminin gerisindeki ana düşünce bu biçimde özetlenebilir. Şimdi teoreme verilen (8.1) gösterimini elde edelim.

(8.2)'den görülebileceği gibi örneklenmiş işaretin frekans görünüşü  $F_s(\omega)$ , dönemi  $2\pi/T$  rad/san olan bir dönemli işlevidir. Bu nedenle bu işlevin bir Fourier seri açılımı vardır.

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn \frac{2\pi}{T} \omega} \quad (8.3)$$

Burada

$$c_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F_s(\omega) e^{-jnT\omega} d\omega \quad (8.4)$$

$[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  rad/san aralığında  $F_s(\omega)$  şu biçimde tanımlanır.

$$F(\omega) = T F_s(\omega) \quad (8.5)$$

Buna göre (8.4) şöyle ifade edilebilir.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{-jnT\omega} d\omega \quad (8.6)$$

$[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  rad/san'ın dışındaki frekans bölgesinde  $F(\omega) = 0$  olduğundan, Fourier katsayısı  $c_n$  şu biçimde de ifade edilebilir.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-jnT\omega} d\omega \quad (8.7)$$

(8.7)'nin sağ yanı  $F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümünün (bir başka deyişle  $f(t)$  nin)  $t = -nT$  deki değerine eşittir. Bu nedenle,

$$c_n = f(-nT) \quad (8.8)$$

Böylece örneklenmiş işaretin görüngesi  $F_s(\omega)$  nin Fourier seri gösterimindeki katsayılarla  $f(t)$  nin örneklenmiş değerleri arasında bir ilişki kurulmuş olur.

(8.8) kullanılarak (8.3)'deki Fourier seri gösterimi şu biçimde ifade edilebilir.

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT) e^{jnT\omega} \quad (8.9)$$

Basit bir indeks değişikliği ile

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jkT\omega} \quad (8.10)$$

bulunur.

$F(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak sürekli  $f(t)$  işareti elde edilir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8.11)$$

$[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  rad/san'ın dışındaki frekanslarda  $F(\omega) = 0$  olduğundan (8.11) şu biçimde ifade edilebilir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8.12)$$

$[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  rad/san frekans bölgesinde ise  $F(\omega) = TF_s(\omega)$  dir. Bu nedenle

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8.13)$$

(8.13)'de  $F_s(\omega)$  için (8.10)'deki ifade yerine konulursa

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jkT\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (8.14)$$

bulunur. Tümler ve toplam işlemleri yer değiştirilir ve tümler alınıp (8.14) düzenlenirse

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \pi(\frac{t}{T} - k)}{\pi(\frac{t}{T} - k)} \quad (8.15)$$

elde edilir. Böylece örnekleme teoremindeki matematiksel gösterim kanıtlanmış olur.

Örnekleme teoremi gösterimi,  $f(t)$  nin herbir örnekleme anına merkezlenmiş ve büyüklükleri örneklenmiş değere eşit olan  $Sa(\pi t/T)$  dalga biçimlerinin toplamına eşit olduğunu söyler. Her örnekleme anında, o örnekleme anına merkezlenmiş olan dışında, bütün  $Sa(\pi t/T)$  işlevleri sıfırdır. Bu nedenle örnekleme anlarında  $Sa(\pi t/T)$  dalga biçimlerinin toplamı  $f(kT)$  ye eşittir. Örnekleme anlarının arasındaki zamanlarda ise,  $Sa(\pi t/T)$  dalga biçimlerinin o zaman anındaki büyüklüklerinin toplamı  $f(t)$  ye eşit olur.

Bir önceki paragrafta yapılan,  $[-\pi/T, \pi/T]$  rad/san frekans bölgesinde  $F(\omega)$  için  $F_s(\omega)$  nin Fourier seri gösteriminin yerine konulması, fiziksel olarak, örneklenmiş işaretin bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilmesine eşdeğerdir. Zaman bölgesinde ise, düşüncel alçak geçiren süzgecin dürtü tepkisi bir  $\text{sint}/t$  türü işaret olduğundan, şiddeti  $f(kT)$  olan dürtü Şekil 8.1e'de gösterildiği gibi,  $\text{sint}/t$  türü bir tepke oluşturur. Şekil 8.1i'de gösterildiği gibi bu tepkelerin toplamı ise sürekli  $f(t)$  işaretini verir.

Aşağıda örnekleme teoremi ile ilgili bir dizi gerçek ve bu teoremden çıkan bazı sonuçlar verilmiştir.

1. Teoremin ifadesinde de belirtildiği gibi, örnekleme dönemi  $T$ ,  $\frac{2\pi}{2\omega}$

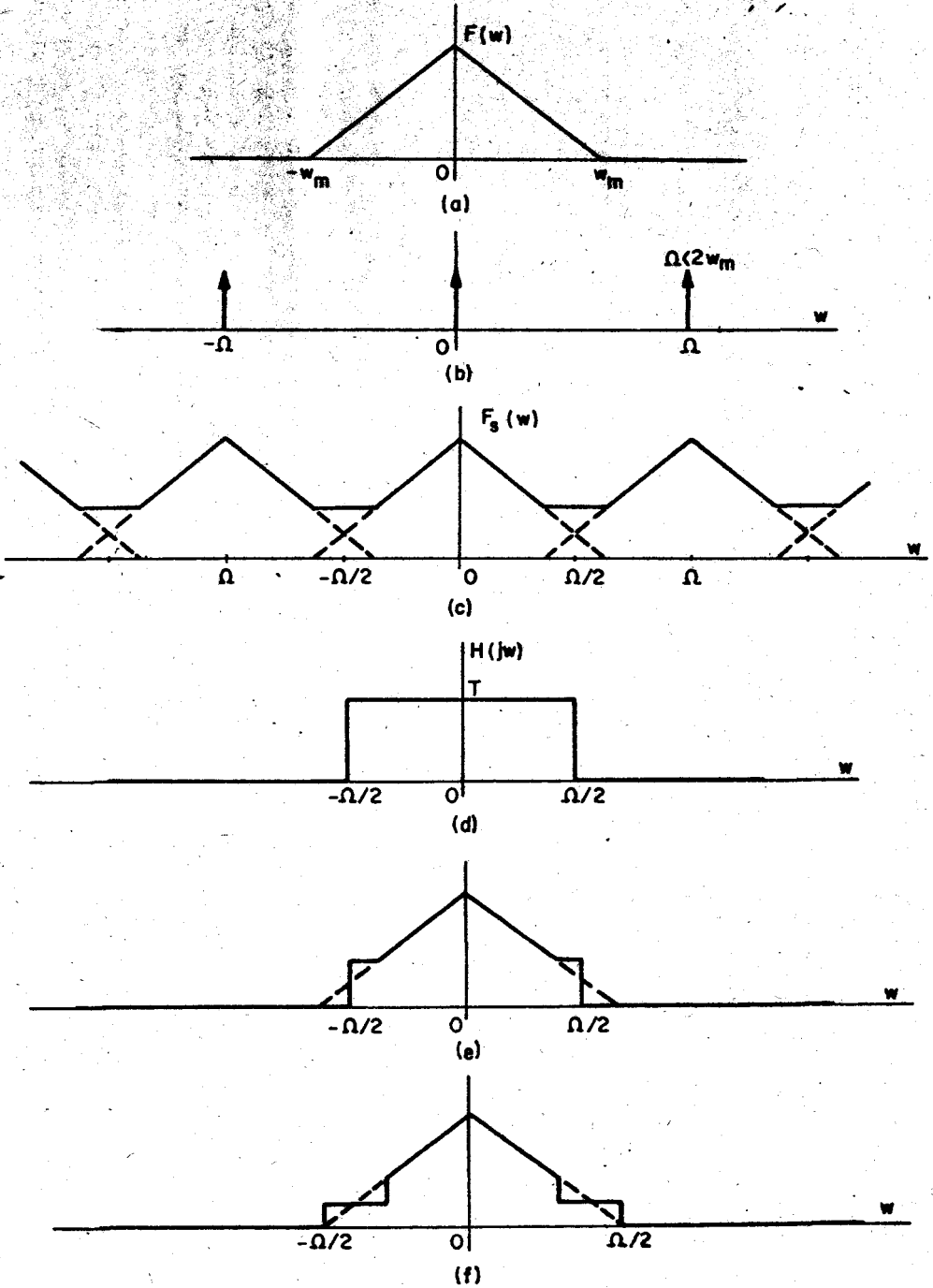
saniiyeden küçük ya da eşit olmalıdır. Burada  $\omega_m$ ,  $f(t)$  nin bant sınırılı olduğu frekanstır. T üzerindeki koşul örnekleme hızının saniyede  $2\omega_m/2\pi$  örnekten fazla ya da eşit olmasına eşdeğerdir. Sürekli işaretini yeniden elde etmek için gerekli en küçük örnekleme hızı,  $2\omega_m/2\pi$  örnek/san, Nyquist hızı diye adlandırılır.  $f(t)$  nin bant sınırılı olduğu frekans  $f_m$  Hz ise, Nyquist hızı  $2f_m$  örnek/san'dir. Bir başka deyişle, sürekli  $f(t)$  işaretinden örnek alma hızı en az,  $f(t)$  nin bant sınırılı olduğu  $f_m$  Hz frekansının iki katı olmalıdır.

## 2. Örnekleme hızı Nyquist hızından daha yavaşsa ( $T > \frac{2\pi}{2\omega_m}$ ise)

örneklemiş işaretin görünüşü üst üste çakışan frekans bileşenlerinden oluşur. Bu durumda örneklemiş işaretin görünüşü  $F_s(\omega)$  bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilerek ya da başka bir yolla tek bir  $F(\omega)$  görünüşü saptanamaz. Bir başka deyişle, örneklemiş değerler kullanılarak tek bir sürekli  $f(t)$  işaretini bulunamaz. Şekil 8.2'de Nyquist hızından daha yavaş bir hızla örneklemiş bir işaretin görünüşü gösterilmiştir. Örneklemiş işaret, kesimi örnekleme hızının yarısına eşit, bir alçak geçiren süzgeçten geçirilirse, çıktısı özgün sürekli  $f(t)$  işaretine eşit olmaz (Şekil 8.2(a) ve (e))'ye bakınız). Yeterli olmayan bir hızla örnek alındığında ortaya çıkan bu yanlış eşgörüngeleme yanlışlığı diye adlandırılır. Örneklemiş değerleri aynı, bir başka deyişle örneklemiş işaretin görüngeleri aynı olan değişik sürekli işaretler eşgörüngeli işaretler diye adlandırılır. Örneğin görüngeleri Şekil 8.2(a), (e) ve (f)'de gösterilen işaretler eşgörüngelidirler. Aynı örneklemiş değerlere sahip sonsuz sayıda sürekli işaret olabileceği açıktır. Ancak örnekleme teoremi örneklemiş değerleri aynı olan bütün işaretlerin içinde yalnız bir tanesinin, örnekleme hızının yarısına bant sınırılı olduğunu söyler. Şekil 8.2'de gösterilen eşgörüngeli işaretler içinde yalnız (e) de verilen görüğe, örnekleme hızının yarısına bant sınırılıdır.

Eğer herhangi bir nedenle, olabilecek örnekleme hızı bilinen bant sınır frekansının iki katından daha küçük bir değere kısıtlanmış ise, örneklemiş değerler kullanılarak, bir miktar yanlış yapmaksızın, sürekli işaretini geri elde edilmesi olanaksızdır. Bu durumda yanlış miktarını azaltmak için, bant sınırılı olan işaret önce, kesimi en yüksek örnekleme hızının yarısına eşit olan, bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir ve daha küçük bir değere bant sınırılı yapılır. Daha sonra süzgeç çıkışındaki işaretten örnekler alınır. Örnekleme hızı bant sınır frekansının iki katı olduğundan süzgeç çıkışındaki işaret örneklemiş değerler kullanılarak geri elde edilir. Kuşkusuz süzgeç çıkışı kullanılarak özgün sürekli işaret geri elde edilemez, ancak yine de bu yöntemde yapılan karesel ortalama yanlışlığı, özgün sürekli işaretini yeterli olmayan bir hızda örnekleyip, daha sonra bu örnekler kullanılarak işaretini geri elde etmek istediğimizde yapacağımız karesel ortalama yanlışlığa göre daha azdır.

3.  $\omega_m$  rad/san'ye bant sınırılı bir  $f(t)$  işaretini, örneklemiş değerlerini kullanarak geri elde edebilmek için gerekli en düşük örnekleme hızının saniyede  $2\omega_m/2\pi$  örnek olduğu daha önce belirtilmişti. Örnekleme gerekenden daha düşük bir hızla yapılırsa işaretini tam olarak geri elde edilemeyeceği de daha önce açıklanmıştı. Örnekleme hızı saniyede  $2\omega_m/2\pi$  örnekten daha fazla olursa ne olur? Bu sorunun yanıtı örnekleme



Şekil 8.2 Yeterli hızda örneklenmemiş işaret görüngesi ve bununla eşgörüngeli olan başka birkaç işaret görüngesi

teoreminde verilmiştir. (8.1)'deki gösterim örnekleme hızı  $\frac{1}{T} \geq \frac{2\omega_m}{2\pi}$  için geçerlidir. Bu nedenle bu durum için ek bir gösterim gerekli değildir.  $\omega_m$  ye bağımsız olan herhangi bir işaret aslında  $\omega_m$  den daha büyük herhangi bir frekansa da sınırlı olacaktır, bu sonuç doğaldır. Bu nedenle saniyede  $2\omega_m/2\pi$  örnekten daha fazla herhangi bir örnekleme hızı işareti geri elde edebilmemize olanak sağlar.

Uygulamada örnekleme hızı  $2\omega_m/2\pi$  den daha büyük oldukça sürekli  $f(t)$  işaretinin geri elde edilmesi daha kolay olur. Düşüncel alçak geçiren süzgeçler yapmak olanaksız olduğundan, temelbant bileşeni ile  $2\pi/T$  deki bileşen arasındaki boş frekans bandı (bazan koruma bandı diye adlandırılır) geniş oldukça  $F_s(\omega)$  nin temelbant bileşeni yani  $F(\omega)$  daha az karmaşık bir süzgeçle süzülüp alınabilir. Örnekleme hızı gerekli en düşük örnekleme hızına yaklaştıkça, alçak geçiren süzgeç de düşüncele yaklaşır. Örneğin genellikle 3.3 KHz e bağımsız olan konuşma işareti için en düşük örnekleme hızı saniyede 6600 örnektir. Ancak lüzumsuz derecede karmaşık alçak geçiren süzgeçlere gerek olmadan iyi sonuçlar elde edilmek için konuşma genellikle saniyede 8000 örneklilik bir hızla örneklenir. Bu durumda 3.3-4.7 KHz arasında 1.4 KHz lik bir koruma bandı vardır.

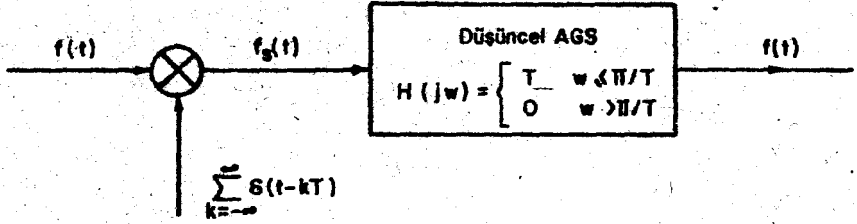
Kuramsal düzeyde örnekleme teoremi bir düşüncel alçak geçiren süzgecin kullanılması gerektiğini ifade eder. Eksi t değerleri için sıfırdan farklı değerler alan  $\sin t/t$  türü bir dürtü tepkisine sahip bir düşüncel alçak geçiren süzgecin gerçekleştirilemeyecek bir süzgeç olduğu açıktır. Yukarıdaki paragrafta da belirtildiği gibi, örnekleme hızı gereken en düşük hızdan büyükse,  $F(\omega)$  yi elde etmek için düşüncel alçak geçiren süzgece yakın gerçekleştirilebilir bir alçak geçiren süzgeç kullanılabilir. Zaman bölgesinde bu, süzgeç çıktısı  $f(t)$  ye bir gecikme verilmesi anlamına gelir. Bunun nedeni fiziksel olarak gerçekleştirilebilecek bir süzgecin dürtü tepkisine eksik t değerleri için sıfır olması gereğidir.

4. Örnekleme hızı  $1/T$ , gereken en düşük hız olan  $2\omega_m/2\pi$  den büyükse, örnekleme teoremi gösterimi için (8.1)'de verilenden başka gösterimler de balmak olasıdır.  $F_s(\omega)$  nin frekans görünüşü  $\omega_m$  ile  $2\pi/T - \omega_m$  arasında sıfır olduğundan, kesimi  $\omega_m$  ile  $(2\pi/T) - \omega_m$  arasındaki herhangi bir frekansta olan, bir düşüncel alçak geçiren süzgeç, çıkışında görünüşü  $F(\omega)$  olan işareti, yani  $f(t)$  yi, verir. (Şekil 8.1(f)'ye bakınız). Düşüncel alçak geçiren süzgecin kesimi  $\Omega$  ise,  $\Omega \in [\omega_m, (2\pi/T) - \omega_m]$ , (8.12), (8.13) ve (8.14)'de tümev sınırlarını  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  den  $[-\Omega, \Omega]$  ya değiştirerek, bu duruma karşı gelen örnekleme teoremi gösterimini elde edebiliriz. Sonuçta elde edilecek örnekleme teoremi gösterimi şu biçimdedir.

$$f(t) = \frac{\Omega}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin[(t-kT)\Omega]}{[(t-kT)\Omega]} \quad (8.16)$$

5. Şekil 8.1'de de gösterildiği gibi örnekleme teoremi gösterimi, işaretin istenilen dönemde bir dürtü dizisi ile çarpılıp, daha sonra bunun istenilen kesim frekansındaki bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi ile elde edilmişti. Örnekleme teoremini gerçekleştiren dizgenin öbek çizimi Şekil 8.3'de verilmiştir.





Şekil 8.3 Örnekleme teoremini gerçekleştiren bir dizgenin öbek çizimi.

Örnekleme teoremini gerçekleştiren dizgenin iki düşüncel bileşeni vardır. Bunlardan birisi düşüncel alçak geçiren süzgeçtir. Yukarıdaki paragraflarda düşüncel alçak geçiren süzgeç yerine, fiziksel alçak geçiren süzgeçler kullanılması durumu tartışılmıştı. Dizgenin ikinci düşüncel üyesi ise dürtü dizisidir. Bununla, sürekli  $f(t)$  işareti çarpılarak örneklenmiş  $f_s(t)$  işareti elde edilir. Uygulamada düşüncel bir dürtü dizisi üretmek olanaksızdır. Bu nedenle uygulamada örneklenmiş  $f_s(t)$  işareti elde edilemez. Ancak vuru genişlikleri küçük dikdörtgen vuru dizileri üretilebilir. Böyle bir vuru dizisi, dürtü dizisinin bir yaklaştırması olarak kullanılırsa, elde edilen örneklenmiş işaret de  $f_s(t)$  nin bir yaklaştırması olur. Bu durumda akla şu soru gelebilir: Dürtü dizisi yerine vuru dizisi kullanıldığında örnekleme teoremi gösteriminde ne gibi değişiklikler olur?

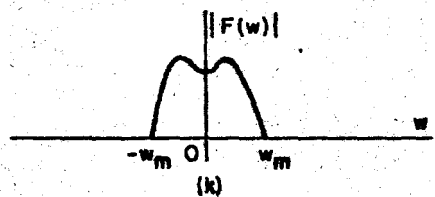
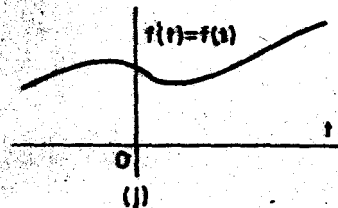
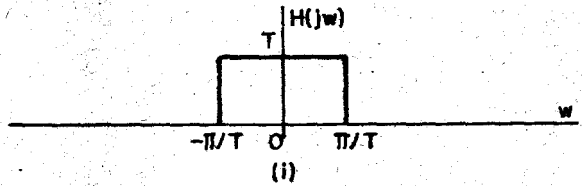
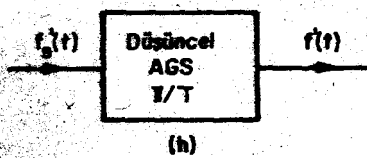
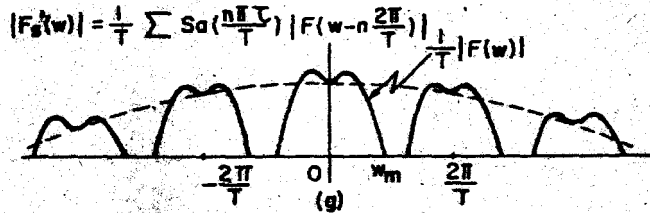
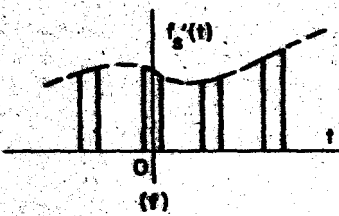
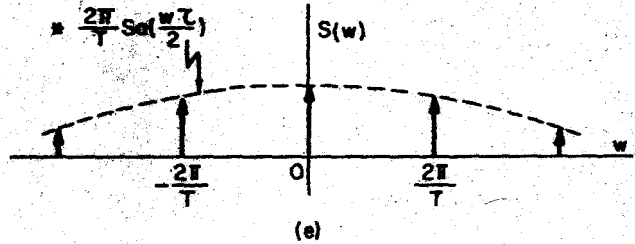
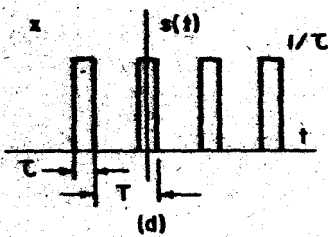
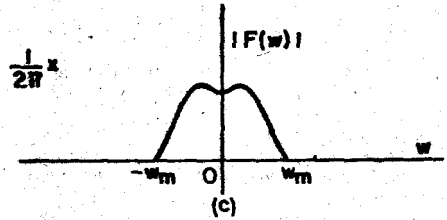
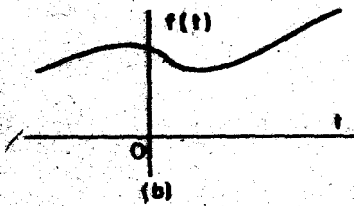
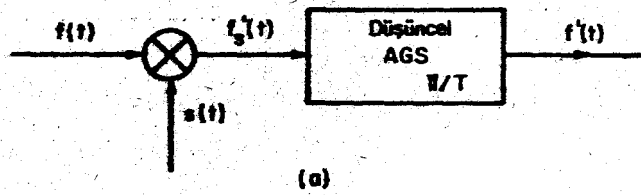
Bir vuru dizisi ile örnekleme teoremini gerçekleştiren bir dizgenin öbek çizimi ve bu dizgenin zaman ile frekans bölgesi çözümlenmeleri Şekil 8.4'de verilmiştir. Önemli vuru dizisi genişliği  $\tau$  ve genlikleri  $1/\tau$  olan vuru dizilerinden oluşur. Her vuru dizisinin altındaki alan 1'dir ve  $\tau$  sıfıra giderken vuru dizisi dürtü dizisine yaklaşır. Örneklenmiş  $f_s(t)$  işareti şu biçimde ifade edilebilir:

$$f'_s(t) = f(t) \cdot s(t) \quad (8.17)$$

Buna göre  $f'_s(t)$  nin frekans görünüşü şöyle belirlenebilir.

$$\begin{aligned} F'_s(\omega) &= F[f'_s(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \star S(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) \star \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) F\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned} \quad (8.18)$$

(8.18)'den görülebileceği gibi, örneklenmiş işaretin görünüşü  $F'_s(\omega)$ , temelbant ve  $2\pi/T$  nin katlarındaki frekans bileşenlerinden oluşur. Temelbant bileşeni  $F(\omega)/T$  dir ve bu, dürtü dizisi ile örnekleme yapıldığında elde edilen temelbant bileşenine eşittir. Bu nedenle kesimi  $\pi/T$  ve kazancı  $T$  olan bir düşüncel alçak geçiren süzgeç (ya da bunun



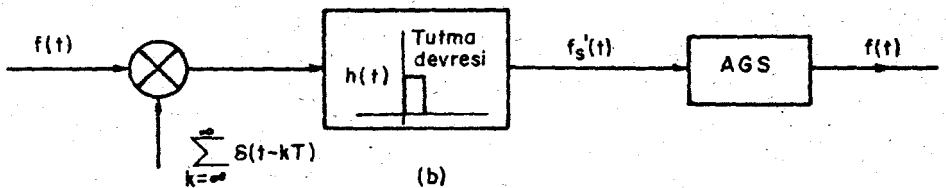
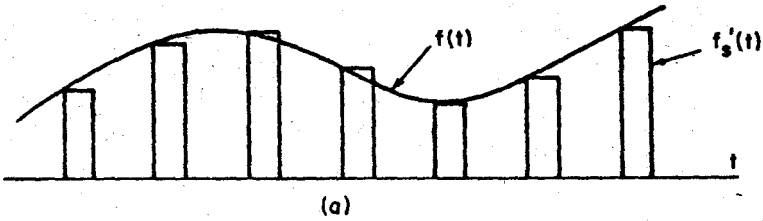
Şekil 8.4 Örnekleme teoremini genişliği sıfır olmayan bir vuruş dizisi ile kullanan bir dizgenin çözülmesi

gerçekleştirilebilir yaklaştırması) çıkışında sürekli  $f(t)$  işaretini verir. Bir başka deyişle  $f'(t) = f(t)$  dir.

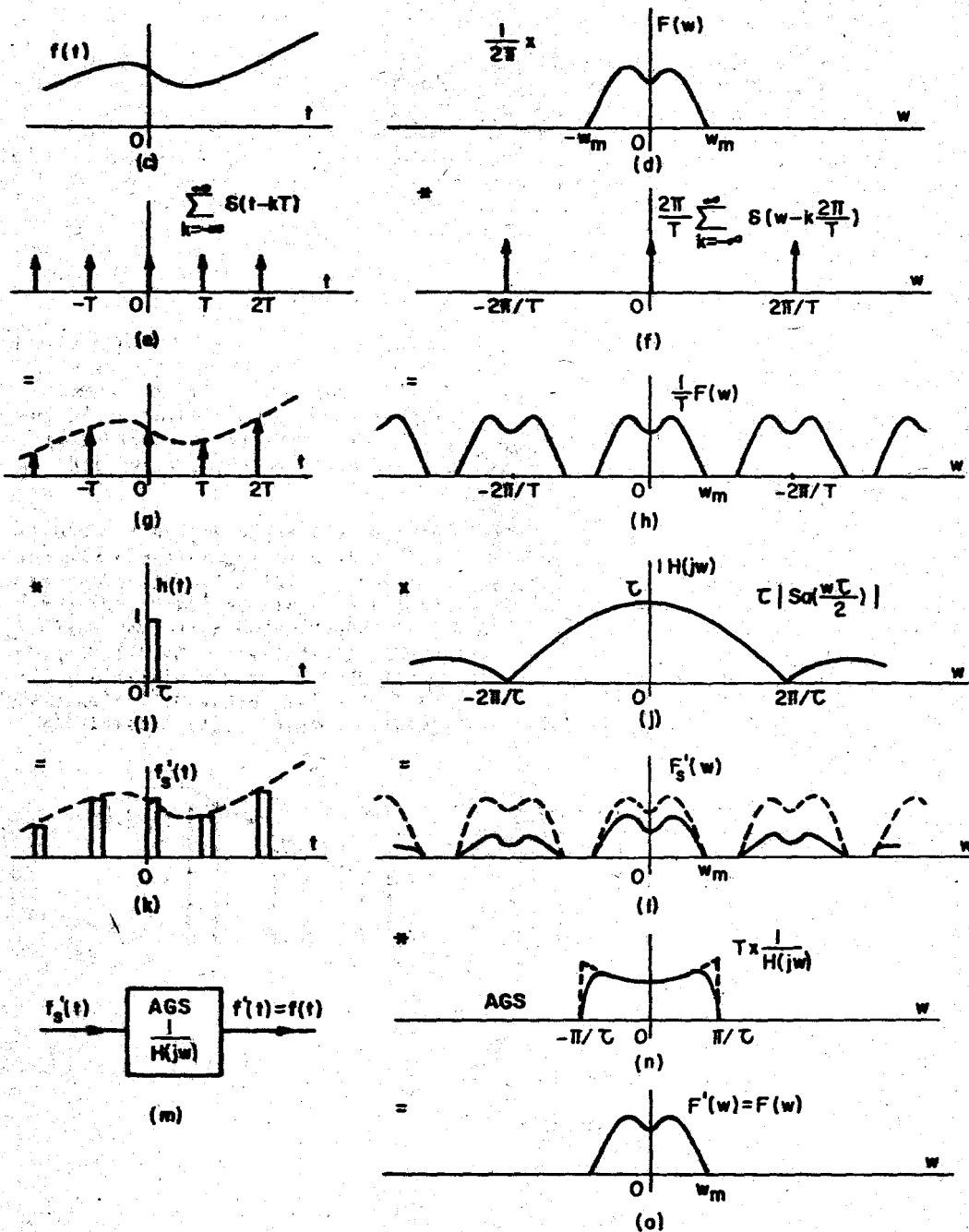
Vurum dizisi ile örneklenmiş işaretin görünüşü,  $F'_s(\omega)$  nın  $2\pi/T$  nin katlarındaki bileşenlerinin görüngelerinin birbirlerine göre olan büyüklükleri vurum genişliği  $\tau$  nın bir işlevidir. Görünge bileşenlerinden hiçbirisi bozulmaya uğramamıştır, yalnız birbirlerine göre olan büyüklükleri değişiktir. Temelbant bileşenin büyüklüğü, dürtülerle örnek alma durumundakine eşittir ve bu sonuç 0 ile T arasındaki bütün  $\tau$  değerleri için doğrudur. Gerekli olan bileşen yalnız temelbant bileşeni olduğundan, alçak geçiren süzgecin kazancında bir değişiklik yapmak bile gerekmez. Bu nedenle, örnekleme hızı  $2\omega_m/2\pi$  den büyük olduğu sürece, örneklemenin bir dürtü dizisi yerine bir vurum dizisi ile yapılması, sürekli işaretin geri elde edilmesinde bir sorun yaratmaz.

$\tau = 0$  ve  $\tau = T$  için iki sınır durumu vardır.  $\tau = 0$  olduğunda vurum dizisi dürtü dizisine dönüşür ve bütün görünge bileşenlerinin büyüklükleri aynıdır. Bu durum örnekleme teoremi olarak daha önce incelenmişti.  $\tau = T$  olduğunda vurum dizisi  $f(t)/T$  değişmez  $1/T$  işlevine dönüşür ve bu durumda örneklenmiş işaret  $f(t)/T$  dir. Örneklenmiş işaretin görünüşü yalnız temelbant bileşeni  $F(\omega)/T$  den oluşur ve süzgeç çıktısı ise  $f(t)$  dir.

6. Düz-tepeli örnekleme. Fiziksel gerçekleştirme güçlükleri nedeni ile ortaya çıkan diğer bir durum da şudur: Örnekleme genellikle çok dar vurumlar kullanılarak yapılır. Böyle bir vurum dizisi ise bir alçak geçiren süzgeçte çıktı oluşturacak yeterli güce sahip değildir. Vurum dizisinin gücünü arttırmak için, vurumların büyüklüğünü arttırmak yerine, örneklenmiş işaretin bir tutma devresinden geçirilmesi yeğlenir. Böylece, tutma devresinin tutma süresine bağlı olarak vurum genişlikleri arttırılır. Tutma devresinin çıkışındaki vurumlar, Şekil 8.5(a)'da gösterildiği gibi, düz-tepeli ve vurumların tepeleri  $f(t)$  işareti ile



Şekil 8.5 Düz-tepeli örneklenmiş işaretin çözümlemesi



Şekil 8.5 (devam)

uyuşmaz. Bu nedenle, tutma devresinin çıktısı, yukarıdaki paragrafta tartışılan genişliği sıfırdan farklı vurumlarla örnekleme yapılması durumundaki çığıtıya eşdeğer değildir.

Bu durum uygulamada ortaya çıkan bazı güçlüklerin bir sonucudur. Ancak bu değiştirilmiş örnekleme yönteminin çözümlenmesi ve örneklenmiş işaret (tutma devresi çıktısı) kullanılarak sürekli  $f(t)$  işaretinin yeniden geri elde edilip edilemeyeceğinin araştırılması gereklidir.

Örneklenmiş  $f_s(t)$  işaretinin (tutma devresinin çıktısının) görünüşü,  $f_s(t)$  Şekil 8.5(b)'deki gibi gösterildikten sonra kolayca saptanabilir.  $f_s(t)$  yi ve görünüşünü elde etmek için gerekli zaman bölgesi ve frekans bölgesi çözümlenmeleri ayrı ayrı yapılmış ve çözümlenmeler Şekil 8.5(c)-(1)'de görüntülenmiştir. Örneklenmiş işaret  $f_s(t)$  nin görünüşü şu biçimde bulunabilir:

$$\begin{aligned} F'_s(\omega) &= H(j\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} F(\omega) \star \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) \right] \\ &= H(j\omega) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n \frac{2\pi}{T}) \end{aligned} \quad (8.19)$$

$F'_s(\omega)$  görünüşü 0 ile  $2\pi/T$  nin katlarındaki görüme bileşenlerinden oluşur. Her görüme bileşeni o frekansa kaydırılmış  $F(\omega)$  ile tutma devresinin geçiş işlevi  $H(j\omega)$  nin çarpımından oluşur.  $H(j\omega)$  ile çarpılma bütün görüme bileşenlerinde bir bozulmaya neden olur.  $f(t)$  nin elde edilmesinde kullanılan temelbant bileşeni ise  $H(j\omega)F(\omega)$  dir. Bu nedenle örneklenmiş işaret bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilirse çıktı,  $F(\omega)$  değil,  $H(j\omega)F(\omega)$  olur. Buradan düz-tepeli örneklemenin bozulmaya neden olduğu söylenebilir. Dikdörtgen vurumlar için bu bozulma, bilgi işaretinin yüksek frekans bileşenlerinde bir zayıflama olarak ortaya çıkar. Bozulmanın yapısı tam olarak bilindiğinden, bu bozulma istenirse tümüyle ortadan kaldırılabilir. Bunun için, geçiş bölgesinde karmaşık geçiş işlevi  $1/H(j\omega)$  olan bir alçak geçiren süzgeç tasarımı yapmak gerekir. Bu yolla tutma devresinin neden olduğu bozulma ortadan kaldırılır ve görünüşü

$$F'_s(\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} H(j\omega) F(\omega) = F(\omega) \quad (8.20)$$

olan işaret elde edilir. (Şekil 8.5 (m)-(o) ya bakınız). Tutma devresinin neden olduğu bozulmayı ortadan kaldıran alçak geçiren süzgecin öz-eğrisi Şekil 8.5(n)'de gösterilmiştir. Bu süzgeç *dengeleme süzgeci* diye adlandırılır. Burada kuşkusuz örnekleme hızı, en düşük örnekleme hızı olan,  $2\omega_m/2\pi$  örnek/san'den büyük olmalıdır. Örnekleme hızı yeterince büyük olmazsa, görüme bileşenleri üst üste çakışır ve  $f(t)$  nin tam olarak geri elde edilmesi olanaksızlaşır.

7. Örneklemede eşzamanlılık gerekli değildir. Örnekleme teoreminin ifadesi verilirken ve kanıtı yapılırken örneklemenin dürtü dizisi

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$  ile yapıldığı varsayılmıştı. Sürekli işaret,  $\dots, f(-T), f(0), f(T), f(2T), \dots$  değerleri kullanılarak yeniden elde edilmişti. Dürtü

dizisi  $t=0$  a göre eşzamanlı olmazsa ne olur? Sürekli işaret,...,  $f(-T+\epsilon)$ ,  $f(\epsilon)$ ,  $f(T+\epsilon)$ ,  $f(2T+\epsilon)$ ,... değerleri kullanılarak yeniden elde edilebilir mi? Elde edilebilirse nasıl? Örnekleme anları için ...,  $-T+\epsilon$ ,  $T+\epsilon$ ,  $2T+\epsilon$ ,... değerlerinin değilde, ...,  $-T, 0, T, 2T$ ,... değerlerinin daha uygun olmasında hiçbir neden yoktur; bu nedenle sezgisel olarak  $f(t)$  nin yeniden elde edilebileceği söylenebilir, ...,  $f(-T+\epsilon), f(\epsilon), f(T+\epsilon), f(2T+\epsilon), \dots$ , değerleri kullanılarak  $f(t)$  nin gösterimi aşağıda çıkarılmıştır.

$f(t)$  nin  $\omega_m$  ye bantsınırlı olduğunu varsayalım. Buna göre  $g(t) = f(t+\epsilon)$  ile tanımlanan  $g(t)$  de  $\omega_m$  ye bantsınırlıdır.  $g(t)$  nin örnekleme teoremi gösterimi şöyledir:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.21)$$

$g(t)$  yerine  $f(t+\epsilon)$  ve  $g(kT)$  yerine  $f(kT+\epsilon)$  koyarak

$$f(t+\epsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT+\epsilon) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.22)$$

bulunur.  $t+\epsilon = t'$  konularak,  $f(t)$  nin örneklenmiş değerler  $f(kT+\epsilon)$  kullanılarak gösterimi elde edilir.

$$f(t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT+\epsilon) \frac{\sin \pi \left( \frac{t'-\epsilon}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t'-\epsilon}{T} - k \right)} \quad (8.23)$$

Buna göre örnekleme, eşit zaman aralıklarıyla ve yeterince hızlı yapıldığı sürece, sürekli  $f(t)$  işareti, örnekleme anlarının salt değerlerine bağlı olmaksızın, yeniden elde edilebilir.

8.  $\omega_m$  bir süreklilik noktası olmalıdır.  $\omega_m$  nin bir süreklilik noktası olması, örnekleme teoreminin ifadesinde genellikle unutulmuş bir varsayımdır.  $f(t)$  nin  $\omega_m$  ye bantsınırlı olduğunu söyleyebilmek için,  $|\omega| > \omega_m$  bölgesinde  $F(\omega) = 0$  olmasının yanısıra  $\omega_m$  nin bir süresizlik noktası olmaması gerekir. Bu koşulun sağlanmadığı durumlara örnekleme teoremi uygulanamaz. Örneğin frekansı 1 KHz olan  $\cos 2\pi \cdot 10^3 t$  sinüzoidalini düşünelim. İlk bakışta bu işaretin 1 KHz'e bantsınırlı olduğu ve saniyede 2 bin örneğin yeterli bir örnekleme hızı olduğu düşünülebilir. Ancak bu konu üzerinde biraz düşünüldüğünde, saniyede 2 bin örnek alınarak 1 KHz deki bir sinüzoidalın yeniden elde edilemeyeceği görülür. Örneğin örnekleme anları sinüzoidalın sıfır geçişleri ile çakışabilir. Bu durumda bütün örnekler sıfıra eşit olur ve bu örnekler kullanılarak yeniden elde edilen sürekli işaret ise sıfıra eşit olur; bunun ise sinüzoidalde eşit olmadığı açıktır.

1 KHz deki bir sinüzoidalın  $(1000 + \epsilon)$  Hz e bantsınırlı olduğunu söylemek doğru bir tümedir. Burada  $\epsilon$  istenildiğince küçük seçilebilir. Buna göre sürekli işareti yeniden elde edilebilmesi için gerekli en düşük örnekleme hızı  $2000 + 2\epsilon$  örnek/san'dır.

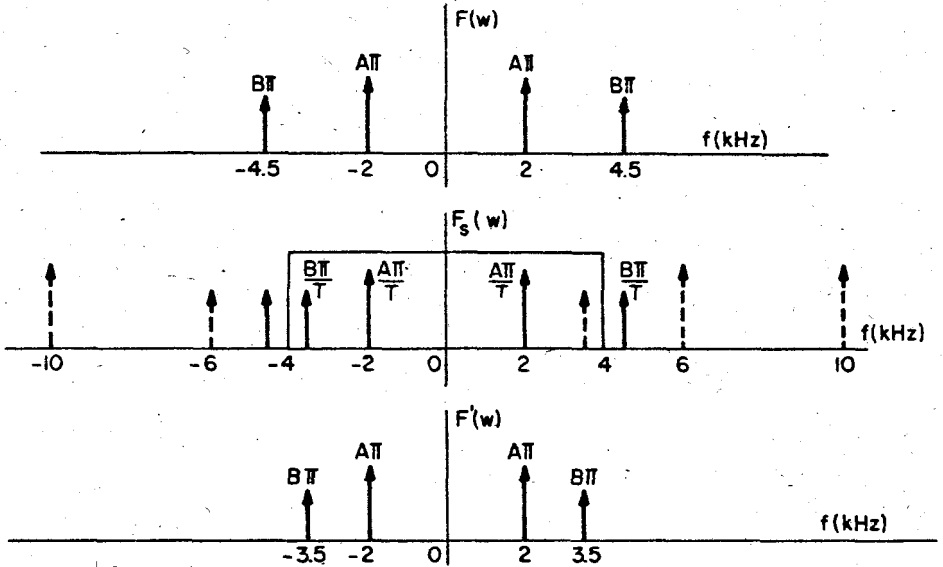
Yeterli olmayan bir hızda örnek alınanın etkilerini basit bir örnekle gösterelim. Aşağıdaki sürekli işareti düşününüz.

$$f(t) = A \cos 2\pi \times 2 \times 10^3 t + B \cos 2\pi (4.5) 10^3 t \quad (8.24)$$

4500 +  $\epsilon$  Hz e bant sınırlı olan bu işaretin, yanlışlıkla, 4 KHz e bant sınırlı olduğu ve 8 bin örnek/san'lık bir hızla örnekleme yapılacağı düşünülmüş olsun ya da 8000 örnek/san'nin erişilebilecek en yüksek örnekleme hızı olduğu varsayalım. Bu işaret 8000 örnek/san'lık bir hızla örneklenir ve bu örnekler kesimi 4 KHz olan bir alçak geçiren süzgeçten geçirilirse, frekans bölgesi çözülmesi sonucunda yeniden elde edilen işaretin şu olduğu bulunur.

$$f'(t) = A \cos 2\pi \times 2 \times 10^3 t + B \cos 2\pi (3.5) 10^3 t \quad (8.25)$$

Görüldüğü gibi  $f'(t)$  işareti  $f(t)$  ye eşit değildir.  $f(t)$  nin bir eşgö-rüngelidir. Değişikliğin nedeni yetersiz örnekleme hızıdır. Şekil 8.6 da  $f(t)$  nin, örneklenmiş işaretin ve  $f'(t)$  nin görüngeleri gösterilmiştir.



Şekil 8.6  $f(t)$  nin, örneklenmiş işaretin ve yeniden elde edilen  $f'(t)$  işaretinin görüngeleri

Örnekleme teoreminin başka biçimleri de vardır. Örneğin bant sınırlı ve sürekli bir  $f(t)$  işaretinin, eşit olmayan zaman aralıklarında  $f(t)$  den alınan örnekler kullanılarak ya da  $f(t)$  ve bunun türevinden alınan örnekler kullanılarak, yeniden elde edilebileceğini söyleyen sonuçlar vardır. Ayrıca örnekleme teoremi gösteriminde sonsuz sayıda terim yerine, sonlu sayıda terim düşünüldüğünde yapılan yanlıgıyı veren sonuçlar da bulunmuştur.

9. *Frekans bölgesinde örnekleme teoremi.* Örnekleme teoremi, Fourier dönüşümü belirli bir frekansın ötesinde sıfır olan sürekli bir işaretin, bu işaretten alınmış örnekler cinsinden ifade edilebileceğini söyleyen genel bir sonuçtur. Örneklenecek sürekli işlevin bir zaman işlevi olması gerekmez. Örneklenmiş değerler cinsinden ifade edilecek olan işlevin bir frekans işlevi olması durumunda, örnekleme teoremine ikiz bir teorem kullanılabilir. Bu durumda sınırlı olan işlev bir zaman işlevidir. Frekans bölgesinde örnekleme teoremi şu biçimdedir.

$|t| > T$  için sıfır olan bir zaman-sınırlı işlev,  $1/2T$  Hz den (ya da  $\pi/T$  rad/san'den) küçük olan eşit aralıklarla, bu işlevin frekans bölgesinden alınan örnekler kullanılarak, tek olarak saptanabilir. Böyle bir işaretin görünüşü şu gösterime sahiptir:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \frac{\sin \pi \left( \frac{\omega}{\omega_0} - n \right)}{\pi \left( \frac{\omega}{\omega_0} - n \right)} \quad (8.26)$$

Burada  $\omega_0 \leq \frac{2\pi}{T}$  olmalıdır. Bu teoremin kanıtı zaman bölgesinde yapılan benzer,  $f(t)$  ile  $F(\omega)$  nin rolleri değişir. (8.26)'nın bulunması okuyuculara alıştırmaya bırakılmıştır. Zaman bölgesindeki örnekleme teoremi üzerine örnekleme hızıyla ve örnekleme türüyle ilgili tartışmalar ve yapılan gözlemler, frekans bölgesindeki örnekleme teoremi için de yapılabilir.

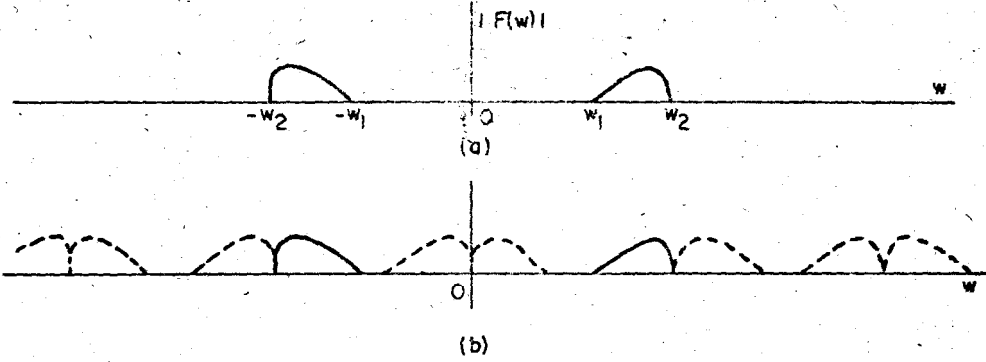
Bölüm 2'de tartışılan Paley-Wiener ölçütü kullanılarak bir işaretin hem zaman-sınırlı hem de bantsınırlı olamayacağı gösterilebilir. Uygulamada her zaman zaman-sınırlı işaretlerle uğraşılır; kuramsal olarak bu işaretler bantsınırlı değildirler. Ancak uygulamadaki bütün işaretler için yüksek frekanslarda görüncü yoğunluk işlevleri azalır. Erkesinin büyük bir bölümü belirli bir frekans aralığına yoğunlaşmış olan bir işaret, uygulamadaki amaçlar için bantsınırlı olarak düşünülebilir. Yüksek frekans bileşenlerinin atılması nedeni ile yapılan yanlışlığı yoksanılabilir. Buna göre uygulamada karşılaşılan işaretlere bantsınırlı işaretlerle oldukça yakın yaklaşıtırmalar yapılabilir.

10. *Bantgeçiren örnekleme teoremi.* Bantgeçiren, bantsınırlı işaretler (bir bant geçiren dizgeden geçmiş işaret) için geçerli olan bantgeçiren örnekleme teoremi de vardır. Bir  $f(t)$  işareti aşağıdaki koşulu sağlarsa  $[\omega_1, \omega_2]$  frekans aralığında bantgeçiren, bantsınırlı işaret diye adlandırılır.

$$F(\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_1 \quad \text{ve} \quad |\omega| \geq \omega_2 \quad (8.27)$$

Burada  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  noktaları  $F(\omega)$  nin süreklilik noktaları olmalıdır. Bu noktalardan herhangi biri veya ikisi süresizlik noktası ise, frekans aralığı  $\epsilon$  kadar büyütülerek sınır noktalarının bir süreklilik noktası olması sağlanır. Bu yapılmadığı zaman alçak geçiren örnekleme teoreminde tartışılan güçlükler burada da ortaya çıkar. (Alıştırmaya 8.9'a bakınız). Bir bantgeçiren bantsınırlı işaretin görünüşü Şekil 8.7(a) da gösterilmiştir.





Şekil 8.7 Bir bantgeçiren bantsınırlı işaret ve bunun dönemli uzantısı

$[\omega_1, \omega_2]$  de bantgeçiren bantsınırlı işareti,  $\omega_2$  de alçak geçiren bantsınırlı bir işaret olarak düşünmek de olasıdır. Bu durumda, böyle bir işaret, yukarıda tartışıldığı gibi  $2\omega_2/2\pi$  örnek/san den büyük bir örnekleme hızı ile alınmış örneklerden yeniden elde edilebilir. Ancak büyük  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  değerleri için, alçak geçiren örnekleme teoreminin kullanılması gereksiz ölçüde büyük örnekleme hızı gerektirir. Gerçekte böyle bir işaret çoğu kez çok daha düşük örnekleme hızı ile örneklenerek yeniden elde edilebilir.

Bu tür bir işareti yeniden elde etmek için, olabilecek en düşük örnekleme hızı nedir, gösterim nasıldır? Örnekleme, bir dürtü dizisi ile çarpma anlamına gelir; bu ise frekans bölgesinde dürtü dizisinin görünüşü ile katlanmaya eşdeğerdir. Frekans bölgesinde bu katlanmanın yapılması, işaret görüngesinin dönemli uzantısının üretilmesine neden olur.  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının üretilmesinde ise,  $F(\omega)$  ile yeni üretilen görüğe bileşenlerinin çakışmaması gereklidir. Bu sağlanırsa, örneklenmiş işaret, geçiş bantı  $[\omega_1, \omega_2]$  olan, bir bant geçiren süzgeçten geçirilerek  $F(\omega)$  bozulmadan elde edilebilir. Ancak istenilen, bunu olabilecek en yavaş örnekleme hızı ile gerçekleştirmektir. Yavaş örnekleme hızı, zaman bölgesinde dürtü dizisi döneminin büyük olması, frekans bölgesinde ise dürtü dizisi döneminin küçük olması anlamına gelir. Bu durumda amaç görüğe bileşenlerini üst üste çakıştırmadan, olabilecek en düşük dönem ile  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısını üretmektir.

Görüğe bileşenlerinin üst üste çakışmasına neden olmayan örnekleme hızı (ya da  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının dönemi) değerleri  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  nin bir işlevidir. Bu koşulu sağlayan örnekleme hızı değerleri bağlantısız aralıklar oluşturabilir. (Alıştırma 8.8 ve 8.9'a bakınız). Bu değerler içinde ilgilenilen niceliklerden en önemlisi görüğe bileşenlerini üst üste çakışmasına neden olmayan en düşük örnekleme hızı (ya da  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının en küçük dönemi) dir. Şekil 8.7(b) dikkatle incelendiğinde  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının en küçük döneminin

$$\omega_{ek} = \frac{2\omega_2}{n+1} \quad (8.28)$$

olduğu bulunur. Burada  $n$ ,  $\omega_1/(\omega_2 - \omega_1)$  nin tamsayı bölümüdür. Bir başka deyişle  $n = \left\| \frac{\omega_1}{\Omega} \right\|$  ile gösterilebilir. Burada  $\|a\|$  gösterimi  $a$  dan küçük veya ona eşit en büyük tamsayıyı gösterir, ve  $\Omega \triangleq \omega_2 - \omega_1$  diye tanımlanmıştır. En küçük döneme karşı gelen en düşük örnekleme hızı  $\omega_{ek}/2\pi$  örnek/san'dır.

Bantgeçiren bantsınırlı işaretler için,  $\omega_{ek}/2\pi$  örnek/san lik bir hızla alınan örnekler türünden örnekleme teoremi gösteriminin şöyle olduğu kolayca bulunabilir:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k \frac{2\pi}{\omega_{ek}}\right) \frac{2}{(\omega_{ek} t - k2\pi)} \left[ \sin\left(t - k \frac{2\pi}{\omega_{ek}}\right) \omega_2 - \sin\left(t - k \frac{2\pi}{\omega_{ek}}\right) \omega_1 \right] \quad (8.29)$$

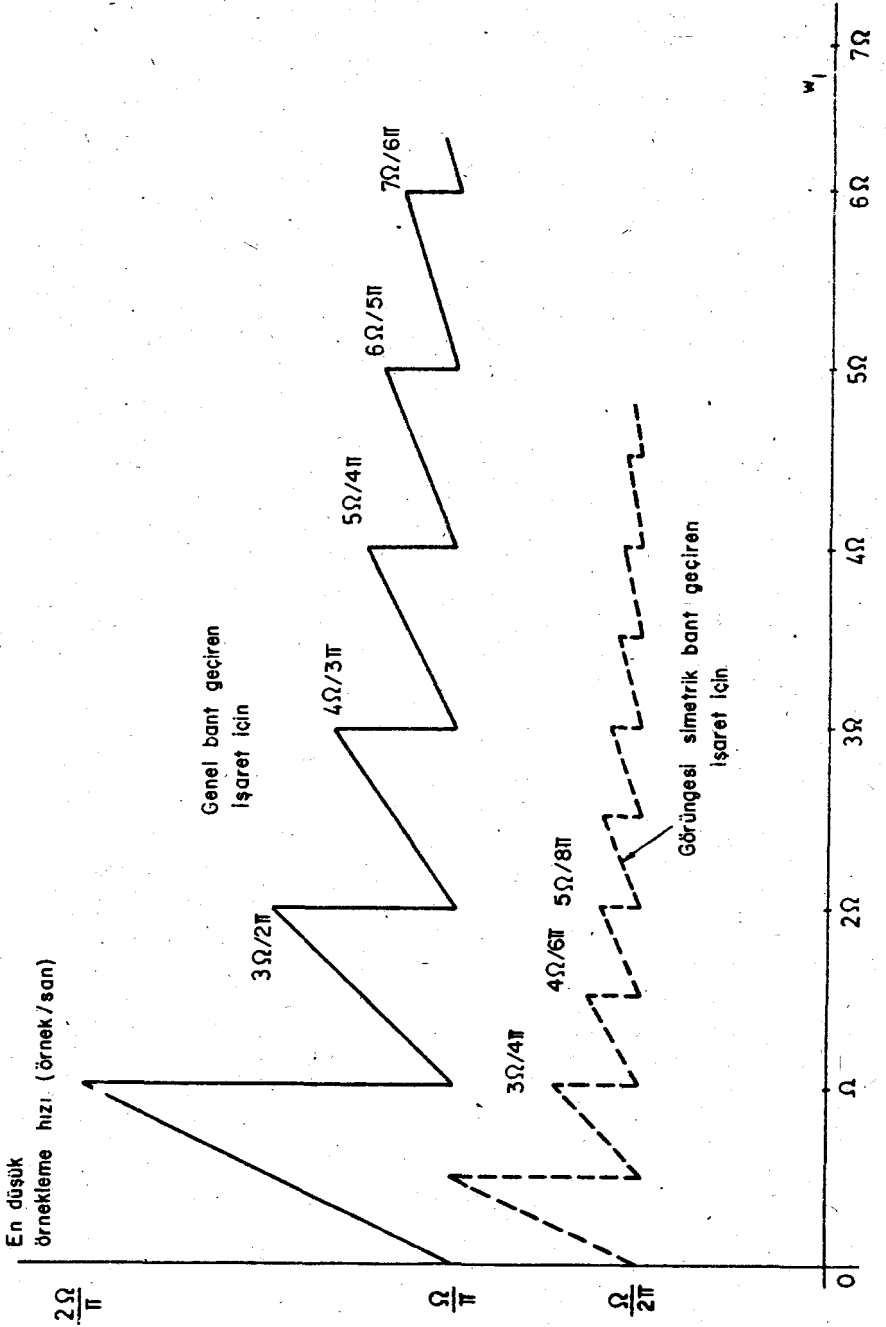
$F(\omega)$  nin dönemli uzantısının Fourier serisi katsayıları ile  $f(t)$  nin örneklenmiş değerleri arasındaki ilişki bulunur ve  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının  $[\omega_1, \omega_2]$  aralığında evrik Fourier dönüşümü alınırsa, yukarıdaki gösterim elde edilebilir. Yukarıda verilene benzer başka bantgeçiren örnekleme teoremi gösterimleri elde etmek de olasıdır. Alçak geçiren örnekleme teoremi üzerinde, örnekleme hızı, örnekleme ve süzgeçleme türü ile ilgili yapılan gözlemler ve önerümlerin benzerlerini bantgeçiren örnekleme teoremi için de yapmak olasıdır. Ancak iletişim dizgeleri açısından bizi çok ilgilendirmediği için, bantgeçiren örnekleme teoremi ile ilgili ayrıntılara girilmeyecektir.

Bantgeçiren bantsınırlı işaretlerin örneklenmiş değerler kullanılarak yeniden elde edilmesinde, örneklenmiş işaret, geçiş bandı  $[\omega_1, \omega_2]$  olan bir bant geçiren süzgeçten geçirilir. Koruma bandına ( $F(\omega)$  nin dönemli uzantısında  $[\omega_1, \omega_2]$  dolayındaki boş frekans bölgesine), daha doğrusu  $[\omega_1, \omega_2]$  ve örnekleme hızına bağlı olarak, bant geçiren süzgeç ile ilgili kısıtlamalar daha katı ya da daha gevşek olabilir.

Alçak geçiren örnekleme teoreminin tersine, bantgeçiren örnekleme teoreminde en düşük hızdan daha büyük herhangi bir örnekleme hızının geçerli olup olmadığı söylenemez. Bunun nedeni,  $\omega_{ek}/2\pi$  den büyük örnekleme hızlarında, örnekleme hızı belirli bazı frekans aralıklarında değer aldığı zaman görüğe bileşenlerinin çakışması ve bu örnekleme hızı için örnekleme teoremi gösteriminin geçerli olmamasıdır.

(8.28)'de verilen en düşük örnekleme hızı  $\omega_{ek}/2\pi$ ,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  nin bir işlevidir. En düşük örnekleme hızının  $\omega_1$  e karşı çizimi Şekil 8.8'de verilmiştir; bu çizimde  $\Omega \triangleq \omega_1 - \omega_2$  deyiştirgendir. Bantgeçiren bantsınırlı işaretin görüngesi  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  ye göre simetrik ise,  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısı (8.28)'de verilen  $\omega_{ek}$  ye göre daha küçük örnekleme hızlarıyla elde edilebilir. Görüngesi simetrik işaretler için,  $F(\omega)$  nin dönemli uzantısının en küçük dönemi şu biçimde saptanabilir:

$$\omega'_{ek} = \frac{2\omega_1 + \Omega}{m+1} \quad (8.30)$$



Şekil 8.8 En düşük örnekleme hızının,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  nin bir işlevi olarak çizimi

Burada,  $m, 2\omega_1/\Omega$  nın tamsayı bölümüdür. Bir başka deyişle  $m = \left\| \frac{2\omega_1}{\Omega} \right\|$  dir ve daha önce olduğu gibi  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  olarak tanımlanmıştır. Buna karşı gelen en düşük örnekleme hızı  $\omega'_{ek}/2\pi$  örnek/san olup Şekil 8.8'de nokta nokta olarak gösterilmiştir.

Çizimden de görüldüğü gibi, genel durumda  $\omega_1$  artarken ( $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  türünden) en düşük örnekleme hızı  $\omega'_{ek}/2\pi$  örnek/san, bantgeçiren işaretin bantgenişliğinin iki katı olan  $2\Omega/2\pi$  örnek/san'ye yaklaşır. Bu değer,  $\Omega$  ya bantsınırlı alçak geçiren bir işaretin örnekleme hızına eşittir. Ancak en önemli ayırım bantgeçiren örnekleme teoreminde örneklenmiş değerlere ek olarak, işaretin bantgeçiren olduğunun ve  $[\omega_1, \omega_2]$  ye bantsınırlı olduğunun bilinmesi zorunludur. Görünge simetrik işaret için ise,  $\omega_1$  artarken, en düşük örnekleme hızı  $\Omega/2\pi$  örnek/san'ye yaklaşır.

Bantgeçiren bantsınırlı işaretlerin örneklenmiş değerler türünden başka bir gösterimi, bu bantgeçiren işareti karıştırma yoluyla bir alçak geçiren işarete dönüştürüp, daha sonra bu alçak geçiren işaretin alçak geçiren örnekleme teoremi kullanılarak örneklenmiş değerler türünden gösterilmesi ile elde edilir.  $[\omega_1, \omega_2]$  ye bantsınırlı bir bantgeçiren işaret, frekansı  $\omega_1$  olan bir sinüzoidal ile karıştırılıp temelbanda kaydırılırsa, elde edilen alçak geçiren işaret  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$  e bantsınırlı olur. Bu alçak geçiren işaret ise,  $2\Omega/2\pi$  lik hızla alınmış örnekler kullanılarak tek olarak belirlenebilir. Özgün bantgeçiren işaret ise, alçak geçiren işaretin yeniden karıştırılıp, süzülmesiyle elde edilebilir. Görünge simetrik ise, karıştırma  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  frekansında bir sinüzoidalle yapılabilir ve elde edilen temelbant işareti  $\Omega/2\pi$  ye bantsınırlı alçak geçiren işaret olur. Bu işaret ise  $\Omega/2\pi$  örnek/san'lik bir hızla alınan örnekler kullanılarak elde edilebilir. Bu sonuçlar da yukarıda ifade edilen şu gerçekleri destekler niteliktedir:  $\omega_1$  artarken en düşük örnekleme hızı, bantgeçiren işaretin bantgenişliğinin iki katına (görünge simetrik ise bantgenişliğine) yaklaşır.

### 8.3. VURUM MODÜLASYONU

Aşağıda, çok yaygın kullanılan bazı vurum modülasyonu türleri incelenenektir. Vurum modülasyonunda taşıyıcı bir vurum dizisidir ve bilgi işareti kesikli biçimdedir. Büyük bir olasılıkla bilgi işareti sürekli bir  $f(t)$  den örneklenmiş değerlerdir. Ancak bazı durumlarda sürekli işaretin kesiklenme işlemi, modülasyon işleminin bir parçası olarak yapılır. Kesikli dizi biçimindeki bilgi, vurum dizisinin bazı değiştirgenlerini modüle etmekte kullanılır. Değiştirilebilecek parametreler her vurumun genliği, süresi ve konumudur. Bu üç değiştirgen değiştirilerek sırası ile vurum genliği modülasyonu (VGM), vurum süresi modülasyonu (VSM) ve vurum yeri modülasyonu (VYM) elde edilir. Bu üç vurum modülasyonu türünün yanısıra vurum kod modülasyonu (VKM) olarak adlandırılan bir sayısal modülasyon türü daha vardır. Ancak yapısı farklı olduğu için VKM bir sonraki altbölümde ayrıca incelenenektir. Vurum genliği modülasyonu en çok kullanılan vurum modülasyonu yöntemidir ve yukarıda bahsedilen modülasyon yöntemleri içinde matematiksel olarak çözümlenmesi en kolay olanıdır.

### Vurum Geniği Modülasyonu (VGM)

Bu vurum modülasyonu türünde, taşıyıcı vurum dizisinde her vurumun geniği bilgi işaretine bağı olarak değiştirilir. Burada iki vurum geniği modülasyonu türü incelenecektir. Birinci türde, vurum dizisi  $s(t)$  ile bilgi işareti  $f(t)$ -sürekli bir işaret olabilir- çarpılarak modüle edilmiş dalgabıçımı elde edilir.

$$c(t) = f(t) \cdot s(t) \quad (8.31)$$

Burada  $s(t)$ , dönemi  $T$ , vurum geniği  $\tau$ , ve vurum geniği  $1/T$  olan vurum dizisidir. Vurum geniği modüle edilmiş olan işaret, (8.17)'de verilen örnekleme işareti  $f_s(t)$  ye eşittir. (8.17)'de örnekleme işlemi vurum geniği sıfırdan farklı bir vurum dizisi ile yapıldığında elde edilen işaretin gösterimi ve (8.18)'de de bu işaretin görünüşü verilmiştir. Bu durumda vurum geniği modüle edilmiş işaretin frekans görünüşü de (8.18)'de verilen ifadeye eşittir.

VGM işaretinin zaman dalgabıçımı ve frekans görünüşü Şekil 8.4'de görüntülenmiştir. (8.18)'den ve Şekil 8.4'den de görülebileceği gibi, VGM işaretinin görünüşü, herbiri, biçimi bilgi işaretinin görünüşü  $F(\omega)$  ye benzeyen,  $2\pi/T$  rad/san lik eşit frekans aralıklarına yerleştirilmiş görünüş bileşenlerinden oluşur. Değişik görünüş bileşenlerinin üst üste çıkışmaması için gerekli koşul  $2\pi/T > 2\omega_m$  dir, burada  $\omega_m$ ,  $f(t)$  nin en yüksek frekans bileşenidir. VGM işareti demodüle edilerek  $f(t)$  yeniden elde edilecek ise, yukarıdaki koşul gereklidir. Aynı koşulun örnekleme işareti  $f_s(t)$  den  $f(t)$  nin elde edilmesi için de gerekli olduğu belirtilmiştir. VGM işaretini bir örnekleme işareti olarak düşünebileceğimiz için, VGM işaretinin demodüle edilmesi de örnekleme işareti sürekli işaretin geri elde edilmesine eşdeğerdir.

VGM modüle edilmiş işaret, kazancı  $T$  ve kesimi  $\pi/T$  rad/san olan, bir düşüncel alçak geçiren süzgeçten geçirilerek demodüle edilir.  $2\pi/T > 2\omega_m$  koşulu sağlanmazsa bilgi işareti  $f(t)$  bozulmadan geri elde edilemez. VGM işaretinin demodülasyonunun frekans bölgesi çözümlemesi Şekil 8.4 de görüntülenmiştir. Örnekleme teoreminden sonra tartışılan alçak geçiren süzgeçle ilgili gözlemler, örneğin kesim frekansının hangi değerler arasında olabileceği, düşüncel süzgeçten ne kadar sapılabileceği, VGM işaretlerinin demodülasyonunda da geçerlidir. Çarpımları  $T/\tau$  olduğu sürece, vurum dizisinin büyüklüğü  $1/\tau$  ve alçak geçiren süzgecin kazancı  $T$  istenildiği gibi değiştirilebilir.

(8.18)'den görülebileceği gibi, VGM işaretinin görünüşü sonsuza kadar uzanır. Bu nedenle, kuramsal olarak VGM işaretinin bantgeniği sonsuzdur. Ancak vurum geniği  $\tau$  ya bağı olarak, yüksek frekanslardaki görünüş bileşenleri,  $S_a(n\pi/T)$  ye uygun biçimde azalır. Buna göre belirli bir frekansın ötesindeki görünüş bileşenleri yoksanılabilir. Bu nedenle VGM işaretinin bantgeniği sonlu varsayılabilir. Vurum geniği  $\tau$  arttığında, görünüş bileşenleridaha hızlı sönerler ve iletim için daha küçük bir bantgeniği gerekir. Ancak böyle yapılmaz, frekans bölgesinde kazanılan zaman bölgesinde kaybedilir. Vurum geniği arttırıldığında, VGM işareti daha uzun zaman aralıkları gerektirir; bu ise zaman paylaşmalı dizgede (zaman bölmeli çöklama) birleştirilecek değişik VGM işaretlerinin sayısını kısıtlar.

Yukarıda anlatılan VGM türü, *doğal örneklemeli VGM* diye adlandırılır. Doğal örneklemede, her örnekleme vurumunun tüm süresi boyunca  $f(t)$  ile ilgili bilgi taşınır. Tartışılacak ikinci VGM türü, *ansal örneklemeli VGM* diye adlandırılır. Ansal örneklemeli VGM'de, örneklemiş işarette tüm vurumların biçimi aynıdır, ancak bunların büyüklükleri bunlara karşılık gelen örnek değerlerle orantılıdır. Ansal örnekleme, yalnız örnekleme anlarındaki  $f(t)$  ile ilgili bilgi taşır. Ancak burada da örnekleme aralıkları  $2\pi/2\omega_m$  saniyeden az olmamalıdır. Bu koşul sağlandığında, örnekleme anlarındaki  $f(t)$  değerleri,  $f(t)$  nin yeniden elde edilmesi için gerekli bilgiyi taşır.

Ansal örneklemeli VGM, bir önceki altbölümde incelenen düz-tepeli örneklemiş işaretten başka bir şey değildir. Bu işaretin zaman dalga biçimi ve bu tür VGM işaretini üretecek dizgenin öbek çizimi Şekil 8.5(a), (b)'de verilmiştir. Ansal örneklemeli VGM işaretini üreten dizgenin zaman ve frekans bölgesi çözümlenmeleri de Şekil 8.5'de görüntülenmiştir. VGM işaretinin frekans görünüşü (8.19)'da verilmiştir. Bu görüme  $2\pi/T$  rad/san'lik düzgün aralıklarla yerleştirilmiş görüme bileşenlerinden oluşur. Her görüme bileşeni o frekansa kaydırılmış  $F(\omega)$  ile  $H(j\omega)$  nin çarpımına eşittir. Burada  $H(j\omega)$ , dürtü tepesi  $h(t)$  vurum biçimine eşit olan süzgecin geçiş işlevidir.  $H(j\omega)$  ile çarpma, temelbant bileşeni de dahil, her görüme bileşeninde bozulmaya neden olur.

Bu durumda şu sorunun yanıtlanması gereklidir. Bozulmuş görüme bileşenlerinden,  $f(t)$  işaretini ya da bunun görünüşü  $F(\omega)$  yı nasıl yeniden elde edebiliriz? Bir başka deyişle, bu tür VGM işareti nasıl demodüle edilebilir ki,  $f(t)$  olduğu gibi bozulmadan geri elde edilebilsin? Düz-tepeli örneklemiş işaretten  $f(t)$  nin elde edilmesi sırasında bu sorunun yanıtı verilmişti. Her görüme bileşeni bozulur, ancak bozulmanın yapısı bilindiğinden bozulma etkilerini yok etmek olasıdır. Temelbant görüme bileşeni,  $F(\omega)$  ile  $H(j\omega)$  nin çarpımıdır. Bu nedenle bu VGM işaretini demodüle etmek için kullanılacak alçak geçiren süzgeç, özgeçisi geçiş bandında değişmez olan bir düşüncel alçak geçiren süzgeç değil de, özgeçisi, geçiş bandı  $(0, \pi/T)$  arasında  $1/H(j\omega)$  olan bir süzgeç olmalıdır. Bu özel alçak geçiren süzgeç çıktısının görünüşü  $F(\omega)$  dir. Böylece bilgi işareti  $f(t)$  elde edilmiş olur. Buna göre ansal örneklemeli VGM işaretini demodüle etmek için, kesimi  $\pi/T$  rad/san ve özgeçisi  $1/H(j\omega)$  olan bir alçak geçiren süzgeç kullanmak gerekir. Bu durumda yine  $2\pi/T > 2\omega_m$  koşulu sağlanmalıdır. Yoksa değişik görüme bileşenleri üst üste çakışır ve  $f(t)$  nin bozulmasız yeniden elde edilmesi olanaksızlaşır.

Şekil 8.5'de, dikdörtgen biçimli dürtü tepesi  $h(t)$  ile buna karşı gelen  $H(j\omega)$  için, düz-tepeli örneklemenin çözümlenmesi verilmiştir. Ancak yukarıdaki çözümlenme geneldir. Tutma devresinin dürtü tepesi  $h(t)$   $[(0, T)$  aralığında sıfırdan farklı ] ile buna karşı gelen  $H(j\omega)$  herhangi bir biçimde olabilir. Sonuçta elde edilen VGM işareti, bu vurum biçimlerinden oluşan bir vurum dizisi olur ve her vurumun genliği  $f(t)$  nin örneklemiş değerlerine bağlı olarak değişir. Bu VGM işaretinin demodülasyonu da yukarıda anlatıldığı biçimde özgeçisi  $1/H(j\omega)$  olan bir alçak geçiren süzgeç kullanılarak yapılır.

Örnekleme teoreminde tartışılan çeşitli noktalar ve alçak geçiren süzgecin kesim frekansı gibi konular ansal örneklemeli VGM için de geçerlidir.

Ansız örneklemeli VGM de vurum genişliği  $\tau$  çok darsa, temelbant frekansları dolaylarında  $H(j\omega)$  hemen hemen sabittir. Bu durumda temelbant frekans bileşeni yaklaşık olarak  $F(\omega)$  dir. Bu nedenle, doğal örneklemeli VGM'de olduğu gibi, ansız örneklemeli VGM işareti de yalnızca bir düşüncel alçak geçiren süzgeç kullanılarak demodüle edilir. Bir başka deyişle, küçük vurum genişlikleri için, bu iki tür VGM etkin olarak aynıdır.

Sonsuz sayıda frekans bileşeni içerdiği için, ansız örneklemeli VGM'de de bantgenişliği sonsuzdur. Ancak frekans arttıkça görüncü bileşenlerinin büyüklükleri azalır ve belirli bir frekansın ötesindeki bileşenler yoksanılabilir ve bu nedenle VGM işaretinin bantgenişliği sonlu varsayılabilir. Vurum genişliği  $\tau$  arttıkça,  $H(j\omega)$  daha hızlı azalır ve sonuçta VGM işaretinin etkin bantgenişliği azalır. Ancak  $H(j\omega)$  nın daha hızlı azalması, görüncü bileşenlerinde daha kötü bozulmalara neden olur ve bunun sonucu olarak, özgeçirisi  $1/H(j\omega)$  olan bir alçak geçiren süzgeç tasarımılamak daha güçleşir.

### VGM İşaretlerinin İletimi

VGM işaretleri boşlukta doğrudan elektromanyetik dalgalarla kolayca iletilemezler. Bunun nedeni VGM işareti görüncüsünün alçak frekanslarda yoğunlaşması ve bu tür işaretlerin elektromanyetik dalgalarla iletimi için yapılması güç büyük antenler gerekmesidir. VGM işaretleri doğrudan kablolarla iletilebilirler. VGM işaretlerinin iletiminde bir başka yol ise şudur: VGM işaretine önce genlik modülasyonu uygulayarak bu işaretin görüncüsü yüksek frekanslara aktarılır ve daha sonra elde edilen GM işareti elektromanyetik dalgalarla iletir. Almaçta önce GM demodülasyonu yapılarak VGM işareti elde edilir ve daha sonra bu VGM işareti demodüle edilerek bilgi işareti elde edilir. Bu bileşik modülasyon biçimi, önce VGM daha sonra GM elde edildiğinden dolayı, VGM/GM olarak adlandırılır.

VGM işaretinin görüncüsünü yüksek frekanslara aktarmada frekans modülasyonu yöntemleri de kullanılabilir. Bu durumda elde edilen bileşik modülasyon ise VGM/FM olarak adlandırılır. VGM bu biçimde diğer bazı modülasyonlarla birlikte kullanılacaksa haklı olarak şu soru akla gelebilir: GM ya da FM gibi ikinci bir modülasyon kullanılacaksa, VGM neden gereklidir? Neden GM ya da FM'yi doğrudan bilgi işaretine uygulamıyoruz? Özgün bilgi işareti kesikli biçimde ise bu soruların yanıtı açıktır. Diğer durumlarda ise, bileşik modülasyon yöntemi, işleme kolaylıkları ya da başka yararlar sağladığı zaman kullanılır.

VGM işaretinin bantgenişliği kuramsal olarak sonsuz olduğundan bileşik modülasyonlu VGM/GM ve VGM/FM işaretlerinin de bantgenişlikleri kuramsal olarak sonsuzdur. Ancak uygulamada bu işaretlerin bantgenişlikleri geniş de olsa sonlu varsayılabilir. Yine de genellikle bu bileşik modülasyonlu işaretler alışılmış GM ve FM işaretlerinin iletildiği gibi iletmezler. Bunların iletimi, geniş bir frekans bölgesinde verimli iletme olanak veren, kablolarla olur. Bazen ise mikrodalgı frekanslarında havadan iletirler. Bu frekanslar büyük bantgenişlikli işaretlerin verimli olarak iletilmelerini olanak verecek kadar yüksektirler.

VGM işaretlerinin (ya da bileşik modülasyonlu işaretlerin) geniş frekans bantları kaplamaları nedeni ile, bu işaretlerde frekans bölme- li çoklama ilkesi ek bir yarar sağlamaz. Herhangi bir zaman aralığında yalnız bir işaret gönderiliyormuş gibidir. Ancak gerçekte durum böyle değildir, vurum modülasyonlu işaretler için bir başka çoklama ilkesi kullanılır. Zaman bölme- li çoklama diye adlandırılan bu yeni çoklama türü diğer vurum modülasyonu biçimleri incelendikten sonra ele alınacaktır.

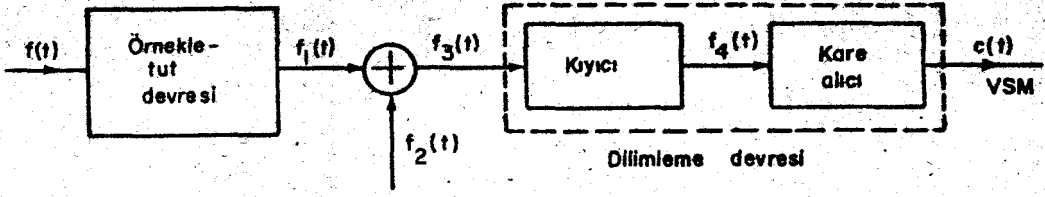
### Vurum Süresi Modülasyonu (VSM)

Bu vurum modülasyonu türünde de taşıyıcı bir dönemli vurum dizisi- dir. Her vurumun genişliği (süresi), bilgi işareti  $f(t)$  nin ansal örnek değerine bağlı olarak değiştiğinden, elde edilen dalgabıçımı vurum süre- si modülasyonu (VSM) işareti diye adlandırılır. Bu modülasyon türünü vurum genişliği modülasyonu olarak da adlandırmak olasıdır. Ancak bu durumda bunun kısaltması ile vurum genliği modülasyonun kısaltmaları (VGM) aynı olur. Bundan dolayı bu modülasyon türü için vurum süresi mo- dülasyonu deyişi ve VSM kısaltması kullanılacaktır.) Vurum süresi ör- neklenmiş değerinin büyüklüğü ile orantılıdır. VSM işareti üretmekte kul- lanılabilecek bir dizgenin öbek çizimi ve VSM işaretinin zaman dalgabi- çimi Şekil 8.9'da gösterilmiştir. Bilgi işareti önce bir örnekle- tut devresinden geçirilir. Daha sonra bu işarete bir testeredişi işaret ek- lenir. Elde edilen işaret bir dilimleme devresinden geçirilir. Dilimleme devresi bir kıyıcı ve bir kare alıcı aygıtın oluşur. Dilimleme devre- sinin girdisi dilimleme düzeyini aşarsa çıktı V volt, diğer durumlarda ise sıfırdır. Dilimleme devresinin çıktısı, vurum genişlikleri  $f(t)$  nin örneklenmiş değerlerine orantılı olan bir vurum dizisidir. Bu yolla VSM dalgabıçımı elde edilmesi bir arka-kenar modülasyonudur. Bir başka de- yişle vurumların başlangıç kenarları düzgün aralıktadır, arka kenarın bitiş zamanı bilgiyi taşır. Eğer testeredişi işaret zamanda ters çevri- lirse elde edilen VSM, ön-kenar modülasyonudur. Testeredişi yerine bir üçgen dalga konursa, her iki kenarda modülasyon elde edilir. Şekil 8.9 da verilen dizge, VSM işaretlerinin üretiminde kullanılan modülatörlere bir örnektir.

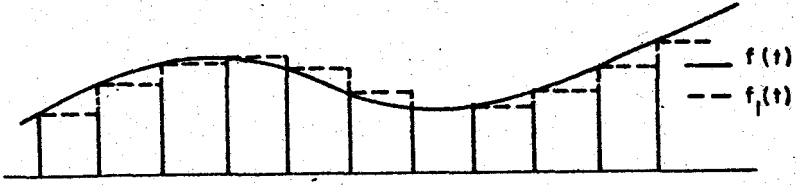
VSM işaretinin frekans görünüşü çözümlenmesini yapmak çok zordur. Burada karşılaşılan güçlükler FM işaretinin çözümlenmesi sırasında kar- şılaşılanlara benzer. FM işareti gibi, VSM işareti de bir doğrusal olma- yan modülasyondur. Tam çözümlenmenin yapılması olanaksızdır. Bazı basit- leştirme varsayımları altında, bazı çözümlenmeler yapılabilir. Örneğin bilgi işaretinin yavaş değiştiği varsayılırsa, komşu vurumların geniş- likleri hemen hemen aynı olur. Bu koşul altında, modüle edilmiş işaret için yaklaşık bir çözümleme yapılabilir. Karedalga FM ve üçgen-dalga FM'de yapıldığı gibi, VSM dalgabıçımı Fourier-benzeri serilere açılabi- lir. Gereksiz ölçüde karmaşık olması nedeni ile bu çözümleme burada ver- ilmeyecektir.

VSM için frekans bölgesi çözümlenmesi yapılamadığından kesin bir demodülasyon yöntemi önermek de olası değildir. Ancak vurum sürelerinin örneklenmiş değerlerin büyüklüğü ile orantılı olması VSM işaretinin bir alçak geçiren süzgeçten geçirilerek demodüle edilebileceğini önerir. Süzgeç çıktısı modüle edilmiş dalgabıçımının altındaki alanla orantılı

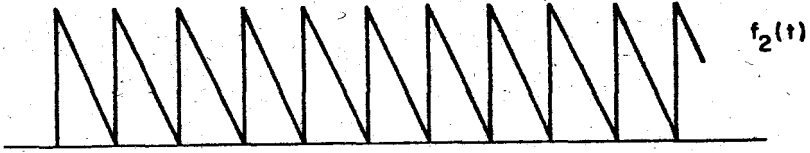




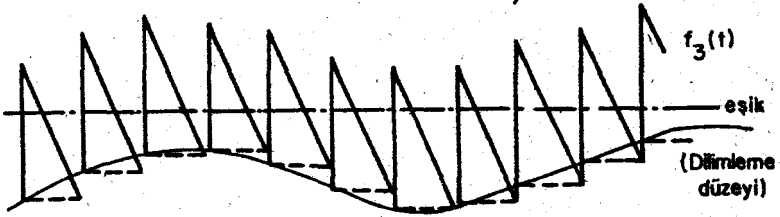
(a)



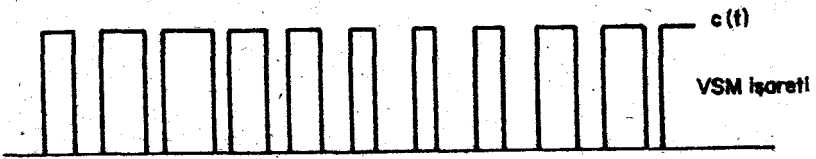
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 8.9 VSM işaretinin elde edilmesi

olur. Modüle edilmiş dalgabıçımının altındaki alan ise vurum genişliği ile, dolayısıyla  $f(t)$  ile, orantılıdır. Buna göre alçak geçiren süzgeç çıktısı  $f(t)$  ile orantılıdır ve VSM işaretini bu yolla demodüle edilebilir.

### Vurum Yeri Modülasyonu (VYM)

Taşıyıcı vurum dizisinde, vurumların yeri -yani zamanı- örnek değerlerin büyüklüğüne bağlı olarak değişiyorsa, elde edilen modülasyon vurum yeri modülasyonu (VYM) diye adlandırılır. (Bu vurum modülasyonu türünü vurum konumu modülasyonu olarak adlandırmak daha uygun olabilir. Ancak bu durumda bunun kısaltması ile ileride incelenen vurum kod modülasyonunun kısaltması (VKM) karışır. Bundan dolayı bu modülasyon türü için bu kitapta vurum yeri modülasyonu deyişi ve VYM kısaltması kullanılacaktır.) VSM ve VYM nin her ikisinde de, değiştirilen nicelik vurumların zamanları ile ilgili olduğundan, bu modülasyon türleri ortak olarak vurum zamanı modülasyonu (VZM) diye adlandırılır.

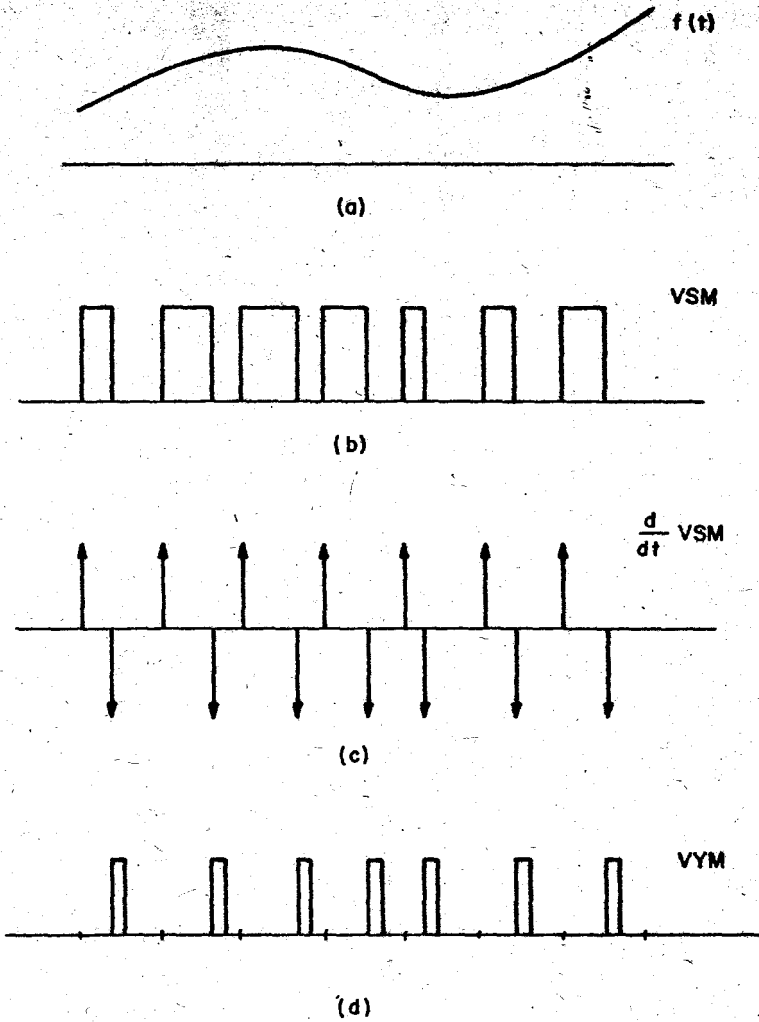
Örnek değerler büyüdükçe, buna karşılık gelen vurumların yeri, modüle edilmemiş durumdaki yerlerine göre daha çok sapar. Bir  $f(t)$  ve buna karşı gelen VYM işaretini Şekil 8.10'da gösterilmiştir. VYM işareti, VSM işareti kullanılarak elde edilebilir.

VSM işaretinin türevi alınarak peşpeşe artı ve eksi dürtülerden oluşan bir dürtü dizisi elde edilir. (Şekil 8.10(c)) Artı dürtüler her örnekleme aralığının başlangıcını gösterir. Eksi dürtüler ise VSM vurumlarının arka kenarlarını gösterir. Artı dürtünün belirlediği referans noktası ile eksi dürtünün bulunduğu yer arasındaki süre, VSM işaretinin vurum genişliğine eşittir. Bu durumda vurumların başlangıç anları eksi dürtülerle belirlenen bir vurum dizisi üretilirse, elde edilen vurum dizisinde her vurumun referans noktasına göre yeri örnek değerinin büyüklüğü ile orantılıdır. Bu nedenle bu biçimde elde edilen vurum dizisi bir VYM işaretidir.

Doğrusal olmayan bir modülasyon olması nedeni ile, VYM işaretinin frekans bölgesi çözülmesi çok karmaşıktır. Bu nedenle burada bu çözümleme yapılmayacaktır. VYM işaretlerinin demodülasyonu çeşitli biçimlerde yapılabilir. Bunlardan birisi, VYM işaretinden VSM işaretini üretmek ve daha sonra bir alçak geçiren süzgeç kullanılarak bu VSM işaretini demodüle etmektir.

VSM'de olduğu gibi VYM'de de modüle edilmemiş vurum dizisinin dönemi  $T, 2\pi/T > \omega_m$  koşulunu sağlamalıdır. (Burada  $\omega_m$ ,  $f(t)$  nin en yüksek frekans bileşenidir.) Sürekli  $f(t)$  işaretinin yeniden elde edilebilmesi için bu koşul gereklidir.

Vurum modülasyonunun üç türü VGM, VSM ve VYM'yi incelediğimiz bu altbölümü, bu modülasyon türlerine gürültünün etkileri konusunda birkaç şey söyleyerek bitirmek yerinde olur. Gürültü altında VSM ve VYM' nin başarımlarının VGM'ye göre daha iyi olduğu söylenebilir. Bunun nedeni VSM ve VYM işaretlerinde vurum genişliğinin örnek değerlerle ilgili olmasıdır. Çünkü vurum genişliği gürültüye karşı duyarlıdır ve kolayca bozulmaya uğrar. Burada sözkonusu olan gürültü altındaki başarımlar üstünlüğü,



Şekil 8.10 VSM işaretinden VYM işaretinin üretimi

GM ve FM karşılaştırıldığında görülen üstünlüğe benzer. FM'nin gürültü altındaki başarımının daha iyi olması için ödenen bedel, kullanılan bantgenişliğinin daha büyük olmasıdır. VSM ve VYM'de ise ödenen bedel, modüle edilmiş işaretin üretilmesindeki ve demodüle edilmesindeki zorluklardır. VYM'nin başarımı ise VSM'ye göre daha iyidir. Bunun nedenini sezgisel olarak açıklayabiliriz. Her iki modülasyon türünde de bilgi, vuruşların kendilerinde değil vuruşların kenarlarında taşınır. VYM, vuruşu değil de yalnız kenarı göndermeye daha yakındır. Bu nedenle en

azından güç açısından VYM'nin VSM'ye göre daha verimli olduğu söylenebilir.

Bu altbölümde incelenen vurum modülasyonu türlerinin yanısıra vurum kod modülasyonu (VKM) olarak adlandırılan başka bir vurum modülasyonu türü daha vardır. VKM'nin gürültüye duyarlı olmaması, üretiminin ve demodülasyonunun daha kolay olması gibi üstünlükleri vardır. Vurum kod modülasyonu aşağıdaki altbölümde incelenmiştir.

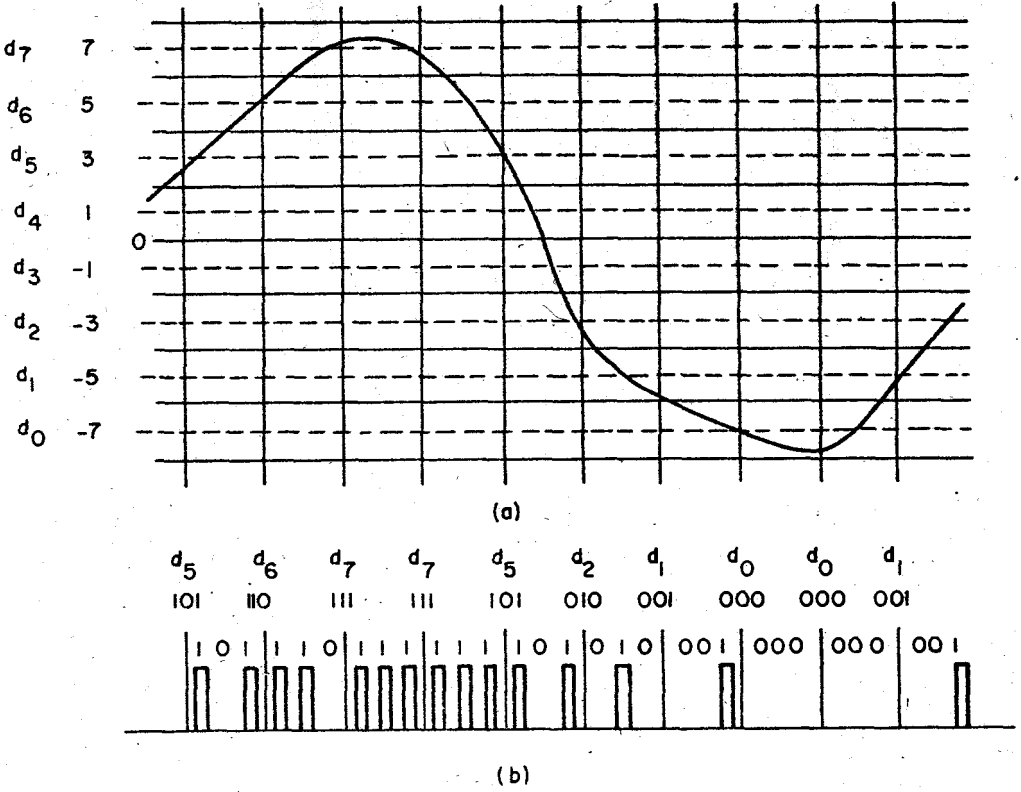
#### 8.4. VURUM KOD MODÜLASYONU (VKM)

En yaygın kullanılan vurum modülasyonu türü vurum kod modülasyonu-  
dur (VKM). VKM'de, bilgi işareti  $f(t)$ , örnek değerler kullanılarak yeni-  
den  $f(t)$  nin elde edilebileceği bir hızla, örneklenir. Daha sonra örnek  
değerler *nicemlenir*, yani her örnek değere önceden belirlenmiş düzeyler-  
den bu değere en yakın olan ile yaklaştırma yapılır. Her düzey bir ikili  
kod sözcüğü ile, yani sonlu uzunlukta bir 0-1 dizisi ile, gösterilir.  
Bir başka deyişle, her örnek değer (ya da buna karşı gelen nicemleme dü-  
zeyi) bir ikili kod sözcüğü ile kodlanır. Buna göre örnek değerler dizi-  
si, bir ikili kod sözcüğü dizisi ile gösterilir. Sonuçta elde edilen 0-1  
dizisi bir vurum dizisine dönüştürülür, 1 bir vurumla ve 0 ise bir vu-  
rum yokluğu ile gösterilir. Bu yolla elde edilen işaret VKM dalgabıçımı  
diye adlandırılır.

VKM'nin yapısı diğer vurum modülasyonu türlerine göre çok değişik-  
tir. VGM, VSM ve VYM'de bilgi işareti  $f(t)$  ya da bunun örnek değerleri,  
dönemli vurum dizisindeki vurumların belirli değiştirgenlerini doğrudan  
değiştirir. Ancak VKM'de  $f(t)$  önce kodlanır ve bu kod vurum dizisindeki  
vurumların büyüklüklerini değiştirmekte kullanılır. Bilgi işareti, vurum  
dizisini doğrudan modüle etmez.

Örnek olarak -8 ile +8 volt arasında değişen bir  $f(t)$  işareti düşü-  
nünüz. (Şekil 8.11'e bakınız). Bu işaret uygun bir hızla örneklenir ve  
her örnek değer 8 düzeyden birisine *nicemlenir*. Nicemleme düzeyleri  
1,3,5,7 dir. Her örnekleme anında örnek değer en yakın düzeye *nicem-*  
*lenir*. Örneğin (-8,-6) aralığındaki bir örnek değer -7 ye *nicemlenir*,  
(-6,-4) aralığındaki bir örnek değer ise -5 e *nicemlenir* ve bu böyle de-  
vam eder. Nicemleme düzeyleri -7,-5,-3,-1,+1,+3,+5,+7 dir ve bunlar 0,1,  
2,3,4,5,6,7 olarak numaralanır. Bu yolla, örnek değerler ve örnek değere  
en yakın nicemleme düzeyini gösteren 0 ile 7 arasındaki sayılar arasında  
bir ilişki kurulmuş olur. Daha sonra *nicemleme düzeyini gösteren sayı*  
*bir ikili kod sözcüğü ile kodlanır*. Ancak üretilecek kod sözcüğünün ola-  
bilecek en kısa uzunlukta olması istenir. Bu örnekte, 8 düzey ( $8 = 2^3$ )  
olduğundan bunları üç ikili basamakla gösterebiliriz. Nicemleme düzeyle-  
rine karşı gelen sayılar ile bunların kodlanacağı ikili kod sözcükleri  
aşağıda gösterilmiştir.

Sayı	İkili Kod Sözcüğü	Sayı	İkili Kod Sözcüğü
0	000	4	100
1	001	5	101
2	010	6	110
3	011	7	111



Şekil 8.11 Nicemlenmiş örnek değerler ve VKM dalgabiçimi

Burada ikili kod sözcüğü olarak, nicemleme sayısının ikili tabana göre gösteriminin kullanıldığına dikkat ediniz. Böylece her örnek değer bir ikili sözcük ile kodlanır. İkili dizi biçimindeki bu bilgi, daha sonra, bir "vurum" - "vurum yokluğu" dalgabiçimine dönüştürülür. Bu VKM dalgabiçimi Şekil 8.11(b)'de gösterilmiştir. İkili sayı 0, artı vurumun yokluğu yerine eksi bir vurumla gösterilirse, başka tür bir ikili VKM dalgabiçimi elde edilir.

Vurum dizisi biçimindeki VKM dalgabiçimi ya doğrudan kablolar üzerinden ya da örneksel modülasyon yöntemleri yardımıyla iletilir. Alınan VKM dalgabiçimini demodüle etmek için yapılması gereken şey, biçimine ya da genliğine bakmadan, bir vurumun varlığı ya da yokluğuna karar vermektir. Vurum dizisi elde edildikten sonra, kod çözülerek, nicemlenmiş örnek değerler bulunabilir. Ancak nicemlenmiş örnek değerler nasıl işlenirse işlensin, gerçek örnek değerlerin yeniden elde edilmeleri olanaksızdır. Nicemleme tersinir bir işlem olmadığından, bu bilgi kaybolur. Vurum dizisi herhangi bir yanılğı olmaksızın yeniden elde edilse bile, bilgi işareti  $f(t)$  tam olarak geri elde edilemez. Elde edilen işaret,  $f(t)$  nin bir yaklaştırması olan, nicemlenmiş değerler kullanılarak

üretilen sürekli işarettir. Nicemleme işleminin neden olduğu bu bozulma *nicemleme yanılığısı* diye adlandırılır. Bu bozulma VKM'nin yapısından ileri gelmektedir ve tümünden yokedilemez.

Nicemlemenin neden olduğu bu bozulma bir toplamsal gürültünün etkisine eşdeğerdir. Bu nedenle bu bozulma *nicemleme gürültüsü* diye adlandırılır. Nicemleme gürültüsü tümüyle ortadan kaldırılamaz, ancak çeşitli yollarla azaltılabilir. Aşağıdaki paragrafta nicemleme gürültüsünün nasıl azaltılabileceği tartışılacaktır.

Yukarıda verilen örneğe geri dönelim ve sorunu daha genel bir anlamda ele alalım.  $f(t)$  işaretinin  $[a, b]$  bölgesinde değerler aldığı ve  $k$  tane nicemleme düzeyinin kullanılacağını varsayalım.  $[a, b]$  bölgesi  $k$  eşit aralığa bölünür, her aralığın orta noktası  $o$  aralığa karşı gelen nicemleme düzeyi olarak alınır. Her örnekleme anında nicemlenmiş işaret, gerçek örnek değerini düşüğü aralığa karşı gelen nicemleme düzeyinin değerini alır. Nicemleme düzeyleri arasındaki uzaklık *basamak boyu* olarak adlandırılır ve  $(b-a)/k$  ya eşittir.

$[a, b]$  bölgesinin bölünmesi ve nicemleme düzeylerine sayılar verilmesi yukarıda açıklandığı gibi yapıldığında, her örnekleme anında, nicemleme yanılığısının adım boyunun yarısı olan  $(b-a)/2k$  yı, geçemeyeceğini söyleyebiliriz. Bu nedenle basamak boyunun küçültülmesi ya da eşdeğer biçimde nicemleme düzeylerinin sayısının arttırılması nicemleme yanılığısını azaltır ki bu da istenen bir şeydir. Ancak nicemleme düzeylerinin sayısının arttırılması, düzeyleri gösteren ikili kod sözcüklerinin uzunluklarının artmasına neden olur. Örneğin nicemleme düzeylerinin sayısı 8 i geçerse, bu düzeyleri üç basamaklı ikili kod sözcükleri ile kodlamak artık olanaksızlaşır. Kodlama için 0 ve 1 den oluşan ikili alfabe kullanılıyorsa, uzunluğu 3 olan  $2^3 = 8$  değişik kod sözcüğü, uzunluğu 4 olan  $2^4 = 16$  değişik kod sözcüğü vardır. Bu nedenle, nicemleme düzeyleri sayısının 8 den 16 ya arttırılması, olabilecek en büyük nicemleme yanılığısının yarıya inmesine neden olur ve ikili kod sözcüklerinin uzunluğu ise 3 den 4 e çıkar. Örnekleme aralığı değişmediği için, sözcük uzunluğunun 3 den 4 e çıkarılması, aynı zaman aralığında üç vurum gönderilmesi yerine 4 vurum gönderilmesi anlamına gelir. Bu ise vurumların daralmasına ve bunun sonucu olarak işaret bantgenişliğinin artmasına neden olur.

Yukarıdaki tartışma şu biçimde özetlenebilir: Nicemleme yanılığısını azaltmak için nicemleme düzeylerinin sayısı arttırılmalıdır, bu ise VKM işareti bantgenişliğinin artmasına neden olur. Öte yandan bantgenişliği kısıtlanması nedeni ile nicemleme düzeylerinin sayısı rasgele arttırılmaz. Zaman bölmeli çoklama konusu incelendiğinde görülecektir ki, çoklanan işaret sayısını azaltarak, bantgenişliğini arttırmadan, ikili sözcük uzunluklarının büyütülmesi olasıdır. Ancak çoklanan işaret sayısının azaltılması da istenmeyen bir durumdur.

VKM işaretinin bantgenişliğini arttırmadan, nicemleme düzeylerinin sayısını arttırmanın bir yolu vardır. İkiliden daha büyük bir kodlama alfabesi kullanarak bu sağlanabilir. Örneğin 0, 1 ve 2 den oluşan üçlü bir alfabe kullanılırsa, uzunluğu 3 olan  $3^3 = 27$  değişik kod sözcüğü, uzunluğu 4 olan  $3^4 = 81$  değişik kod sözcüğü ve genel olarak uzunluğu  $n$  olan  $3^n$  değişik kod sözcüğü üretmek olasıdır. Buna göre ikili kod yerine üçlü kod kullanılır ve kod sözcüğü uzunluğu değişmez tutulursa -örneğin

3-, sonuçta bantgenişliğini değiştirmeden, değişik kod sözcükleri sayısı  $2^3 = 8$  den  $3^3 = 27$  ye arttırılabilir. Bu yolla en büyük nicemleme yanılığ-ı, bantgenişliğini arttırmadan,  $(b-a)/2x8$  den  $(b-a)/2x27$  ye indirilir.

Yukarıdaki paragraftaki tartışma genelleştirilebilir. Bir m-li alfabe kullanılırsa uzunluğu n olan  $m^n$  değişik kod sözcüğü elde edilebilir, bu ise en fazla  $m^n$  sayıda nicemleme düzeyi kullanılmasına olanak sağlar. Nicemleme düzeylerinin sayısı k en büyük nicemleme yanılığ-ı ile ters orantılıdır. Nicemleme yanılığ-ı için bir üst sınır belirlenmesi, nicemleme düzeyi sayısı için bir alt sınır belirler. Nicemleme düzeylerinin sayısı k aynı zamanda

$$k < m^n$$

(8.32)

eşitsizliğini sağlamalıdır. Burada m alfabe büyüklüğü, n ise kod uzunluğunu gösterir. m ve n den birisi değişmez tutulursa diğ erinin değeri (8.32) sağlanacak biçimde seçilir. VKM işaret bantgenişliği sözcük uzunluğu n ile orantılıdır. Bu nedenle sözcük uzunluğu n rasgele bir biçimde arttırılamaz. En büyük nicemleme yanılığ-ını azaltmak için, nicemleme düzeyi sayısı k nın arttırılması istendiğinde, bu sözcük uzunluğu n (yani işaret bantgenişliği) arttırılmadan alfabe büyüklüğü m arttırılarak yapılabilir.

m nin en küçük değeri 2 dir, bu ise ikili kodlamaya karşı gelir. m nin alabileceği en büyük değer  $m=k$  dir. Bu durumda sözcük uzunluğu  $n=1$  dir ve bantgenişliği en küçük bir değerdedir. Bu durum nicemlenmiş VGM'ye karşı gelir; Buna göre her örnek değer, büyüklüğü, nicemlenmiş örnek değere eşit olan tek bir vuru mla gösterilir.

Bu durumda alfabe büyüklüğü m yi arttırarak, daha küçük bantgenişliği ve daha az yanılığ-ı elde edilmesini engelleyen nedir? Gerçekte çok büyük bir engel vardır. Bir m-li alfabe kullanıldığında, elde edilen VKM dalgabıçımı m değişik büyüklükte vuru mlardan oluşur. VKM dalgabıçımını demodüle etmek için, her vuru mda almanın, vuru m büyüklüğü için, m değişik düzey arasında bir karar vermesi gerekir. m artarken, almanın vuru m büyüklüğünü doğru olarak saptama olasılığı azalır. Özellikle kanalda VKM işaretine gü rü l t ü ye eklenmiş ise m artarken yanılığ-ı yapma olasılığı da artar. Böylece m arttıkça VKM'nin gü rü l t ü ye karşı duyarlı olama üstünlüğü yok olur.  $m=2$  için, VKM işareti gü rü l t ü ye en az duyarlıdır. m değeri 2 den k ya artarken başarı m düşer ve  $m=k$  olduğunda VKM'nin başarı mı VGM'ninki ile aynı olur. Bu beklenmeyen bir sonuç değildir, çünkü VKM, nicemlenmiş VGM olur.

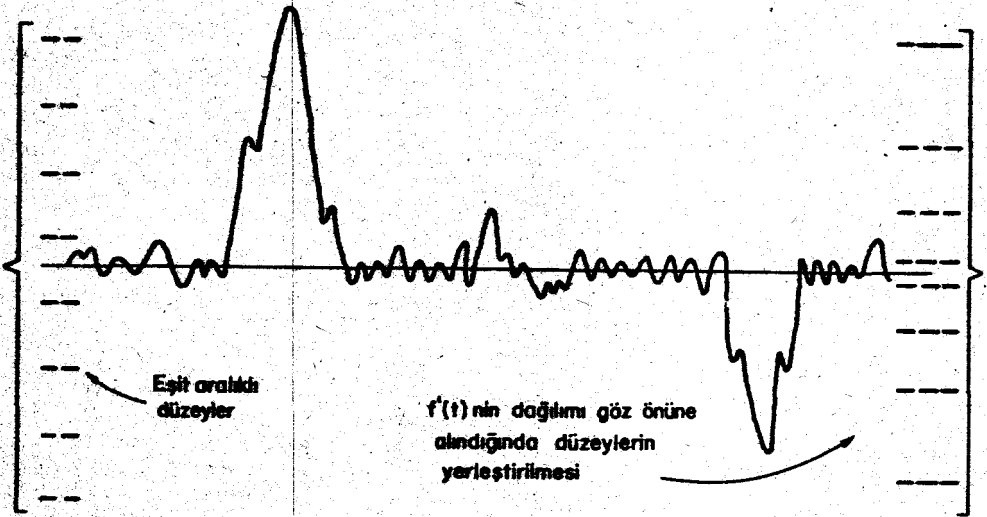
Yukarıdaki tartışma şu biçimde özetlenebilir: Değişmez bir bantgenişliği için, alfabe büyüklüğü m arttırılarak, VKM dizgelerinin yapısındaki olan nicemleme yanılığ-ı azaltılabilir. Ancak bu durumda VKM dizgesinin başarı mı düşer. Bu nedenle VKM'nin gü rü l t ü ye bağı şıklığı özelliğini kaybetmeden, nicemleme yanılığ-ının azaltılması için bantgenişliğinin artmasından başka çözüm yoktur. Bu ise daha önce çok kez tekrarladığımız genel ilkeyi, "Bedelini ödmeden bir şey kazanamazsınız" ilkesini doğrular niteliktedir.

### Sıkıştırıcı-Genleştirici

[a,b] bölgesinin eşit aralıklara bölünmesi ve her aralığın orta noktasının nicemleme düzeyi olarak belirlenmesi bazı koşullar altında

nicemleme yanılığını en düşük düzeye indirir. Bu koşullar  $f(t)$  nin sonlu bir  $[a,b]$  bölgesinde değerler alması ve bu bölgedeki her noktanın eşit olasılıklı olmasıdır. Bu son koşul  $f(t)$  nin  $[a,b]$  üzerinde düzgün dağılması biçiminde de ifade edilebilir. Bu koşullar sağlanmazsa,  $f(t)$  nin alabileceği değerler sonlu bir bölgede olmazsa ya da  $f(t)$  düzgün dağılmamışsa, nicemleme düzeylerinin belirlenmesinde ve bölgenin bölünmesinde izlenecek en iyi yol yukarıdaki ile aynı olmaz.

$[a,b]$  bölgesinde değerler alan bir  $f(t)$  işareti düşünelim. Bu bölgenin bazı aralıklarında  $f(t)$  nin değerler alma olasılığı, diğer aralıklara göre daha fazla olsun. Bir başka deyişle  $f(t)$ ,  $[a,b]$  üzerinde düzgün dağılmamış olsun. Örnek olarak zamanının çoğunu sıfır düzeyi çevresinde geçiren konuşma işaretini düşünelim. (Şekil 8.12). Bu işaretin 8 düzeye



Şekil 8.12 Düzgün dağılmamış bir işaret için düzgün ve düzgün olmayan biçimde nicemleme düzeylerinin yerleştirilmesi.

nicemleneceğini varsayalım. Eşit aralıklı nicemleme düzeylerinin iyi bir seçim olmadığı sezgisel olarak açıktır. Çünkü düzgün nicemleme kullanıldığında, işaret sıfır dolayında iken yapılan nicemleme yaklaşımları çok kötüdür ve işaret zamanın çoğunda sıfır dolayındadır. Daha iyi bir strateji şu olabilir: İşaretin zamanının çoğunu tükettiği değerler çevresinde nicemleme düzeylerini daha sık yerleştirmek ve işaretin daha az zaman tükettiği değerlerde ise nicemleme düzeylerini daha seyrek yerleştirmek. Bu yolla zamanın çoğunda daha az yanılı yapılacak ve yalnız küçük bir zaman diliminde ise daha fazla yanılı yapılacaktır. İstatistiksel (ortalama) olarak böyle bir strateji daha az yanılıya neden olacaktır.

$f(t)$  nin dağılımı (olasılık dağılımı ya da  $f(t)$  nin bölgesinin değişik kısımlarında tükettiği zamanın yüzdesi) verildiğinde, bölgenin en iyi bölünmesini hesaplamak ve düzeyleri belirlemek olanaklıdır. Bu en

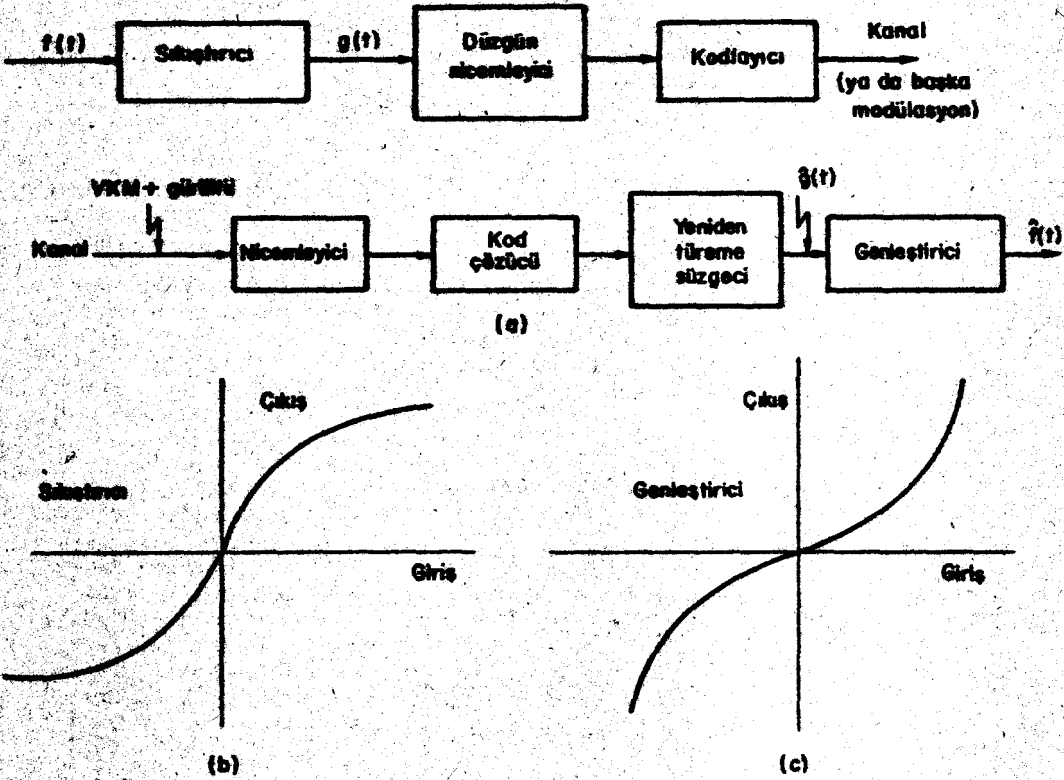


iyi değerlerin bulunması olasılık kuramı bilgisini gerektirir. Okuyucuların bu konuda önbilgileri olmadığı varsayıldığında, en iyi değerlerin bulunması burada çözümlenmeyecek, yalnız sonuçlar verilecektir. İşaretin belirli bir aralıkta olduğu verildiğinde, işaretin o aralıktaki koşullu beklenti değeri nicemleme düzeyini belirler. Bölgenin aralıklarını ise nicemleme düzeylerinin orta noktaları saptar.  $f(t)$  nin değer aldığı bölgenin bölünmesi ve nicemleme düzeylerinin saptanması bu biçimde yapılırsa istatistiksel olarak nicemleme gürlüğü en düşük düzeye indirilmiş olur.

Bölge en iyi bölündükten ve düzeyler en iyi biçimde saptandıktan sonra nicemleme buna göre yapılır. Ancak düzgün olmayan nicemlemeyi gerçekleştirmek düzgün nicemlemeye göre çok zordur. Düzgün nicemleme yaparak nicemleme yanlıgisını azaltmanın bir diğer yolu vardır.  $f(t)$  işaretini doğrusal olmayan (sıfır bellekli) bir aygıtın geçirilirse, çıktının dağılımı değişir. Doğrusal olmayan aygıt o biçimde tasarımlanır ki, çıktı düzgün dağılımlı olur. Doğrusal olmayan aygıtın çıktısı  $g(t)$  nin düzgün dağılımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda  $g(t)$  için en iyi nicemleme stratejisi düzgün nicemlemedir.  $g(t)$  yi bilgi işareti olarak kullanıp, VKM işareti üretilir, gönderilir ve almaçta demodüle edilir. Şimdi amaç eldeki  $g(t)$  işaretinden özgün bilgi işareti  $f(t)$  yi elde etmektir. Yukarıda sözü edilen doğrusal olmayan aygıtın giriş-çıkış özgeçirisi bire bir işlev ise -ki düzgün olmayan dağılımlı işaretleri düzgün dağılımlı işaretlere dönüştüren tüm doğrusal olmayan aygıtlar bu koşulu sağlar- bu doğrusal olmayan aygıtın etkisini giderecek ikinci bir doğrusal olmayan aygıt tasarımlamak olanaklıdır. Bir başka deyişle, bu ikinci doğrusal olmayan aygıtın girdisi  $g(t)$  ise çıktı  $f(t)$  olur. Bu iki doğrusal olmayan aygıt ardarda bağlandıklarında birbirlerinin etkilerini yok ederler. Almaçta kullanılan bu ikinci doğrusal olmayan aygıt sayesinde özgün bilgi işareti  $f(t)$  elde edilmiş olur.

Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir nokta da şudur: VKM olarak modüle edilen  $g(t)$  -düzgün dağılımlı- işareti almaçta aynı elde edilemez. Elde edilen,  $g(t)$  nin bir yaklaşımasıdır ve  $g(t)$  den farkı nicemleme yanlıgisından ileri gelmektedir. İkinci doğrusal olmayan aygıtın girdisi  $g(t)$  olmayıp bunun bir yaklaşması olduğundan, çıktı da  $f(t)$  olmayıp  $f(t)$  nin bir yaklaşmasıdır. Aradaki fark, nicemleme gürlüğünün bir doğrusal olmayan aygıttan geçirilmiş halidir, ki bu da bir nicemleme gürlüğü olarak düşünülebilir.

Bu özel olarak tasarlanmış ( $f(t)$  nin dağılımına bağlı olarak) iki doğrusal olmayan aygıt kullanılarak, düzgün nicemleme yoluyla,  $f(t)$  VKM biçiminde iletilebilir. Doğrusal olmayan aygıtlar o biçimde tasarlanmış ki, düzgün nicemleme en iyi nicemleme yöntemi olur. Birinci doğrusal olmayan aygıt  $f(t)$  nin bulunma olasılığı daha az olan bölgelerde  $f(t)$  yi sıkıştırır, bu nedenle bu aygıt sıkıştırıcı olarak adlandırılır. İkinci doğrusal olmayan aygıt ise bunun tersini yapar,  $f(t)$  nin bulunma olasılığı daha az olan bölgelerde  $g(t)$  yi genişletir, bu nedenle bu aygıt genişletici olarak adlandırılır. Bu yöntemin tümü sıkıştırıcı- genişletici olarak adlandırılır. Sıkıştırıcı- genişletici kullanılan bir VKM dizgesinin öbek çizimi Şekil 8.13(a)'da verilmiştir. Şekil 8.13'de ayrıca sıkıştırıcı ve genişleticinin giriş-çıkış özgeçirileri de gösterilmiştir. Kuşkusuz bu özgeçirilerin biçimleri  $f(t)$  nin dağılımına bağlıdır.



Şekil 8.13 Sıkıştırıcı ve genleştirici kullanan bir VKM dizgesi ve sıkıştırıcı ile genleştiricinin giriş-çıkış özeğrileri

VKM alıcısının demodülatörden sonra ilk bileşeni, eğer varsa, başka bir nicemleyicidir. Girişte örneksel VKM dalgabıçımı rasgele gürültü  $n(t)$  eklenmiş olarak görünür. Bu nicemleyici bir örnekselden sayısala çevirici gibi çalışır ve gürültünün neden olduğu bazı yanlışlarla ikili kod sözcüğü dizisini yeniden üretir. Kod çözücü bu kod sözcüklerini kullanarak, (kod sözcüğündeki yanlışların neden olduğu bazı yanlışlarla) nicelenmiş örnek değerleri saptar. Nicelenmiş örnek değerler türetici süzgeç girişine uygulandığında çıktı VKM yapılmış sürekli bilgi işaretinin bir yaklaşması olur. Sürekli bilgi işaretinden sapmanın nedeni niceme yanlısı ve kanalda eklenen toplamsal gürültü  $n(t)$  dir.

Bu tartışmayı bitirmeden önce bir noktayı belirtmekte yarar vardır. Düzensiz olmayan dağılımlı bir işarete düzensiz olmayan en iyi niceme uygulanarak VKM işareti üretmek ile sıkıştırıcı-genleştirici yöntemi kullanarak VKM işareti üretmek tamamen eşdeğer değildir. Her iki yöntemde aynı çıktılar -bilgi işaretine yaklaşımlar- farklıdır. Dolayısı ile her iki yöntemde ortaya çıkan gürültü miktarı da farklıdır. Düzensiz olmayan niceme yöntemi istatistiksel olarak en iyi olduğuna göre, sıkıştırıcı-genleştirici yönteminde ortaya çıkan bozulmanın daha çok olduğu

sonucuna varabiliriz. Sıkıştırıcı-genleştirici yöntemi en genel değıide, daha dar bir anlamda en iyi yöntemdir. Diğer yandan düzgün olmayan nicemleme yöntemine göre gerçekleştirilmesi çok kolaydır.

### Nicemleme Gürültüsü

Kanalda VKM dalgabıçımına eklenen gürültü kod simgelerinin tanınmasında yanlışlılara neden olur. VKM işaretinin sezimi, bir vurumun varlığını ya da yokluğunu (ikili kod), ya da bir vurumun genlik düzeyini ( $m > 2$  için) saptamaktan ibaret olduğundan, vurum genliklerinin ya da eşdeğer biçimde işaret gücünün arttırılması, toplamsal gürültünün neden olduğu yanlış sayısının azalmasına neden olur. 0 in 1 olarak ya da 1 in 0 olarak sezimlenmesine neden olmadığı sürece, VKM modülasyonunda toplamsal gürültünün etkileri tümüyle ortadan kaldırılır. VKM'nin en önemli üstünlüğü de budur. Ancak, işaret gücü rasgele arttırılamayacağından, etkisi azaltılmasına karşın, kanaldaki toplamsal gürültü yine de bir yanlışlık kaynağıdır.

VKM'de bundan başka bir yanlışlık kaynağı daha vardır. Bu VKM'de kullanılan dizgenin yapısı gereği oluşan nicemleme yanlışlığıdır. Bu yanlışlık, toplamsal gürültünün etkilerini azaltmak için yapılan tasarımın sonucu olarak ortaya çıkar. Örneklemelerinde örnek değerler nicemlenir ve daha sonra kodlanarak gönderilir. Eğer toplamsal gürültü herhangi bir yanlışlığa neden olmazsa, nicemlenmiş değerler almaçta olduğu gibi geri elde edilir. Ancak gerçek örnek değerler asla geri elde edilemez. Nicemlenmiş değerler kullanılarak üretilen sürekli işaret, özgün bilgi işaretinden farklıdır. Nicemlemenin neden olduğu bu fark, bilgi işaretine eklenmiş bir gürültü olarak düşünülebilir. Bu nedenle bu yanlışlık nicemleme gürültüsü diye adlandırılır.

Örneklemelerindeki en büyük nicemleme gürültüsünün düzgün nicemleme için, basamak boyunun yarısını geçmeyeceği daha önce belirtilmişti. Düzgün olmayan nicemlemede, en büyük nicemleme yanlışlığı, nicemleme düzeyi ile buna karşılık gelen bölümün sınırları arasındaki uzaklığı geçemez. Bu nedenle her iki durumda da örneklemelerindeki nicemleme yanlışlığının bir üst sınırı vardır. Örneklemelerindeki nicemleme yanlışlığının ortalama değeri için ne söylenebilir? Bu sorunun yanıtını bulmak için olasılık kuramı bilgisi gereklidir. Burada derine inmeden yalnızca ilgili sonuç verilecektir. Örneklemelerindeki nicemleme yanlışlığının karesinin istatistiksel ortalaması, nicemleme yanlışlığının karesel ortalama değeri olarak adlandırılır ve şu biçimde hesaplanır.

$$\overline{e^2} = \sum_{i=1}^k p_i f e^2 f(e|i) \quad (8.33)$$

Burada  $f(e|i)$ , işaretin  $i$  aralığında olduğu verildiğinde yanlışlığın koşullu olasılık yoğunluğudur ve  $p_i$  ise işaretin  $i$  aralığında olma olasılığıdır. (8.33)'deki tümlev, işaret  $i$  aralığında olduğunda yanlışlığının karesel ortalama değeridir. Bu nicelikleri işaretin  $o$  aralığında olma olasılığı ile çarpıp ağırlıklı toplamları hesaplanırsa nicemleme yanlışlığının karesinin toplam ortalaması bulunabilir.

$f(t)$  işareti düzgün olarak dağılmış ve nicemleme düzgün olarak yapılmış ise  $f(t) \in [L_i - \frac{a}{2}, L_i + \frac{a}{2}]$  için  $p_i = \frac{1}{k}$  ve  $f(e|i) = \frac{1}{a}$  dir.

Burada  $k$  nicemleme düzeylerinin sayısı;  $L_i$ ,  $i$  aralığındaki nicemleme düzeyi ve  $a$  ise basamak boyudur. Bu nicelikler (8.33)'de yerine konularak; karesel ortalama yanılgi hesaplanabilir.

$$\frac{e^2}{12} = \frac{a^2}{12} \quad (8.34)$$

(8.34)'de verilen değer herhangi bir anda değil; örnekleme anındaki nicemleme yanılıısının karesinin ortalamasıdır. Karesel ortalama nicemleme yanılıısının karekökü (kok)  $a/\sqrt{12}$  dir. Nicemleme yanılıısının üst sınırı gibi, nicemleme yanılıısının karesel ortalamasının karekökü de basamak boyu  $a$  ile doğru orantılıdır. Nicemleme düzeylerinin sayısını arttırarak basamak boyu  $a$  nın küçük bir değer alması sağlanabilir. Nicemleme düzeylerinin sayısını arttırmak için ya bantgenişliğini arttırmak ya da kod alfabesinin büyüklüğünü arttırmak gereklidir. Bantgenişliğinin arttırılması konusunda bilinen kısıtlamalar vardır. Kod alfabesinin büyüklüğünü arttırmak ise VKM'nin toplamsal kanal gürültüsüne olan bağıklılığını azaltır. Bu nedenlerle nicemleme yanılıısı istenildiği gibi azaltılamaz.

Toplam işaret değişmesini nicemleme yanılıısının karesel ortalamasının kareköküne (kok) oranlıyarak ya da işaret gücünü, nicemleme yanılıısının karesel ortalamasına oranlıyarak bir tür işaret-nicemleme gürültüsü oranı tanımlanabilir. Düzgün dağılmış işaret ve düzgün nicemleme için bu nicelikler hesaplanırsa şu sonuçlar elde edilir:

$$\frac{\text{tepeden-tepeye işaret değişmesi}}{\text{nicemleme yanılıısının kok değeri}} = \frac{ka}{a/\sqrt{12}} = \sqrt{12} k \quad (8.35)$$

ve

$$\frac{\text{işaret gücü}}{\text{nicemleme yanılıısının karesel ortalaması}} = \frac{a^2(k^2 - 1)/12}{a^2/12} = k^2 - 1 \quad (8.36)$$

Burada işaret gücü şu biçimde hesaplanmıştır.

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i^2 = \frac{a^2(k^2 - 1)}{12} \quad (8.37)$$

Yukarıda verilen tartışmaların ve sonuçların tümü örnekleme anındaki nicemleme gürültüsü için geçerlidir. Ancak nicemleme gürültüsünü bütün  $t$  değerleri için de incelemek gerekir. Çünkü nicemleme gürültüsü, bilgi işaret  $f(t)$  ile örneklenmiş ve nicemlenmiş  $\{q(kT)\}$  değerleri kullanılarak üretilen  $q(t)$  işareti arasındaki fark olup, her  $t$  anında değer alan sürekli bir işarettir. Bunun nedeni  $\{q(kT)\}$  değerlerinin bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi ile elde edilen  $q(t)$  nin de bant sınırlı ve sürekli bir işaret olmasıdır. Sürekli nicemleme yanılıısı için örnekleme anlarındaki nicemleme yanılıısı türünden bir ifade bulunabilir. Örnekleme yeterince hızlı yapılırsa bilgi işareti  $f(t)$  nin gösterimi şu biçimdedir:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.38)$$

Nicemleme gürültüsünü  $e(t) \triangleq f(t) - q(t)$  olarak tanımlarsak, örnekleme anlarında  $f(kT) = q(kT) + e(kT)$  olur. Bunu (8.38)'de yerine koyarak,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.39)$$

elde edilir. (8.39)'un sağ yanındaki birinci terim  $q(t)$  olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle nicemleme yanılığısı  $e(t)$  yi  $e(kT)$  ler türünden şu biçimde ifade edebiliriz:

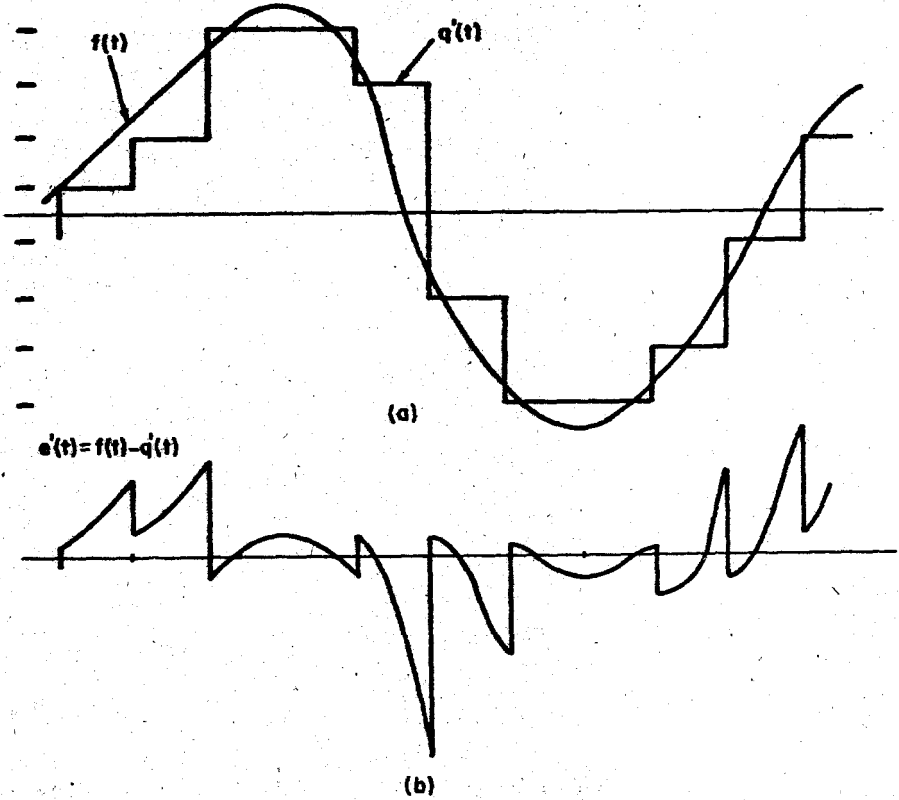
$$e(t) = f(t) - q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{T} - k \right)}{\pi \left( \frac{t}{T} - k \right)} \quad (8.40)$$

Bu ifade de görüldüğü gibi örnek değerleri  $e(kT)$  (örnekleme anlarındaki nicemleme yanılığısı) olan nicemleme gürültüsü  $e(t)$  de  $[f(t)$  ile aynı frekans] bant sınırılı bir işarettir.

Şimdi de değişik bir nicemlenmiş işaret dalgabiçimini inceleyelim. Nicemlenmiş örnek değerler bir örnekle-tut devresinden geçirilerek değişik bir nicemlenmiş işaret dalgabiçimi elde edilir. Örnekle-tut devresi nicemlenmiş örnek değerleri bir sonraki örneğe kadar tutar. Bu durumda nicemleme yanılığısı bu devrenin çıkışındaki işaret ile  $f(t)$  nin farkıdır. Tipik bir değişik nicemlenmiş işaret ile buna karşı gelen nicemleme yanılığısının çizimleri Şekil 8.14'de verilmiştir. Bu değişik işaret  $q'(t)$ , özgrisi düz devresinin yarattığı bozulmayı giderecek biçimde tasarlanmıştır (düz-tepeli örneklemede açıklandığı gibi), bir alçak geçiren süzgeçten geçirilirse yukarıdaki paragrafta tanımlanan  $q(t)$  elde edilir. Şekil 8.14'de çizilmiş  $e'(t)$  yanılığısının örnekleme anlarındaki büyüklüğü  $a/2$  den küçüktür. Örnekleme anından sonra yanılığının büyüklüğü azalabilir, artabilir hatta  $a/2$  yi aşabilir. Ancak bir sonraki örnekleme anında adım boyu  $a$  nin bir tamsayı katı eklenerek ya da çıkartılarak  $e'(t)$  nin değeri yeniden  $[-a/2, a/2]$  bölgesine sokulur.

Uygulamada genellikle ikili VKM kullanılır. Sekiz ya da onaltı düzeye nicemlenmiş konuşma işaretinin anlaşılabilirliği oldukça iyidir. Düzeylerin sayısı 32 ya da 64 e arttırılırsa ses niteliği ve gerçek konuşmaya benzerlik daha da artar. İki düzeye nicemlenmiş konuşma işaretinin bile bazı durumlarda anlaşılır olması şaşırtıcıdır.

VKM dizgelerinin en önemli özelliği, bu dizgelerde toplamsal kanal gürültüsü etkisinin düşük düzeyde tutulabilmesidir. Diğer yandan çoğunlukla alçak frekans bileşenlerinden oluşan VKM işaretlerinin, ikinci bir modülasyon katı uygulanmadıkça, kablolar üzerinden iletilmesi gerekmektedir. Kablolar üzerinden iletilen VKM işareti önemli ölçüde zayıflamaya uğrar, bunun sonucunda toplamsal kanal gürültüsü ile çapraz konuşma (crosstalk)'un etkileri daha belirginleşir. Bu istenmeyen etkiler kablo üzerinde uygun aralıklarla yineleyiciler konularak giderilebilir.



Şekil 8.14 Örneklenmiş-nicemlenmiş-tutulmuş işaret ve buna karşı gelen yanlış işaret.

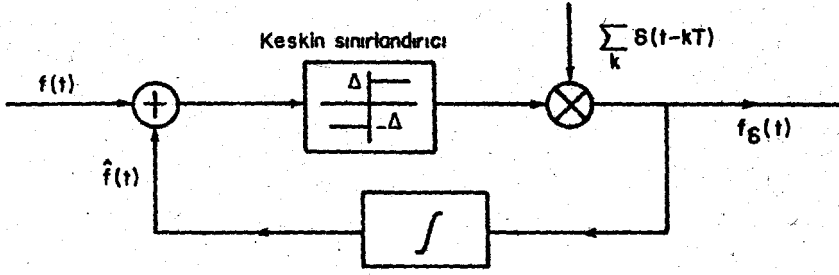
Yineleyiciler 0-1 vurum dalgabiçimini sezerler ve bunu yeniden güçlü bir biçimde üretirler. Bu yolla, yineleyicilerde yapılan bazı sezme yanlışları dışında, toplamsal gürültünün etkileri yok edilir. Daha iyi sonuç için çare daha sık ve daha çok yineleyici kullanmaktır. VKM işareti, iletimi sırasında, düzenli olarak yeniden biçimlendirilebilir ya da yeniden üretilebilir. VKM'nin yeniden biçimlendirilmesinin oldukça kolay ve etkin olarak yapılabilmesi VKM'nin önemli bir üstünlüğüdür. VKM'nin diğer bir üstünlüğü ise dizgelerin tümüyle sayısal devrelerden oluşturulabilmesidir.

Diğer vurum modülasyonu türlerinde olduğu gibi VKM'de de eşzamanlama çözülmesi gereken bir sorundur. Alınan 0-1 vurum dizisini doğru olarak çözebilmek için kod sözcüklerinin doğru olarak saptanması zorunludur, bunun için ise kod sözcüğü eşzamanlaması gerekir. Kodlama, kod sözcüğü eşzamanlamasını kolaylaştıracak biçimde yapılabilir. Eşzamanlama sorunlarının ayrıntılarına burada girilmeyecektir.

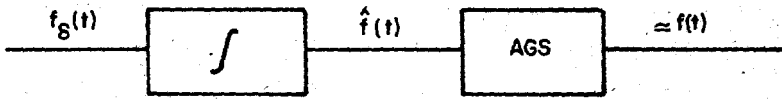
## Delta Modülasyonu (DM)

Sürekli bir işaretin bir ikili dizi olarak kodlandığı başka bir modülasyon yöntemi de *delta modülasyonu (DM)* dur. Bu nedenle delta modülasyonu bir tür vurum kod modülasyonu olarak düşünülebilir. Ancak VKM adı yalnız yukarıda anlatılan özel kodlama yöntemi için kullanılır. Burada DM'nin ayrıntılı çözülmesi verilmeyecek, bunun yerine bu modülasyon yönteminin işlemsel ilkeleri özetlenecektir.

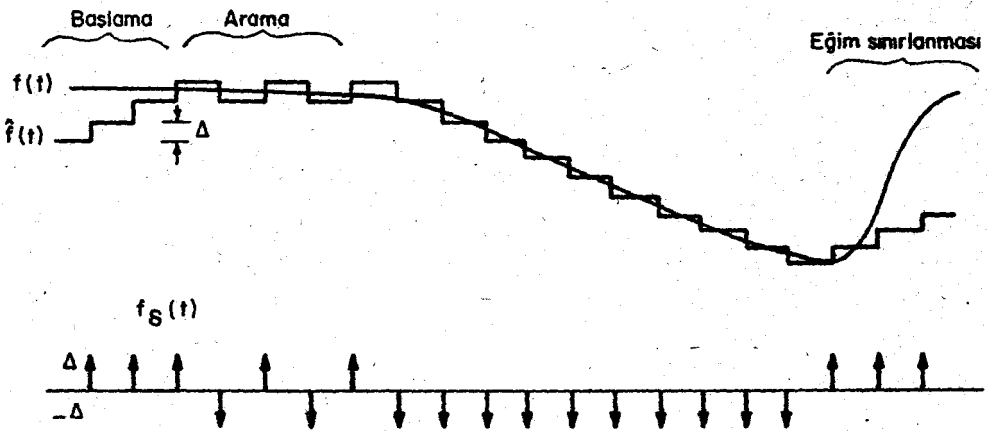
Bir delta modülatörünün öbek çizimi Şekil 8.15(a)'da verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 8.15 (a) DM modülatörü, (b) DM demodülatörü  
(c) DM ile ilgili bazı dalgabiçimleri

Bilgi işareti  $f(t)$  ile  $\hat{f}(t)$  nin basamak işlevi yaklaştırması  $\hat{f}(t)$  karşılaştırılarak, bu iki işaretin farkı bulunur. Elde edilen fark işareti bir keskin sınırlandırıcıdan geçirilir; keskin sınırlandırıcının çıktısı  $f(t) - \hat{f}(t)$  nin işaretine bağlı olarak  $\mp \Delta$  olur. Keskin sınırlandırıcının çıktısı bir dürtü dizisi ile çarpılarak DM dalgabıçımı elde edilir. DM dalgabıçımı bir dürtü dizisidir ve dürtülerin şiddetleri ya  $\Delta$  ya da  $-\Delta$  dir. Dürtülerin işareti  $f(t) - \hat{f}(t)$  nin işaretine bağlıdır. DM dalgabıçımının tümlevi alınır, daha önce karşılaştırmada kullanılan  $f(t)$  nin basamak işlevi yaklaştırması  $\hat{f}(t)$  elde edilir. DM modülatörünün çalışması Şekil 8.15(c)'de açıklanmıştır.  $\hat{f}(t)$  nin değeri  $f(t)$  den azsa,  $\hat{f}(t)$ ,  $\Delta$  kadar arttırılır,  $f(t)$  nin değeri  $f(t)$  den büyükse,  $\hat{f}(t)$ ,  $+\Delta$  kadar azaltılır.  $\hat{f}(t)$  bu biçimde değiştirilerek  $f(t)$  yi izlemesi sağlanır. DM işaretinin taşıdığı tüm bilgi örnekleme anlarındaki sıçramaların  $+\Delta$  ya da  $-\Delta$  olduğudur. Bu nedenle  $+\Delta$  değişimleri 1 ile,  $-\Delta$  değişimleri 0 ile gösterilerek, bilgi işareti bir ikili dizi biçimine sokulabilir. Bu nedenle bu modülasyon yöntemi *delta modülasyonu* diye adlandırılır.

Bir DM demodülatörün öbek çizimi Şekil 8.15(b)'de verilmiştir. DM demodülatörü bir tümlev alıcı ile bir alçak geçiren süzgeçten oluşur. Tümlev alıcının çıktısı  $f(t)$  nin basamak işlevi yaklaştırması  $\hat{f}(t)$  dir. Alçak geçiren süzgeç çıktısı yine  $f(t)$  ye bir yaklaşımdır. Süzgeç çıktısının  $f(t)$  ye eşit olmayış nedeni modülasyon sırasında yapılmış olan nicemleme işlemidir. Alçak geçiren süzgeç  $\hat{f}(t)$  deki süreksizlikleri düzleştirir.  $\hat{f}(t)$  işareti Şekil 8.14 de gösterilen nicemlenmiş-örneklenmiş-tutulmuş işarete çok benzer.  $f(t)$  yi elde etmek için, girdisi  $\hat{f}(t)$  olan alçak geçiren süzgecin örnekle-tut (düzgün-kepeli örnekleme) devresinin neden olduğu bozulmayı giderecek biçimde tasarlanması gereklidir.

Nicemleme gürültüsüne ek olarak, DM modülatöründeki bazı kısıtlamalar nedeni ile bazı durumlarda  $\hat{f}(t)$  işareti  $f(t)$  yi yakından izleyemez. Bu nedenle bu durumlarda alçak geçiren süzgeç çıktısı  $f(t)$  den oldukça farklı olabilir. Şekil 8.15(c)'de görüntülenen DM'nin çalışması incelendiğinde, şu istenilmeyen durumlarla karşılaşılacağı görülür:

- i. Başlangıçta  $\hat{f}(t)$  nin  $f(t)$  ye yetişmesi için bir kaç basamak gereklidir, bu durum *başlama* olarak adlandırılır.
- ii.  $f(t)$  değişmez kaldığında  $\hat{f}(t)$  nin bir artı bir eksi basamaklarla  $f(t)$  yi ararken gösterdiği davranış *arama* olarak adlandırılır ve bunun neden olduğu bozulmaya ise *arama gürültüsü* denir.
- iii.  $f(t)$  hızlı değiştiğinde, bir seferde yalnız  $\Delta$  kadar değişebilen  $\hat{f}(t)$  işareti,  $f(t)$  yi izleyemez. Bu durum *eğim sınırlanması* diye adlandırılır.

Özellikle eğim sınırlanması DM'deki en önemli kısıtlamadır. Bu istenilmeyen durumların etkilerini azaltmak için çeşitli yollara başvurulabilir. Bu etkileri azaltmak için ödenen bedel ise daha hızlı örnekleme ve dizgenin karmaşılaşmasıdır.

Basit bir çözümleme ile eğim sınırlanmasını önleyecek koşullar saptanabilir. Bir an için bilgi işareti  $f(t)$  yi frekansı  $f_m$  ve büyüklüğü



1 olan temiz bir sinüzoidal varsayalım. Bu işaretin en büyük eğimi  $2\pi f_m$  dir.  $f(t)$  işaretinin eğimi ise  $\Delta/T$  ya da  $\Delta f_s$  dir (burada  $f_s$  örnekleme frekansdır). Eğim sınırlanmasını önlemek için

$$\Delta \cdot f_s > 2\pi f_m \quad (8.41)$$

olmalıdır.  $\Delta$  değeri VKM'deki basamak boyuna karşı gelir ve  $\hat{f}(t)$  nin  $f(t)$  ye iyi bir yaklaştırma olabilmesi için  $\Delta$  nin küçük olması gereklidir. Bu durumda, küçük  $\Delta$  değerleri için (8.41)'in sağlanması ancak örnekleme hızı  $f_s$  nin çok büyük olması ile gerçekleştirilebilir.

Sezgisel olarak (8.41) sağlandığında, tek bir frekanstan oluşmayan,  $f_m$  ye bantsınırlı işaretlerde de eğim sınırlanmasının önlenebileceğini ileri sürebiliriz. Gerçekte (8.41)'deki eşitsizlik, bantsınırlı bir işaret için oldukça büyük bir alt sınır getirir. İşaretin görüngesi genellikle  $f_m$  den çok önce azaldığı için (8.41)'deki koşul gevşetilebilir. Eğer

$$S(f) = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 S(f_0), \quad f_0 < |f| \leq f_m \quad (8.42)$$

koşulunu sağlayan bir  $f_0$  frekansı varsa ( $f_0 < f_m$ ) bilgi işaretinin eğimi her zaman  $2\pi f_0$  dan küçüktür. (Burada  $S(f)$  bilgi işaretinin güç görünüşüne yoğunluğudur.) Buna göre (8.41) yerine

$$f_s \geq \frac{2\pi f_0}{\Delta} \quad (8.43)$$

koşulunun sağlanması yeterlidir. Ses işaretleri için  $f_m \approx 3.3$  KHz'dir ve (8.42) genellikle  $f_0 = 800$  Hz için sağlanır. Modüle edilmiş işaretin bantgenişliği örnekleme frekansı  $f_s$  ile doğru orantılıdır. Bu nedenle  $f_s$  istenildiği gibi arttırılamaz. (8.41) yerine (8.43)'ün kullanılması, bantgenişliğinde önemli ölçüde azalmaya neden olur.

(8.43)'ün sağlanması eğim sınırlanmasını önler. Ancak, nicemleme yanılığısı dışında,  $\hat{f}(t)$  den  $f(t)$  nin elde edilebilmesi için örnekleme frekansı  $f_s$  nin Nyquist hızından büyük olması gerekir.

Eğim sınırlanması ve başlama durumları önlenildiğinde,  $f(t)$  ile bunun basamak yaklaştırması  $\hat{f}(t)$  arasındaki farkın yapısı VKM'deki nicemleme gürültüsünün yapısına benzer. VKM'de nicemleme gürültüsü için yapılan benzer bir istatistiksel çözümleme yapılarak, DM'deki yanılığının karesel ortalamasının karekökünü, basamak boyu  $\Delta$  ile orantılı olduğu gösterilebilir.

VKM ile DM karşılaştırıldığında, DM dizgesinin yapısının çok basit olduğu görülür. Buna karşın DM genellikle VKM'ye göre daha büyük bir iletim bantgenişliği gerektirir. DM'de örnekleme hızı hem Nyquist hızından büyük olmalı hem de (8.43)'ü sağlamalıdır. Bu nedenle DM'de örnekleme frekansı daha büyük olur ve bunun sonucu olarak iletim bantgenişliği de büyük olur. Deneyssel olarak elde edilen sonuçlara göre iyi nitelikli bir konuşma iletimi için VKM, DM'ye göre daha az bantgenişliği gerektirir. Örnekleme hızı 8 kHz olan 8 bit'lik (256 düzey) bir VKM işaretinde vurum dizisinin frekansı 64 kHz'dir. Bu işaretin niteliği ile

Örnekleme hızı 100 kHz olan DM'nin niteliği karşılaştırılabilecek düzeydedir. Öte yandan bantgenişliğini azaltmak için nitelik ve anlaşılabilirlikten bir ölçüde fedakarlık edilirse DM'nin başarımının daha iyi olduğu söylenebilir.

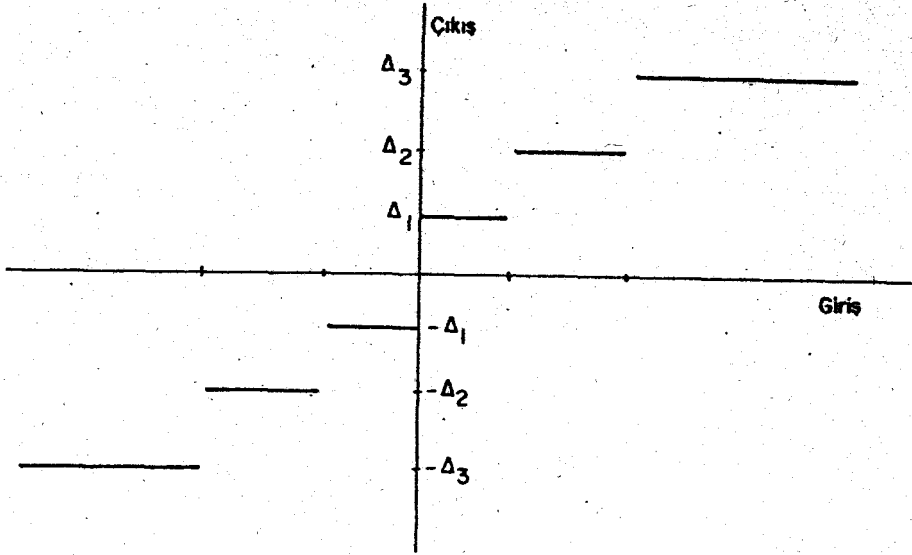
### Türevsel Vurum Kod Modülasyonu (TVKM)

Yukarı paragrafta incelenen DM'nin uygulamadaki kolaylığının yanı sıra bazı eksiklikleri vardır. Basamak boyu  $\Delta$ , eğim sınırlandırmasını önlemek için örnekleme frekansı  $f_s$  deki kısıtlamalar, başlama, arama ve  $f(t)$  ye iyi bir yaklaşıma üretmek, DM'deki en önemli sorunlardır.  $f_s$  değişmez tutulduğunda eğim sınırlandırmasını önlemek için  $\Delta$  yı büyütmek gerekir; bu ise nicemleme gürlülüğünde artışına ve  $f(t)$  ye yaklaşımına kötüleşmesine neden olur. Ayrıca  $\Delta$  arttıkça aramanın etkileri (arama gürlülüğü) de artar.  $\Delta$  küçük tutulduğunda ise eğim sınırlandırmasını önlemek için  $f_s$  arttırılmalıdır, bu ise iletim bantgenişliğinin artmasına neden olur.

Bu soruna ancak bir ölçüde çözüm getirilebilir. Basamak boyu  $\Delta$ ,  $\hat{f}(t)-f(t)$  nin büyüklüğüne bağlı olarak değiştirilirse, örnekleme frekansını arttırmadan  $\hat{f}(t)$  nin  $f(t)$  ye daha yakından izlenmesi sağlanabilir.  $\hat{f}(t)-f(t)$  büyüdükçe  $\Delta$  büyür,  $\hat{f}(t)-f(t)$  küçüldüğünde ise  $\Delta$  da küçülerek arama gürlülüğü etkilerini azaltır; bu yolla eğim sınırlandırması da önlenmiş olur. Sonuçta ise örnekleme frekansı arttırılmadan toplam yanılga azaltılmış olur. Basamak boyunun değişken olduğu bu modülasyon yöntemi uyarlamaalı DM diye adlandırılır.

DM dizgesindeki keskin-sınırlandırıcı başka bir doğrusal olmayan aygıt ile değiştirilerek uyarlamaalı DM dizgesi kolayca gerçekleştirilebilir. Örneğin giriş-çıkış özgeçirisi Şekil 8.16'da gösterilen doğrusal olmayan aygıt kullanılarak bir uyarlamaalı DM dizgesi yapılabilir. Burada girişin büyüklüğüne bağlı olarak, çıktı altı değerden  $\mp\Delta_1$ ,  $\mp\Delta_2$ ,  $\mp\Delta_3$  den birisine eşit olur. Basamak boylarının sayısı bir başka deyişle giriş-çıkış özgeçirisi istenildiği gibi seçilebilir. Bu yolla  $\hat{f}(t)$  nin  $f(t)$  ye istenildiği kadar yakından izlenmesi sağlanır. Ancak modülatör çıkışı artık bir ikili dizi olmaz. Örneğin özgeçirisi Şekil 8.16'da gösterilen aygıtın çıktısı altı değişik değer alabilen vurumlardan oluşan bir vurum dizisidir. Bu uyarlamaalı DM dizgesinde başka herhangi bir değişiklik yapılmassa, çıktı bir ikili dizi değil de bir 6-lı dizi olur. Şekil 8.15 (b)'de verilen demodülatör herhangi bir değişim yapılmaksızın bu dalgalığını için de kullanılabilir. Ancak bu uyarlamaalı DM dizgesinin istenilmeyen bir özelliği vardır: 6-lı işaret yollamak. Bu dezavantaj VKM'de m-li işaret kullanılmasının neden olduğu dezavantajla aynıdır. Buna ek olarak, m-li vurumu sezmede yapılan bir yanılmanın etkisi VKM'de yapılmama göre daha uzun sürer.

Böyle bir uyarlamaalı DM dizgesinin istenilmeyen özelliklerini yok etmek için, m-li vurum dizisini bir ikili dizi olarak kodlamak ve daha sonra bu ikili diziyi göndermek gerekir. Böyle bir modülasyon yöntemi ise amaçta ikili vurum dizisinden m-li vurum dizini üretecek bir kod çözücü gerektirir. Ayrıca modülatörde tümlev alıcıya m-li dizi ile (kodlanmadan önce) beslemek yerine, ikili dizinin kodunu çözüp bununla

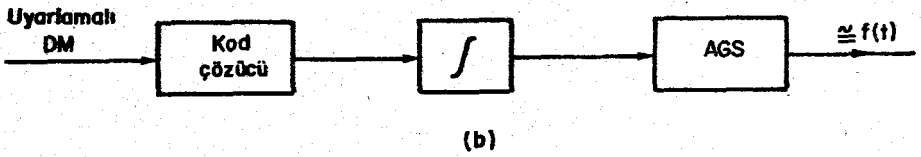
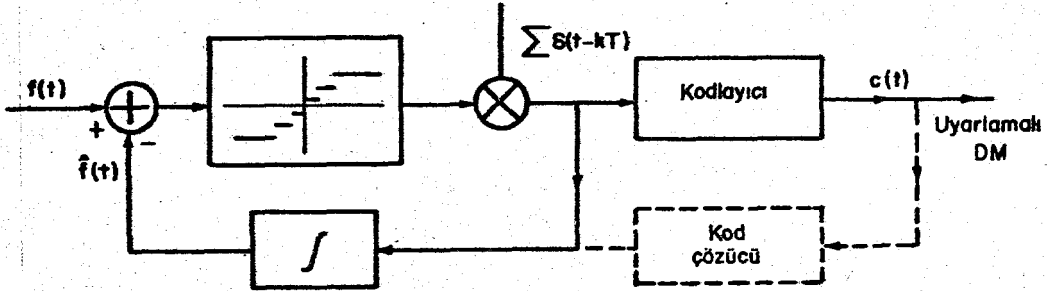


Şekil 8.16 Uyarlamalı DM için bir doğrusal olmayan aygıt özçeğrisi

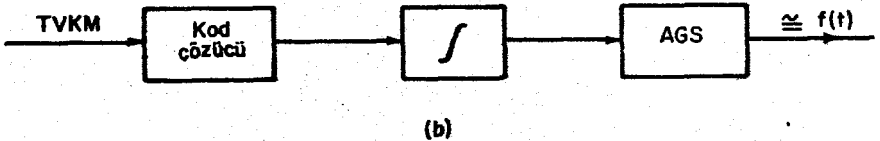
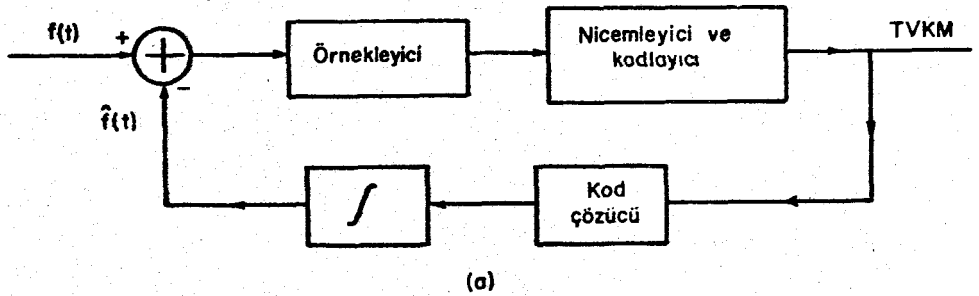
beslemek gerekebilir. Bu tür bir uyarlamalı DM modülatörü ile demodülatörünün öbek çizimleri Şekil 8.17'de verilmiştir. Uyarlamalı DM dizgelerindeki kodlayıcı ve kod çözücü dizgenin karmaşıklığını arttırır. Buna göre uyarlamalı DM dizgesinin üstünlüğü için ödenen bedel, dizgenin karmaşıklığı ve  $m$ -li dizinin ikili dizi olarak kodlanmasının neden olduğu bantgenişliği artmasıdır.

Doğrusal olmayan aygıt ile bunu izleyen dürtü dizisiyle çarpma yerine bir VKM örnekleyici-nicemleyicisi kullanılarak özel bir uyarlamalı DM dizgesi elde edilir. Burada kullanılan kodlayıcı bir VKM kodlayıcısı ve kod çözücü ise bir VKM kod çözücüsüdür. DM ile VKM'nin bir birleşimi olduğu için bu uyarlamalı DM yöntemi türevsel VKM (TVKM) diye adlandırılır. TVKM modülatörü ile demodülatörünün öbek çizimleri Şekil 8.18'de gösterilmiştir.

İşlevsel olarak, TVKM işareti  $f(t) - \hat{f}(t)$  fark işaretinin bir VKM işareti olarak gösteriminden başka birşey değildir. Ancak burada  $f(t)$  deki adım boyları değişkendir ve  $\pm \Delta$  ile  $\pm N\Delta/2$  arasında değişir;  $N$  nicemleme düzeyleri sayısını gösterir. Bu nedenle  $\hat{f}(t)$  işareti  $f(t)$  yi daha yakından izler.  $N=2$  için TVKM basit DM'ye indirgenir. Özellikle sıkıştırıcı-genleştirici yöntemi de kullanılırsa, arama gürültüsü çok düşük olur, başlama hızlanır ve eğim sınırlanması olasılığı azalır.  $N > 2$  için TVKM dizgesinin karmaşıklığı VKM'ninkine eşdeğerdir.  $f(t)$  işareti örnekten örneğe önemli ölçüde değişmeyeceği için,  $f(t) - \hat{f}(t)$  fark işareti daha az sayıda nicemleme düzeyi ile uygun bir biçimde gösterilebilir.



Şekil 8.17 Uyarlamalı DM modülatörü ve demodülatörü



Şekil 8.18 TVKM modülatörü ve demodülatörü

Bu nedenle TVKM'de daha küçük bantgenişliği ile çalışmak olasıdır. Örneğin TVKM ile görüntü işaretinin yeniden üretilmesinde  $N = 2^3 = 8$  düzey sayısı kabul edilebilir sonuçlar verir. Aynı niteliği elde etmek için

basit VKM'de  $2^8$  sayıda nicemleme düzeyi gerekir. Buna göre, bu uygulamada TVKM'nin iletim bantgenişliği VKM'ninkinin  $3/8$  idir.

### 8.5. ZAMAN BÖLMELİ ÇOKLAMA

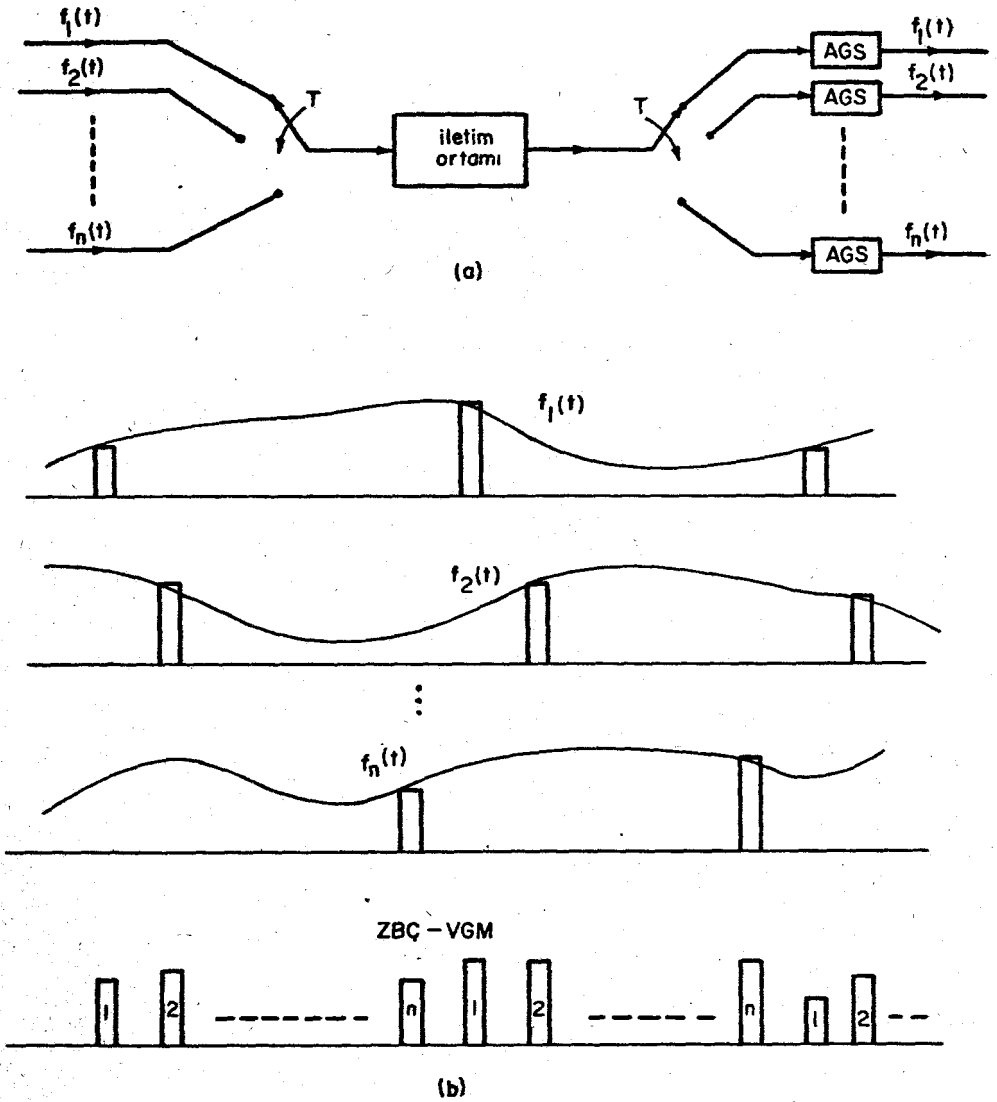
Örnekleme teoremi bantsınırlı bir işaretin, işarettaki en yüksek frekansın iki katından daha büyük bir hızla alınmış örnekler kullanılarak yeniden elde edilebileceğini söyler. VGM'de olduğu gibi her örnek bir vuruşla gösterilirse ve vuruş genişliği örnekleme dönemine göre çok küçükse, iki vuruş arasında dalgabıçımının sıfır olduğu süre boşa tüketilmiş olarak düşünülebilir. Bunun nedeni bu süre boyunca hiçbir bilgi gönderilmemesidir. Boşa tüketilen bu süreyi kullanıma açacak bir yöntem bulunabilir.  $f_1(t)$  işaretinden alınmış örnek değerleri gösteren vuruşlar arasına başka bir  $f_2(t)$  işaretinden alınmış örnek değerleri gösteren vuruşlar yerleştirilebilir. Vuruş genişliği örnekleme dönemine kıyasla çok küçükse, değişik işaretlerden alınan örnek değerleri gösteren çok sayıda vuruş dizisi Şekil 8.19(b)'de gösterildiği gibi yerleştirilebilir. Değişik birçok işaretten alınan örnek değerlerin birlikte gönderilmesini sağlayan bu yöntem *Zaman-Bölmeli-Çoklama (ZBÇ)* diye adlandırılır.

Değişik vuruş dizilerinin birbirleri arasına yerleştirilmeleri işlemi Şekil 8.19(a)'da gösterildiği gibi ya bir dönmeli anahtar ile ya da bir komütatör ile gerçekleştirilebilir. Anahtar tam bir dönmeyi örnekleme dönemi T süresinde yapar. Bu yolla T süresinde her işaretten bir örnek alınmış olur. Örnekleme hızının yeterli olabilmesi için, her işaretin  $\pi/T$  rad/san'den daha küçük bir frekansa bantsınırlı olması gereklidir. Herhangi bir işaret bu koşulu sağlamazsa, o işaret bu hızda alınmış örnekler kullanılarak yeniden elde edilemez. Almacıta her bir vuruş dizisini ayırmak için benzer bir dönmeli anahtar kullanılır. Her vuruş dizisi daha sonra bir alçak geçiren süzgeçten geçirilerek VGM işareti demodüle edilir. Her süzgecin çıktısı buna karşılık gelen bilgi işarettir.

Şekil 8.19'da görüntülenen ZBÇ düzeni VGM işaretlerinin ZBÇ'sidir. Vuruş modülasyonunun diğer türleri için de ZBÇ ilkesini kullanmak olasıdır. Örneğin VKM işaretinin ikili vuruş dizileri birbirlerinin arasına yerleştirilerek VKM işaretlerinin ZBÇ'si elde edilir. Bu yöntem telefon işaretlerinde kullanılacak bir modülasyon yöntemidir. VYM ve VSM için ZBÇ'nin kullanımı sınırlıdır. Bu vuruş modülasyon türlerinde bitişik vuruşların üst üste binmesi sağlanmalıdır. VYM ile VSM'de vuruşların konularını ve genişlikleri değişir. Vuruşların üst üste binmesini sağlamak ve böylece ZBÇ yi kullanabilmek için her örnekleme dönemi bölümlere ayrılır, (her işaret için bir bölüm) ve her vuruşdaki genişlik ya da konu değişimleri bir bölüme kısıtlanır. ZBÇ ilkesi en kolay ve en doğal olarak VGM işaretler için kullanılır.

ZBÇ düzeninin uygun biçimde çalışabilmesi için göndermeç ve almacıdaki dönmeli anahtarların eşzamanlı olması gereklidir. Eşzamanlamayı sağlamak için özel yöntemler kullanılır. Anahtarlama işlemi mekanik olarak yapılabileceği gibi genellikle elektronik olarak yapılır.

ZBÇ'ye uygulanan işaretlerin tümü aynı frekansa bantsınırlı değilse örnekleme hızı en yüksek bantsınırlı frekansının iki katı ile çoklanacak işaret sayısının çarpımından daha büyük olmalıdır. Bazı durumlarda



Şekil 8.19 Zaman bölmeli çoklama düzeni ve dalgabiçimleri

Özel yerleştirme yöntemleri kullanılarak örnekleme hızını düşürmek olasıdır. Örneğin biri  $2\Omega$  rad/san'ye diğer ikisi  $\Omega$  rad/san'ye bantlıdır üç işaretin çoklandığını düşünelim. Burada her işaret için örnekleme hızı  $2 \times \frac{2\Omega}{2\pi} = \frac{2\Omega}{\pi}$  örnek/san olmalıdır. Buna göre üç işaret için toplam örnekleme hızı  $3 \times \frac{2\Omega}{\pi} = \frac{6\Omega}{\pi}$  örnek/san olmalıdır. Ancak uygun bir yerleştirme ile  $\frac{4\Omega}{\pi}$  örnek/san yeterli olur.  $\frac{4\Omega}{\pi}$  örnek/san'ın  $\frac{2\Omega}{\pi}$  örnek/san'si birinci işaretindir. Geriye kalanın  $\frac{\Omega}{\pi}$  örnek/san'si ikincinin,  $\frac{\Omega}{\pi}$  örnek/san'si ise üçüncününüdür. Her işaret ayrı ayrı düşünüldüğünde bu hızlar yeterli olur. Yerleştirme şu biçimde yapılır: İkinci işaretin vurumları ile üçüncü işaretin vurumları arasına birinci işaretin vurumları konur. Bir başka deyişle vurum dizisi (1 2 1 3 1 2 1 3 1 2 1 ...) biçimindedir. Bu yolla toplam örnekleme hızı en yüksek bantlı frekansının iki katı ile işaret sayısının çarpımından daha düşüktür. Bantgenişlikleri oldukça değişik işaretlerle uğraşılırken izlenecek başka bir yöntem de şudur: Önce küçük bantgenişlikli işaretler frekans bölmeli çoklama kullanılarak tek bir geniş bantgenişlikli örneksel işarette birleştirilir. Ondan sonra bu FBÇ ile birleştirilmiş işaretlere ZBÇ uygulanır.

ZBÇ-vurum modülasyonu işaretlerinde alçak frekans bileşenleri önemlidir. Bu nedenle bu işaretler ya kablolar üzerinden gönderilir ya da elektromanyetik dalgalarla iletilecekse iletimden önce bir örneksel modülasyon, örneğin GM ya da FM, uygulanır.

Vurumları daha dar yaparak çoklanacak işaret sayısını arttırmak olasıdır. Ancak bunun bedeli iletim bantgenişliğinin artmasıdır. Örneğin vurum genişliği yarıya indirilerek çoklanacak işaretlerin sayısı iki katına çıkar, bunun yanı sıra bantgenişliği de iki katına çıkar. Genel olarak n işaret çoklanmışsa bu çoklanmış işaretin bantgenişliği, vurum genişliği n defa büyük olan tek bir vurum modülasyonu işareti bantgenişliğinin n katıdır.

ZBÇ ve FBÇ (frekans-bölmeli-çoklama) aynı amacı değişik yollarla gerçekleştirirler. Aynı anda çok sayıda işaretin iletilmesi. Bunlar iki yöntemler olarak düşünülebilir. FBÇ dizgesinde iletilecek işaretlerin tümü sürekli işaretlerdir ve zaman bölgesinde karıştırılırlar. Ancak modüle edilmiş değişik işaretlerin görünüşü frekans bölgesinde değişik bantları kaplarlar ve uygun süzgeçler kullanılarak ayrılabilirler. Böylece işaretlerin tümü zaman bölgesinde karıştırılır, ancak frekans bölgesinde bunların özdeşlikleri korunur.

Öte yandan ZBÇ de ise her işaretin örnekleme zaman bölgesinde ayrı olarak korunur. Ancak örneklemiş işaretlerin görünüşü frekans bölgesinde aynı bölgeyi kaplarlar ve hepsi karışmış biçimindedir. Buna göre FBÇ işaretlerinde görünüş özdeşliği korunur, ZBÇ işaretlerinde ise dalga biçimi özdeşliği korunur.

Uygulama açısından ZBÇ bazı üstünlüklere sahiptir. ZBÇ'nin donanımı daha kolaydır. FBÇ de her kanal değişik frekans bantlarını kaplar ve herbiri değişik bant geçiren süzgeç gerektirir. Öte yandan ZBÇ dizgesinde her kanal için birbirinin aynı devreler gerekir. Her devre oldukça basit eşzamanlama anahtarları ile geçitlerden oluşur. Sezme işleminde

kullanılacak süzgeçler yalnızca alçak geçiren süzgeçlerdir ve bunlar her kanalda aynıdır. ZBÇ'nin ikinci önemli üstünlüğü bu yöntemde kanallar arasındaki girişimin (çapraz konuşum) etkilerinin düşük olmasıdır. İletim yolundaki yükselteçlerin doğrusal olmaması harmonik bozulmaya neden olur ve bu ise FBÇ işaretlerde kanallar arası girişimi doğurur. Öte yandan ZBÇ dizgelerinde, değişik kanallardaki işaretler değişik zaman aralıkları kaplarlar ve tümüyle ayrılmış, üst üste binmemiş oldukları sürece yükselteçlerin doğrusal olmaması vurumların girişimine neden olmaz. Ancak iletim dizgesinin bantgenişliğinin ZBÇ işaretinin bantgenişliği kadar geniş olmaması, vurumların yayılmasına ve üst üste binmesine neden olur ki, bu da ZBÇ'de kanallar arası girişim demektir.

Yukarıda açıklanan üstünlüklerinden dolayı uzak telefon iletişimi türü uygulamalarda ZBÇ dizgelerinin kullanılması yeğlenir. Vurum modülasyonu işaretleri zaman bölgesinde ayrı ayrı olduklarından, ZBÇ'nin yapısı vurum modülasyonu ile birlikte kullanılmaya elverişlidir. Büyük bantgenişlikleri kapladıkları için vurum modülasyonu işaretlerine FBÇ uygun değildir. Frekans bölgesinde ayrı olmaları nedeni ile bantsınırlı örnek sel işaretler FBÇ ye uygundur.

ZBÇ ile ilgili bu tartışmayı bitirmeden önce ZBÇ-VGM işaretlerinin bantgenişliklerini de araştıralım. Herbiri  $f_m$  Hz'e bantsınırlı  $n$  sayıda sürekli işaretin ZBÇ-VGM kullanılarak gönderilmek istendiğini varsayalım. Her işaret en az  $2f_m$  örnek/san'lik bir hızla örneklenmelidir. Bu nedenle  $n$  sayıda işaretten oluşan ZBÇ,  $2nf_m$  vurum/san gerektirir.  $2nf_m$  vurum/san lik bu ZBÇ-VGM işaretinin bantgenişliği ne olur? Daha önce VGM işaretlerinin bantgenişliklerinin kuramsal olarak sonsuz olacağı belirtilmişti. Bu nedenle ZBÇ-VGM işaretinin de bantgenişliği kuramsal olarak sonsuz olur. Dikkörtgen vurumların bozulmadan iletilmesi istendiğinde sonsuz bantgenişliği gerekir. Ancak bilgi taşıyan, vurumların biçimi değil yükseklikleridir. Bu nedenle, saniyede  $2nf_m$  örnek değerini taşıdığı bilginin iletilebileceği en küçük bantgenişliğinin saptanması gereklidir.

Saniyede  $2nf_m$  örnek değerini  $nf_m$  Hz'lik bir bantgenişliği ile iletilebileceğini öne sürebiliriz. Bu sonuç,  $B$  Hz'e bantsınırlı bir sürekli işaretin  $2B$  örnek/san ile gösterilebileceğini önesüren örnekleme teoreminden ileri gelmektedir. Buna karşı olarak saniyede  $2nf_m$  değerini  $nf_m$  Hz'e bantsınırlı tek bir sürekli işaret tanımlayacağı da söylenir. Bu gerçek de örnekleme teoreminden çıkartılabilir. Örneklememe teoremi  $2B$  örnek/san'lik bir hızla alınmış örnek değerlere sahip,  $B$  Hz'e bantsınırlı tek bir bantsınırlı işaret olduğunu söyler. Bu nedenle  $2nf_m$  örnek/san'lik bir hızla alınmış örnekler dizisi ile  $nf_m$  Hz'e bantsınırlı işaretler arasında bire-bir ilişki vardır.  $2nf_m$  örnek/san'lik hızla alınmış örnek değerler dizisi, kesim frekansı  $nf_m$  Hz olan, bir alçak geçiren süzgecin girişine uygulandığında, süzgeç çıktısı bu diziye karşı gelen  $nf_m$  Hz'e bantsınırlı işaret olur. Böylece  $2nf_m$  örnek/san'deki bilginin  $nf_m$  Hz'e bantsınırlı tek bir sürekli işaret ile gösterilebileceği kanıtlanmış olur.

Örnek değerler dizisini gösteren bantsınırlı işaret vurum modülasyonu işareti değil sürekli bir işarettir. Bu işaret toplamsal gürlütünün istenilmeyen etkilerine açıktır. Ayrıca almaçta herbir sürekli işareti yeniden üretebilmek için aynı örnek değerlerin olduğu gibi elde



edilebileceği bir eşzamanlı örnekleme gerekir. Ancak bu ZBÇ-VGM örnekleme dizisinin bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi yöntemi telemetre dizgelerinde yaygın kullanılır. Genel düzenleme yavaş değişen çok sayıda işaretleri ZBÇ-VGM yoluyla birleştirmek, alçak geçiren bir süzgeçten geçirip bir bileşik örneksel işaret üretmektir. Daha sonra bu bileşik işaret, bantgenişlikleri aşağı yukarı aynı büyüklükte olan, başka işaretlerle birlikte örneksel modülasyon yolu ile FBÇ'ye uygulanır.

ZBÇ-VGM işaretleri ile FBÇ-TYB işaretlerinin iletiminde gerekli bantgenişlikleri arasında ilginç bir karşılaştırma yapılabilir. Daha önce herbiri  $f_m$  Hz'e bant sınırlı n sayıda işaretten oluşan ZBÇ-VGM'nin iletiminde  $nf_m$  Hz'lik bir bantgenişliği gerektiği bulunmuştur. Öte yandan bu işaretler FBÇ-TYB yoluyla gönderilirse yine  $nf_m$  Hz'lik bir bantgenişliği gerekir. ZBÇ-VGM işaretini gösteren sürekli işaret daha sonra genlik modülasyonuna uygulanırsa gerekli bantgenişliği, iki yan bant nedeni ile,  $2nf_m$  Hz'e çıkar. n sayıdaki işaret doğrudan önce genlik modülasyonuna ve sonra FBÇ'ye uygulanırsa yine aynı  $2nf_m$  Hz'lik bantgenişliği gerekir. Buradan ZBÇ-VGM işaretleri ile FBÇ-GM işaretlerinin iletiminde eşit bantgenişlikleri gerektiği sömucuna varabiliriz.

### 8.6. İKİLİ İLETİŞİM DİZGELERİ

Burada incelenen iletişim dizgeleri vurum modülasyonu dizgelerinin bir parçası olarak düşünülmemelidir. Bu nedenle bu dizgelerin çözümlenmelerinin bu bölümde yapılmasının uygunluğu tartışılabilir. Ancak VKM, DM, TVKM işaretlerinin ya da herhangi başka bir ikili dizinin iletiminde, ikili iletişim dizgelerinin yaygın biçimde ikinci bir modülasyon basamağı olarak kullanıldığı bir gerçektir.

İkili iletişim dizgelerinde örneksel modülasyon yöntemleri kullanılır, ancak bilgi işareti (kesikli) ikili biçimdedir. Bu bölümün başında yapılmış olan sınıflandırmaya göre, ikili iletişim dizgeleri 1-b sınıfına girerler. Bu açıdan bakıldığında bu dizgeler Bölüm 4 ve 6 da incelenen örneksel modülasyon yöntemlerinin, örneğin GM, FM ve EM'nin, özel bir sınıfına oluşturur. Bu dizgelerin özel bir sınıf olmasının nedeni, bilgi işareti  $f(t)$  nin bir ikili işaret olarak belirlenmesidir. Örneksel modülasyon yöntemleri için verilen çözümler, modülatörler ve demodülatörler ikili iletişim dizgelerine de doğrudan uygulanabilirler. Ancak ikili iletişim dizgeleri o kadar yaygın kullanılmaktadır ki, bu dizgelerin ayrı olarak, biraz daha ayrıntılı bir biçimde incelenmeleri yerinde olur.

Kısaca incelenen olan ikili iletişim dizgeleri şunlardır:

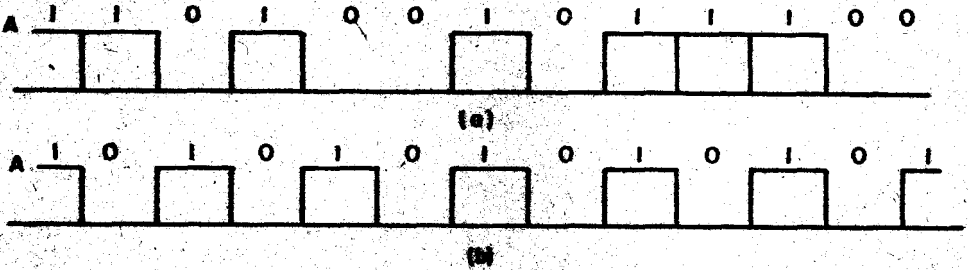
- i. Var-yok anahtarlama (VYA) ya da genlik kaydırmalı anahtarlama (GKA): İkili bilgi işaretlerinin genlik modülasyonuna uygulanması,
- ii. Frekans kaydırmalı anahtarlama (FKA): İkili bilgi işaretlerinin frekans modülasyonuna uygulanması,
- iii. Evre kaydırmalı anahtarlama (EKA): İkili bilgi işaretlerinin evre modülasyonuna uygulanması,

iv . *Türevsel eyre kaydırmalı anahtarlama (TEKA)*: Daha önce kodlanmış ikili bilgi işaretinin eyre modülasyonuna uygulanması.

Aşağıda önce bu ikili iletişim işaretlerinin zaman bölgesi dalgabıçımı ile frekans görüngeleri üzerinde durulacak, daha sonra bu dizgelerde kullanılan sesme yöntemleri incelenecektir.

### İkili İletişim İşaretlerinin Dalgabıçımları ve Görüngeleri

Bilgi işareti  $f(t)$  bir ikili dizidir. Gönderilecek bilgi işaretini gerçekçi bir biçimde göstermek için,  $f(t)$  işareti Şekil 8.20(a)'da gösterildiği gibi 0 ve 1'lerden oluşan bir rasgele dizi olarak varsayılmıştır. Ancak  $f(t)$  bir rasgele dizi olduğunda,  $f(t)$  ve modüle edilmiş



Şekil 8.20 Rasgele ve dönmeli 0-1 dizileri

işaretin çözülmesi için olasılık kuramı ile rasgele süreçler konusunda bir ön bilgi gerekir. Oysa bu konuları okuyucuların bilmediği varsayılmıştır. Bu nedenle  $f(t)$ , 0 ve 1'lerden oluşan bir rasgele dizi olarak değil de, 0 ve 1'lerden oluşan bir dönmeli dizi olarak düşünülecektir.  $f(t)$  için böyle bir varsayım yapılmasının gerçekçi olmamasına karşın, bu yolla bulunan sonuçların yapısı  $f(t)$  bir rasgele dizi varsayıldığında bulunan sonuçlara benzer.  $f(t)$  bir rasgele dizi olduğunda modüle edilmiş işaretin görüngesi süreklidir,  $f(t)$  dönmeli olduğunda ise modüle edilmiş işaretin görüngesi çizgi görüngedir. Ancak çizgi görüngenin zarfı rasgele  $f(t)$  nin sürekli görüngesine, işlevsel biçim olarak çok benzer. Aşağıdaki çözümlenmelerde  $f(t)$  işareti, Şekil 8.20(b)'de gösterildiği gibi, 0 ve 1'lerden oluşan bir dönmeli dizi olarak alınmıştır.

### En-yük Anahtarlama (VYA)

Bu tür ikili iletişim dizgelerinde 0-1 dizisinden oluşan  $f(t)$  işareti bir sinüzoidal taşıyıcının genliğini modüle eder. Modüle edilmiş işaret

$$s(t) = f(t) \cos \omega_c t \quad (8.44)$$

biçimindedir, burada  $f(t)$  Şekil 8.20(b)'de gösterilen dönmeli 0-1 dizisidir.

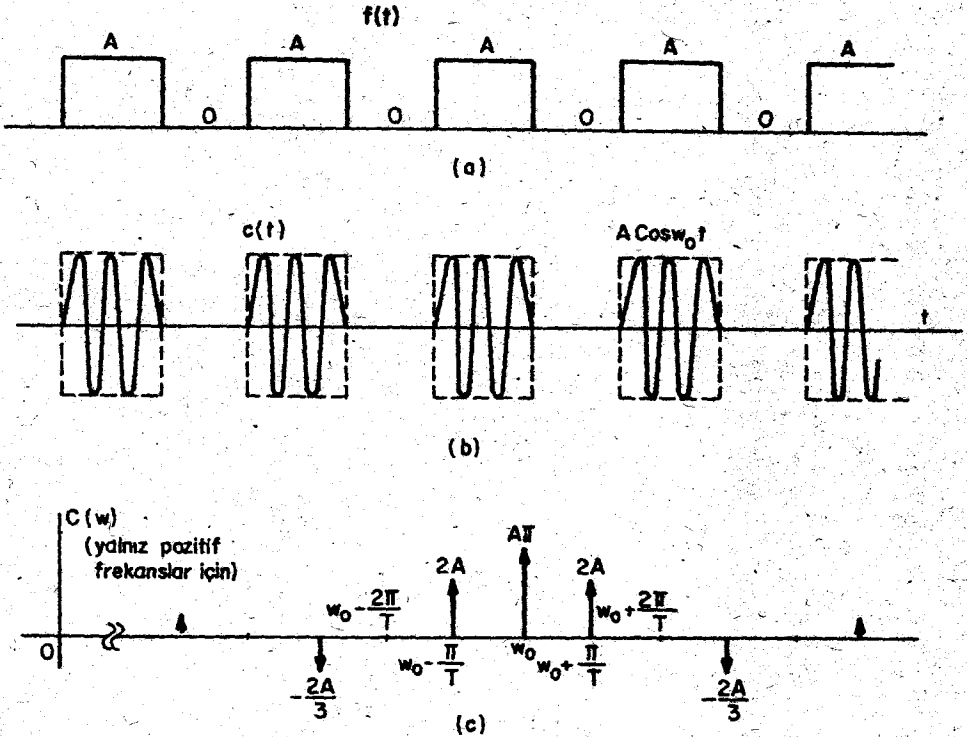
Modüle edilmiş işaretin görünüşü şu biçimdedir.

$$C(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad (8.45)$$

Dönemli  $f(t)$  işaretinin frekans görünüşü

$$F(\omega) = A \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - n \frac{\pi}{T}\right) \quad (8.46)$$

olup, bu sonuç daha önce bulunmuştu. 0-1 dizisinde bir bit süresi  $T$  dir (dönem ise  $2T$  dir). Modüle edilmiş işaretin dalgabıçımı ve görünüşü Şekil 8.21'de çizilmiştir. VYA'da taşıyıcı genliği, ikili dizinin 0 ya 1



Şekil 8.21 VYA işaretinin dalgabıçımı ve görünüşü

olmasına bağlı olarak, 0 ve A arasında kaydırılır; bu nedenle bu anahtarlar türü genlik kaydırmalı anahtarlama (GKA) olarak da adlandırılır.

#### Frekans Kaydırmalı Anahtarlama (FKA)

Bu tür ikili iletişim dizgesinde taşıyıcı frekansı, ikili işaretin 1 ya da 0 olmasına bağlı olarak,  $\omega_1$  ile  $\omega_2$  değerleri arasında değişir.

İkili işaretin 1 olduğu bir bit süresince taşıyıcı frekansı  $\omega_1$  olarak alınır, işaret 0 olduğunda ise frekans  $\omega_2$  olarak alınır. Buna göre  $k$  inci bit döneminde FKA işareti şu biçimdedir:

$$c(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t & 1 \text{ için} \\ A \cos \omega_2 t & 0 \text{ için} \end{cases} \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (8.47)$$

Dikkat edilecek olursa, (8.47)'de verilen FKA işareti  $c(t)$  nin evresi genel durumda bit aralarında süreksizlik gösterir. Yalnız,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekansları ikisi birden, ikili işaret dönemi  $T$  nin birbölüsünün ya tek ya da çift katları ise (bir başka deyişle  $f_1 = m/T$  ve  $f_2 = n/T$  ise ve burada  $m$  ve  $n$  her ikisi de ya tek ya da çift tamsayı ise) evre bit aralarında sürekli olur. Bu işareti, değişik bit sürelerinde birbirinden bağımsız çalışan iki değişik sinüzoidal salınğaçtan bir anahtarlama yoluyla alınmış bir işaret olarak düşünebiliriz.

FKA işaretini değişik bir biçimde düşünmek ve modellemek de olasıdır. Bu ikinci yoruma göre FKA işaretini tek bir sinüzoidal salınğaç tarafından üretilen ve bit aralarında frekansı değiştirilen tek bir sinüzoidal olarak düşünebiliriz. Bu biçimde modellenen FKA işaretinde bit aralarında frekans değişir, ancak evre süreksizliği sözkonusu değildir. Bu FKA işareti özel bir FM işaretidir ve aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int f(\tau) d\tau) \quad (8.48)$$

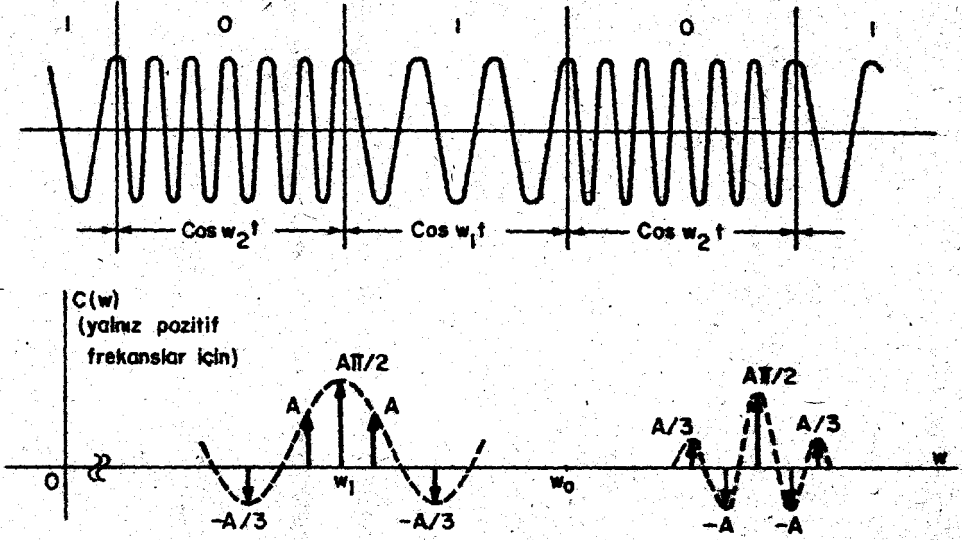
Burada  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$  ve  $f(t)$  değişik bit sürelerinde +1 ya da -1 değerler alan bilgi işaretidir. Bu tür FKA işareti, (8.48)'deki gibi bir FM işareti olarak yorumlandığında  $\omega_0$  taşıyıcı frekansı ve  $\Delta\omega$  frekans sapmasıdır. Bu iki FKA işaretinin birbirinin aynı olmadığı açıktır. Ancak birinci tür FKA'da  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekansları  $1/T$  nin tek ya da çift tamsayı katları ise, başka bir deyişle bit aralarında evre sürekli ise, ikinci tür FKA ile aynı olur.

Dönemli bir modüle eden işaret için FM işaretinin görüngesinin nasıl hesaplandığı Bölüm 6'da incelenmişti. Bu yöntem kullanılarak, dönemli bir  $f(t)$  için (8.48)'de gösterilen FKA işaretinin görüngesi bulunabilir. Ancak, bu oldukça zor ve uzun hesap burada yapılmayacaktır. (8.47)'de verilen birinci tür FKA işareti ise biri  $\omega_1$  diğeri  $\omega_2$  frekansında iki VYA işaretin toplamı olarak düşünülebilir. Bu nedenle bu işaretin görüngesi de biri  $\omega_1$  de diğeri  $\omega_2$  de iki VYA işareti görüngesinin toplamıdır. Yalnız VYA işaretlerden birisi zaman bölgesinde  $T$  süresi kadar kaydırılmıştır (8.47)'de verilen bu FKA işaretinin görüngesi şu biçimdedir:

$$C(\omega) = \frac{A\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[ \delta(\omega + \omega_1 - n \frac{\pi}{T}) + \delta(\omega - \omega_1 - n \frac{\pi}{T}) \right] \right. \\ \left. + (-1)^n \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[ \delta(\omega + \omega_2 - n \frac{\pi}{T}) + \delta(\omega - \omega_2 - n \frac{\pi}{T}) \right] \right\} \quad (8.49)$$

$\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekansları  $1/T$  nin ya tek ya da çift tamsayı katı ise, iki FKA işaretinde aynı olduğundan, (8.49)'da verilen görüme bu koşul altında (8.48)'de verilen FKA işaretinin de görüngesi olur.

Bit aralarında evre süreksizliği olmayan bir FKA işareti dalgabıçımı ve görüngesi Şekil 8.22'de çizilmiştir. Temelbanttaki ikili dizinin



Şekil 8.22 FKA işaretinin dalgabıçımı ve görüngesi.

bantgenişliği  $B = k/T$  varsayılırsa, Şekil 8.22 den de görüleceği gibi FKA işaretinin bantgenişliği  $2\Delta f + 2B$  olur. Bu da FM'deki Carson kuralında önerülen bantgenişliğinin aynıdır.  $\Delta f \ll B$  olduğunda FKA işareti darbant FM gibi davranır,  $\Delta f \gg B$  olduğunda ise FKA işareti genişbant FM gibi davranır.

### Evre Kaydırmalı Anahtarlama (EKA)

Bu tür ikili iletişim dizgesinde taşıyıcının evresi, ikili işarete bağlı olarak  $180^\circ$  kaydırılır. 1 gönderildiğinde modüle edilmiş işaret  $\cos \omega_0 t$ ; 0 gönderildiğinde ise taşıyıcı işaret  $\cos(\omega_0 t + \pi)$  dir. Bir başka deyişle EK. işaretinin zaman bölgesi gösterimi şöyledir:

$$c(t) = \cos(\omega_0 t + (\pi \text{ ya da } 0)) = \pm \cos \omega_0 t, \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (8.50)$$

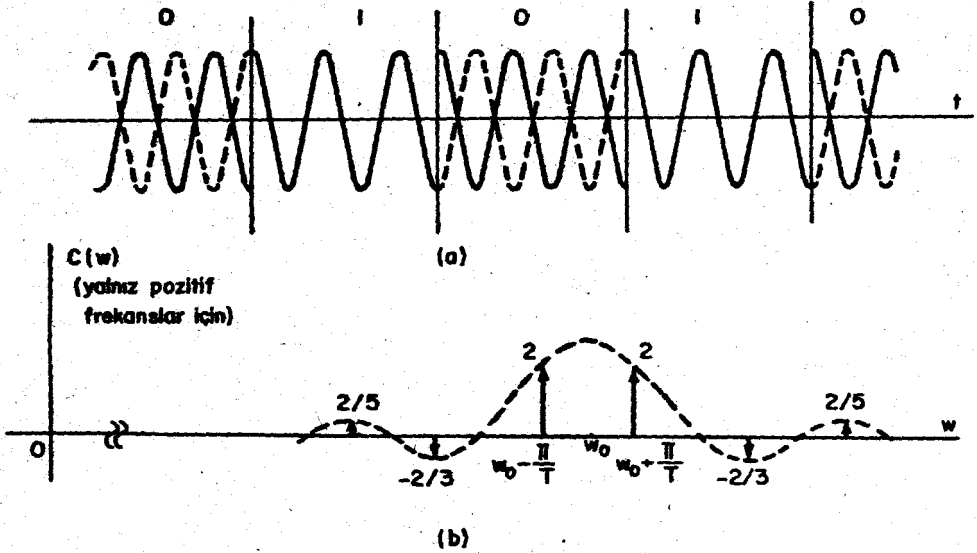
EKA işareti, 0-1 dizisine bağlı olarak üretilen çift kutuplu bir dizi ( $\pm 1$  dizisi) ile taşıyıcının çarpımına eşittir. Bu nedenle EKA işareti şu biçimde de gösterilebilir.

$$c(t) = [2f(t) - 1] \cos \omega_0 t \quad (8.51)$$

Buna göre, çift-kutuplu dizinin görüngesinin  $\omega_0$  a taşınmasıyla EKA işaretinin görüngesi şu biçimde ifade edilebilir.

$$C(\omega) = \pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[ \delta(\omega + \omega_0 - n \frac{\pi}{T}) + \delta(\omega - \omega_0 - n \frac{\pi}{T}) \right] \quad (8.52)$$

EKA işaretinin dalgabiçimi ve görüngesi Şekil 8.23'de çizilmiştir.



Şekil 8.23 EKA işaretinin dalgabiçimi ve görüngesi

0 dan 1 e ya da 1 den 0 a bir geçiş olduğunda, bit süresi başında ya da sonunda oluşan süreksiz evre geçişleri iletim sırasında düzleştirilir. Kanal bantgenişliğinin sonsuz olması gerekir. Evre bilgisi en doğru olarak bit süresinin ortasında korunduğu için, almaçta kod çözme işlemi genellikle bit süresi ortasında yapılır. Aynı şey VYA ve FKA işaretleri için de geçerlidir. Bu ikili iletişim dizgelerinde de bit sürelerinin başında ve sonundaki keskin değişimler iletim sırasında düzleştirilir.

Türevsel evre kaydırmalı anahtarlamayı (TEKA) incelemenden önce şimdiye kadar incelenen ikili iletişim işaretlerinin nasıl sezilebileceği üzerinde durmak yararlıdır. Çünkü, TEKA'nın ortaya çıkış nedeni EKA'da eşzamanlı olmayan sezme yöntemlerinin kullanılamamasıdır.

### İkili İletişim İşaretlerinin Sezilmesi

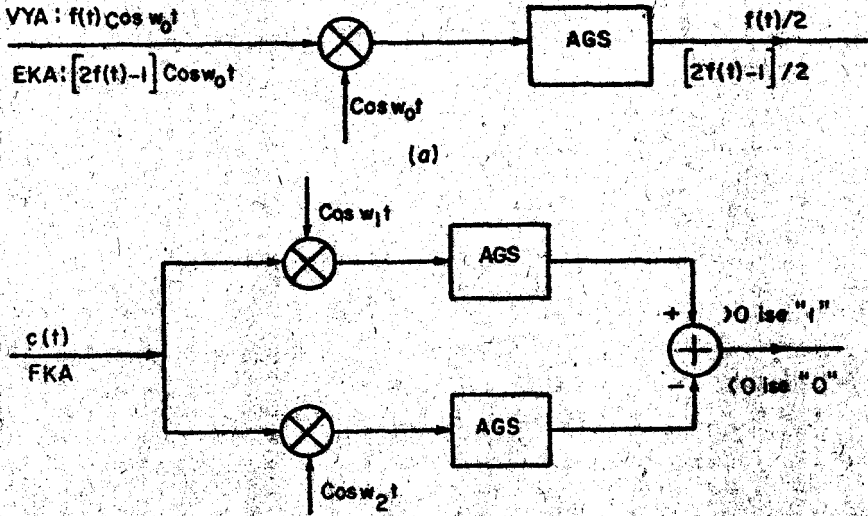
İkili iletişim işaretlerinin sezilmesinde başlıca iki yol vardır.

i. Eşvreli sezme (eşzamanlı sezme)

ii. Eşvreli olmayan sezme (eşzamanlı olmayan sezme)

Eşvreli sezmede, almaçta, frekansı ile evresi göndermeçtekiyle eşzamanlı taşıyıcıların bulunduğu varsayılır ve demodülasyon bunları kullanarak yapılır. Bu nedenle bu yöntem eşvreli ya da eşzamanlı sezme olarak adlandırılır. Eşvreli olmayan sezmede almaçta taşıyıcıların evre ve frekansının bilinmediği varsayılır ve eşvreli olmayan adı buradan gelir.

Önce ikili iletişim dizgelerinde eşvreli sezme yöntemlerini inceleyelim. VYA gerçekte bir GM işaretidir. (8.50)'de verilen EKA işareti de bir GM işaretidir. Bu nedenle VYA ve EKA'daki eşvreli sezme GM'deki eşzamanlı demodülasyonla aynıdır. VYA ve EKA'daki bir eşvreli sezicinin öbek çizimi Şekil 8.24(a)'da verilmiştir. Bu sezicinin çalışması daha fazla açıklamaya gerek olmayacak kadar açıktır.



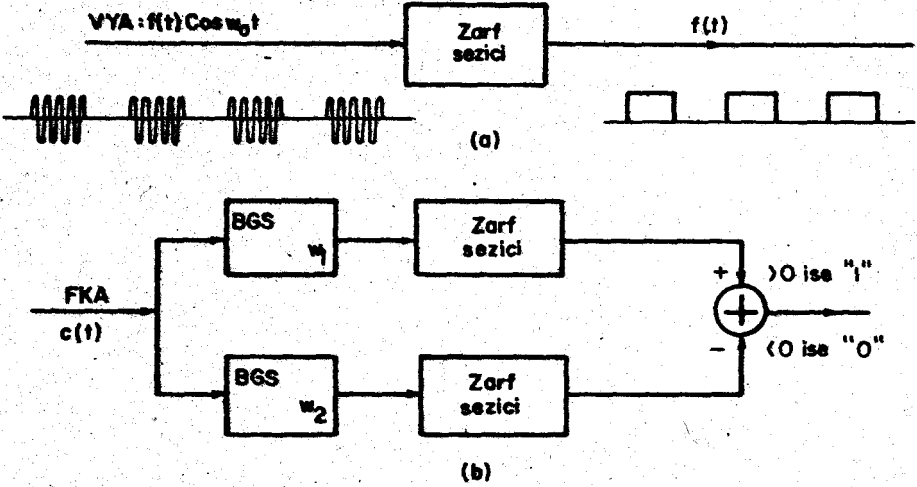
Şekil 8.24 VYA, EKA ve FKA işaretlerinin eşzamanlı sezimi

FKA işaretlerinin eşvreli seziminde Şekil 8.24(b)'de gösterilen sezici kullanılır. Eşvreli FKA sezicisi iki kanaldan oluşur ve her biri bir frekansa ayarlanmıştır. 0 kanala karşı gelen frekansdaki taşıyıcı gönderilmişse 0 kanalin çıktısı  $A/2$  dir, karşı kanalın çıktısı ise sıfırdır ya da sıfıra çok yakındır. Sezici her kanalın çıktısının büyüklüğüne bakarak hangi frekansın gönderildiğini kararlaştırır. Hangi kanalın çıktısı büyükse sezici ona karşı gelen frekansın gönderildiğine karar verir.

Eşvreli sezmede evre ve frekans eşzamanlaması gereklidir. Örnekselel modülasyon işaretlerinin eşzamanlı demodülasyonunda olduğu gibi,

eşzamanlama çeşitli yollarla sağlanabilir. Örneğin kılavuz taşıyıcılar ya da evre kilitleyici döngü kullanılabilir.

İkili iletişim işaretlerinin eşvreli olmayan sezimi zarf sezici ler kullanılarak yapılır. VYA işaretlerinin eşvreli olmayan sezimi Şekil 8.25(a)'da görüntülenmiştir. Başka bir taşıyıcı eklenmemiş olmasına karşın, zarf eksi olmadığından, zarf sezici zarf bozulmasına



Şekil 8.25 VYA ve FKA işaretlerinin eşvreli olmayan sezimi

neden olmaz. FKA da kullanılan eşvreli olmayan sezici Şekil 8.25(b)'de gösterildiği gibi iki kanaldan oluşur. Her kanal frekanslardan birine merkezlenmiş bir bant geçiren süzgeç ile bir zarf seziciden oluşur. Karar için iki kanalın çıktıları karşılaştırılır. Gönderilen frekansa merkezlenmiş bant geçiren süzgecin çıktısı o frekanstaki sinüzoidaldir. Bunu izleyen zarf sezicinin çıktısı ise sinüzoidalin büyüklüğü ile orantılı bir değişmezdir. Bu arada diğer kanalda öteki frekansa merkezlenmiş bant geçiren süzgecin çıktısı ya sıfırdır ya da sıfıra yakındır. Bu durumda gönderilen frekansa karşı gelen kanalın çıktısı belirli bir büyüklükte bir değişmez işaretir, diğer kanalın çıktısı ise sıfır ya da sıfıra yakındır. Böylece iki kanal çıktısı karşılaştırılarak bir karar verilebilir. Hangi kanalın çıktısı daha büyükse, ona karşı gelen frekansın gönderildiği kararlaştırılır.

EKA işaretinde 0 ve 1 simgelerinin her ikisinde de hem genlik hem de frekans aynıdır. Zarf sezici evreye duyarlı olmadığı için EKA işaretlerinin seziminde zarf sezici kullanılamaz. Bu nedenle EKA işaretlerinde eşvreli olmayan sezme yöntemlerini kullanmak olanaksızdır, eşvreli sezme gereklidir. Eşvreli olmayan sezme yöntemini gerçekleştirmek her zaman daha kolay olduğundan, bu bir dezavantajdır. Ancak ileride üzerinde kısaca durulacağı gibi, gürültü altında eşvreli sezicilerin başarımlarının eşvreli olmayan sezicilere göre daha iyi olduğu da bir gerçektir.

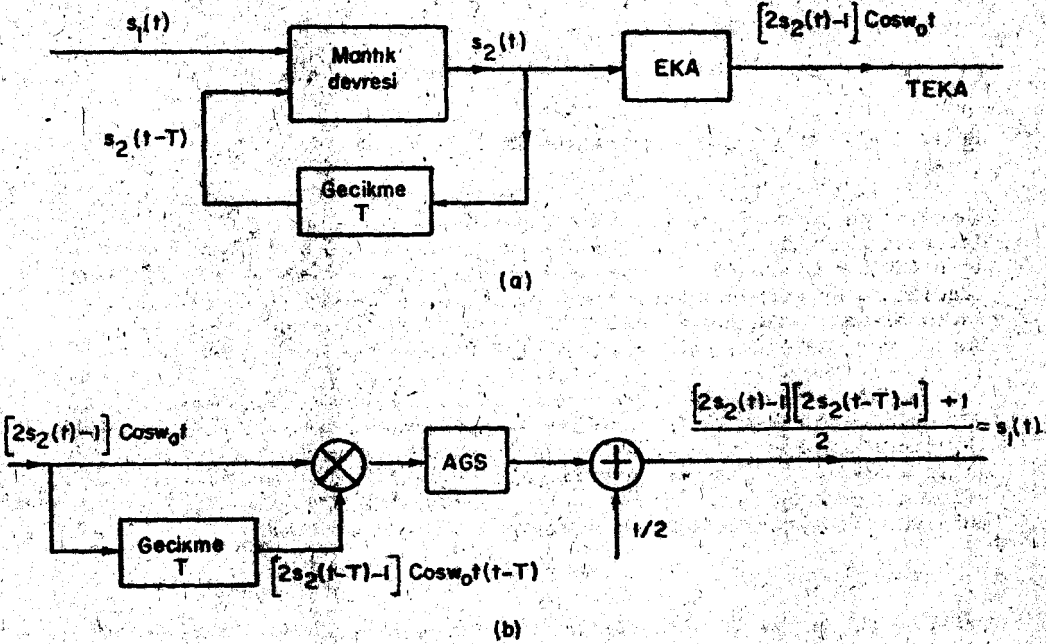


İkili iletişim işaretlerini eşzamanlı sezmede başarıyı daha iyi olması için ödenen bedel aygıtların karmaşılaşmasıdır.

### Türevsel Evre Kaydırmalı Anahtarlama (TEKA)

Eşvreli sezme gereksinmesinden kurtulmak için EKA'nın değiştirilmiş bir biçimi türetilmiştir. Türevsel EKA olarak adlandırılan bu ikili iletişim yönteminde, ikili bilgi işareti kodlanarak başka bir ikili dizi elde edilmiştir. Bunda amaç bu ikinci ikili dizi kullanılarak bir EKA işareti elde edildiğinde, bu EKA işaretini eşvreli olmayan yollardan sezerek özgün ikili bilgi dizisini elde edebilmektir.

Gönderilecek özgün ikili bilgi dizisi  $s_1(t)$  olsun.  $s_1(t)$  kodlanarak başka bir ikili dizi  $s_2(t)$  elde edilir. Kodlamanın nasıl yapıldığı Çizelge 8.1'de verilmiştir.  $s_2(t)$  önceden belirlenen bir simge ile, örneğin 1 ile, başlar. Daha sonra  $s_2(t)$  dizisi şu biçimde üretilir:  $s_1(t)$  ile  $s_2(t-T)$  aynı olduklarında  $s_2(t) = 1$  olur, ayrı olduklarında ise  $s_2(t) = 0$  olur. Bu yolla üretilen yeni  $s_2(t)$  dizisi daha sonra EKA dizgesine uygulanır. TEKA modülatörünün öbek çizimi Şekil 8.26(a)'da verilmiştir.



Şekil 8.26 TEKA modülatörü ve sezicisi

EKA işaretinin demodüle edilmesi ve  $s_1(t)$  ikili dizisinin elde edilmesi Şekil 8.26(b)'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi bu bir eşvreli olmayan sezme yöntemidir. Sezici çıktısının gerçekten  $s_1(t)$  ye eşit

olduğu Çizelge 8.1'de gösterilmiştir. TEKA işareti üretilirken  $s_2(t)$  dizisi 1 yerine 0 ile başlatılırsa bu biçimde üretilen  $s_2(t)$  dizisi 1 ile başlatılan  $s_2(t)$  dizisinin tersi olur. Ancak sezici de bir değişikliğe gerek olmaz çünkü her iki  $s_2(t)$  dizisi de aynı  $s_1(t)$  dizisini verir. Diğer bir deyişle sezicinin işleyişi  $s_2(t)$  nin başlama sayısından bağımsızdır.

TEKA'nın üstünlüğü eşevreli olmayan sezicilerle sezilebilmesidir, oysa EKA'da sezme işlemi yalnız eşevreli sezicilerle yapılır. Bu yöntemin dezavantajı kodlama ve kod çözme nedeniyle dizgeye eklenen karmaşıklaktır. Buna ek olarak, TEKA'da toplamsal gürültü nedeni ile bir simge yanlış olarak sezilirse, bunu izleyen simge de yanlış olarak sezilir. Kullanılan kodlamanın türevsel yapısı nedeni ile yanlışlar çift çift olur. Bu nedenle TEKA'da yanlış oranı EKA'ya kıyasla daha büyüktür.

$s_1(t)$	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	
$s_2(t)$	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	
$2s_2(t) - 1$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	
$2s_2(t-T) - 1$		1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1
$\frac{[2s_1(t)-1][2s_2(t)-1]+1}{2} = s_1(t)$		1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1

Çizelge 8.1 TEKA'da kodlama ve kod çözme

### İkili İletişim Dizgelerinin Başarımlarının Karşılaştırılması

Üç ikili iletişim dizgesi VYA, FKA, EKA'dan hangisi yeğlenmelidir? Hangi sezme yöntemi, eşevreli mi, eşevreli olmayan mı, kullanılmalıdır? İstatistiksel bir çözümleme yapılarak her dizge ve her sezme yöntemi için (EKA için eşevreli olmayan sezme dışında) yanlış olasılığı hesaplandığında, yukarıdaki soruların yanıtları verilebilir. Ancak okuyucuların olasılık kuramı bilmedikleri varsayıldığında, bu çözümler burada verilmeyecek, yalnız sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Modüle edilmiş her işarete kanal boyunca toplamsal Gauss gürültünün eklendiği varsayıldığında, her dizge için bir yanlış olasılığı hesaplanabilir. Eşevreli sezme kullanıldığında her dizgedeki yanlış olasılığı Çizelge 8.2'de verilmiştir. Her durumda,  $A$  taşıyıcının genliği,  $N$  ise gürültü gücüdür. İşaret gücünün gürültü gücüne oranı işaret-gürültü oranı (İGO) olarak adlandırılır ve  $\gamma$  ile gösterilir.

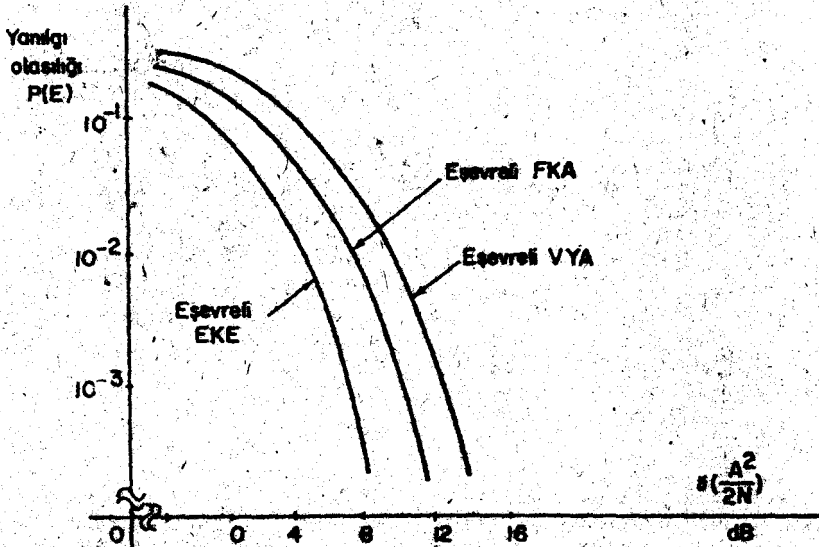
$$\gamma = \frac{A^2}{2N} \quad (8.53)$$

Çizelge 8.2'de yanlış olasılıkları  $\gamma$  türünden de ifade edilmişlerdir. Yanlış olasılıklarından da görülebileceği gibi FKA, VYA'ya göre; EKA ise FKA'ya göre daha iyidir. Belirli bir yanlış olasılığı için, FKA'daki işaret-gürültü oranı EKA'dakine göre 3 dB daha iyi, VYA'daki işaret-gürültü oranı FKA'dakine göre 3 dB daha iyi olmak zorundadır. Buna

göre başarımları aynı olan VYA ile EKA'nın işaret-gürültü oranları arasında 6 dB'lik bir ayırım olduğu söylenebilir. Eşevrelili seçme kullanıldığında her dizgedeki yanlışlı olasılıklarının işaret-gürültü oranına karşı çizimleri Şekil 8.27'de verilmiştir.

	Yanlışlı Olasılıkları
EŞEVRELİ VYA	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right)$
EŞEVRELİ FKA	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\gamma/2}\right)$
EŞEVRELİ EKA	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\gamma}\right)$
$\operatorname{erfc}(x) \triangleq 1 - \operatorname{erf}(x)$ $\operatorname{erf}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ $\gamma \triangleq \frac{A^2}{2N}$	

Çizelge 8.2 Eşevrelili VYA, FKA ve EKA için yanlışlı olasılık ifadeleri

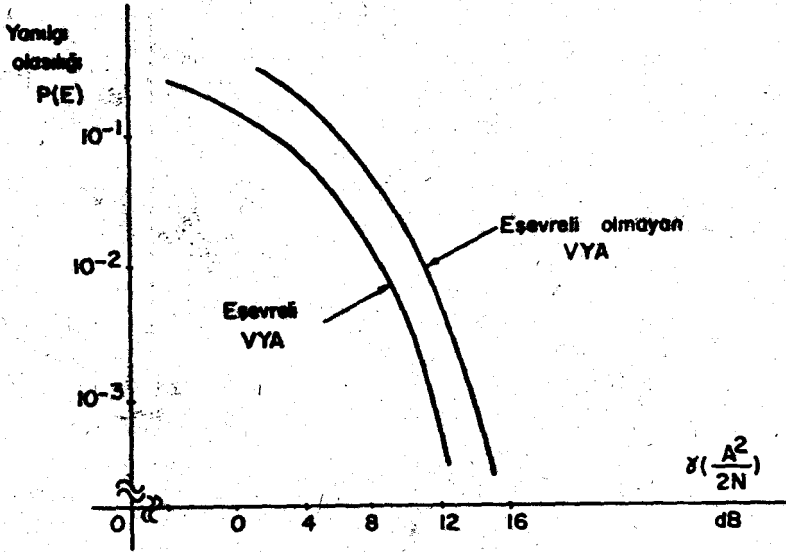


Şekil 8.27 VYA, FKA ve EKA'nın eşevrelili seçimi için yanlışlı olasılığı eğrileri

Eşevreli olmayan VYA için yanılgi olasılıgi bilinen kısa bir işlevsel biçimde gösterilemez. Ancak büyük  $\gamma$  değerleri için yanılgi olasılıgına

$$P(E) \approx \frac{1}{2} e^{-\gamma/4} \quad (8.54)$$

biçiminde bir yaklaştırma yapılabilir. Eşevreli olmayan VYA için yanılgi olasılıgi sayısal olarak hesaplanmıştır. Şekil 8.28'de eşevreli VYA ile



Şekil 8.28 Eşevreli ve eşevreli olmayan VYA için yanılgi olasılıgi eğrileri

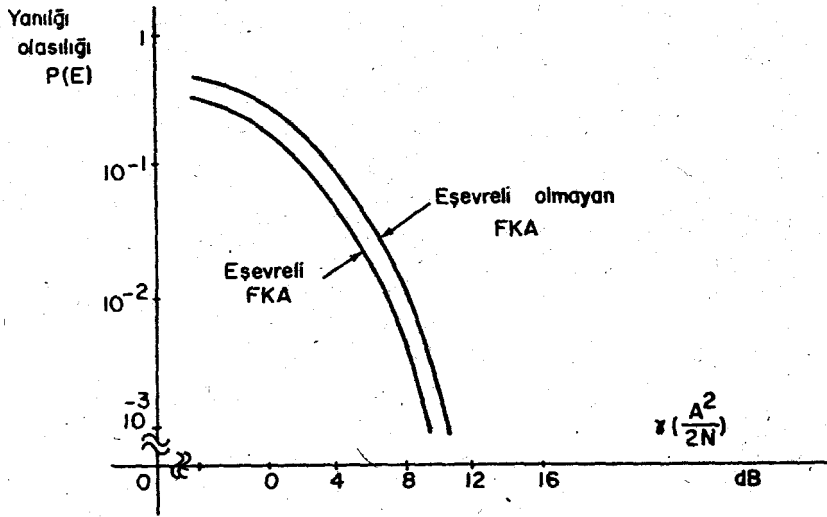
eşevreli olmayan VYA'nın başarımlarının çizimleri verilmiştir. Bu eğri-lerden eşevreli VYA'nın başarımının eşevreli olmayan VYA'ya göre daha iyi olduğu söylenebilir. Aynı yanılgi olasılıgi için, eşevreli olmayan VYA'daki işaret gürültü oranı eşevreli VYA'dakine göre yaklaşık olarak 1 dB daha fazla olmalıdır. Bu ise daha basit bir sezme yöntemi için ödenen bedeldir.

Eşevreli olmayan FKA'da yanılgi olasılıgi hesaplandığında şu sonuç elde edilir.

$$P(E) = \frac{1}{2} e^{-A^2/4N} = \frac{1}{2} e^{-\gamma/2} \quad (8.55)$$

Şekil 8.29'da eşevreli olmayan FKA ile eşevreli FKA'nın başarımları çizilmiştir. Bu eğrilerden görülebilecegi gibi FKA için eşevreli sezme eşevreli olmayan sezme göre daha iyidir. Yanılgi olasılıkları aynı olduğunda, eşevreli olmayan FKA'daki işaret-gürültü oranı eşevreli FKA dakine göre yaklaşık olarak 1 dB daha büyüktür. İşaret gürültü oranı büyüdükçe ayrım daha azalır. Bu tartışmalardan eşevreli sezicilerin

başarımlarının eşvreli olmayanlara göre daha iyi olduğu sonucu çıkar.



Şekil 8.29 Eşvreli ve eşvreli olmayan FKA için yanılığın olasılığı eğrileri

Bu altbölümde ikili bilgi işaretlerine uygulanabilen bazı örneksel modülasyon yöntemleri üzerinde durulmuştur. Aynı modülasyon yöntemleri genel olarak üçlü ya da  $m$ -li işaretlere de uygulanır. Sonuçta elde edilen modülasyon yöntemleri  $m$ -li GKA,  $m$ -li FKA ve  $m$ -li EKA'dır. Bu iletişim dizgelerinin çözülmesi ve bunların sezimi, ikili VYA, ikili FKA ve ikili EKA iletişim dizgeleri için verilen çözümlerinin basit birer uzantısıdır.

### Temelbant İletişimi

Yukarıda incelenen ikili iletişim dizgeleri ikili işaretlere uygulanabilen örneksel modülasyon yöntemleridir. Ancak bazı durumlarda ikili işareti, herhangi bir modülasyon olmadan, olduğu gibi göndermek ve sezmek gerekebilir. İkili işaret bir dikdörtgen vurunun varlığı ve yokluğu ile gösterilebileceği gibi, herhangi iki dalgabıçımı ile de gösterilebilir. İkili 0 ve 1 simgelerinin iki dalgabıçımı  $s_1(t)$  ve  $s_2(t)$  ile gösterildiğini düşünelim. Bu işaretleri en iyi bir biçimde sezecek almaçların yapısı nasıl olmalıdır?

Sezgisel olarak şunlar söylenebilir: Almaç gelen dalgabıçımına bakar,  $s_1(t)$  ve  $s_2(t)$ den hangisini daha çok benzetirse ona karar verir. Bu nedenle almaç iki kanaldan oluşur. Her kanal bir süzgeç içerir. Her bit süresi sonunda süzgeç çıktıları karşılaştırılır ve buna göre bir karar verilir. Almaçtaki süzgeçler ise şu biçimde tasarımlanır:  $s_1(t)$  işareti gönderildiğinde, ona karşı gelen kanaldaki süzgeç çıktısında işaret-

gürültü oranı en büyük olmalıdır. İşaret-gürültü oranını en büyük yapan, süzgecin dürtü tepkisi ona karşı gelen dalgabıçımının ayna görüntüsüdür. Bir başka deyişle,  $i$ 'inci kanaldaki süzgecin dürtü tepkisi ( $i=0,1$ )  $h(t) = s_i(T-t)$  olmalıdır. Dürtü tepkeleri bu özelliği sağlayan süzgeçler uyumlu süzgeç olarak adlandırılırlar ve bu süzgeçleri kullanan almaç ise uyumlu süzgeçli sezici olarak adlandırılır.

İkili iletişim dizgeleri VYA, FKA ve EKA işaretleri de iki dalgabıçımının gönderildiği birer temelbant iletişimi olarak düşünülebilir. Bu ikili iletişim dizgeleri için en iyi uyumlu süzgeçli seziciler incelenirse bunların daha önce incelenen eşevreli sezicilere çok benzediği görülür. Rasgele süreçler konusunda bilgi gerektirdiği için, uyumlu süzgeçlerin ayrıntılı çözümü burada yapılmayacaktır.

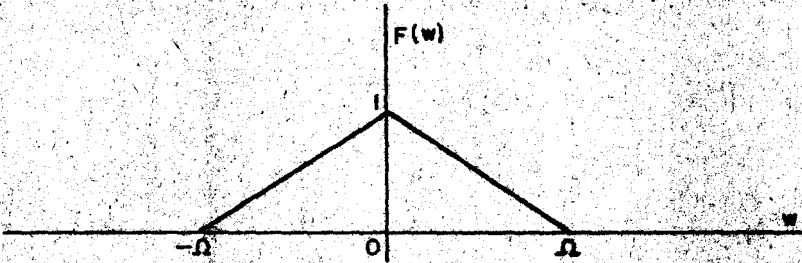
## ALİŞTIRMALAR

8.1 Aşağıda verilen bantsınırlı işareti düşününüz.

$$f(t) = \cos 2\pi \times 10^3 t + 0.5 \cos 2\pi \times 3 \times 10^3 t$$

- (a) Örnek değerler kullanılarak  $f(t)$  nin yeniden elde edilebilmesi için, en düşük örnekleme hızı ne olmalıdır?
- (b)  $f(t)$  işaretinden 5000 örnek/san'lik bir hızla örnekler alınıyor. Daha sonra bu örnekler, kesim frekansı 2.5 kHz olan bir düşüküçel alçak geçiren süzgeçten geçiriliyor. AGS'nin çıktısını bulunuz.
- (c)  $f(t)$  den 5000 örnek/san'lik hızla alınmış örnekleri düşününüz. Bu örnekler 2.5 kHz'e bant sınırlı,  $f(t)$  den başka bir işarete ait olabilir mi? Olabilirse hangi işarete aittir? Değilse nedenini açıklayınız.

8.2 Görüncesi Şekil 8.A.1'de verilen  $f(t)$  işaretini düşününüz.  $f(t)$  işareti  $\Omega$  frekansına bant sınırlıdır.



Şekil 8.A.1

- (a) Bu  $f(t)$  işaretinden örnekler alınmakta ve bu örnek değerler bir kanalın girişine verilmektedir. Kanal bant genişliğinin kırsıtılı olması nedeni ile saniyede  $\Omega/2\pi$  örnek değer alınmakta ve gönderilmektedir. Örnekleilmiş işaret şu biçindedir:

$$f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k \frac{2\pi}{\Omega}\right) \delta\left(t - k \frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

Kanal çıkışında örnek değerler kesimi  $\Omega/2$  rad/san ve kazancı  $2\pi/\Omega$  olan bir düşüncel AGS'den geçirilmektedir. Süzgeç çıkışında elde edilen  $g_1(t)$  işaretinin görüncesini bulunuz. Daha sonra

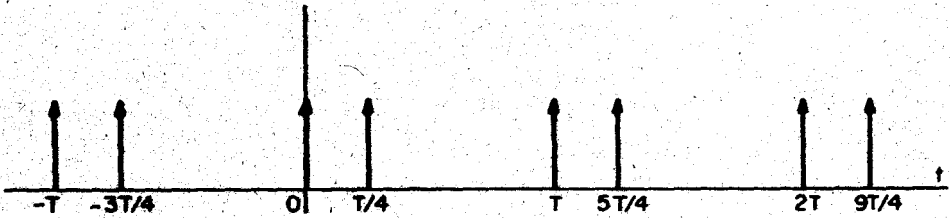
ortalama-karesel-yanılgıyı  $\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g_1(t)]^2 dt$  bulunuz.

İpucu: (3.67)'de verilen Parseval bağıntısını kullanınız.

- (b) Kanal bantgenişliğinin kısıtlı olması nedeni ile  $f(t)$  önce kesimi  $\Omega/2$  rad/san ve kazancı 1 olan bir AGS'den geçiriliyor. Daha sonra süzgeç çıkışındaki işaretten saniyede  $\Omega/2\pi$  örnek alınmaktadır. Kanala verilen bu örnek değerler kanal çıkışında olduğu gibi geri elde edilmektedir. Kanal çıkışına konan kesimi  $\Omega/2$  rad/san ve kazancı  $2\pi/\Omega$  olan bir düşüncel AGS yardımıyla  $f(t)$  nin bir yaklaştırması  $g_2(t)$  elde edilmektedir.  $g_2(t)$  nin görüncesini ve daha sonra ortalama-karesel-yanılgıyı bulunuz. Bulduğunuz sonucu (a) kısmında bulunanla karşılaştırınız.

- 8.3. Görüncesi Şekil 8.A.1 de verilen  $f(t)$  işaretinin en yüksek frekansı  $\Omega = 2\pi \times 10^4$  rad/san'dir. Bu işaret için gerekli Nyquist hızı  $2 \times 10^4$  örnek/san'dir. Bir başka deyişle örnekler arasındaki süre en fazla  $1/2 \times 10^4$  saniye olmalıdır.

- (a) Bu işaret Şekil 8.A.2'de verilen dürtü dizisi ile örneklenmektedir. Örneklenmiş işaretin görüncesini bulunuz.



$$T = \frac{3}{4 \times 10^4} \text{ San.}$$

Şekil 8.A.2

- (b) Örnek değerler kullanılarak  $f(t)$  yeniden elde edilebilir mi? Elde edilebilirse,  $f(t)$  nin nasıl elde edilebileceğini bir öbek çizimi üzerinde açıklayınız. Elde edilemezse, nedenlerini açıklayınız.

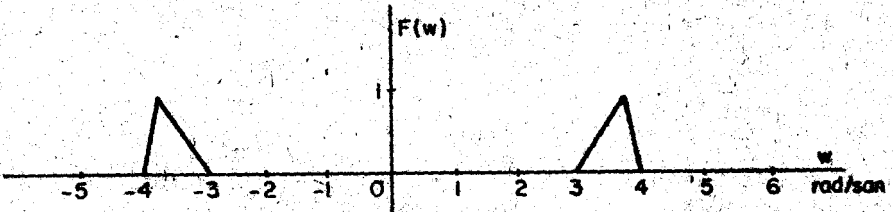


8.4. Aşağıda verilen işareti düşününüz.

$$f(t) = \cos 2\pi t + \cos 4\pi t$$

- Bu işaret düz-tepeli örnekleme yöntemi ile örneklenebilir. Görünge bileşenlerinin üst üste binmesini önleyen en büyük örnekleme dönemi  $T$  nedir?
- Örnekleme hızı 6 örnek/san. ve tutma devresinin tutma süresi  $\tau = 1/12$  san. olduğunda örneklenecek işaretin dalgabıçımını çiziniz.
- Örneklenecek işaretin frekans görünüşünü bulunuz ve çiziniz.
- Örneklenecek işaret, kesimi 3 Hz olan bir düşük frekanslı AGS den geçiriliyor. Süzgeç çıkışındaki işareti bulunuz.
- Örneklenecek işarettir  $f(t)$  yi elde edebilmek için ne tür bir dengeleme süzgeci kullanılmalıdır?

8.5. Görünüşü Şekil 8.A.3'de verilen  $f(t)$  işaretini düşününüz.



Şekil 8.A.3

Yanlışlıkla bu işaret  $[-2, 2]$  rad/san aralığına bant sınırlı olarak düşünülür ve bu nedenle bu işaret  $2/\pi$  örnek/san'lık bir hızla örneklenebilir.

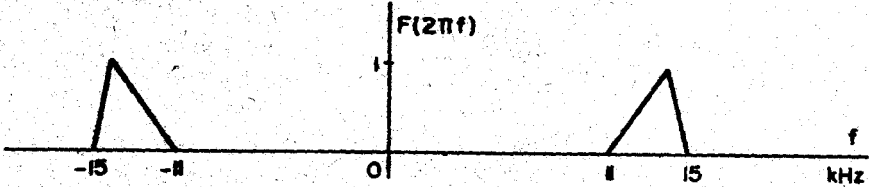
- Örneklenecek  $g(t)$  işaretinin görünüşünü bulunuz.
- Örneklenecek değerler kullanılarak  $f(t)$  yeniden elde edilebilir mi? Elde edilebilirse, nasıl elde edilebileceğini gösteriniz ve gösterimi çıkarınız. Elde edilemezse, nedenlerini açıklayınız.

8.6. Aşağıda verilen bant geçiren bant sınırlı işareti düşününüz.

$$f(t) = \cos 18\omega_0 t + \cos 19\omega_0 t + \cos 20\omega_0 t$$

- (a)  $f(t)$  nin yeniden elde edilebilmesi için en düşük örnekleme hızı ne olmalıdır?
- (b) (a) kısmında bulunan örnekleme hızıyla  $f(t)$  işareti örnekleniyor. Örneklemiş işaretin görünüşünü bulunuz. Örnek değerler kesimi  $2\omega_0$  rad/san olan bir düşüncel AGS'den geçiriliyor. Süzgeç çıkışında elde edilen işaret nedir?
- (c)  $f(t)$  işareti  $16f_0$  örnek/san'lik bir hızla örnekleniyor. Örneklemiş işaret merkez frekansı  $3\omega_0$  rad/san ve bantgenişliği  $2.5\omega_0$  rad/san olan bir düşüncel BGS'den geçiriliyor. Süzgeç çıkışındaki işareti bulunuz.
- (d)  $f(t)$  işareti  $8f_0$  örnek/san'lik bir hızla örnekleniyor. Daha sonra örnek değerler kesimi  $7f_0$  Hz bir düşüncel AGS'den geçiriliyor. Süzgeç çıktısını bulunuz.

8.7. Görünüşü Şekil 8.A.4'de verilen bantgeçiren bant sınırılı işareti



Şekil 8.A.4

düşününüz. Bantgeçiren örnekleme teoremine göre, bu işaret örnek değerleri kullanılarak yeniden elde edilebilir. Örnekleme dönemi  $T$  ve örnekleme frekansı  $f_0 = 1/T$  örnek/san olsun. İşaretin yeniden elde edilebilmesini sağlayan en düşük örnekleme hızı (8.28)'de verilmiştir. (8.28)'de verilen ifade kullanılarak bu işaret için gerekli en düşük örnekleme hızının 10 bin örnek/san olduğu bulunur. Buna göre  $f_0$  nun alabileceği en küçük değer 10 bin örnek/san'dır. Örneklemiş işaretin görünüşü  $F(\omega)$  nin bir önemli uzantısıdır ve  $f(t)$  nin örnek değerlerden geri elde edilebilmesi için görüncü bileşenleri üst üste çakışmamalıdır.

- (a) İşaretin yeniden elde edilebilmesi için  $f_0$  nun alabileceği değerleri bulunuz. Not:  $f_0$  nun alabileceği değerler bağlantısız aralıklardan oluşabilir.
- (b) İşaretin yeniden elde edilebilmesi için örnekleme dönemi  $T$  nin hangi değerler alabileceğini bulunuz.

Çözüm:  $f_0 \in [10 \text{ kHz}, 11 \text{ kHz}] \cup [15 \text{ kHz}, 22 \text{ kHz}] \cup [30 \text{ kHz}, \infty]$

8.8. Alıştırma 8.7'de bulunan sonuçlar genelleştirilebilir.  $[\omega_1, \omega_2]$  aralığına bant sınırılı bir bantgeçiren işaretin yeniden elde edilebilmesi için en düşük örnekleme hızının  $\omega_{ek} / 2\pi$  örnek/san olduğu daha

Önce bulunmuştur. Burada

$$\omega_{ek} = \frac{2\omega_2}{n+1}$$

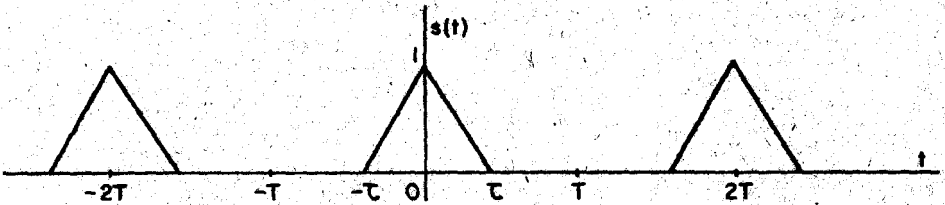
olup  $n \triangleq \left\lfloor \frac{\omega_2}{\Omega} \right\rfloor$  dir.  $\|a\|$ ,  $a$  sayısından küçük veya ona eşit en büyük tamsayıdır.  $\Omega \triangleq \omega_2 - \omega_1$  dir.  $\omega_{ek}/2\pi$  örnek/san den büyük her hangi bir örnekleme frekansı için,  $f(t)$  örnek değerleri kullanılarak yeniden elde edilemez. Gerçekte örnekleme hızının alabileceği değerler bağıntısız aralıklardan oluşur. Örnekleme hızının alabileceği değerlerin  $n+1$  sayıda aralıktan oluştuğunu gösteriniz. Daha sonra bu aralıkların sırasıyla,

$$\left[ \frac{2\omega_2}{2\pi(n+1)}, \frac{2\omega_1}{2\pi n} \right], \left[ \frac{2\omega_2}{2\pi n}, \frac{2\omega_1}{2\pi(n-1)} \right], \left[ \frac{2\omega_2}{2\pi(n-1)}, \frac{2\omega_1}{2\pi(n-2)} \right], \dots,$$

$$\left[ \frac{2\omega_2}{2\pi \times 2}, \frac{2\omega_1}{2\pi} \right], \left[ \frac{2\omega_2}{2}, \infty \right) \text{ örnek/san.}$$

olduğunu gösteriniz. Son aralığın sonsuza kadar uzandığına ve bu aralığın bantgeçiren işaretin  $\omega_2$  ye sınırlı bir alçakgeçiren işaret olarak düşünüldüğü duruma karşı geldiğine dikkat ediniz.

- 8.9.  $f(t) = \cos\omega_0 t$  işareti çok dar bir frekans bandını kapsayan bantgeçiren bantısının bir işaret olarak düşünülebilir. Bu durumda en düşük örnekleme frekansı  $f_s = 0$  midir? Bu sonucu nasıl açıklarsınız?
- 8.10.  $f_m$  Hz'e bantısının bir  $f(t)$  işareti veriliyor.  $f(t)$  yi bir dikdörtgen vurum dizisi ile çarparak doğal örnekleme gerçekleştirilebilir. (Şekil 8.4)  $f(t)$  nin örneklenmesinde dikdörtgen vurum dizisi yerine başka bir vurum dizisi de kullanılabilir.

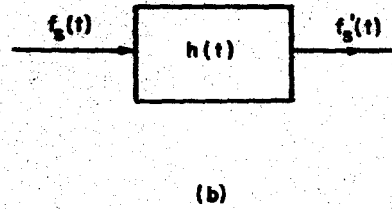
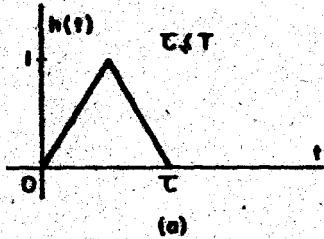


Şekil 8.A.5

- (a) Şekil 8.A.5'de verilen  $s(t)$  işaretinin frekans görünüşünü bulunuz.
- (b)  $f_s(t) = f(t)s(t)$  işareti üretiliyor. Bu işaretin görünüşünü bulunuz. Görünge bileşenlerinin üst üste çakışmasını önleyecek en büyük  $T$  değeri nedir?
- (c)  $f_s(t)$  işareti kullanılarak  $f(t)$  işareti yeniden elde edilebilir mi? Nasıl?

8.11.  $f_m$  Hz'e bantlısınırlı bir  $f(t)$  işareti düşününüz. Bu  $f(t)$  işareti Nyquist hızından daha büyük bir hızla örnekleniyor. Örnekler arasındaki uzaklık  $T$  saniyedir. Örneklenmiş işaret genlikleri örnek değerlerine eşit olan dürtülerden oluşan bir dürtü dizisidir.

(a) Örneklenmiş işaret dürtü tepkisi Şekil 8.A.6(a)'da verilen bir



Şekil 8.A.6

devreden geçirilerek  $f'_s(t)$  işareti elde ediliyor.  $f'_s(t)$  nin dalgabıçımını çiziniz ve frekans görünüşünü bulunuz. Bu işaretle Alıştırma 8.10'da incelenen  $f_s(t)$  işaretini karşılaştırınız.

(b)  $f'_s(t)$  işareti kullanılarak,  $f(t)$  işareti elde edilebilir mi? Nasıl?

8.12. Bu alıştırmada gerçekte bantlısınırlı olmayan bir  $f(t)$  işaretinin bantlısınırlı varsayılarak örneklenmesi ve bu örnekler kullanılarak  $f(t)$  nin yeniden üretilmesi sırasında yapılan yanlışlığı incelenecektir.

Aşağıda verilen  $f(t)$  işaretini düşününüz.

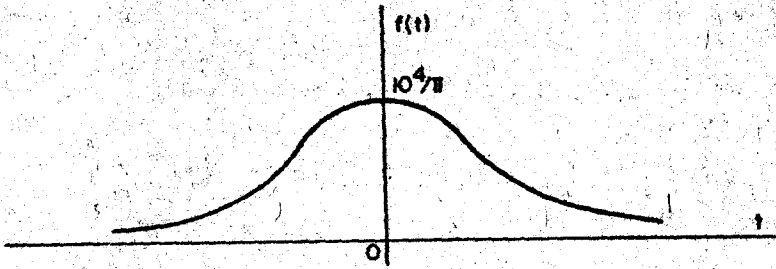
$$f(t) = \frac{10^4 / \pi}{1 + 10^8 t^2}$$

Bu işaretin görünüşü ise şu biçimdedir.

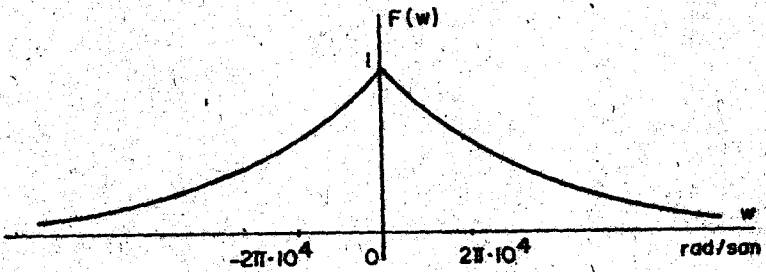
$$F(\omega) = e^{-10^{-4} |\omega|}$$

$f(t)$  ve  $F(\omega)$  Şekil 8.A.7'de görüntülenmiştir. Bu işaretin bantlısınırlı olmadığı açıktır. Ancak  $\omega$  belli bir  $\omega_0$  dan büyük olduğunda  $F(\omega)$  nin ihmal edilecek kadar küçüldüğü düşünülebilir. Böyle bir varsayımla  $f(t)$  nin  $2\pi \times 10^4$  rad/san ye bantlısınırlı olduğunu düşünerek, bu işareti örnek değerlerden üretmek üzere  $2 \times 10^4$  örnek/san'lik bir hızla örnekler alalım.

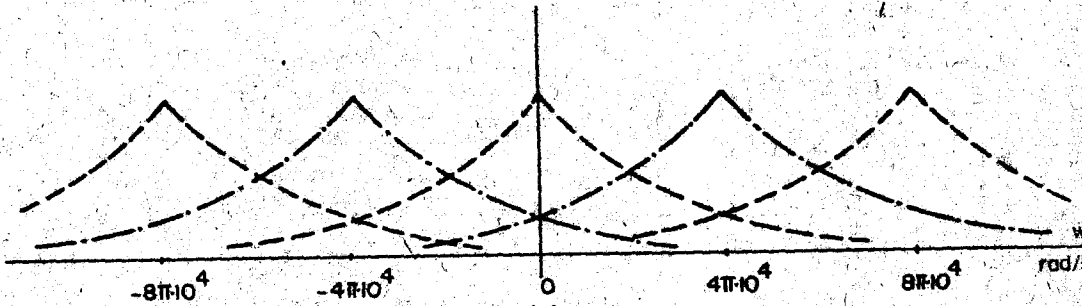
Dönemli bir işaret olan örneklenmiş işaretin görünüşünü bir dönem, örneğin  $[-2\pi \times 10^4, 2\pi \times 10^4]$  rad/san, üzerinde inceleyelim. Görünüşünün bu dönem üzerindeki görüntüsü,  $F(\omega)$  nin o aralıktaki bölümü ile  $F(\omega)$  nin kuyruklarının o aralığa katlanmış biçimlerinin toplanmasıyla elde edilir (Şekil 8.A.7(d)). Gerçekte bantlısınırlı olmayan



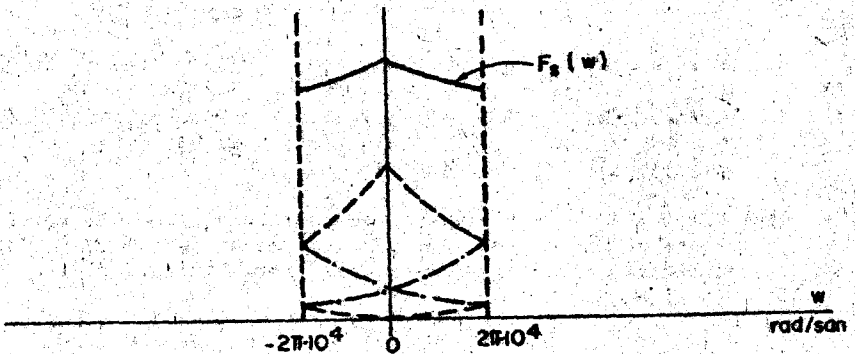
(a)



(b)



(c)



(d)

Sekil 8.2.7

İşaretlerin bant sınırılı varsayılması ya da bant sınırılı işaretlerin daha küçük bir frekansa bant sınırılı varsayılması sonucunda ortaya çıkan, yetersiz hızda örneklemenin neden olduğu yanılğı, şekilde gösterilen katlanmadan dolayı üst üste katlanma yanılğısı olarak da adlandırılır.

Örneklemiş işaret, kesimi bant sınır frekansı olarak varsayılan  $2\pi \times 10^4$  rad/san'deki, bir AGS'den geçirilirse, süzgeç çıktısındaki işaretin görüngesinin şu biçimde ifade edilebileceğini gösteriniz.

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-1}^{\infty} e^{-10^{-4}\omega - 4\pi k} + \sum_{k=-1}^{\infty} e^{10^4\omega - 4\pi k}$$

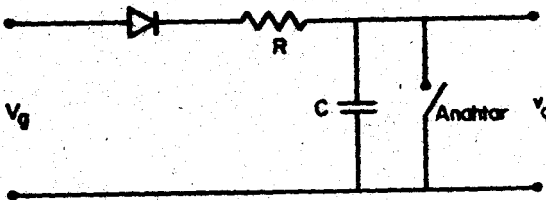
$$+ \begin{cases} e^{-10^{-4}\omega} & , 0 < \omega < 2\pi \times 10^4 \\ e^{10^4\omega} & , -2\pi \times 10^4 < \omega < 0 \end{cases}$$

ya da

$$F_s(\omega) = \frac{2 \cosh 10^{-4}\omega}{e^{4\pi} - 1} + \begin{cases} e^{-10^{-4}\omega} & , 0 < \omega < 2\pi \times 10^4 \\ e^{10^4\omega} & , -2\pi \times 10^4 < \omega < 0 \end{cases}$$

8.13. VYM işaretini demodüle edip örnek değerleri elde etmeden, VYM işaretinden VGM işaretini nasıl üretebiliriz?

8.14. (a) Bir VSM işaretinde vurum süresi  $\tau$ , örnekleme dönemi  $T_s$  ye göre çok küçüktür. ( $\tau \ll T_s$ ). Her vurumun ön kenarı  $t = kT_s$  anında olup sabittir. Tipik dalgabiçimleri çizerek, bu VSM işaretinin Şekil 8.A.8'de gösterilen devre ile demodüle edilebileceğini



Şekil 8.A.8

gösteriniz. ( $RC \gg T_s$  varsayılabilir. Devre çıkışındaki işaret her  $t = kT_s$ ,  $k=0,1,\dots$ , anında çok kısa bir süre kapatılarak sığacın boşaltılması sağlanmaktadır).

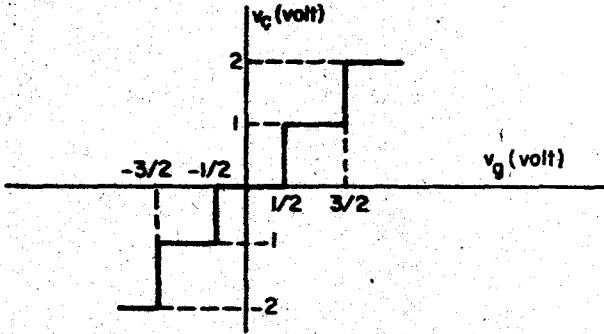
(b) VGM ve VSM işaretleri için demodülasyon işleminde kullanılmak üzere ek bir eşzamanlama bilgisi gerekmemektedir. Oysa VYM işaretleri için bu eşzamanlama bilgisi gereklidir. Nedenlerini açıklayınız.

- 8.15.  $\cos \omega_m t$  işaretine Şekil 8.9'da açıklanan yöntemle vurum süresi modülasyonu uygulanmaktadır. Bu işaret  $t = k/4f_m$  san.  $k=0,1,2, \dots$  anlarında örnekleniyor ve bu değer bir sonraki örnekleme anına kadar tutuluyor. Daha sonra bir testeredişi dalga ekleniyor.
- (a) Testeredişi dalganın genliği ve dilimleme düzeyi nasıl seçilmiştir ki, VSM işaretinde vurumların süreleri  $\tau = 0$  ve  $\tau = T_s/2$  arasında değişsin?
- (b) VSM işaretini çiziniz.
- (c) Çizimden de görülebileceği gibi VSM işareti önemlidir. Bu işaretin Fourier serisi açılımını bulunuz ve  $0 < f < 10f_m$  arasında frekans görünüşünü çiziniz.
- 8.16.  $5 \cos 2\pi \times 10^3 t$  sinüzoidal gerilimi 3 kHz'lik bir hızla örneklenmektedir. Daha sonra bu örnek değerler düzgün dağılımlı 4 düzeye nicemlenmekte ve ikili kod sözcükleri ile kodlanmaktadır. Sinüzoidal gerilimi çiziniz. Daha sonra ölçekli olarak örnekleme anına kadar nicemleyici, kodlayıcı ve kod çözücü çıktılarını çiziniz.
- 8.17. Frekans bileşenleri 50 ile 3300 Hz arasında olan bir ses işareti 8 kHz'lik bir hızla örneklenmektedir.
- (a) Örnek değerlerle bir VKM işareti oluşturulursa ses işaretinin yeniden elde edilebilmesini sağlayacak en küçük dizge bant genişliği ne kadar olmalıdır?
- (b) Örnek değerler bir VKM dizgesinde 8 düzeye nicemlenmekte ve daha sonra ikili kod sözcükleri ile gönderilmektedir. Bu VKM dizgesinde en küçük bant genişliği ne olmalıdır? Nicemleyici girişindeki işaretin tepeden tepeye değeri 4 volt ise, işaretin düzgün dağılımlı olduğunu varsayarak karesel ortalama nicemleme yanlıgısını bulunuz.
- (c) (b) kısmını 128 nicemleme düzeyi için tekrarlayınız ve bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.
- 8.18. (a) Bir iletim kanalında işaretin gücü her kilometrede 1 dB zayıflamaktadır. Gönderilen işaretin gücü 1 watt ise 1000 kilometre ötede alınan işaretin gücü ne kadardır?
- (b) Bu kanala yineleyiciler konularak bilginin daha uzak yerlere iletilmesi sağlanmaktadır. Her yineleyicinin çıkış gücü en fazla 1 watttır ve bu yineleyicilerde güç kazancı en fazla  $10^4$  dür. Gücü 1 watt olan bir işaretin 1000 km ötede sezildiğinde gücünün en az 1.0 watt olabilmesi için, iletim kanalına kaç tane ve nerelere yineleyici konmalıdır?
- 8.19. Konuşma işaretlerinin iletiminde çok sık kullanılan bir logaritmik sıkıştırıcının giriş-çıkış özegrisi şu biçimde tanımlanmıştır.

$$v_c = \begin{cases} v_{\text{maks}} \frac{\ln(1 + \mu v_g / v_{\text{maks}})}{\ln(1 + \mu)} & 0 < v_g < v_{\text{maks}} \\ -v_{\text{maks}} \frac{\ln(1 - \mu v_g / v_{\text{maks}})}{\ln(1 + \mu)} & -v_{\text{maks}} < v_g < 0 \end{cases}$$

- (a)  $\mu = 0,3,100$  için bu sıkıştırıcı özgeçirilerini çiziniz.  
 (b) Bunlara karşı gelen genleştirici özgeçirilerini çiziniz.  
 (c) 4,8,32 nicemleme düzeyi ne biçimde yerleştirilmelidir?

8.20. Şekil 8.A.9'da verilen nicemleyici özgeçirisini düşününüz.



Şekil 8.A.9

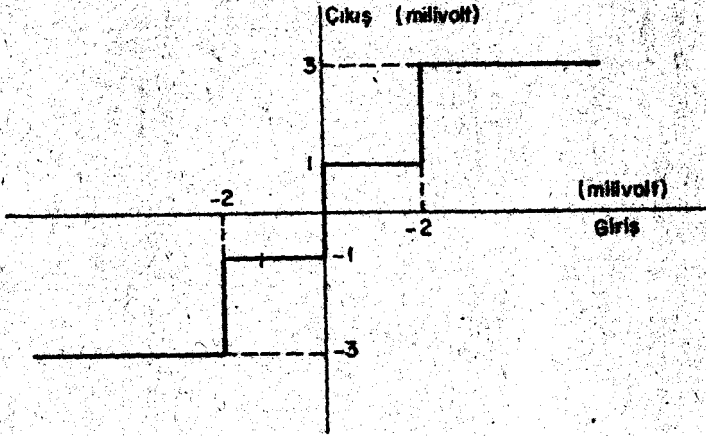
- (a)  $s = v_c - v_g$  yanılığını  $v_g$  ye karşı çiziniz.  
 (b) Çizimden de görülebileceği gibi  $e = e(v_g)$  yanılığası dönemlidir ve bu nedenle  $e(v_g)$  bir Fourier serisi açınımına sahiptir.  $e(v_g)$  nin trigonometrik Fourier serisi açınımını bulunuz.  
 (c)  $v_g = 1 \sin \omega_0 t$  volt olduğunda nicemleyici çıktısını çiziniz. Bu işaretin trigonometrik Fourier seri açınımını bulunuz. Bu açınımı kullanarak yanılığının Fourier seri açınımını nasıl elde edersiniz?

8.21. (a) Şekil 8.15(a)'da verilen DM modülatörünün girişine  $f(t) = 0.01t$  işareti uygulanıyor. Örnekleme dönemi  $T = 50$  msan ve basamak boyu 0.002 voltur.  $\hat{f}(t)$  ve  $f_g(t)$  işaretlerinin dalgabiçimlerini çiziniz.

- (b) (a) kısmını  $f(t) = 0.05 \sin \frac{\pi}{2} t$  volt için tekrarlayınız.



8.22. Şekil 8.15(a)'da verilen DM modülatöründe keskin sınırlandırıcı yerine, eğrisi Şekil 8.A.10'da verilen bir doğrusal olmayan



Şekil 8.A.10

aygıt konularak bir uyarlamalı DM modülatörü elde edilmektedir. Bu uyarlamalı DM modülatörünün girişine  $f(t) = 0.05 \sin \frac{\pi}{2} t$  işareti uygulanmaktadır; örnekleme dönemi ise  $T = 50$  msan'dır.  $\hat{f}(t)$  ve  $\hat{f}_\delta(t)$  işaretlerinin dalgabıçımlerini çiziniz. Sonuçları Alıştırma 8.21(b) de bulunanla karşılaştırınız.

8.23.  $f_1(t) = 5 \cos \pi \times 10^3 t$  ve  $f_2(t) = 10 \cos 4\pi \times 10^3 t$  işaretlerinden saniyede 5000'er örnek alınmaktadır. Daha sonra bu örnek değerler bir zaman bölme çöklama dizgesine uygulanmaktadır.

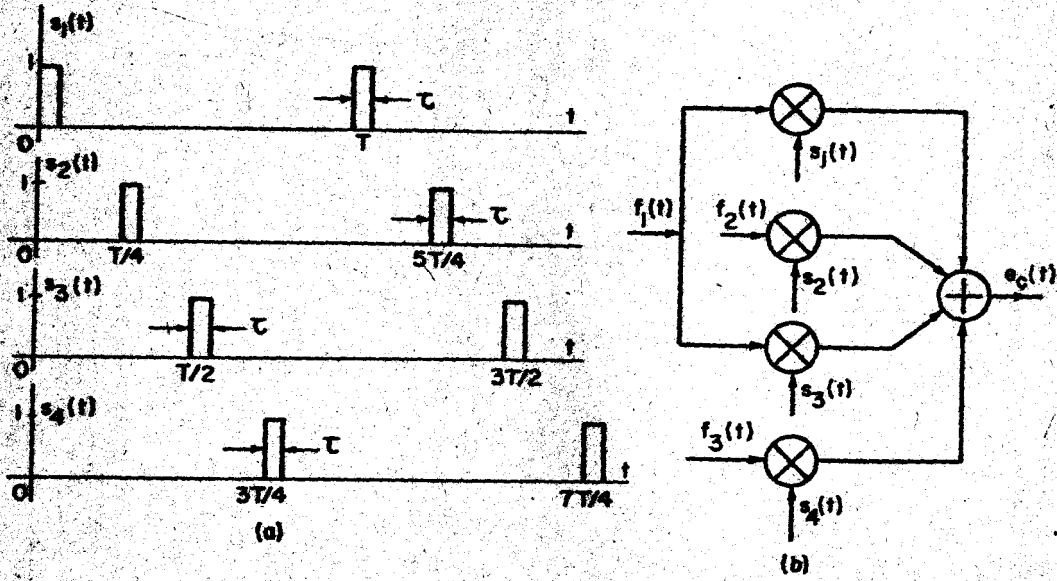
- (a) Zaman bölme çöklama dizgesi çıkışındaki dalgabıçımını çiziniz.
- (b) Zaman bölme çöklama dizgesi çıkışındaki işaret iletilmekte ve almaçta iki işaretin örnek değerleri ayrılarak bir tutma devresine uygulanmaktadır.  $f_1(t)$  nin elde edilmesi gereken kanala konmuş tutma devresi çıkışındaki işaretin dalgabıçımını çiziniz.

8.24. (a) Bir zaman bölme çöklama dizgesinin girişinde 24 kanal vardır. Her kanaldaki işaret 3.3 kHz'e bant sınırlandırılır, ZBÇ dizgesindeki anahtarlama hızı ise 8 kHz'dir. Çöklanan işaretler bir VCM işareti olarak gönderilmek istendiğinde gerekli en düşük bant genişliği ne kadardır?

- (b) (a) kısmındaki VCM işaretleri önce 28 düzeye nicemlenmekte ve daha sonra bir ikili VKM vurum dizisi olarak kodlanmaktadır. Bu vurumların iletimi için gereken bant genişliği ne kadardır?

Bantgenişliği arttırılmadan nicemleme düzeylerinin sayısı arttırılabilir mi? Nasıl? Bu durumda düzey sayısı en fazla ne olur?

8.25. Şekil 8.A.11'de verilen zaman bölmeli çoklama dizgesini düşününüz.



Şekil 8.A.11

Dört anahtarlama işlevi  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$  ve  $s_4(t)$  nin dalgab biçimleri aynıdır, yalnız aralarında  $T/4$  san'lik bir gecikme vardır (Şekil 8.A.11(b)).

(a)  $f_1(t)$  10 kHz'e,  $f_2(t)$  ile  $f_3(t)$  ise 5 kHz'e bant sınırlı işaretlerdir. Bu işaretlerin örnek değerleri kullanılarak yeniden üretilebilmeleri için  $T$  en fazla ne olmalıdır?  $\tau$  nın alabileceği en büyük değer nedir? Çoklanmış  $e_c(t)$  işareti için gereken bantgenişliği ne kadardır?

(b)  $f_1(t)$  6 kHz'e  $f_2(t)$  3 kHz'e ve  $f_3(t)$  ise 4 kHz'e bant sınırlı olduğu verildiğinde (a) kısmını tekrarlayınız.

8.26.  $\omega, 2\omega, 3\omega$  ve  $4\omega$  rad/san'ye bant sınırlı 4 işaret veriliyor. Her işaret kendi Nyquist hızıyla örnekleniyor. Bu örnek değerleri uygun bir biçimde birbirlerinin aralarına yerleştirerek gönderilecek bir ZBÇ dizgesi tasarımı yapınız. Bu ZBÇ dizgesinin bantgenişliği ne olacaktır?

8.27.  $b(t) = 110110$  bilgi dizisi FKA yöntemi ile gönderilecektir.  $b(t) = 1$  olduğunda frekans  $f_0 + \Delta f$  ve  $b(t) = 0$  olduğunda ise frekans  $f_0 - \Delta f$  dir. Her ikili sayının süresi  $10^{-6}$  san.,  $f_0 = 2$  MHz ve  $\Delta f = 1$  MHz olduğunda, FKA işaretinin dalgab biçimini çiziniz.

- 8.28. (a)  $s_1(t) = 100111010011110$  bilgi dizisi TEKA yöntemi ile gönderilecektir. (Şekil 8.26). Bu işaret kullanılarak üretilen  $s_2(t)$  dizisi nedir? TEKA modülatörü çıkışındaki işaret nedir?
- (b) TEKA sezicisinde  $s_1(t)$  dizisinin yeniden üretililebileceğini gösteriniz.

# E K A

## Dürtü İşlevi

Dürtü (ya da delta) işlevi, iletişim kuramında ve çeşitli mühendislik uygulamalarında çok kullanılan bir araçtır.  $\delta(t)$  ile gösterilen dürtü işlevi çeşitli biçimlerde tanımlanabilir. Dürtü işlevini, altındaki alanı 1 olan bir dikdörtgen vurumun, vurum genişliği sıfıra giderken, limiti olarak düşünebiliriz. Ya da birim basamak işlevi  $u(t)$  nin türevi olarak düşünebiliriz. Hangi yaklaşım kullanılırsa kullanılsın aşağıdaki tanıma erişilir.

Dürtü işlevi  $\delta(t)$  aşağıdaki özellikleri sağlayan işlev olarak tanımlanır.

- i.  $\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$
- ii.  $\delta(t) = \infty \quad t = 0$  (A.1)
- iii.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Bu tanımla ilgili bazı matematiksel güçlükler olmasına karşın mühendislikte en yaygın kullanılan tanım budur.

Bu tanımda ortaya çıkan güçlük, (A.1)'de verilen üç koşulun tutarlı olmamasıdır. Herhangi bir işlev bu üç koşulu birlikte sağlayamaz. Tümlevin tanımından giderek  $t=0$  dışında her yerde sıfır olan ve tümlevi 1 olan bir işlevin olamayacağını söyleyebiliriz. Bununla birlikte bu kavram kullanılarak pek çok soruna doğru çözümler bulunmaktadır. Bunun nedeni ise  $\delta(t)$  nin kullanımında bu işlevin yalnızca bazı özelliklerinin kullanılması ve bu özelliklerin kullanılan tanımdan bağımsız olarak geçerli olmasıdır.  $\delta(t)$  her  $t$  değeri için kesin değerler alan herhangi bir işlev olarak değil de, bazı özellikleri ile belirlenen yenibir kavram olarak tanımlanırsa, dürtü işlevi  $\delta(t)$  nin tanımında ortaya çıkan güçlüklerden kurtulunabilir. Matematiksel olarak tutarlı olan bu yaklaşım, matematiğin bir dalı olan dağılım kuramı içinde yer alır. Dağılım kuramı kullanılarak dürtü işlevinin incelenmesi bu kitabın kapsamı ve ilgi alanı dışındadır.

Dürtü işlevinin (A.1)'de verilen tanımı ve bu tanımdan elde edilen özellikleri bu kitapta serbestçe kullanılmıştır. Zira biliyoruz ki, istendiğinde gerekli matematiksel formalizm geliştirilebilir (tutarlılık sağlanabilir) ve bizim karşılaşacağımız problemlerde (A.1) kullanılarak elde edilen sonuçlar dağılım kuramı kullanılarak elde edilen sonuçlarla aynıdır.

$\delta(t)$  nin tüm alanı tek bir noktada yoğunlaştığından, (A.1.iii)'deki tümlevin sınırları  $t=0$  a doğru kaydırıldığında tümlevin değeri değişmez. Bu durumda  $a < 0$  ve  $b > 0$  için

$$\int_a^b \delta(t) dt = 1 \quad (\text{A.2})$$

$t=0$  dışında her yerde  $\delta(t) = 0$  olduğundan

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (\text{A.3})$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak

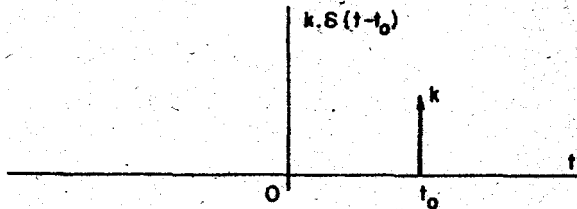
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (\text{A.4})$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (\text{A.5})$$

(A.5) dürtü işlevinin örnekleme özelliğini (ya da kaydırma özelliğini) gösterir. (A.4) ve (A.5) bağıntıları (A.1)'deki dürtü işlevi tanımından elde edilir. Diğer yandan dağılım kuramında dürtü işlevi (A.5) ile tanımlanır. Böylece dürtü işlevi, herhangi bir işlev gibi her  $t$  için tanımlanmayıp tümlev özelliği ile tanımlanır. Simgesel gösterimi dışında, içinde dürtü işlevini kullanacağımız tek bağıntı (A.5) dir. Bu nedenle bizim açımızdan, dürtü işlevinin (A.5) ile tanımlanması, ya da (A.1) ile tanımlanması ve (A.5)'in bundan elde edilen bir özellik olması önemli değildir.

Dürtü işlevi  $k\delta(t-t_0)$ 'ın çizimsel gösterimi Şekil A.1'de verilmiştir. Burada  $k$  dürtü işlevinin şiddeti olarak nitelenir ve dürtü



Şekil A.1 Bir dürtü işlevi

işlevini gösteren okun uzunluğu dürtünün şiddeti ile orantılıdır. Dürtü işlevini gösteren ok işlev değişkeninin sıfır olduğu noktaya yerleştirilir. Örneğin  $\delta(t-t_0)$  için  $t=t_0$  da işlev değişkeni sıfırdır, buna göre dürtü işlevi  $t=t_0$  dadır.

(A.1)'deki değişken değiştirilerek, bir gerçel  $k$  değişmezi için  $\delta(t)$  ve  $\delta(kt)$  işlevleri arasında

$$\delta(kt) = \frac{1}{|k|} \delta(t) \quad (A.6)$$

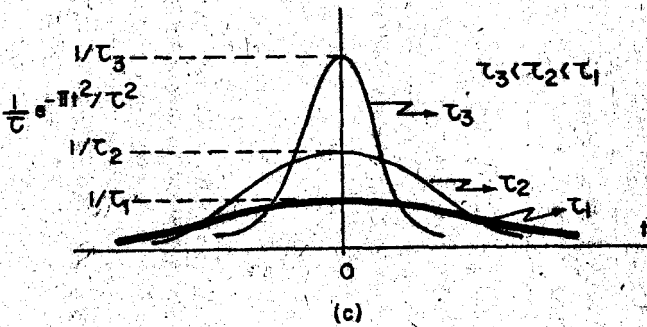
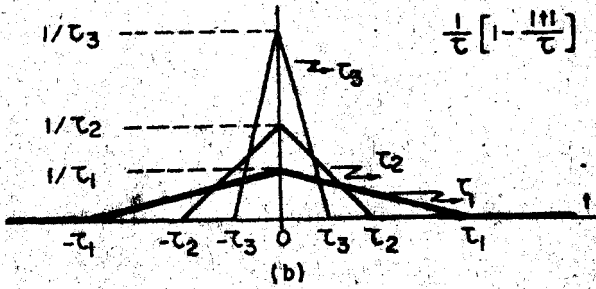
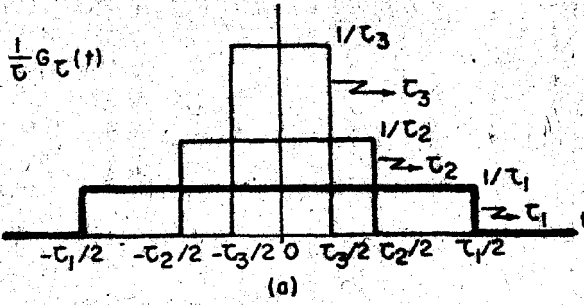
bağıntısı elde edilir.

Dürtü işlevi  $\delta(t)$  bir örnekleme işlevleri dizisinin limiti olarak da düşünülebilir. Dürtü işlevine yaklaşan çeşitli diziler aşağıda verilmiştir.

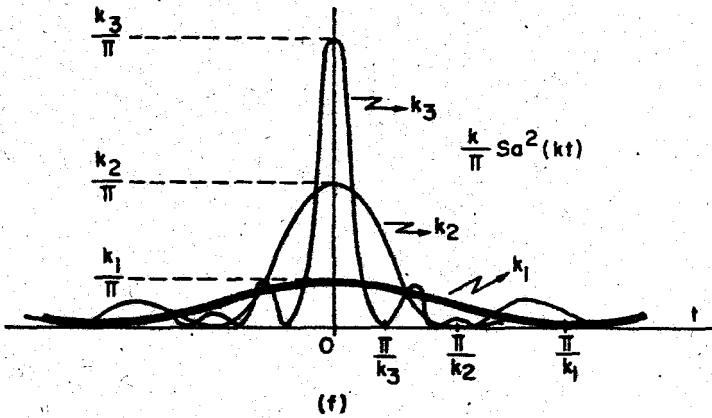
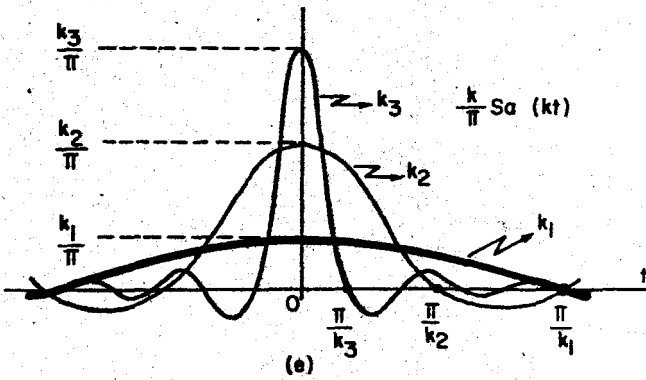
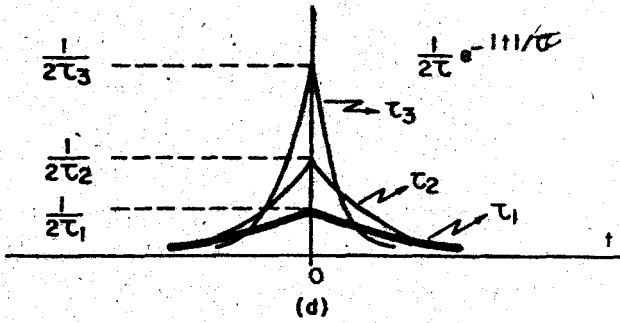
- a.  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} G_{\tau}(t)$
- b.  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ 1 - \frac{|t|}{\tau} \right]$
- c.  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi t^2 / \tau^2}$
- d.  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau}$
- e.  $\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt)$
- f.  $\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} Sa^2(kt)$

Buradaki  $G_{\tau}(t)$  ve  $Sa(t)$  işlevleri Ek B'de tanımlanan özel işlevler arasındadır. Yukarıda verilen dizilerin  $\delta(t)$  ye nasıl yaklaştıkları, yukarıda veriliş sıralarına göre Şekil A.2'de gösterilmiştir.

Dürtü işlevinin tanımındaki matematiksel güçlükten yukarıda bahsedilmişti. Dürtü işlevinin fiziksel anlamını kavramada da benzer güçlükler vardır. Elektrik mühendisliğinde, bir elektrik devresinin girişine bir dürtü gerilimi ya da bir dürtü akımı uygulandığı sık sık varsayılır. (Bölüm 3.2 deki dürtü tepkisi tanımına bakınız). Kuşkusuz gerçek dünyada bu tür bir gerilim ya da bir akım yoktur. Benzer biçimde diğer fiziksel bilimlerde de gerçek dünyada var olmamalarına karşın nokta kütleleri nokta yükleri, nokta kaynakları, yoğunlaştırılmış güçler; çizgi kaynakları ve yüzey yükleri dürtü işlevi ile gösterilirler. Bütün bunlarda, dürtü işlevi gerçek durumun bir düşüncelleştirilmiş modeli olarak kullanılır. Bu nedenle, dürtü işlevi fiziksel olayların incelenmesinde çok kullanılan bir araçtır.



Şekil A.2  $\delta(t)$  ve yaklaşan işlev dizileri (tüm eğrilerin altındaki alan 1 dir)



Şekil A.2 (devam)



# EK B

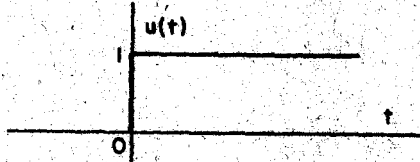
## Bazı Özel İşlevler ve Fourier Dönüşüm Çiftleri

Bu ekte bazı özel işlevler tanımlanmakta ve çok kullanılan bazı Fourier dönüşüm çiftleri verilmektedir.

### B.1 BAZI ÖZEL İŞLEMLER

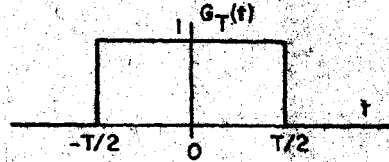
#### i. Birim basamak işlevi

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



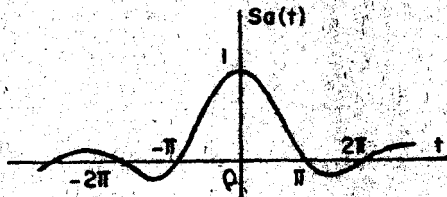
#### ii. Kapı işlevi

$$G_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



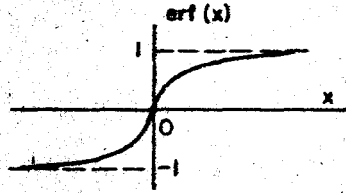
#### iii. Sa işlevi

$$S_a(t) = \frac{\sin t}{t}$$



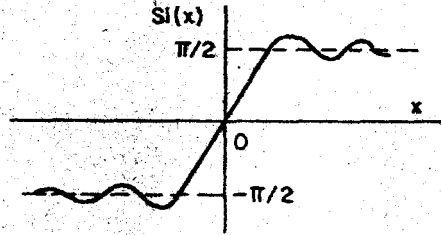
## iv. Yanılgı işlevi

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$



## v. Sinüs tümlevi

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$



## B.2. FOURIER DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ

Fourier dönüşüm çifti  $f(t)$  ve  $F(\omega)$  şu biçimde tanımlanır.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Çok kullanılan bazı Fourier dönüşüm çiftleri aşağıda sıralanmıştır.

No	$f(t)$	$F(\omega)$
1	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
2	$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
3	$ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
4	$\delta(t)$	1
5	1	$2\pi\delta(\omega)$
6	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
7	$\cos\omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

No	$f(t)$	$F(\omega)$
8	$\sin \omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10	$\sin \omega_0 t$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11	$\frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}(\frac{\omega_0 t}{2})$	$G_{\omega_0}(\omega)$
12	$G_{\tau}(t)$	$\tau \text{Sa}(\frac{\omega \tau}{2})$
13	$1 - \frac{ t }{\tau},  t  < \tau$ $0,  t  > \tau$	$\tau [\text{Sa}(\frac{\omega \tau}{2})]^2$
14	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
15	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
16	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} k)$
17	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

# E K C

## Fourier Dönüşüm Çiftlerinin Bazı Özellikleri

### C.1 FOURIER DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

$f(t)$  işlevi ve

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.1)$$

ile tanımlanan Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  bir Fourier dönüşüm çifti oluşturur.  $f(t)$  işlevi,  $F(\omega)$  Fourier dönüşümünün evrik Fourier dönüşümü alınarak bulunabilir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (C.2)$$

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  ile  $f(t)$  ve  $F(\omega)$  nın bir Fourier dönüşüm çifti oluşturdukları belirtilecektir. Çift yönlü okun sağ ucundaki işlev, sol ucundaki işlevin Fourier dönüşümüdür. Bu ekte Fourier dönüşüm çiftlerinin bazı özellikleri verilmiştir.

a. Bakışım (Simetri) Özelliği:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ ise } F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \text{ dir.}$$

Kanıt:  $f(t)$  ve  $F(\omega)$  bir Fourier dönüşüm çifti olduğundan, (C.2) kullanılarak

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (C.3)$$

yazılabilir. Buradaki  $t$  ve  $\omega$  yalnızca birer değişken olduklarından (C.3) de bunların yerleri değiştirilebilir ve

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.4)$$

elde edilir. (C.4)'ün sağ tarafının  $F(t)$  nin Fourier dönüşümü olduğu görülebilir. Bu nedenle  $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$  dir.

### b. Doğrusallık Özelliği

$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  ve  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  ise, herhangi  $a_1$  ve  $a_2$  değişmezleri için  $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$  dir.

**Kanıt:** Bu özellik Fourier dönüşümündeki tümlemin doğrusallık özelliği kullanılarak gösterilebilir. Bu özelliğin zaman işlevinin doğrusal birleşimine de genelleştirebiliriz.

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \dots + a_n F_n(\omega)$$

### c. Ölçekleme Özelliği

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  ise, herhangi bir  $a$  gerçel değişmezi için  $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  dir.

**Kanıt:**  $f(at)$  nin Fourier dönüşümünü bulalım.

$$F[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \quad (C.5)$$

$a$  bir artı değişmez ise,  $\tau = at$  değişkeni değiştirilerek

$$F[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\omega \quad (C.6)$$

elde edilir. (C.6)'nın sağ tarafı  $1/a$  ile  $f(t)$  nin Fourier dönüşümünün  $\omega/a$  daki değerinin çarpımıdır. Buna göre bir  $a$  artı değişmez için

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \text{ dir.}$$

Eksi bir  $a$  değişmezi için, (C.5)'de  $\tau = at$  değişkeni değiştirilerek,

$$f(at) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \quad (C.7)$$

bulunur. (C.7)'nin sağ yanı  $-1/a$  ile  $f(t)$  nin Fourier dönüşümünün  $\omega/a$  daki değerinin çarpımıdır. O halde bir  $a$  eksi değişmezi için

$$f(at) \leftrightarrow -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \text{ dir. Sonuç olarak herhangi bir } a \text{ değişmezi için}$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

olur. Bölüm 3'de tartışılan zaman ile frekans arasındaki ters orantılı ilişki, ölçekleme özelliği kullanılarak kolayca görülebilir. Bir başka deyişle, zaman bölgesinde daralma frekans bölgesinde yayılma ile sonuçlanır, bunun karşıtı da doğrudur.

#### d. Frekans Kaydırma Özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ ise } e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

**Kanıt:**  $e^{j\omega_0 t} f(t)$  nin Fourier dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} F[e^{j\omega_0 t} f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0) t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (C.8)$$

Bu teorem,  $f(t)$  yi  $e^{j\omega_0 t}$  ile çarpmanın,  $f(t)$  nin frekans görünüşü  $F(\omega)$  yi  $\omega$  rad/san kadar sağa kaydırmaya eşdeğer olduğunu söyler. Frekans görünüşünün bu şekilde kaydırılması iletişim kuramında çok sık kullanılır.  $f(t)$  yi bir sinüzoidal ile çarparak, frekans görünüşü kaydırması gerçekleştirilebilir.

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{ve} \quad \sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

eşitlikleri ile Fourier dönüşüm çiftlerinin doğrusallık özelliği kullanılarak

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (C.9)$$

$$f(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

olduğu gösterilebilir. Burada elde edilen sonuç, iletişim kuramında bazı modülasyon türlerinde kullanıldığından, bu özellik modülasyon teoremi olarak da bilinir.

#### e. Zaman Kaydırma Özelliği

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ ise } f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

**Kanıt:**  $f(t - t_0)$  in Fourier dönüşümünü bulalım.

$$F[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (C.10)$$

$\tau = t-t_0$  değişkeni değiştirilerek,

$$\begin{aligned} F[f(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega\tau} e^{-j\omega t_0} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned} \quad (C.11)$$

elde edilir. Bu teorem " $f(t)$  işlevi  $t_0$  kadar sağa kaydırıldığında, bunun frekans görünüşü  $e^{-j\omega t_0}$  ile çarpılır" der.  $e^{-j\omega t_0}$  in büyüklüğü bir olduğundan,  $f(t)$  işlevi  $t_0$  kadar kaydırıldığında büyüklük görünüşü  $|F(\omega)|$  değişmeden kalır, ancak evre görünüşü  $-\omega t_0$  kadar değişir.

#### f. Zaman Türevi ve Tümlüvi

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  olduğunda  $f(t)$  nin türevi varsa  $\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$  dır. Ayrıca  $\omega=0$  da  $\frac{F(\omega)}{\omega}$  sınırlı ise (bu koşul  $F(0)=0$  ya da  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$  ile eşdeğerdir),  $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$  dır.

Kanıt: Evrik Fourier dönüşümü kullanılarak

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (C.12)$$

yazılabilir. (C.12)'nin her iki yanının  $t$  ye göre türevi alınarak,

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

bulunur. (C.13)'ün sağ yanı  $j\omega F(\omega)$  nın evrik Fourier dönüşümüdür. Buna göre  $\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$  dır.

$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau = \phi(t)$  olarak tanımlayalım.  $\phi(t)$  nin Fourier dönüşümü  $\Phi(\omega)$  olsun Buna göre  $\phi(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$  yazılabilir. Yukarıda verilen türev alma özelliği kullanılarak  $\frac{d\phi}{dt} \leftrightarrow j\omega\Phi(\omega)$  bulunur.  $\frac{d\phi}{dt} = f(t)$  olduğundan sonuçta  $j\omega\Phi(\omega) \leftrightarrow F(\omega)$  elde edilir.  $\phi(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$  yı  $f(t)$  ve  $F(\omega)$  cinsinden şu biçimde ifade edebiliriz.

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) = \Phi(\omega)$$

Bu özellik kullanılarak, zaman bölgesinde türev almanın frekans bölgesinde  $F(\omega)$  nın  $j\omega$  ile çarpımına karşı geldiği söylenebilir. Bunun sonucu olarak yüksek frekans bileşenlerinin önemi artar, alçak frekans bileşenlerinin ise önemi azalır. Zaman bölgesinde tümlev alma bunun tersi bir etki oluşturur ve alçak frekans bileşenlerinin önemi artar. Bunun nedeni frekans görüngesi  $F(\omega)$  nın  $j\omega$  ile bölünmesidir. Arka arkaya zaman türevi alınarak şu genel bağıntı elde edilebilir.

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (C.14)$$

### g. Frekans Türevi

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ ise } tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

Kanıt: Fourier dönüşümü

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.15)$$

yazılır ve her iki tarafın  $\omega$  ya göre türevi alınır,

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.16)$$

bulunur. (C.16)'nın sağ yanı  $-jtf(t)$  nin Fourier dönüşümüdür. Buna göre iki yanı  $j$  ile çarparsak  $tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$  elde edilir. Arka arkaya türev alınarak şu özellik elde edilir.

$$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \quad (C.17)$$

### h. Zaman-Katlanması Teoremi

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \text{ ve } f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \text{ ise}$$

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Burada  $*$  katlanma işlemini gösterir ve şu biçimde tanımlanır.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (C.18)$$

Kanıt:  $f_1(t) * f_2(t)$  nin Fourier dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} F[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} f_2(t-\tau) dt \right] \\
&= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\
&= F_1(\omega) F_2(\omega)
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Bu özellik kullanılarak oldukça karışık katlanma işlemlerinden kurtulabilir.  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$ 'yi katlamak için bunların Fourier dönüşümleri bulunur ve çarpılır.  $F_1(\omega) F_2(\omega)$  çarpımı  $f_1(t) * f_2(t)$  nin Fourier dönüşümüdür. Bu nedenle  $F_1(\omega) F_2(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü alınarak  $f_1(t) * f_2(t)$  elde edilir.

### i. Frekans-Katlanması Teoremi

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \text{ ve } f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \text{ ise}$$

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

Kanıt:  $\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) F_2(\omega - \sigma) d\sigma \right] e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega - \sigma) e^{j(\omega - \sigma)t} d\omega \right] e^{j\sigma t} d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) f_2(t) e^{j\sigma t} d\sigma \\
&= f_1(t) f_2(t)
\end{aligned}$$

Frekans katlanma teoremi, Fourier dönüşüm çiftlerinin oldukça kullanışlı bir özelliğidir. İki işlevin çarpımının frekans görünüşünün bulunması istendiğinde, çarpımın Fourier dönüşümünün doğrudan bulunması kolay olmayabilir. Bunun yerine iki işlevin Fourier dönüşümlerinin katlanmasının hesaplanması daha kolay olabilir. Bu kitapta zaman-katlanması ve frekans-katlanması özellikleri çok sık kullanılmıştır.

## C.2 FOURIER SERİSİ GÖSTERİMİNİN ÖZELLİKLERİ

Dönemi T olan bir  $f(t)$  dönemli işlevinin Fourier serisi gösterimi şu şekildedir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{bütün } t \text{ için} \tag{C.21}$$

Buradaki  $c_n$  katsayısı

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

ile hesaplanabilir. Bölüm 2'de  $f(t)$  nin Fourier dönüşümü bulunmuştur:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) \quad (C.22)$$

Dönemli zaman işlevi  $f(t)$  ve bunun Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  bir Fourier dönüşüm çifti oluştururlar ve bu ekte verilen Fourier dönüşüm çiftlerinin bütün özellikleri bu çiftler için de geçerlidir. Bir dönemli işlevin Fourier dönüşümü özel bir biçimde olduğundan, bu ekte verilen özellikler, Fourier katsayıları  $c_n$  ler ya da (C.22)'de verilen Fourier dönüşümündeki diğer değişkenler türünden ifade edilebilir.

# E K D

## Laplace Dönüşümü ve Bunun Fourier Dönüşümü ile İlişkisi

Bu ekte amacımız karmaşık değişkenler ve dönüşüm kuramı üzerine ayrıntılı ve eksiksiz bir açıklama vermek değildir. Okuyucuların karmaşık değişkenler ve çevre (kontur) tümlevleri ile ilgili temel kavramlarla bildik oldukları kabul edilmiştir. Burada Fourier, Laplace ve iki-yanlı Laplace dönüşümlerinin tanımlarındaki bazı önemli noktalar üzerinde durulacak ve bunlar arasındaki ilişkiler tartışılacaktır.

Elektrik mühendisliği öğrencileri Fourier ve Laplace dönüşümlerinin tümlev ifadeleri ile sık sık karşılaşır. Ancak bu tümlev ifadelerinin varlıklarıyla ilgili koşullar ve değişik dönüşümler arasındaki ilişkiler ile ilgili koşullar genellikle bir ayrıntı sayılır ve üzerinde önemle durulmaz. Bu tümleyle yanlış bir tutumdur. Zira bu koşullar ve ilişkiler tanımların önemli bir bölümünü oluşturur. Dönüşüm kuramı, elektrik mühendisliği eğitiminin önemli konularından biridir. Bu nedenle elektrik mühendisleri bu dönüşümlerin ayrıntılı tanımlarını ve bunlar arasındaki ilişkileri bilmelidirler.

### D.1 İKİ-YANLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$f(t)$  nin Fourier dönüşümü ve bunun evrik Fourier dönüşümü şu biçimde tanımlanır.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (D.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (D.2)$$

$f(t)$  nin Fourier dönüşümünün var olması için bir yeterli koşul  $f(t)$  nin salt değer tümlevinin var olmasıdır, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (D.3)$$

dir. Salt değer tümlevinin var olması katı bir koşuldur ve pek çok işlev için bu koşul sağlamaz. Bu işlevlerin Fourier dönüşümlerinin var olduğu söylenemez. Örneğin  $u(t)$ ,  $l(t)$ ,  $e^t$ ,  $\cos \omega_0 t$  ve dönemli işlevler salt değer tümlevinin var olması koşulunu sağlamazlar ancak  $\sigma$  nin belli değerleri için  $f(t) e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevi var olabilir. Buna göre bu  $\sigma$  değerleri için  $f(t) e^{-\sigma t}$  nin Fourier dönüşümünden söz edebiliriz.

$$\begin{aligned} F [f(t)e^{-\sigma t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = F(\sigma, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \end{aligned} \quad (D.4)$$

$f(t)e^{-\sigma t}$  nin Fourier dönüşümü (eğer var ise)  $\sigma$  ve  $\omega$  nin bir işlevidir. Ancak bu işlevsel ilişki  $\sigma$  ve  $\omega$  değişkenlerine göre rastgele bir ilişki değildir: dönüşüm  $(\sigma + j\omega)$  nin bir işlevidir. Bu nedenle  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin Fourier dönüşümünü karmaşık  $s$  değişkeninin bir işlevi olarak gösterebiliriz.

$$Ge(s) = \sigma, \quad \text{San}(s) = \omega \quad (D.5)$$

Buna göre,

$$F [f(t)e^{-\sigma t}] (\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \quad (D.6)$$

ya da

$$F [f(t)e^{-Ge(s)t}] (\text{San}(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Bu yolla tanımlanan karmaşık değerli  $F(s)$  işlevi,  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü diye adlandırılır. Bu dönüşüm,  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olduğu  $Ge(s) = \sigma$  değerleri için geçerlidir. Üzerinde  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olduğu karmaşık  $s$  düzlemi bölgesi *varlık bölgesi* diye adlandırılır.

Varlık bölgesi, iki-yanlı Laplace dönüşümünün önemli bir parçasıdır.  $f(t)$  nin Laplace dönüşümü verilirken hem  $F(s)$  hem de varlık bölgesi, ikisi birlikte belirtilmelidir. Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi,  $F(s)$  nin işlevsel biçimi, yalnız başına,  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümünü belirlemez. Bunun nedeni, değişik  $f(t)$  lerin, aynı  $F(s)$  işlevsel biçimine sahip, ancak karmaşık  $s$  düzleminin değişik bölgelerinde geçerli olan iki-yanlı Laplace dönüşümleri olmasıdır. Bu nedenle,  $F(s)$  ile birlikte bunun varlık bölgesi de verilmelidir. İki yanlı Laplace dönüşümünün varlık bölgesi, her zaman karmaşık  $s$  düzleminde bir dik

şerittir,  $f(t)$  ye bağlı olarak, dik şeritin ya her iki yanı da sonludur, ya da bir yanı sonludur diğer yanı sonsuza gider, ya da iki yanı da sonsuzdur.

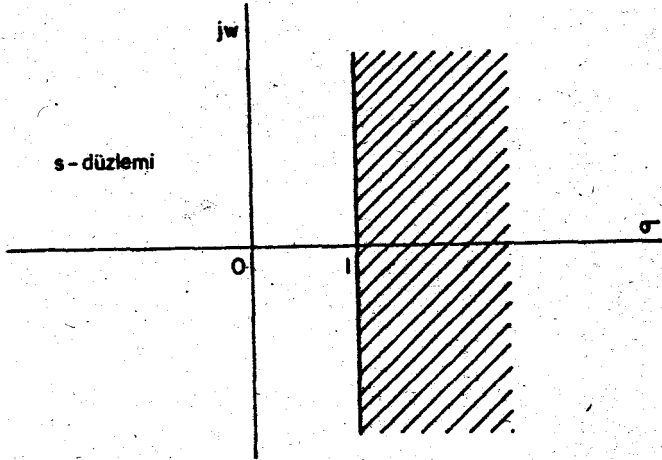
Örnek D.1. Aşağıda tanımlanan işlevin iki-yanlı Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (D.7)$$

Bu işlevin Fourier dönüşümü yoktur, ancak  $\text{Re}(s) = \sigma > 1$  için iki-yanlı Laplace dönüşümü vardır.

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{Re}(s) > 1 \quad \text{için} \quad (D.8)$$

$\frac{1}{s-1}$  bütün  $s$  düzleminde geçerli olan bir iki-yanlı Laplace dönüşümü değildir. Bunun varlık bölgesi  $\text{Re}(s) > 1$  dir. Bunun nedeni  $f(t)e^{-\text{Re}(s)t}$  nin salt değer tümlevinin yalnız bu bölgede var olmasıdır. Bu  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümünün varlık bölgesi Şekil D.1'de gösterilen taranmış bölgedir.



Şekil D.1 (D.7)'de verilen  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümünün varlık bölgesi

Karmaşık değerli  $F(s) = \frac{1}{s-1}$  işlevi bütün  $s$ -düzlemi üzerinde tanımlanır ve  $s=1$  noktası dışında bütün  $s$ -düzleminde çözümseldir (analitiktir). Ancak bütün  $s$ -düzlemi üzerinde  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü değildir, yalnız varlık bölgesinde geçerlidir. Bu nedenle,  $F(s)$  nin hangi bölgede  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü olduğunu belirtmek gereklidir.

Örnek D.2. Aşağıda tanımlanan işlevin iki-yanlı Laplace dönüşümünü bulalım.

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t \geq 0 \\ e^{2t} & t < 0 \end{cases} \quad (D.9)$$

$f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olması için şu koşullar gereklidir:

i.  $\sigma > 1$  ,  $t \geq 0$  için

ii.  $\sigma < 2$  ,  $t < 0$  için

0 halde iki-yanlı Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^t e^{-st} dt, \quad 1 < \sigma < 2 \\ &= \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \quad 1 < \sigma < 2 \end{aligned} \quad (D.10)$$

Varlık bölgesi Şekil D.2(a)'da gösterilen taranmış bölgedir.

Şimdi de aşağıda verilen işlevin iki-yanlı Laplace dönüşümünü bulalım.

$$f(t) = \begin{cases} e^t - e^{2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (D.11)$$

$f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olması için

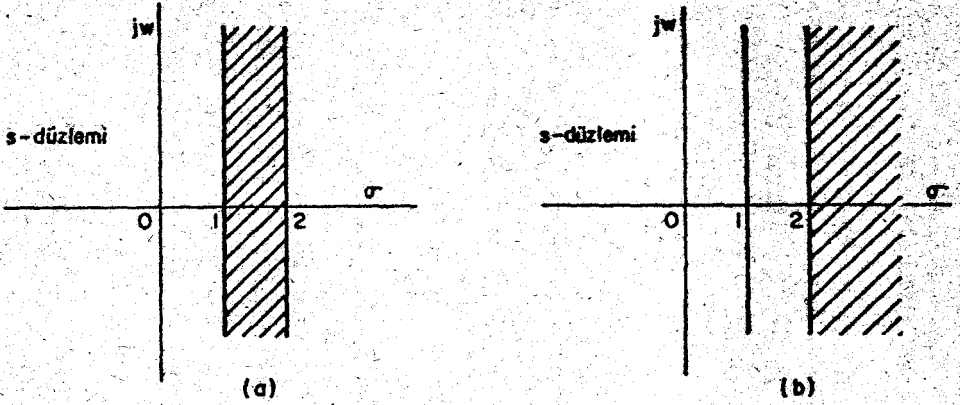
$\sigma > 1$  ve  $\sigma > 2$

olmalıdır. Buna göre bu işlevin iki-yanlı Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} (e^t - e^{2t}) e^{-st} dt, \quad \sigma > 2 \\ &= \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \quad \sigma > 2 \end{aligned} \quad (D.12)$$

dir ve varlık bölgesi Şekil D.2(b)'de gösterilen taranmış bölgedir.

(D.10) ve (D.12)'den de görülebileceği gibi, (D.9) ve (D.11) ile tanımlanan iki ayrı zaman işlevinin iki-yanlı Laplace dönüşümleri aynı işlevsel biçime sahiptirler, ancak ayrı bölgeler üzerinde geçerlidirler. Bu nedenle  $F(s)$  yalnız başına, bir tek  $f(t)$  belirlemez.  $F(s)$ , varlık bölgesi ile birlikte tek bir  $f(t)$  belirler.



Şekil D.2 İki yanlı Laplace dönüşümlerinin varlık bölgeleri

## D.2 EVRIK DÖNÜŞÜM

$F(\sigma + j\omega)$  nin evrik Fourier dönüşümü

$$f(t)e^{-\sigma t} = F^{-1} [F(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (D.13)$$

ile verilir. Bu ifade düzenlenerek

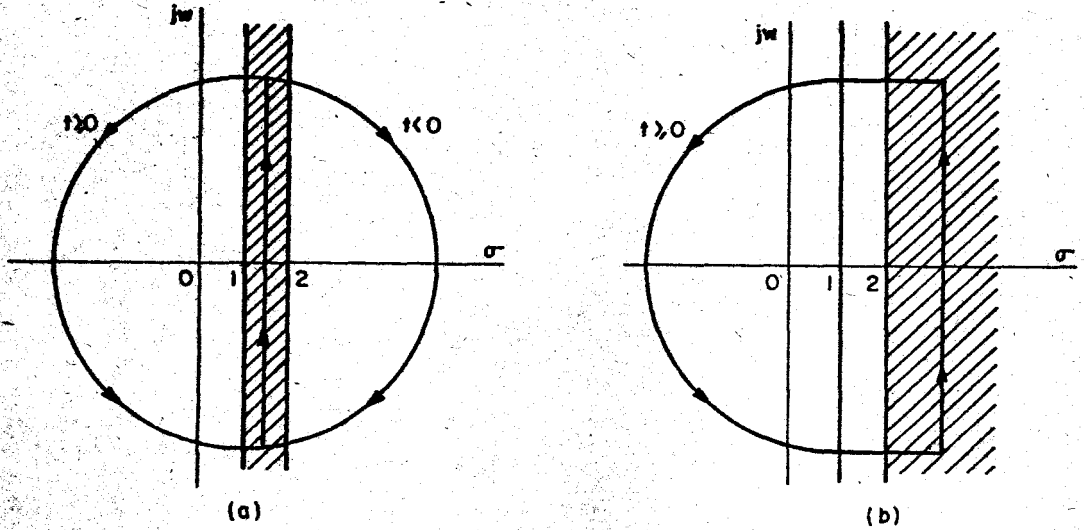
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (D.14)$$

$F(s)$  yalnız varlık bölgesinde geçerli olduğundan, (D.14)'deki karmaşık tümlev yalnız bu bölge üzerinde alınmalıdır.

Çevre tümlevi alınmak istendiğinde, uygun bir çevre seçilmelidir.  $t \geq 0$  için  $f(t)$  bulunurken  $R \rightarrow \infty$  olan yarım daire üzerindeki tümlevin sıfır olması için çevre sağdan tamamlanmalıdır.  $t < 0$  için  $f(t)$  bulunurken ise  $R \rightarrow \infty$  olan yarım daire üzerindeki tümlevin sıfır olması için çevre soldan tamamlanmalıdır. Örnek D.2'de verilen ilk  $f(t)$  yi bulurken çevre Şekil D.3(a)'daki gibi seçilmelidir, ikinci  $f(t)$  için ise çevre Şekil D.3(b)'de verilmiştir.

## D.3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$f(t)$  nin Laplace dönüşümü şu biçimde tanımlanır.



Şekil D.3 Evrik dönüşümün bulunmasında kullanılan çevreler

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (D.15)$$

Bu aslında  $f(t)u(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümüdür. Bu nedenle  $t < 0$  için  $f(t) = 0$  ise iki-yanlı Laplace dönüşümü ve Laplace dönüşümü aynı olur. Burada  $t < 0$  için  $f(t) = 0$  olan işlevler *nedensel* diye adlandırılmıştır. Nedensel olmayan  $f(t)$  lerin iki-yanlı Laplace dönüşümleri ve Laplace dönüşümleri arasında herhangi bir ilişki yoktur.

#### D.4 VARLIK BÖLGESİ

Buradaki tartışmada karşılaşacağımız tekil noktaların yalnızca kutuplardan oluştuğunu varsayacağız.

İki-yanlı Laplace dönüşümü verilirken, varlık bölgesinin de belirtilmesi gerektiği halde, uygulamada bu bölge genellikle belirtilmez. Varlık bölgesinin belirtilmemesinden dolayı ortaya bir belirsizlik çıkar. Örnek D.2'den de görülebileceği gibi, varlık bölgesi belirtilmeden  $F(s)$  tek bir  $f(t)$  belirleyemez. Bu altbölümde  $f(t)$  ve varlık bölgesi arasındaki ilişki üzerinde durulacak ve yukarıda belirtilen belirsizlik incelenecektir. Nedensel  $f(t)$  işlevlerinin oluşturduğu sınıfı düşünelim.  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olduğu  $\sigma = G(s)$  değerleri için iki-yanlı Laplace dönüşümü (Laplace dönüşümünün aynısıdır) vardır.  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin var olduğu en küçük gerçel  $\sigma$  değeri  $\sigma_0$  ise, bütün  $\sigma \geq \sigma_0$  değerleri için  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevi vardır. Bir başka deyişle, nedensel  $f(t)$  için varlık bölgesinin sağında bir sınır yoktur. Daha açık olarak belirtmek gerekirse, varlık



bölgesi  $F(s)$  nin en sağdaki kutbunun sağında kalan yarı düzlemdir.

Örneğin,

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} \quad (D.16)$$

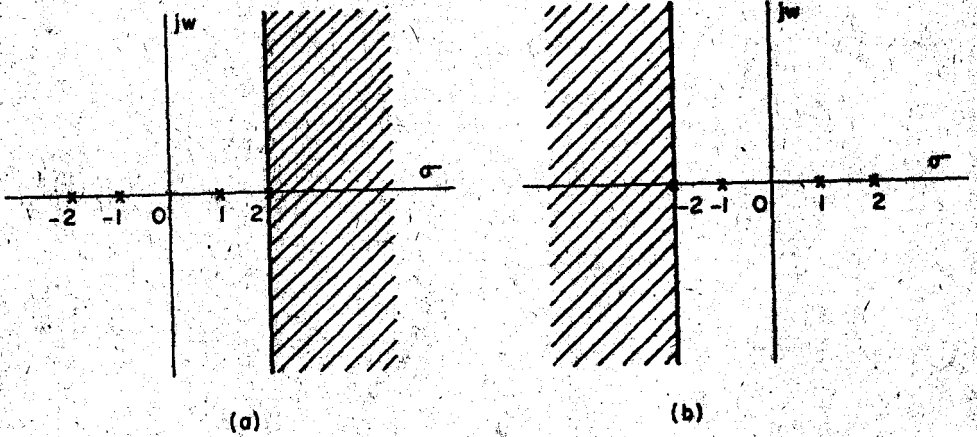
ile verilen bir  $F(s)$  düşününüz. Eğer bu bir nedensel işlevin Laplace dönüşümü ise, bu Laplace dönüşümünün geçerli olduğu bölgeyi belirleyebiliriz. Varlık bölgesi Şekil D.4(a)'da verilmiştir.

Bu nedenle nedensel işlevler için, Laplace dönüşümünün varlık bölgesinde herhangi bir belirsizlik yoktur.

Benzer, fakat bunun tam tersi sonuçlar sol-nedensel işlevler için de geçerlidir.  $t \geq 0$  için  $f(t) = 0$  olan işlevler *sol-nedensel* diye adlandırılır. Sol-nedensel işlevler için, iki-yanlı Laplace dönüşümünün varlık bölgesi,  $F(s)$  nin en soldaki kutbunun solunda kalan yarı-düzlemdir. Örneğin,

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} \quad (D.17)$$

işlevi bir sol nedensel işlevin dönüşümü ise,  $F(s)$  nin varlık bölgesi Şekil D.4(b)'de gösterildiği gibidir. Bu nedenle sol-nedensel işlevlerin



Şekil D.4 Bir nedensel ve bir sol-nedensel işlevin varlık bölgeleri.

dönüşümünde de bir belirsizlik yoktur. Ancak işlev nedensel ya da sol-nedensel değilse, yahut belirtilmemişse ortaya bir belirsizlik çıkar.

Herhangi bir  $f(t)$  işlevi düşünelim. Bu  $f(t)$  işlevini bir nedensel ve bir sol-nedensel işlevin toplamı olarak yazabiliriz.

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

(D.18)

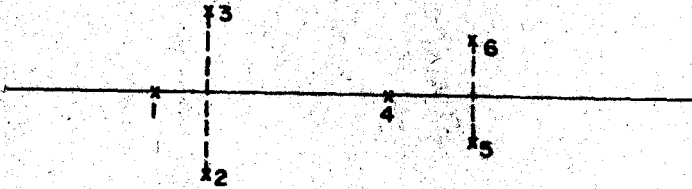
Burada  $f_1(t)$  nedenseldir, yani  $t < 0$  için  $f_1(t) = 0$  dir.  $f_2(t)$  ise sol-nedenseldir ve  $t > 0$  için  $f_2(t) = 0$  dir.  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümlerinin toplamıdır.  $f(t)$  nin dönüşümü olan  $F(s)$  nin varlık bölgesi,  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  nin dönüşümleri olan  $F_1(s)$  ve  $F_2(s)$  nin varlık bölgelerinin kesişimidir.

$F(s)$  nin varlık bölgesi ( $F_1(s)$  ve  $F_2(s)$  nin varlık bölgelerinin kesişimi) için dört olasılık vardır.

1. Hiçbir ortak bölge yoktur. Bu  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü olmadığı anlamına gelir.
2. Bir  $\sigma_0$  in sağında kalan yarı düzlemdir. Bu daha önce tartışıldığı gibi  $f(t)$  nin nedensel olduğu anlamına gelir, yani  $f_2(t) = 0$  dir.
3. Bir  $\sigma_0$  in solunda kalan yarı düzlemdir. Bu da daha önce tartışıldığı gibi  $f(t)$  nin sol-nedensel olduğu anlamına gelir, yani  $f_1(t) = 0$  dir.
4.  $s$  düzleminde  $\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$  arasında kalan bir dik şerittir. Bu durumda  $f(t)$  nin varlık bölgesi  $\sigma_1$  in sağında kalan yarı düzlem,  $f(t)$  nin varlık bölgesi ise  $\sigma_2$  nin solunda kalan yarı düzlemdir. Bu durumda kesişim  $\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$  arasında kalan bir dik şerittir.

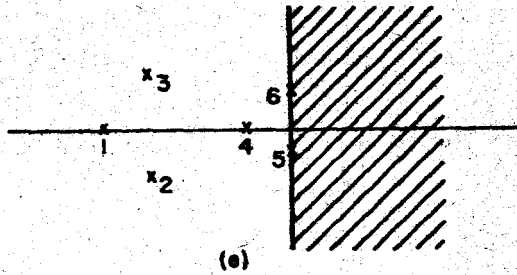
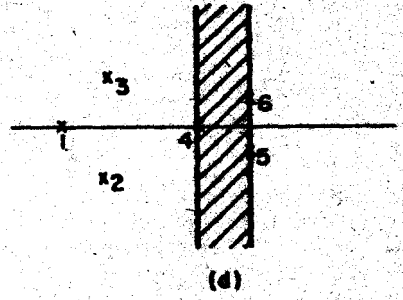
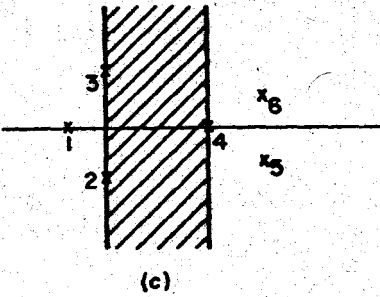
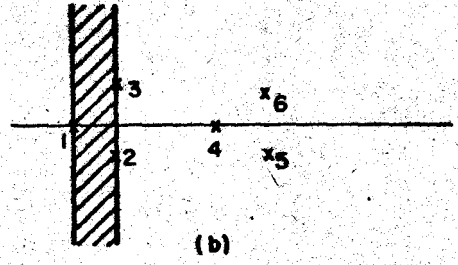
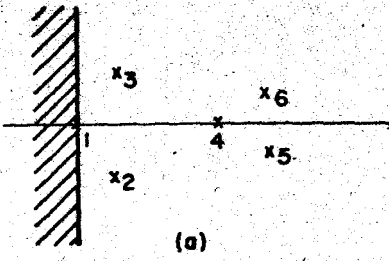
$\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$  dik şeridi ile ilgili önemli noktalar:

Bu şeridin içinde  $F(s)$  nin hiçbir kutbunun olamayacağı gösterilebilir ve bu şerit iki komşu kutup tarafından sınırlandırılmıştır. Örneğin kutup çizimi Şekil D.5'de verilen  $F(s)$  yi düşününüz.  $F(s)$  nin varlık bölgesi için beş olasılık vardır ve bu bölgeler Şekil D.6'da gösterilmiştir.



Şekil D.5 Herhangi bir  $F(s)$  nin kutup çizimi

Beş tane olabilir varlık bölgesi olmasının bir sonucu olarak, aynı  $F(s)$  ve farklı varlık bölgelerine sahip beş  $f(t)$  vardır. (a) daki durum bir sol-nedensel  $f(t)$  ye karşı gelir, (e) daki durum ise bir nedensel  $f(t)$  ye karşı gelir. (b), (c) ve (d)'deki durumlar ise ne nedensel ne de sol-nedensel olmayan işlemlere karşılık gelir.



Şekil D.6 Kutup çizimi Şekil D.5'de verilen  $F(s)$  nin olabilir varlık bölgeleri

Örnek olarak (c)'deki durumu düşünelim. Buradan 1,2 ve 3 kutuplarının  $F_1(s)$  nin, yani  $f(t)$  nin nedensel kısmının dönüşümünün kutupları olduğu, 4,5 ve 6 kutuplarının  $F_2(s)$  nin, yani  $f(t)$  nin sol-nedensel kısmının dönüşümünün, kutupları olduğu sonucuna varılabilir. Genel bir kural olarak şu söylenebilir: Varlık bölgesinin sağında kalan bütün kutuplar  $f(t)$  nin sol-nedensel bileşeninin kutuplarıdır, varlık bölgesinin solunda kalan kutuplar ise  $f(t)$  nin nedensel bileşeninin kutuplarıdır.

Varlık bölgesi  $F(s)$  nin kutuplarının nedensel ve sol-nedensel kısımlara dağılımını belirler. Bunun tersi de doğrudur. Bu nedenle ya varlık bölgesi ya da kutupların dağılımı belirtilirse, tek bir  $f(t)$  zaman işlevi belirlenmiş olabilir.

### D.5 FOURIER VE LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

$f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü şu biçimde tanımlanır.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (D.19)$$

Bu tanım  $s$ -düzleminde bir bölge üzerinde geçerlidir.  $F(s)$  gerçekte  $f(t)e^{-Ge(s)t}$  nin Fourier dönüşümü olduğundan,  $f(t)e^{-\sigma t}$  nin salt değer tümlevinin alınabilmesi koşulu bu bölgeyi belirler. O halde bir  $s$  karmaşık sayısı için,  $f(t)e^{-Ge(s)t}$  nin salt değer tümlevi yoksa, Fourier dönüşümü ve bunun sonucu olarak  $f(t)$  nin bu  $s$  karmaşık sayısı için iki-yanlı Laplace dönüşümü de yoktur.

Özellikle ilgilenilen bir durum  $Ge(s) = \sigma = 0$  olan  $s$  için iki-yanlı Laplace dönüşümünün var olup olmadığıdır. Ancak bu soru,  $s$ -düzlemindeki sanal eksenin dönüşümün varlık bölgesi içine düşüp düşmediği sorusu ile aynıdır.  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümünün  $s$  deki değeri (eğer varsa)  $f(t)e^{-Ge(s)t}$  nin Fourier dönüşümüdür. Bunun sonucu olarak,  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümünün  $s$  deki değeri  $Ge(s) = 0$  için,  $f(t)$  nin Fourier dönüşümüdür.

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz: Eğer sanal eksen varlık bölgesi içinde ise, iki-yanlı Laplace dönüşümünün  $s = j\omega$  daki değeri Fourier dönüşümünü verir.

$$F(s) \Big|_{s=j\omega} = F(\omega) \quad (\text{Burada } j \text{ nin yazılmaması yalnız bir gösterim konusudur}) \quad (D.20)$$

Bunu biraz değişik söylemek gerekirse,  $F(t)$  nin Fourier dönüşümü varsa bu, iki-yanlı Laplace dönüşümünün  $s = j\omega$  daki değeridir. Bir başka deyişle, eğer Fourier dönüşümü varsa, iki-yanlı Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü basit bir yerine koyma yöntemi ile birbirlerinden elde edilebilir.

Öte yandan, sanal eksen varlık bölgesi içinde değilse, bu Fourier dönüşümünün olmadığı anlamına gelir. Bu durumda bu iki dönüşüm arasında bir ilişki kurulamaz. İki dönüşüm arasında bir ilişki kurmak için gerekli koşul sanal eksenin varlık bölgesi içinde olmasıdır. Bir nedensel  $f(t)$  için bu koşul  $F(s)$  nin bütün kutuplarının sol yarı düzlemde olmasına eşdeğerdir. Bir nedensel işlevin Laplace dönüşümü  $F(s)$  nin bütün kutupları sol yarı düzlemde ise, Laplace dönüşümünün  $s = j\omega$  daki değeri Fourier dönüşümüne eşittir.

Fiziksel olarak gerçekleştirilebilir zamanla değişmeyen doğrusal bir dizgenin dürtü tepkisi  $h(t)$  nedenseldir. Bu nedenle Laplace dönüşümü

$H(s)$  nin (geçiş işlevi) bütün kutupları sol yarı düzlemde ise  $H(s)|_{s=j\omega}$  değeri  $h(t)$  nin Fourier dönüşümüdür. Birçok durumda türevsel denklemlerden Laplace dönüşümü  $H(s)$  nin elde edilmesi, dürtü tepkisi  $h(t)$  ve bunun Fourier dönüşümü  $H(j\omega)$  nin elde edilmesinden daha kolaydır. Bu nedenle yukarıda elde edilen sonuç çok yararlı ve kullanışlıdır.

Sanal eksenin varlık bölgesi içinde olup olmaması ile ilgili üçüncü bir olasılık vardır. Bu durumda sanal eksen varlık bölgesinin bir sınırı olur.  $F(s)$  nin sanal eksen üzerinde kutbu varsa ve sanal eksen varlık bölgesinin sınırı olursa, bu olasılık ortaya çıkar. Bu durumda iki-yanlı Laplace dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasında bir ilişki var mıdır, varsa nedir? Bu durumda da iki dönüşüm arasında bir ilişki vardır, ancak bu ilişki (D.20)'deki kadar basit değildir. Bu olasılık için iki ayrı durum düşünülebilir.

- i. Sanal eksen varlık bölgesinin sol sınırındadır,
- ii. Sanal eksen varlık bölgesinin sağ sınırındadır.

Gerçekte şu iki durumu düşünmek yeterlidir.

- i.  $f(t)$  nedenseldir,  $j\omega$  eksenini üzerinde kutupları vardır, ve sağ yarı düzlemde hiç kutup yoktur.
- ii.  $f(t)$  sol-nedenseldir,  $j\omega$  eksenini üzerinde kutupları vardır, ve sol yarı düzlemde hiç kutup yoktur.

Zira  $j\omega$  eksenini varlık bölgesinin sol sınırı ise, dönüşümlerin sol nedensel bileşenleri arasında (D.20)'deki gibi bir ilişki vardır;  $j\omega$  eksenini sağ sınır ise dönüşümlerin nedensel bileşenleri arasında (D.20)'deki gibi bir ilişki vardır.

$f(t)$  nedenseldir,  $j\omega$  eksenini üzerinde kutupları vardır ve sağ yarı düzlemde hiç kutup yoktur.

Böyle bir  $f(t)$  nin Laplace dönüşümü  $F_1(s)$  şu biçimde gösterilebilir:

$$F_1(s) = G(s) + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{(s-j\omega_m)^{k_m}} \quad (D.21)$$

Burada  $G(s) \geq 0$  için  $G(s)$  nin kutupları yoktur ve  $k_m$ ,  $j\omega_m$  deki kutbun kaç katlı olduğunu gösterir.  $F_1(s)$  ye karşı gelen Fourier dönüşümü şu biçimdedir:

$$F(\omega) = F_1(j\omega) + \pi \sum_{m=1}^n \frac{a_m j^{(k_m-1)}}{(k_m-1)!} \delta^{(k_m-1)}(\omega - \omega_m) \quad (D.22)$$

$j\omega$  eksenindeki her yalın (tek katlı) kutup için Laplace dönüşümü  $F_1(s)$  nin  $s = j\omega$  daki değerine

$$a_m \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_m) \quad (D.23)$$

terimi eklenir.

Örnek D.3.  $u(t)$  nin Laplace ve Fourier dönüşümlerini bulalım.  $u(t)$  nin Laplace dönüşümü şu biçimdedir.

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \quad (D.24)$$

$F_1(s)$  nin  $s = 0$  da basit bir kutbu vardır. Bu nedenle (D.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_1(j\omega) + \pi\delta(\omega) , \\ &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \end{aligned} \quad (D.25)$$

bulunur. Diğer yollardan da (D.25)'in sağ tarafının  $u(t)$  nin Fourier dönüşümü olduğu gösterilebilir.

$f(t)$  sol nedenseldir,  $j\omega$  ekseninde kutupları vardır ve sol yarı düzlemde hiç kutup yoktur

Böyle bir  $f(t)$  için iki-yanlı Laplace dönüşümü  $F(s)$  şu biçimde gösterilebilir.

$$F(s) = G(s) + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{(s-j\omega_m)^{k_m}} \quad (D.26)$$

Burada  $G(s) \leq 0$  için  $G(s)$  nin kutupları yoktur ve  $k_m$  ise  $j\omega$  deki kutbun kaç katlı olduğunu gösterir.  $F(s)$  ye karşı gelen Fourier dönüşümü şu biçimdedir:

$$F(\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} - \pi \sum_{m=1}^n \frac{a_m j^{(k_m-1)}}{(k_m-1)!} \delta^{(k_m-1)}(\omega - \omega_m) \quad (D.27)$$

Buna göre,  $j\omega$  eksenindeki her yalın (tek katlı) kutup için, iki yanlı Laplace dönüşümü  $F(s)$  nin  $s = j\omega$  daki değerine

$$-\pi a_m \delta(\omega - \omega_m)$$

terimi eklenir.

Örnek D.4. Aşağıda tanımlanan sol nedensel işlevin iki-yanlı Laplace ve Fourier dönüşümleri arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (D.28)$$

Bu işlemin iki-yönlü Laplace dönüşümü  $-1/s$  dir ve bu dönüşüm sol yarı düzlemde geçerlidir. (D.27) kullanılarak

$$F(\omega) = \frac{-1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (D.29)$$

bulunur.

## D.6 DOĞRUSAL DİZGELERDEN İLETİLEN İŞARETLERİN DÖNÜŞÜM ÇÖZÜMLEMESİ

Dürtü tepkisi  $h(t)$  olan zamanla değişmeyen bir doğrusal dizgenin girdisi  $f(t)$  ise tepke şu biçindedir:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (D.30)$$

Dürtü tepkesinin Fourier dönüşümü  $H(j\omega)$  ve girdinin dürtü tepkisi  $F(\omega)$  cinsinden, tepkenin Fourier dönüşümü

$$G(\omega) = H(j\omega) F(\omega) \quad (D.31)$$

ile bulunabilir. Bu bağıntının geçerli olabilmesi için, kuşkusuz dürtü tepkisi  $h(t)$  nin ve  $f(t)$  girdisinin Fourier dönüşümlerinin olması gerekir.

Yukarıdakine, benzer bir bağıntı iki-yanlı Laplace dönüşümleri için de geçerlidir.

$$G(s) = H(s)F(s) \quad (D.32)$$

$g(t)$  nin Laplace dönüşümü  $G(s)$ ,  $H(s)$  ile  $F(s)$  nin her ikisinin de geçerli olduğu bölgede geçerlidir. Bu nedenle Fourier dönüşümleri var olmasa bile, iki-yanlı Laplace dönüşümü cinsinden dönüşüm çözümü yapılabilir. Ancak iki-yanlı Laplace dönüşümünden giderek, Fourier dönüşümünde yapıldığı gibi, frekans görüncesi kavramı elde edilemez.

$f(t)$  ve  $h(t)$  nin her ikisi de nedensel ise,  $g(t)$  de nedenseldir. Dönüşümler arasındaki bağıntı ya da katlanma tümlevi kullanılarak bu özellik görülebilir.

## D.7 ÖZET

1. Bir zaman işlevi  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü  $f(t)e^{-Cs}$  nin Fourier dönüşümüdür.
2. Bir nedensel  $f(t)$  nin (yani  $t < 0$  için  $f(t) = 0$ ) Laplace dönüşümü ve iki-yanlı Laplace dönüşümü aynıdır.
3. Bir  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümü  $F(s)$  belirlenirken varlık bölgesi de mutlaka belirlenmelidir.  $F(s)$  yalnız başına tek bir  $f(t)$  belirlemez.

4. Nedensel bir  $f(t)$  nin varlık bölgesi,  $F(s)$  nin en sağdaki kutbunun sağında kalan yarı düzlemdir. Verilen bir  $F(s)$  için (varlık bölgesi belirlenmese bile) dönüşümü  $F(s)$  olan tek bir nedensel  $f(t)$  vardır. Buna göre yalnız nedensel işlevlerle ilgilenirsek varlık bölgesinin belirlenmesi gerekmez. Bu işlev sınıfı için, iki-yanlı Laplace dönüşümü Laplace dönüşümüne eşittir.

5. İki-yanlı Laplace dönüşümü  $F(s)$  ve Fourier dönüşümü  $F(\omega)$  arasında

$$F(s) \Big|_{s=j\omega} = F(\omega)$$

bağıntısının geçerli olması için aşağıdaki koşullar gereklidir.

- a) Genel bir  $f(t)$  için, sanal eksen  $F(s)$  nin varlık bölgesi içinde olmalıdır. (Bu koşul Fourier dönüşümünün var olmasına eşdeğerdir).
  - b) Nedensel bir  $f(t)$  için ((a) da verilen koşulun özel bir biçimi olarak) Laplace dönüşümünün bütün kutupları sol yarı düzlemde olmalıdır.
6. Eğer sanal eksen iki-yanlı Laplace dönüşümünün varlık bölgesinin dışında ise, Fourier dönüşümü yoktur.
7. Sanal eksen varlık bölgesinin sınırlarından birisi ise, iki-yanlı Laplace dönüşümünün  $s = j\omega$  daki değerine sanal eksenindeki her kutup için bir terim eklenerek Fourier dönüşümü elde edilebilir. Eklenecek terimler (D.22) ve (D.27)'de gösterilmiştir.
8. Dürtü tepkisi  $h(t)$  olan zamanla değişmeyen bir doğrusal dizgenin girdisi  $f(t)$  ise, çıktının iki-yanlı Laplace dönüşümü  $H(s)F(s)$  dir. Burada  $H(s)$  ve  $F(s)$  sırasıyla  $h(t)$  ve  $f(t)$  nin iki-yanlı Laplace dönüşümüdür. Çıktının dönüşümü,  $H(s)$  ile  $F(s)$  nin her ikisinin birlikte geçerli olduğu bölgede geçerlidir.



# E K E

## Laplace Dönüşüm Çiftleri ve Özellikleri

### E.1 LAPLACE DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Bu ekte önce (tek-yanlı) Laplace dönüşüm çiftlerinin bazı özellikleri verilecektir. Bu özellikler daha önce elde edilen Fourier dönüşüm çiftlerinin özelliklerine benzer. Çizelge E.1'de verilen bu özellikler doğrudan Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak elde edilebilir.

Çizelge E-1  
Laplace Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri

İşlem	$f(t)$	$F(s)$
Tanım	$f(t)$	$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
t içinde kayma	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-t_0s}F(s)$
Birinci türev	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s)-f(0^+)$
İkinci türev	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$
n'inci türev	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-s^{n-2}f'(0^+)$ $\dots - f^{(n-1)}(0^+)$

Çizelge E-1 (Devam)  
Laplace Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri

İşlem	$f(t)$	$F(s)$
Belirsiz tümlev	$\int f(t) dt$	$\frac{1}{s} [F(s) + f^{-1}(0^+)]$
Belirli tümlev	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
t ile çarpma	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
t ile bölme	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(s) ds$
Ölçekleme	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
s içinde kayma	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Başlangıç değeri	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Son değer	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Katlanma	$f_1(t) * f_2(t)$ $= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
Dönemli f(t)	$f(t) = f(t+nT)$ $n=0,1,2,\dots$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

## E.2 LAPLACE DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ

Ek D'de (tek-yanlı) Laplace dönüşümünün yalnız nedensel işlevler için tanımlandığı belirtilmişti. Bir nedensel  $f(t)$  işlevinin Laplace dönüşümü  $F(s)$  nin varlık bölgesi  $s$ -düzleminin sağ yarısıdır. Buna göre bu işlevin Laplace dönüşümü verilirken, iki-yanlı Laplace dönüşümünde olduğu gibi varlık bölgesinin de belirtilmesi zorunluluğu yoktur. Bu nedenle Laplace dönüşüm çiftleri bire birdir, yani bir nedensel  $f(t)$  verildiğinde tek bir  $F(s)$  ve nedensel bir işlevin dönüşümü  $F(s)$  verildiğinde tek bir nedensel  $f(t)$  bulunur. Uygulamada sık karşılaşılan Laplace dönüşüm çiftleri Çizelge E.2'de verilmiştir.

Çizelge E.2  
Laplace Dönüşüm Çiftleri

No	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	1
3	$\frac{1}{s^n} \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
4	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
5	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$te^{at}$
6	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n=1,2,\dots$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
7	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
8	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)$
9	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
10	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
11	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
12	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
13	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh at$
14	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
15	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
16	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3} (at - \sin at)$
17	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$

Çizelge E.2(Devam)  
Laplace Dönüşüm Çiftleri

No	F(s)	f(t), t ≥ 0
18	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$
19	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$
20	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	t cos at
21	$\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$
22	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
23	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
24	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2\sqrt{t/\pi}$
25	$\frac{1}{(s-a)\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$
26	$\frac{1}{\sqrt{s} + \sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \sqrt{a} e^{at} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{at})]$
27	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \sqrt{a})}$	$e^{at} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{at})]$
28	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad a > 0$
29	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$	$1 - \operatorname{erf}(a/\sqrt{4t}) \quad a \geq 0$
30	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} \quad a \geq 0$

# E K F

## Katlanma Üzerine Çizimsel Yöntemler

### F.1 TANIM

Doğrusal dizgelerin çözümlenmesinde ve diğer fiziksel bilimlerde sık sık karşılaşılan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad (F.1)$$

tümlevi, katlanma tümlevi diye adlandırılır. Kısa yazıda bu tümlev  $f_1(t) * f_2(t)$  ile gösterilir. Basit bir değişken değiştirme yoluyla, yukarıdaki katlanma tümlevi şu biçimde de ifade edilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) dt \quad (F.2)$$

Her iki ifadede  $\tau$  tümlev değişkenidir, tümlev alındıktan sonra elde edilen sonuç  $t$  nin bir işlevidir.

### F.2 BAZI KATLANMA BAĞINTILARI

Katlanma tümlevi aşağıda verilen bağıntıları sağlar. Bu bağıntılar doğrudan tanımdan elde edilebilir.

## 1. Doğrusallık

$$[af_1(t)] * f_2(t) = a [f_1(t) * f_2(t)]$$

$$f_1(t) * [af_2(t)] = a [f_1(t) * f_2(t)] \quad (F.3)$$

## 2. Yer Değiştirirlik

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (F.4)$$

## 3. Dağıtılabilirlik

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] + [f_1(t) * f_3(t)] \quad (F.5)$$

## 4. Birleştirilebilirlik

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \quad (F.6)$$

## F.3 KATLANMANIN ÇİZİMSSEL YOLLARLA AÇIKLANMASI

Katlanma tümlevinin basit bir tanımı olmasına rağmen, uygulamada bu tümlevin hesaplanması genellikle basit bir iş olmaz. Tümlevi alınan işlevlerden birisinin değişkeni  $\tau$  diğeri ise  $t-\tau$  dir. Bu nedenle tümlev sınırlarına dikkat edilmelidir. Eğer işlevlerden biri ya da her ikisi farklı zaman bölgelerinde farklı tanımlanmışsa tümlev sınırlarının önemi artar. Bu güçlük aşağıdaki iki örnekte anlatılmaya çalışılacaktır.

Örnek F.1. Aşağıda tanımlanan  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  için  $f_1(t) * f_2(t)$  yi hesaplayalım.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T, T] \\ 0 & \text{Diğer yerler} \end{cases}$$

$$f_2(t) = e^{-a|t|}$$

Tanımını kullanarak  $f_1(t) * f_2(t)$  yazılabilir.

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-T}^T e^{-a|t-\tau|} d\tau \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \int_{-T}^T e^{-a(t-\tau)} d\tau & t \geq T \\ \int_{-T}^t e^{-a(t-\tau)} d\tau + \int_t^T e^{a(t-\tau)} d\tau & -T < t < T \\ \int_{-T}^T e^{a(t-\tau)} d\tau & t < -T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-at} (e^{aT} - e^{-aT}) & t \geq T \\ \frac{1}{a} [2 - e^{-aT} (e^{at} + e^{-at})] & -T < t < T \\ \frac{1}{a} e^{at} (e^{aT} - e^{-aT}) & t < -T \end{cases}$$

Örnek F.2. Aşağıda tanımlanan  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  için katlama türevi  $f_1(t) * f_2(t)$  yi hesaplayalım.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{Diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 3] \\ 0 & \text{Diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-1}^1 f_2(t-\tau) d\tau \begin{cases} -1 < \tau < 1 \\ 0 < t-\tau < 3 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^1 f_2(t-\tau) d\tau \begin{cases} -1 < \tau < 1 \\ t-3 < \tau < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \int_{-1}^t (t-\tau) d\tau & -1 < t < 1 \\ \int_{-1}^1 (t-\tau) d\tau & 1 < t < 2 \\ \int_{t-3}^1 (t-\tau) d\tau & 2 < t < 4 \\ 0 & 4 < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{t} (t+1)^2 & -1 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ -\frac{1}{2} (t-4)(t+2) & 2 < t < 4 \\ 0 & \text{Diğer yerlerde} \end{cases}$$

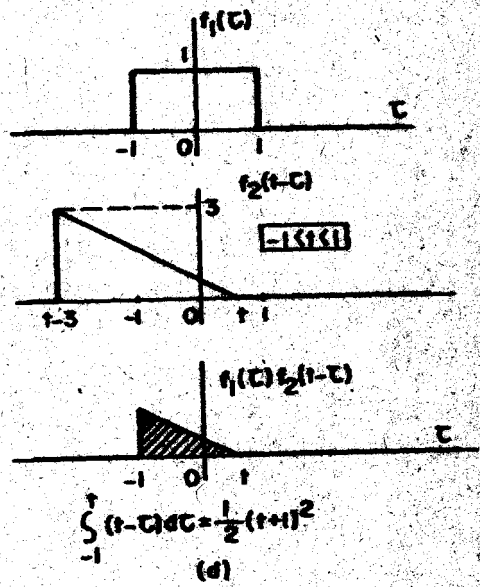
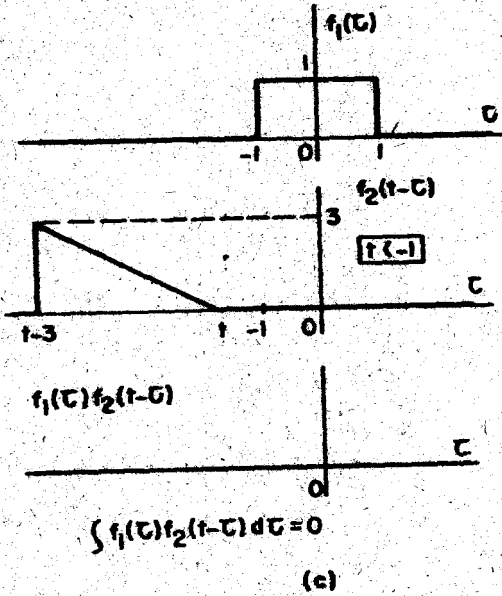
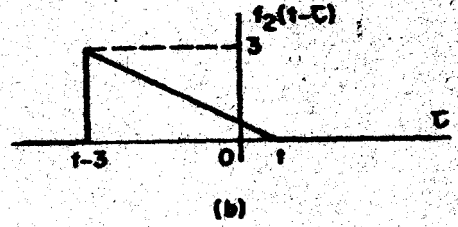
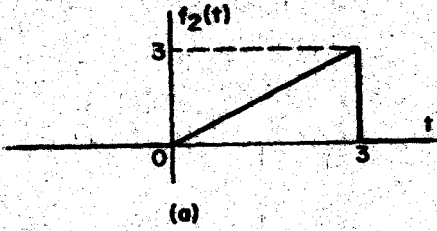
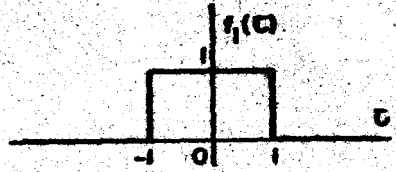
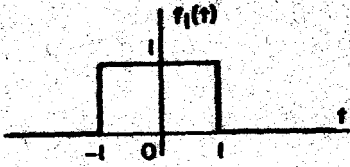
Yukarıdaki örneklerden anlaşılacağı gibi katlanma işlemi, kavram olarak çok basit olmasına karşın, hesaplaması oldukça zor bir işlem olabilir. Bu işlemde yanlış yapma olasılığı yüksektir. Katlanma işlemine çizimsel bir yolla yaklaşılsa, yapılan iş göz ile de izlenir. Bu yolla, gerçel zaman doğrusu üzerinde değişik bölgelerde sonuçlar izlenebilir ve yanlış yapma olasılığı azalır.

Şimdi  $f_1(t) * f_2(t)$  katlanma işlemi çizimsel yolla yapalım. Örnek olarak Örnek F.2'de verilen  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  düşünülecektir.  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  işlevleri Şekil F.1(a)'da gösterilmiştir. Katlanmanın  $t$  anındaki değeri, (F.1)'deki tanımdan da görülebileceği gibi,  $f_1(t) f_2(t-\tau)$  nın  $\tau$  üzerindeki tümlevidir. Bir başka deyişle,  $f_1(t)$  ile  $f_2(t-\tau)$  nın çarpımının  $\tau$  ya karşı çiziminde, eğrinin altında kalan alandır.  $f_1(t)$  işlevi  $f_1(\cdot)$  işlevinin  $\tau$  ya karşı çizilmiştir. Şekil F.1(b)'ye bakınız.  $f_2(t-\tau)$  işlevi ise  $f_2(\cdot)$  nin düşey eksene göre katlanıp, başlangıç noktasının  $t$  ye kaydırılmasıyla ve çizimin  $\tau$  ya karşı yapılmasıyla elde edilir (Şekil F.1(b)'ye bakınız). Daha sonra bu iki işlevin çarpımı bulunur ve çarpımın altında kalan alan katlanmanın  $t$  degeridir. Değişik  $t$  değerlerinde katlanma değeri, katlanmış  $f_2(\cdot)$  işlevinin başlangıç noktasının istenilen değere kaydırılmasıyla elde edilir. Bu yolla,  $t$  değeri  $-\infty$  dan  $\infty$  a kadar düzenli bir biçimde değiştirilir ve bütün  $t$  değerleri için katlanma tümlevi hesaplanır.  $t$  nin  $-\infty$  dan  $\infty$  a kadar değiştirilme işlemi, katlanmış  $f_2(\cdot)$  işlevini gerçel eksen üzerinde  $-\infty$  dan  $\infty$  a kadar kaydırmak olarak düşünebiliriz (Şekil F.1(c), (d), (e), (f) ve (g)'de çizimsel katlanma gösterilmiştir). Her noktada çarpım bulunur ve altındaki alan hesaplanarak, bu  $t$  değeri için katlanma değeri elde edilir. (Değişik bölgelerde elde edilen katlanma sonuçları bir araya getirilerek,  $f_1(t) * f_2(t)$  nın katlanmasının sonucu Şekil F.1(h)'de çizilmiştir).

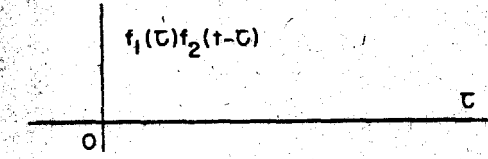
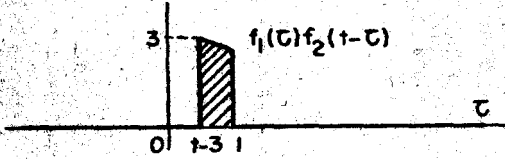
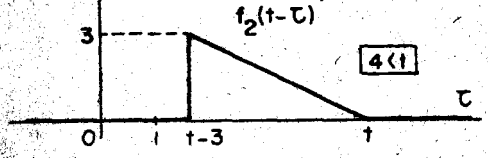
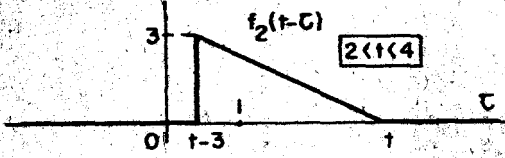
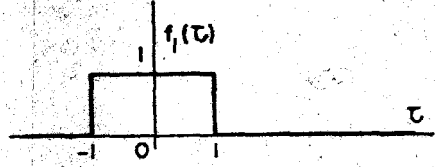
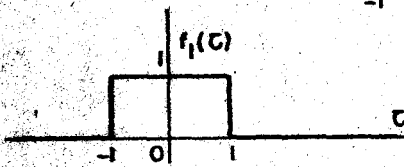
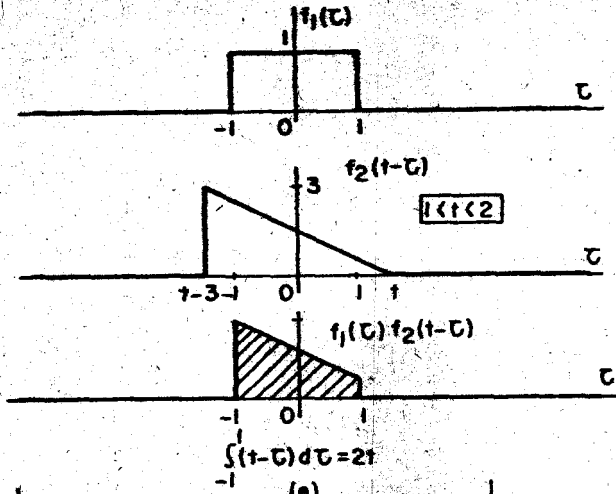
Çizimsel katlanma işlemi şu biçimde özetlenebilir.

1.  $f_1(\tau)$  yı çiziniz.
2.  $f_2(\tau)$  yı düşey eksene göre katlayarak  $f_2(-\tau)$  yı elde ediniz.
3. Katlanmış işlevi sert bir yapı olarak düşünüp, bu işlevi  $\tau$  eksenini boyunca  $t$  kadar kaydırarak  $f_2(t-\tau)$  yi elde ediniz.
4.  $f_1(\tau)$  ile  $f_2(t-\tau)$  yi çarpınız ve  $\tau$  üzerinde çarpımın tümlevini alarak katlanmanın  $t$  degerini bulunuz.
5.  $f_2(\cdot)$  nin yapısını değişik miktarlarda kaydırarak değişik  $t$  değerleri için bu yöntemi tekrarlayınız. Artı  $t$  değerlerinde  $f_1(t) * f_2(t)$  yi bulmak için  $f_2(-\tau)$  yapısı artı  $\tau$  eksenini boyunca kaydırılır.





Şekil F.1 Katlanmanın çizimsel yollarla açıklanması

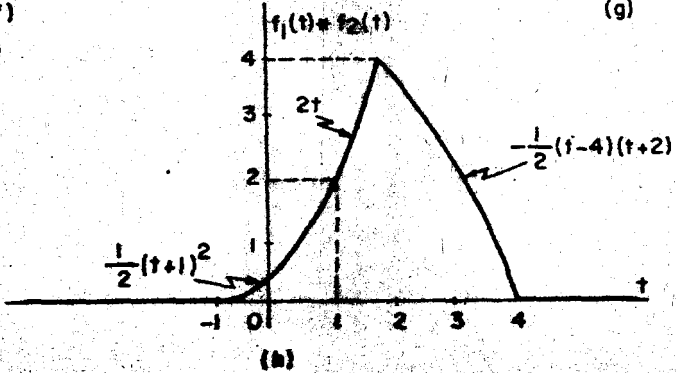


$$\int_{t-3}^1 (t-\tau) d\tau = -\frac{1}{2}(t-4)(t-2)$$

(f)

$$\int f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = 0$$

(g)



Şekil F.1 (devam) TMMOB ELEKTRİK MÜHENDİSLERİ ODASI Katlanmanın çizimsel yollarla açıklaması

Eksi  $t$  değerleri için ise  $f_2(-\tau)$  yapısı eksi  $\tau$  eksenini boyunca kaydırılır.

Daha önce katlanma işleminin yer değiştirirlik özelliği verilmişti. (F.2)'den görülebileceği gibi,  $f_1(t) * f_2(t)$  katlanma tümlevi  $f_2(\tau)$  değişmez tutulup  $f_1(t-\tau)$  işlevinin  $\tau$  eksenini boyunca kaydırılmasıyla da hesaplanabilir. Her iki yol da aynı sonucu verir.

#### F.4 BİR İŞLEVİ DÜRTÜ İŞLEVİ İLE KATLAMA

Bir işlevle bir birim dürtü işlevi  $\delta(t)$  nin katlanması işlevin kendisini verir.

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (F.7)$$

Bu sonuç dürtü işlevinin örnekleme özelliğinden elde edilebilir. Eğer dürtü işlevi  $t_0$  a yerleştirilmiş ve şiddeti  $k$  ise şu sonuç elde edilir.

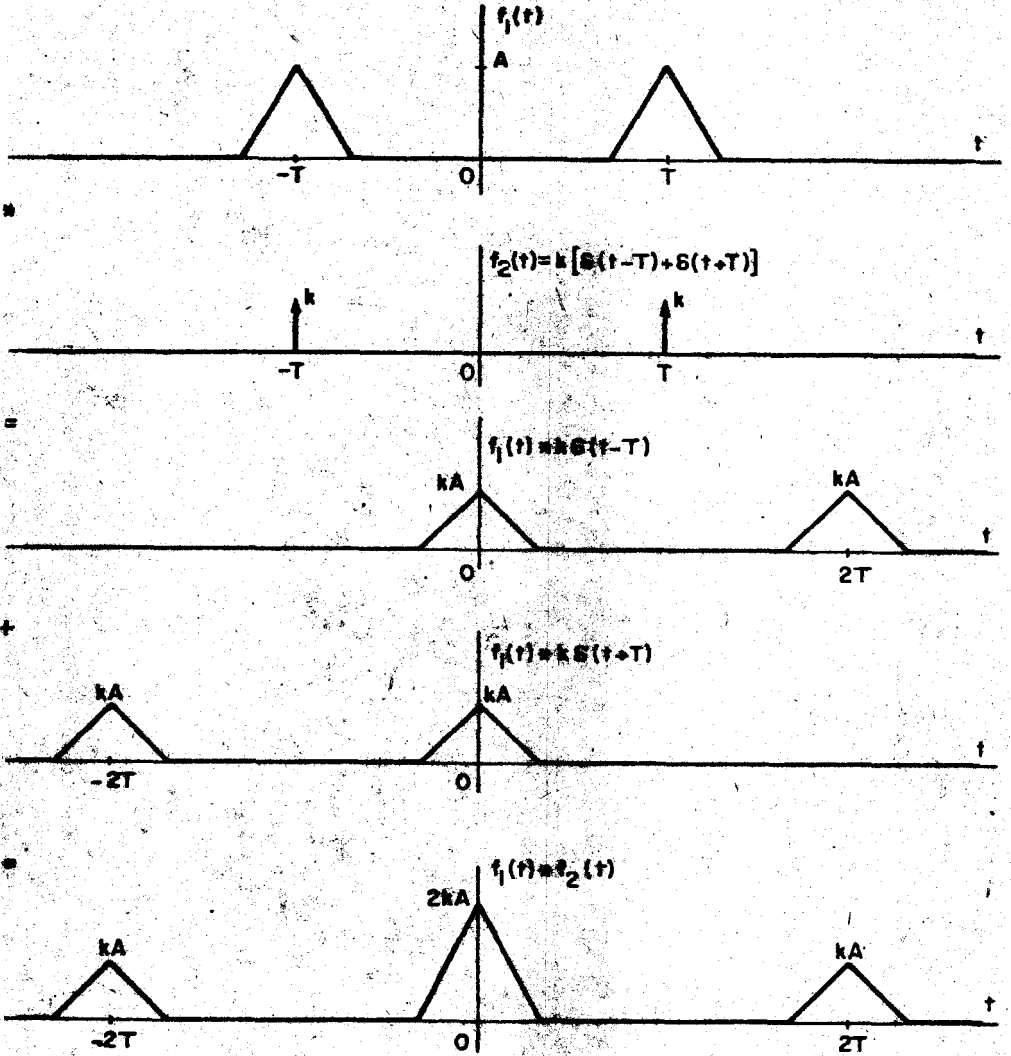
$$\begin{aligned} f(t) * k\delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(\tau-t_0) f(t-\tau) d\tau \\ &= kf(t-t_0) \end{aligned} \quad (F.8)$$

$f(t)$  ile  $k\delta(t-t_0)$  katlanırsa  $f(t)$  işlevi  $t=t_0$  a kaydırılır ve genliği  $k$  ile çarpılır; yani  $kf(t-t_0)$  elde edilir.

Bir  $f(t)$  işlevi, bir dizi (sonlu ya da sonsuz sayıda) dürtü işlevi ile katlanırsa,

$$\begin{aligned} f(t) * \left[ \sum_i k_i \delta(t-t_i) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i k_i \delta(\tau-t_i) f(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_i k_i f(t-t_i) \end{aligned} \quad (F.9)$$

bulunur ve her bir dürtü işlevinin  $f(t)$  ile katlanmasından elde edilen sonuçların toplanmasına eşittir. Bir dürtü işlevi ile ya da bir dizi dürtü işlevi ile katlama, iletişim dizgelerinin çözümlenmesinde çok yaygın kullanılır. Böyle bir katlanma Şekil F.2'de verilmiştir.



Şekil F.2  $f_1(t)$  ile  $f_2(t) = k[\delta(t-T) + \delta(t+T)]$  nin katlanması

# E K G

## Yararlı Matematiksel Bağıntılar

### G.1 TRIGONOMETRİK ÖZDESLİKLER

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

$$a + jb = r(\cos\theta + j\sin\theta) ; r = \sqrt{a^2 + b^2} , \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin n\theta = 2\sin(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-2)\theta$$

$$\cos n\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta - \cos(n-2)\theta$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \begin{array}{l} +, \text{ eger } \frac{\theta}{2} \text{ 1. ya da 2. dördünde ise} \\ -, \text{ değilse} \end{array}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad \begin{array}{l} +, \text{ eger } \frac{\theta}{2} \text{ 1. ya da 4. dördünde ise} \\ -, \text{ değilse} \end{array}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \quad \begin{array}{l} +, \text{ eger } \frac{\theta}{2} \text{ 1. ya da 3. dördünde ise} \\ -, \text{ değilse} \end{array}$$

$$\cos^2\theta = \cos 2\theta + \sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

$$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \cos a \sin b$$

$$\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$$

$$\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left[ \theta + \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \right] \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left[ \theta + \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right] \end{aligned}$$

## G.2 SERİ AÇINIMLARI

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{1}{2!} (x \ln a)^2 + \frac{1}{3!} (x \ln a)^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{Sa}(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

## G.3 HİPERBOLİK İŞLEMLER

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sin x = -j \sinh(jx)$$

$$\cos x = \cosh(jx)$$

$$\tan x = -j \tanh(jx)$$

## G.4 SERİ TOPLAMLARI

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=1}^M n = \frac{M(M+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^M n^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^M n^3 = \frac{M^2(M+1)^2}{4}$$

$$\sum_{n=0}^M x^n = \frac{x^{M+1} - 1}{x - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; |x| < 1$$

## G.5 BELİRLİ TÖMLEVİN TÖREVİ

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{a(t)}^{b(t)} k(t, \tau) d\tau \right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} k(t, \tau) d\tau + k(t, b(t)) \frac{db(t)}{dt} - k(t, a(t)) \frac{da(t)}{dt}$$

## G.6 BAZI BELİRSİZ TÖMLEVLER

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$



$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax)$$

$$\int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax)$$

$$\int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$$

$$\int \csc ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax$$

$$\int \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax$$

$$\int \tan^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$$

$$\int \cot^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$$

$$\int \sin^3 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax$$

$$\int \cos^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax$$

$$\int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx, \quad n \text{ artı tamsayı}$$

$$\int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx, \quad n \text{ artı tamsayı}$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax \quad n \neq -1$$

$$\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax \quad n \neq -1$$

$$\int \tan ax \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \sec ax$$

$$\int \cot ax \csc ax \, dx = -\frac{1}{a} \csc ax$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax$$

$$\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx, \, n \text{ artı tamsayı}$$

$$\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax$$

$$\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax)$$

$$\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\sinh ax)$$

$$\int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh ax)$$

$$\int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\tanh ax)$$

$$\int \operatorname{sech} ax \tanh ax \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech} ax$$

$$\int \operatorname{csch} ax \coth ax \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch} ax$$

$$\int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax$$

$$\int \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \coth ax$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx, \quad n \text{ artıı tanıması}$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} bx (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + n^2 b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx$$

$$\int e^{ax} \sin^n bx dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} bx (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + n^2 b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx dx$$

$$\int \ln(ax) dx = x \ln(ax) - x$$

$$\int x \ln(ax) dx = \frac{x^2}{2} \ln(ax) - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^n \ln(ax) dx = x^{n+1} \left[ \frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx = x - a \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{x-a}{x+a} \right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \left( \frac{x}{a} \right), \quad x > a$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a-x}{a+x} \right) = -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right), \quad x < a$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{|a|}, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) = \sinh^{-1} \frac{x}{a}, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) = \cosh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right), \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}} dx = \cos^{-1} \left( \frac{a-x}{a} \right)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{-1}{a} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a})$$

$$\int \sqrt{x^2 \mp a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 \mp a^2} \mp a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \mp a^2})]$$

$$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln(ax+b)$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)} dx = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)^2} dx = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) & b^2 < 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) & b^2 > 4ac \\ \frac{-2}{2ax+b} & b^2 = 4ac \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} dx = \frac{2ax+b}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} + \frac{2(2n-1)a}{n(4ac-b^2)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} dx = \frac{-(2c+bx)}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b(2n-1)}{n(4ac-b^2)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

### G.7 BAZI BELİRLİ TÖMLEVLER

$$\int_0^{\infty} \frac{a}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad n > n > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! , n \text{ artı tamsayı}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & a^2 < 1 \\ \pi/4 & a^2 = 1 \\ 0 & a^2 > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} \sin bx dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \sin bx dx = \frac{2b(3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^3} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos bx dx = \frac{2a(a^2 - 3b^2)}{(a^2 + b^2)^3} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} ; \quad a > 0, n \text{ artı tamsayı}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

### G.8 BİRİNCİ TOR BESSEL İŞLEVLERİ İLE İLGİLİ BAĞINTILAR

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \theta - n\theta)} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\beta \sin \theta - n\theta) d\theta$$

$$J_n(\beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta^2/4)^k}{k! (n+k)!}$$

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

$$\sin(\beta \sin \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin(2k+1)\theta$$

$$\cos(\beta \sin \theta) = J_0(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos 2k\theta$$

$$\sin(\beta \cos \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta) \cos(2k+1)\theta$$

$$\cos(\beta \cos \theta) = J_0(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta) \cos 2k\theta$$

## G.9 BİRİNCİ TÜR BESSEL İŞLEMLERİ ÇİZELGESİ

$\beta$	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$	$J_7$	$J_8$	$J_9$	$J_{10}$
0	1.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.5	0.94	0.24	0.03	-	-	-	-	-	-	-	-
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02	-	-	-	-	-	-	-
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01	-	-	-	-	-	-
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	0.01	-	-	-	-	-
2.5	-0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02	-	-	-	-	-
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01	-	-	-	-
3.5	-0.38	0.14	0.46	0.39	0.21	0.08	0.03	0.01	-	-	-
4.0	-0.40	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02	-	-	-
4.5	-0.32	-0.23	0.22	0.42	0.35	0.19	0.08	0.03	0.01	-	-
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02	0.01	-
5.5	-0.01	-0.34	-0.12	0.25	0.40	0.32	0.19	0.09	0.03	0.01	-
6.0	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02	0.01
6.5	0.26	-0.15	-0.31	-0.03	0.27	0.37	0.30	0.18	0.09	0.04	0.01
7.0	0.30	0	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02
7.5	0.27	0.14	-0.23	-0.26	0.02	0.28	0.35	0.28	0.17	0.09	0.04
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.11	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06
8.5	0.04	0.27	0.02	-0.26	-0.21	0.07	0.29	0.34	0.27	0.17	0.09
9.0	-0.09	0.25	0.14	-0.18	-0.27	-0.06	0.20	0.33	0.31	0.21	0.12
9.5	-0.19	0.16	0.23	-0.06	-0.27	-0.16	0.10	0.29	0.32	0.26	0.16
10.0	-0.25	0.04	0.25	0.06	-0.22	-0.23	-0.01	0.22	0.32	0.29	0.21

## G.10 YANILGI İŞLEMLERİ ÇİZELGESİ

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$$

$x$	$\operatorname{erf} x$	$x$	$\operatorname{erf} x$
0	0	1.0	0.8427
0.1	0.1125	1.2	0.9103
0.2	0.2227	1.4	0.9523
0.3	0.3286	1.6	0.9763
0.4	0.4284	1.8	0.9891
0.5	0.5205	2.0	0.9953
0.6	0.6039	2.2	0.9981
0.7	0.6778	2.4	0.9993
0.8	0.7421	2.6	0.9998
0.9	0.7969	2.8	0.9999*

# KAYNAKÇA

1. Schwartz, M.: *Information Transmission Modulation and Noise*, McGraw Hill, New York, 1965.
2. Schwartz, M.: *Information Transmission Modulation and Noise*, McGraw Hill, New York, 1970.
3. Lathi, B.P.: *Communication Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
4. Carlson, A.B.: *Communication Systems*, McGraw Hill, New York, 1975.
5. Taub, H., Schilling, D.L.: *Principles of Communication Systems*, McGraw Hill, New York, 1971.
6. Papoulis, A.: *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw Hill, New York, 1962.
7. Roden, M.S.: *Introduction to Communication Theory*, Pergamon Press, New York, 1972.
8. Clarke, K.K., Hess, D.T.: *Communication Circuits, Analysis and Design*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1971.
9. Schwartz, M., Bennett, W.R., Stein, S.: *Communication Systems and Techniques*, McGraw Hill, New York, 1966.
10. Millman, J., Taub, H.: *Pulse and Digital Circuits*, McGraw Hill, New York, 1956.
11. Tütüncüoğlu, E.: *Televizyon Tekniği, İnkılap ve Aka Kitabevleri*, İstanbul, 1977.
12. Tütüncüoğlu, E.: *Televizyon Alıcı Antenleri, Anten Kuvvetlendiricileri ve Ortak Anten Tesisleri, İnkılap ve Aka Kitabevleri*, İstanbul, 1975.



# DİZİN

- Acı modülasyonu (Angle modulation), 198
- Akortlu devre (Tuned circuit), bkz. RLC devresi
- Alçak geçiren süzgeç (Low pass filter), 62  
düşüncel  $\sim$  (ideal  $\sim$ ), 71
- Alçak geçiren bantlı sınırlı işaret (Low pass band limited signal), bkz.  
Bantlı sınırlı işaret
- Alt yan bant (Lower side band), 113
- Altaşıyıcı (Subcarrier), 267,306
- Ena frekans (Fundamental frequency), 16
- Ansal frekans (Instantaneous frequency), 198
- Ansal örnekleme (Instantaneous sampling), 336. Ayrıca bkz. Düz tepeli  
örnekleme
- Arama gürültüsü (Idling noise), 354
- Armstrong modülatörü (Armstrong modulator), 229,280
- Artık yan bant (AYB) işareti [Vestigial side band (VSB) signal]  
büyük taşıyıcı  $\sim$  ( $\sim$  with a large carrier), 182  
demodülasyonu (demodulation of  $\sim$ ), 178,182  
eşzamanlı  $\sim$  (synchronous  $\sim$ ), 178  
büyük taşıyıcı  $\sim$  ( $\sim$  with a large carrier), 182,299  
diğer GM türleri ile karşılaştırılması (comparison  $\sim$  with other  
forms of AM), 183
- frekans görünüşü (frequency spectrum of  $\sim$ ), 179
- süzgeci (filter), 176
- TV de görüntü işareti olarak  $\sim$  ( $\sim$  as a video signal in TV), 298
- üretimi (modülasyonu) [generation (modulation) of  $\sim$ ], 176
- zaman bölgesi gösterimi (time domain representation of  $\sim$ ), 180
- Artık yan bant (AYB) modülasyonu [Vestigial side band (VSB) modulation], 176

- Aşırı modülasyon (Overmodulation), 109  
 AYB (Artık yan bant), (VSB:Vestigal side band),  
 Ayırtaç (Discriminator), bkz. Frekans ayırtacı
- Bağdaşabilirlik (Compatibility), 267,305  
   ters  $\sim$  (reverse $\sim$ ), 308
- Bant geçiren süzgeç (Band pass filter), 62  
   düşüncel  $\sim$  (ideal  $\sim$ ), 72
- Bantgeçiren bantsınırlı işaret (Bandpass bandlimited signal), 330
- Bantgenişliği (Bandwidth), 10,11,32,75  
   uygulamada FM  $\sim$  (practical FM  $\sim$ ), 10,11  
   uygulamada GM  $\sim$  (practical AM  $\sim$ ), 10,11
- Bantsınırlı işaret (Bandlimited signal), 315
- Bant söndüren süzgeç (Band stop filter), 62
- Basamak boyu (Step size), 334
- Belirli tümlevin türevi (Derivative of definite integral), 434
- Belirsiz tümlevler çizelgesi (Table of indefinite integrals), 434
- Bessel işlevleri (birinci tür) [Bessel functions(first kind)], 209,213,214,  
   215,441
- Bileşik modülasyon (Compound modulation), 337
- Binari (Binary), bkz. İkili
- Birim basamak işlevi (Unit step function), 34,395  
   Fourier dönüşümü (Fourier transform of), 34
- Bozulmasız iletim (Distortionless transmission), 69
- Büyükklük görünüşü (Magnitude spectrum), 22
- Carlson kuralı (Carlson's rule), 215
- Cosinüs işlevinin Fourier dönüşümü (Fourier transform of cosine function),35
- Çapraz kırpmı (Diagonal clipping), 141
- Çapraz konuşum (Cross-talk), 351,362
- Çift işlev (Even function), 19  
   Fourier dönüşümü (Fourier transform of  $\sim$ ), 45  
   Fourier serisi açılımı (Fourier series expansion of  $\sim$ ), 19
- Çift yan bant (ÇYB) işareti [Double side band (DSB) signal]  
   demodülasyonu (demodulation), 148  
    $\sim$ nde evre ve frekans kaymasının etkileri (Effect of frequency  
     and phase deviation in  $\sim$ ), 184  
   diğer GM türleri ile karşılaştırma (Comparison of  $\sim$  with other  
     forms of AM), 183  
   frekans görünüşü (frequency spectrum), 144  
   güç görüne yoğunluğu (power spectral density), 84  
   üretimi (modülasyonu) [ generation (modulation)], 145  
     örneksel çarpıcı (analog multiplier), 145  
     kıyıcı modülatör (chopper modulator), 145  
     kare kuralı modülatörü (square-law modulator), 145  
     dengeli modülatör (balanced modulator), 145,146  
   zaman bölgesi gösterimi (time domain representation), 143,144

Çift yan bant (ÇYB) modülasyonu [Double side band (DSB) modulation], 107, 143  
 Çizgi görünüşü (Line spectrum), 23  
 Çözünsel işaret (Analytical signal), 166  
 ÇYB (Çift yan bant), (DSB: Double side band)

Dalgacık (Ripple), 140

Darbant FM (Narrowband FM), 201, 202, 205, 273

Değişmez A işlevi (Constant A function), 33

~nin Fourier dönüşümü (Fourier transform of ~), 33

Değiştirgeç (Transducer), 2

Delta işlevi (Delta function), bkz. Dürtü işlevi

Delta modülasyonu (DM) [Delta modulation (DM)], 353

uyarlamalı ~ (adaptive ~), 356

Delta modülasyonu (DM) işareti [Delta modulation (DM) signal]  
 arama (hunting), 354

gürültüsü (idling noise), 354

başlama (start-up), 354

eğim sınırlanması (slope-overload), 354

Demodülasyon (Demodulation), 3, 133, 148, 172, 182, 249, 313

Demodülatör (Demodulator), 4, 133, 148, 172, 182, 249, 313

Dengeleme süzgeci (Equilizing filter), 327

Dengeli FM demodülatörü (Balanced FM demodulator), 254

Dengeli modülatör (Balanced modulator), 145, 146, 159

Dikdörtgen vurum (Rectangular pulse), 31

Fourier dönüşümü (Fourier transform of ~), 31

Dilimleme devresi (Slicing circuit), 338

Dirichlet koşulları (Dirichlet conditions), 16

Dizge (System), 51. Ayrıca bkz. Doğrusal dizge

Doğal örnekleme (Natural sampling), 334, 335. Ayrıca bkz. Örnekleme teoremi

Doğal örneklemeli VCM (PAM with natural sampling), 334, 335

Doğrusal dizge (Linear system), 51

fiziksel olarak gerçekleştirilebilir ~ (physically realizable ~),  
 bkz. Nedensel doğrusal dizge

nedensel ~ (causal ~), 73

zamanla değişmez ~ (time invariant ~), 53, 56

~ de yükseliş süresi (rise time in ~), 76

~nin dürtü tepkisi (impulse response of ~), 54

~nin karmaşık geçiş işlevi (complex transfer function of ~), 59

Dönemli işlevler (Periodic functions), 15

Fourier dönüşümü (Fourier transform of ~), 35

Fourier serisi açılımı (Fourier series expansion of ~), 15, 19

güç görünüşü yoğunluğu (power spectral density of ~), 86

Dönemli vurum dizisi (Periodic pulse train), 16, 17

Fourier dönüşümü (Fourier transform of ~), 37

karmaşık Fourier serisi açılımı (complex Fourier series expansion  
 of ~), 23

trigonometrik Fourier serisi açılımı (trigonometric Fourier series  
 expansion of ~), 16

Durum (State), 52

Dürtü işlevi (Impulse function), 25, 31, 390

Fourier dönüşümü (Fourier transform of ~), 31

- kaydırma özelliği (shifting property), bkz. Örneklemme Özelliği  
 limiti  $\sim$  olan işlevler (functions whose limits are  $\sim$ ), 392  
 Örneklemme Özelliği (sampling property), 391
- Dürtü tepkisi (Impulse response), 54  
 Dürtü dizisi (Impulse train), 25,37  
 Fourier dönüşümü (Fourier transform of  $\sim$ ), 37  
 Fourier serisi açılımı (Fourier series expansion of  $\sim$ ), 25
- Düşüncel süzgeçler (Ideal filters), 71  
 alçak geçiren  $\sim$  (low pass  $\sim$ ), 71  
 yükseliş süresi (rise time), 77  
 bant geçiren  $\sim$  (band pass  $\sim$ ), 72  
 yüksek geçiren  $\sim$  (high pass  $\sim$ ), 72
- Düzgün dağılım (Uniform distribution), 346  
 Düz-tepeli Örneklemme (Flat-top sampling), 325
- Eğim demodülatörü (Slope demodulator), 254
- Elektromanyetik görüme (Electromagnetic spectrum), 7  
 EKA (Evre kaydırmalı anahtarlama), (PSK: Phase shift keying)  
 EM (Evre modülasyonu), (PM: Phase Modulation),  
 Erke (Energy), 79  
 Erke görüme yoğunluğu (Energy spectral density), 79  
 Eşvreli olmayan sezme (Noncoherent detection), 369  
 yanılğı olasılığı (probability of error in  $\sim$ ), 373  
 Eşvreli sezme (Coherent detection), 369  
 yanılğı olasılığı (probability of error in  $\sim$ ), 373  
 Eşgörüngelme yanılğısı (Aliasing error), 320  
 Eşgörüngeli işaretler (Aliases), 320  
 Eşik etkisi (Threshold effect), 271  
 Eşzamanlı demodülasyon (Synchronous demodulation), 133,148,163,178  
 $\sim$  da evre ve frekans kaymasının etkileri (Effect of phase and  
 frequency deviation in  $\sim$ ), 184  
 (Ayrıca bkz. Eşvreli sezme)
- Eşzamanlı olmayan demodülasyon (Nonsynchronous demodulation), 139,140,145  
 175,182  
 (Ayrıca bkz. Eşvreli olmayan sezme),
- Evre görüngesi (Phase spectrum), 22  
 Evre kaydırmalı anahtarlama (EKA) [Phase shift keying (PSK)], 3,9,367  
 sezilmesi (detection), 369  
 türevsel  $\sim$  (TEKA) [differential  $\sim$  (DPSK)], 371  
 yanılğı olasılığı (probability of error in  $\sim$ ), 373  
 Evre kilitleyici döngü (Phase locked-loop), 265  
 Evre modülasyonu (EM) [Phase modulation (PM)], 8,106,198  
 evre modülatörü (phase modulator), 207  
 evre sapması (phase deviation), 229  
 işaretin frekans görüngesi (frequency spectrum of  $\sim$  signal), 229  
 Evre sapması (Phase deviation), 229  
 Evreoku (Phasor), 120,205  
 Evrik Fourier dönüşümü (Inverse Fourier transform), 29,409  
 Evrik Laplace dönüşümü (Inverse Laplace transform), 409

Fiziksel olarak gerçekleştirilebilir dizge (Physically realizable system), bkz. Nadensel dizge

- FKA (Frekans kaydırmalı anahtarlama), (FKS:Frequency shift keying),  
 FM (Frekans modülasyonu), (FM:Frequency modulation)  
 Foster-Seeley ayırtacı (Foster-Seeley discriminator), 255  
 Fourier benzeri açınım (Fourier like series expansion), 246,248,253  
 Fourier dönüşümü (Fourier transform), 27  
   çiftleri (pairs), 395,396  
   evrik  $\sim$  (inverse  $\sim$ ), 29,409  
   teoremleri (theorems), 46,398  
   varlığı (existence of), 32,414  
 Fourier serisi açınım (Fourier series expansion),  
   karmaşık (complex), 20  
   katsayıları (coefficients), 15,20  
   özellikleri (properties of  $\sim$ ), 403  
   trigonometrik (trigonometric), 15  
 Frekans (Frequency), 198  
   ansal  $\sim$  (instantaneous  $\sim$ ), 198  
 Frekans ayırtacı (Frequency discriminator), 249,251  
 Frekans bölmeli çoklama (Frequency division multiplexing), 4,106,284  
 Frekans çarpımı (Frequency multiplication), 230,231,232  
 Frekans çevrimi (Frequency conversion), 156  
 Frekans görüngesi (Frequency spectrum), 13,22,30  
 Frekans kaydırmalı anahtarlama (FKA), [Frequency shift keying (FSK)],  
   9,364,365,369  
   sezilmesi (detection), 368  
   yanılgı olasılığı (probability of error), 373  
 Frekans modülasyonu (FM) [Frequency modulation (FM)], 197  
 Frekans modülasyonu (FM) işareti [Frequency modulated (FM) signal],  
   bantgenişliği (bandwidth), 9,214  
   darbant  $\sim$  (narrowband  $\sim$ ), 201,202  
   demodülatörleri (demodulators),  
     akortlu devre  $\sim$  (tuned circuit  $\sim$ ), 253  
     dengeli  $\sim$  (balanced  $\sim$ ), 254  
     eğim demodülatörü (slope demodulator), 254  
     Foster-Seeley ayırtacı (Foster-Seeley discriminator), 255  
     frekans ayırtacı (frequency discriminator), 249,251  
     oran sezici (ratio detector), 258  
     RL demodülatörü (RL demodulator), 254  
     sıfır-geçiş sezicileri (zero-crossing detectors), 265  
     vurum-sayıcı  $\sim$  (pulse count  $\sim$ ), 264  
     zaman gecikmeli  $\sim$  (time delay  $\sim$ ), 255  
    $\sim$  inde GM demodülatörleri (AM demodulators in  $\sim$ ), 260  
    $\sim$  inde keskin sınırlandırıcı (hard-limiters in  $\sim$ ), 251  
    $\sim$  inde sınırlandırıcı (limiter in  $\sim$ ), 250  
    $\sim$  inde tam türev alma (exact differentiation in  $\sim$ ), 252  
    $\sim$  inde türev alıcılar (differentiators in  $\sim$ ), 249  
 Periyodik ve sıfır ortalamalı bir  $f(t)$  ile modüle edilmiş  $\sim$  ( $\sim$  by  
   a periodic and zero-mean  $f(t)$ ), 223

- $\sim$  inde eşik etkisi (threshold effect in  $\sim$ ), 271  
 Fourier serisi gösterimi (Fourier series representation), 209  
 frekans görüngesi (frequency spectrum of  $\sim$ ), 204,208,212,219,220  
 genişbant  $\sim$  (wideband  $\sim$ ), 201,207  
 gücü (power of  $\sim$ ), 226  
 iki sinüzoidal toplam ile modüle edilmiş  $\sim$  ( $\sim$  modulated by the sum of two sinusoids), 222  
 sinüzoidalle modüle edilmiş  $\sim$  ( $\sim$  modulated by a sinusoidal), 209  
 evresi sıfırdan farklı  $\sim$  ( $\sim$  of arbitrary phase), 221  
 Üretimi (modülasyonu) [generation (modulation)],  
 değişken endüktans kullanarak  $\sim$  ( $\sim$  using a variable inductor), 243  
 değişken sığa diyodu kullanarak  $\sim$  ( $\sim$  using a variable capacitance diode), 241  
 doğrudan FM (direct FM), 230,236  
 dolaylı FM (indirect FM), 229,230  
 FM türevsel denklemi (FM differential equation), 243  
 kare dalga FM (square wave FM), 247  
 üçgen dalga FM (triangular wave FM), 245  
 Frekans sapması (Frequency deviation), 200  
 Frekans tayfı (Frequency spectrum), bkz. Frekans görüngesi

Geçiş işlevi (Transfer function), 59,67

Genişbant FM (Wideband FM), 207

Genleştirici (Expander), 347

Genlik kaydırmalı anahtarlama (Amplitude shift keying), bkz. Var-yok anahtarlama

Genlik modülasyonu (GM) [Amplitude modulation (AM)], 106

Genlik modülasyonu (GM) [Amplitude modulation (AM)]

artık yan bant (AYB)  $\sim$  [Vestigial side band (VSM)  $\sim$ ], 107,176

çift yan bant (ÇYB)  $\sim$  [Double side band (DSB)  $\sim$ ], 107,143

taşıyıcılı  $\sim$  ( $\sim$  with carrier), 107. bkz. Genlik modülasyonu

taşıyıcısı bastırılmış  $\sim$  ( $\sim$  suppressed carrier), Ayrıca bkz. Çift yan bant  $\sim$ ), 107,143

tek yan bant (TYB)  $\sim$  [Single side band (SSB)  $\sim$ ], 107,161

türlerinin karşılaştırılması (comparison of forms of  $\sim$ ), 150,183

Genlik modülasyonu (GM) işareti [Amplitude modulated (AM) signal], demodülasyonu (demodulation), bkz. eşzamanlı ve eşzamanlı olmayan demodülasyonu

eşzamanlı demodülasyonu (synchronous demodulation), 133,184

$\sim$  nda evre ve frekans kaymasının etkileri (effect of phase and frequency deviation in  $\sim$ ), 184

kıyıcı demodülatörü (chopper demodulator), 137

eşzamanlı olmayan demodülasyonu (nonsynchronous demodulation),

kare-kuralı demodülatörü (square-law demodulator), 131,156

ortalama zarf sezici (average envelope detector), 133,139

zarf sezici (envelope detector), 133,139

evreoku çizimi gösterimi (phasor diagram representation), 120

frekans görüngesi (frequency spectrum), 112

- gücü(power), 118  
 güç görünye yoğunluğu (power spectral density), 84  
 üretimi (modülasyonu) [generation (modulation)], 121  
   doğrudan akortlu devre modülasyonu (direct tuned circuit modulation), 121,132  
   doğrusal olmayan aygıt modülasyonu (non-linear device modulation), 121,128  
   kıyıcı modülasyonu (chopper modulation), 121,123  
   örneksel çarpma (analog multiplication), 121

Girişim (Interference), 9,283

GM (Genlik modülasyonu), (AM:Amplitude modulation)

Görünge (spectrum), 22

- büyüklük  $\sim$  si (magnitude  $\sim$ ), 22  
   electromanyetik  $\sim$  (electromagnetic  $\sim$ ), 7  
   evre  $\sim$  si (phase  $\sim$ ), 22  
   frekans  $\sim$  si (frequency  $\sim$ ), 22

Güç (Power), 81

- ortalama  $\sim$  (average  $\sim$ ), 81

Güç görünye yoğunluğu (Power spectral density), 82

- dönemli işaretlerin ( $\sim$  of periodic signals), 86  
    $\sim$  nun fiziksel anlamı (physical meaning of  $\sim$ ), 83  
   girdi-çıkı ilişkisi (input-output relation), 83  
   tek yanlı  $\sim$  (one-sided  $\sim$ ), 84

Gürültü (Noise), 9,270

- arama  $\sim$  sü (idling  $\sim$ ), 254  
   nicemleme  $\sim$  sü (quantization  $\sim$ ), 344,347,349

Hayal frekans (Image frequency), 291

Heterodin etmek (Heterodyne), 289. bkz. Karıştırmak

Hilbert dönüşüm süzgeci (Hilbert transform filter), 165

Hilbert dönüşümü (Hilbert transform), 169

- özellikleri (properties of  $\sim$ ), 188

Hilbert dönüşüm yöntemi (Hilbert transform method), bkz. TYB üretiminde  
   evre kaydırma yöntemi

Hiperbolik işlevler (Hyperbolic functions), 434

İkili dizi (Binary sequence), 10,364

İkili iletişim dizgeleri (Binary communication systems), 9,314,363

- başarımlarının karşılaştırılması (comparison of performances of  $\sim$ ), 372

İkili iletişim işaretleri (Binary communication signals),

- dalga biçimleri (waveforms), 364,365,367,368  
   görüngeleri (spectra), 365,366,367,368  
   sezilmeleri (detection of  $\sim$ ), 368

- eşevreli (coherent  $\sim$ ), 369,  
   eşevreli olmayan (noncoherent  $\sim$ ), 369

İkili kod sözcüğü (Binary code word), 342

İletişim dizgeleri sınıflandırılması (Classification of communication systems)  
   8,313

İletişim kısıtlamaları (Restrictions in communications),9

İşaret-gürültü oranı (Signal-to-noise ratio), 12,372

İşaret-nicemeleme gürültüsü oranı (Signal-to-quantization noise ratio), 350

- Kanal sığıası (Channel capacity), 10
- Kapan (Trap), 302,303,304
- Kapı işlevi (Gate function), 395, bkz. Dikdörtgen vurum
- Kare dalga FM (Square-wave FM), 247
- Karesel ortalama yanılığ (Mean square error), 17,349
- Karıştırmak (Mixing), 134
- Karmaşık Fourier serisi (Complex Fourier series), 20  
 dönemli vurum dizisinin  $\sim$  ( $\sim$  of periodic pulse train), 23  
 katsayıları (coefficients), 20  
 yarı-dalga doğrultulmuş sinüs işlevinin  $\sim$  ( $\sim$  half-wave rectified sine function), 25
- Karmaşık geçiş işlevi (Complex transfer function), 59,67
- Karmaşık üstel işlevin Fourier dönüşümü (Fourier transform of complex exponential function), 35
- Katlanma (tümlevi), [Convolution (integral)], 56,423  
 bağıntıları (relationships), 423  
 dürtü işlevi ile  $\sim$  ( $\sim$  with impulse function), 429  
 tümlevi (integral), 56,423  
 üzerine çizimsel yöntemler (graphical techniques on  $\sim$ ), 423,424
- Kesikli görüğe (discrete spectrum), 23
- Kesikli modülasyon (discrete modulation), 313. bkz. Vurum modülasyonu
- Keskin sınırlandırıcı (Hard limiter), 251,353
- Kılavuz taşıyıcı (Pilot carrier), 267,370
- Kıyıcı (Chopper),  
 modülatörü ( $\sim$  modulator), 121,123  
 demodülatörü ( $\sim$  demodulator), 137
- Konvolüsyon tümlevi (Convolution integral), bkz. Katlanma
- Koruma bandı (Guard band), 322
- Lapl ce dönüşümü (Laplace transform), 405,409  
 çiftleri (pairs), 421  
 özellikleri (properties of  $\sim$ ), 419  
 evrik  $\sim$  (inverse  $\sim$ ), 409  
 Fourier dönüşümü ile ilişkisi (its relation to Fourier transform), 405  
 414  
 iki yanlı  $\sim$  (two-sided  $\sim$ ), 405  
 varlık bölgesi (region of existance), 406,410
- Matematiksel bağıntılar (Mathematical relations), 431
- M-li alfabe (M-ary alphabet), 345
- Modülasyon (Modulation), 3,8,106,143,161,176,197,313  
 yararları, 3  
 sınıflandırma (classification), 8,313
- Modülatör (Modulator), 121,145,163,176,229,334,338,340,342
- Modülasyon derecesi (Modulation index), 108,202  
 genlik modülasyonunda ( $\sim$  in amplitude modulation), 108  
 frekans modülasyonunda ( $\sim$  in frequency modulation), 202
- Monofonik (Monophonic), 267



Nedensel işlevler (Causal functions), 410

sol  $\sim$  (left  $\sim$ ), 411

Nedensel dizge (Causal system), 73

Nicemleme (Quantization), 342

düzeyleri (levels), 342,343,345

düzgün  $\sim$  (uniform  $\sim$ ), 346,347

düzgün olmayan  $\sim$  (nonuniform  $\sim$ ), 346,347

gürültüsü (noise), 344,347,349

yanılgısı (error), 344

Nitelik sayısı (Quality factor), 67,68

Normal genlik modülasyonu (Normal amplitude modulation), bkz. Genlik modülasyonu

Nyquist hızı (Nyquist rate), 320

Nyquist örnekleme teoremi (Nyquist-sampling theorem), 315, bkz. Örnekleme teoremi

Oran sezici FM demodülatörü (Ratio detector FM detector), 258

Ortalama güç (Average power), 81

Ortalama zarf sezici (Average envelope detector), 133,139,153

Ön vurgu (Pre-emphasis), 272

$\sim$  süzgeci ( $\sim$  filter), 272

Örnekle-tut devresi (Sample-hold circuit), 351

Örnekleyici-nicemleyici (Sampler-quantizer), 356,358

Örneksele modülasyon (Analog modulation), 8,106,313

Örnekleme teoremi (Sampling theorem), 8,314,315

alçak geçiren  $\sim$  (Low-pass  $\sim$ ), bkz. Örnekleme teoremi

bant geçiren  $\sim$  (Band-pass  $\sim$ ), 330

frekans bölgesinde  $\sim$  ( $\sim$  in frequency domain), 330

zaman bölgesinde  $\sim$  ( $\sim$  in time domain), 315

Paley-Wiener ölçütü (Paley-Wiener criteria), 73

Parseval teoremi (Parseval's theorem), 79

Plancharel teoremi (Plancharel's theorem), bkz. Parseval teoremi

RC devresi (RC circuit), 59,

karmaşık geçiş işlevi (Complex transfer function), 59

3 db bantgeçişliği (3 db bandwidth), 64

Renk doyma işareti (Saturation signal), 306

Renk tonu işareti (Hue signal), 306

Renk vektörü (Color vector), 306

Renkli televizyon dizgeleri (Color television systems), 305

Rezonans (Resonance), 67

- RF boğucu bobini (RF choke coil), 258,259,260
- RLC devresi (RLC circuit), 65  
 karmaşık geçiş işlevi (complex transfer function), 67  
 3 db bantgenişliği (3 db bandwidth), 67
- Sa işlevi (Sa function), 24,395
- Salingaç (Oscillator), 237  
 gerilim denetimli  $\sim$  (voltage controlled  $\sim$ ), 237
- Sapma oranı (Deviation ratio), 261
- Sayısal iletişim dizgeleri (Digital communication systems), 313
- Sayısal modülasyon (Digital modulation), 8,313
- Seçmeli sönmülleme (Selective fading), 150
- Seri açınımları (Series expansions), 433
- Seri toplamları (Series summation), 434
- Shannon teoremi (Shannon's theorem), bkz. Örneklemleme teoremi
- Sıfır-bir (0-1) dizisi (Zero-one sequence), 313. Ayrıca bkz. İkili dizi
- Sıfır geçiş sezicileri (Zero crossing detector), 265
- Sıkıştırıcı (Compressor), 347
- Sıkıştırıcı-genleştirici (Compandor), 345,347
- Sınırlandırıcı (Limiter), 250
- Si işlevi (Si function), bkz. Sinüs tümlevi
- Signom işlevi (Signom function), 33  
 $\sim$  nin Fourier dönüşümü (Fourier transform of  $\sim$ ), 33
- Sinüs tümlevi (Sine integral), 77,396
- Sinüs işlevinin Fourier dönüşümü (Fourier transform of sine function), 35
- Sönmülleme (Fading), 150  
 seçmeli  $\sim$  (selective  $\sim$ ), 150
- Stereo (Ayrıca bkz. Stereo FM), 156,157,192
- Stereo FM, 265
- Süperheterodin almaç (Superheterodyne receiver), 287,289
- Süperpozisyon ilkesi (Superposition principle), 52
- Sürekli dalga (SD) modülasyonu [Continuous wave (CW) modulation], 8,106,313
- Süzme (Filtering), 62
- Sönt modülatörü (Shunt modulator), 127
- Taşıyıcı dalga (Carrier wave), 3,106,114
- Taşıyıcılararası alıcı (Intercarrier receiver), 300,303
- Taşıyıcılı genlik modülasyonu (Amplitude modulation with carrier), 107  
 bkz. Genlik modülasyonu işareti
- Taşıyıcısı bastırılmış genlik modülasyonu (Suppressed carrier amplitude modulation), 107, bkz.Çift yan bant modülasyonu
- Tayf (Spectrum), bkz. Görünge
- Tek işlev (Odd function), 19  
 Fourier dönüşümü (Fourier transform of  $\sim$ ), 45  
 Fourier serisi gösterimi (Fourier series representation of  $\sim$ ), 19

- Tek yan bant (TYB) işareti [ Single side band (SSB) Signal ] . 161  
 alt  $\sim$  (lower  $\sim$ ), 163  
 büyük taşıyıcılı  $\sim$  ( $\sim$  with a large carrier), 175  
 dalgabıçımı (waveform), 172  
 demodülasyonu (demodulation), 172  
 büyük taşıyıcılı  $\sim$  ( $\sim$  with large carrier), 175, 312  
 eşzamanlı  $\sim$  (synchronous  $\sim$ ), 173  
      $\sim$  da evre ve frekans kaymasının etkile-  
     ri (effect of phase and frequency  
     deviation in  $\sim$ ), 184  
 diğer GM türleri ile karşılaştırılması (comparison of  $\sim$  with  
 other forms of AM), 183  
 frekans görüngesi (frequency spectrum of  $\sim$ ), 162  
 üretimi (generation of  $\sim$ ), 163  
     evre kaydırma yöntemi (phase shift method), 163, 164  
     Hilbert dönüşümü yöntemi (Hilbert transform method)  
     bkz. Evre kaydırma yöntemi  
     süzgeç yöntemi (filter method), 163, 164  
 üst  $\sim$  (upper  $\sim$ ), 163  
 zaman bölgesi gösterimi (time domain representation), 168  
 Tek yan bant (TYB) modülasyonu [ Single side band (SSB) modulation ] 161  
 TEKA (Türevsel evre kaydırmalı anahtarlama), (DPSK: Differential phase  
 shift keying)  
 Televizyon yayım bantları (Television broadcasting bands), 300  
 Televizyon alıcıları (Television receivers), 300  
     ayrı ses ve görüntü alıcıları (split sound receiver), 300  
     taşıyıcılararası  $\sim$  (intercarrier receiver), 303  
 Televizyonda (Television),  
     bileşik görüntü işareti (compound video signal), 297  
     eşzamanlama vurumları (synchronizing pulses), 296  
     görüntü işareti (video signal), 295, 296, 297, 298, 299  
     görüntünün elektriksel işarete dönüştürülmesi, 292  
     modülasyon (modulation), 306  
     parlaklık işareti (brightness signal), 292  
     ses işareti (audio signal), 297, 299  
 Temel bant işareti (Base-band signal), 116  
 Temel bant iletişimi (Base-band communication), 375  
 Tepke (Response),  
     dönemli  $f(t)$  girdisine  $\sim$  ( $\sim$  to periodic  $f(t)$  input), 61  
     dürtü  $\sim$  si (impulse  $\sim$ ), 54  
     frekans bölgesinde  $\sim$  ( $\sim$  in frequency domain), 57  
      karmaşık üstel girdiye  $\sim$  ( $\sim$  to complex exponential input), 59  
     sinüzoidal girdiye  $\sim$  ( $\sim$  to sinusoidal input), 60  
     zaman bölgesinde  $\sim$  ( $\sim$  in time domain), 54  
 Ters vurgu (de-emphasis), 272  
     süzgeci ( $\sim$  filter), 272  
 Toplamsallık ilkesi (Süperpozisyon ilkesi), bkz. Süperpozisyon ilkesi  
 Trigonometrik Fourier serisi açınımı (Trigonometric Fourier series  
 expansion), 15

- Trigonometrik Özdeşlikler (Trigonometric identities),431  
 TRT Ankara TV işareti frekans görünüşü (Frequency spectrum of TRT Ankara TV signal),299
- Tutma devresi (Hold circuit),325  
 Türevsel evre kaydırmalı anahtarlama (TEKA) Differential phase shift keying (DPSK) ,364,368,371  
 Türevsel vurum kod modülasyonu (TVKM) Differential pulse code modulation (DPCM) ,356
- Türkiye radyoları (Turkish radio stations),5  
 Türkiye televizyonları (Turkish television stations),6  
 Tütüncüoğlu E.,299,308  
 TV(Televizyon), (TV: Television)  
 TVKM (Türevsel vurum kod modülasyonu), (DPCM: Differential pulse code modulation)
- TYB (Tek yan bant), (SSB: Single side band)
- Uyumlu süzgeç (Matched filter),376  
 Uyumlu süzgeçli sezici (Matched filter detector),376  
 Uyarlamalı DM(Adaptive DM),356
- 3 db bantgenişliği (3 db bandwidth),32,63,67
- Üçgen dalga FM (Triangular FM),245  
 Üçlü alfabe (Ternary alphabet),344  
 Üst üste katlanma yanlışlığı (Fold over error),384  
 Üst yan bant (Upper side band),113
- Var-yok anahtarlama (VYA) [ On-off keying (OOK) ] ,13,363,364,369  
 sezilmesi (detection),368  
 yanlışlığı olasılığı (probability of error),373
- VDM (Vurum durumu modülasyonu) (PPM: Pulse position modulation)  
 VGM (Vurum genliği modülasyonu) (PAM: Pulse amplitude modulation),  
 VKM (Vurum kod modülasyonu)(PCM: Pulse code modulation)  
 VSM (Vurum süresi modülasyonu) (PDM: Pulse duration modulation)  
 Vurum durumu modülasyonu (Pulse position modulation-PPM) bkz. Vurum yeri modülasyonu (VYM)
- Vurum genişliği (Pulse width),74  
 Vurum genişliği modülasyonu (Pulse width modulation-PWM) bkz. Vurum süresi modülasyonu (VSM)
- Vurum genliği modülasyonu (VGM) [ Pulse amplitude modulation (PAM) ],  
 8,334,335  
 anasal örnekleme  $\sim$  (  $\sim$  with instantaneous sampling),336  
 dalgabiciimi (waveform),335  
 doğal örnekleme  $\sim$  (  $\sim$  with natural sampling),336  
 iletimi (transmission),337  
 üretimi (generation),335

- Vurum kod modülasyonu (VKM) [ Pulse code modulation (PCM) ] ,342  
bantgenişliği (bandwidth),344  
dalga biçimi (waveform),343  
üretimi (generation),342
- Vurum konumu modülasyonu (Pulse position modulation-PPM), bkz.  
Vurum yeri modülasyonu (VYM)
- Vurum modülasyonu (Pulse modulation), 8,313,334  
gürültü etkileri (effect of noise on ~ ),340  
türlerin karşılaştırılması (comparison of ~ types),340
- Vurum sayıcı FM demodülatörü (Pulse count FM demodulator),264
- Vurum süresi modülasyonu (VSM) [ Pulse duration modulation (PDM), Pulse  
width modulation (PWM) ] ,8,338  
arka kenar modülasyonu (trailing edge modulation ~ ),338  
ön kenar modülasyonu (leading edge modulation ~ ),338
- Vurum yeri modülasyonu (VYM) [ Pulse position modulation (PPM) ] ,8,340
- Vurum zamanı modülasyonu (Pulse time modulation),340
- VYA (Var-yok anahtarlama),(OOK: On-off keying)
- VYM (Vurum yeri modülasyonu) (PPM: Pulse position modulation, PWM: Pulse  
width modulation)
- Woodward teoremi (Woodward's theorem),226
- Yan bant (Side band),113
- Yanılgi işlevi (Error function),396
- Yineleyici (Repeater),351
- Yüksek geçiren süzgeç (High-pass filter),62  
düşüncel ~ (ideal ~ ),72
- Yükseliş süresi (Rise time),76
- Zaman-bantgenişliği ilişkisi (Time-bandwidth relationship),74
- Zaman bölmeli çoklama (Time division multiplexing),315,359
- Zamanla değişmez dizge (Time invariant system), 55,56
- Zarf sezici (Envelope detector),133,140,153,154  
ortalama ~ (average ~ ),133,139,153

# SÖZLÜK

Adaptive : Uyarlamalı

Aliases: Eşgörüngeli işaretler

Aliasing error: Eşgörüngeleme yanlılığı

Allpass filter: Tümgeçiren süzgeç

Alternating current (ac): Almaşık akım (aa)

AM (Amplitude modulation): GM (Genlik modülasyonu)

Amplification: Yükseltme

Amplifier: Yükselteç

Amplitude modulation (AM): Genlik modülasyonu

Amplitude shift keying: Genlik kaydırmalı anahtarlama

Analysis: Çözümleme

Analytical signal: Çözümsel işaret

Analog: Örneksele

~ modulation: ~ modülasyon

~ multiplier: ~ çarpıcı

Angle modulation: Açık modülasyonu

Audio signal: Ses işareti

Autocorrelation function: Özilişki işlevi

Average: Ortalama

~ envelope detector: ~ zarf sezici

~ power: ~ güç

**Balanced: Dengeli**

~ demodulator: ~ demodülatör

~ modulator: ~ modülatör

Bandlimited signal: Bantsınırlı işaret

Band pass filter: Bant geçiren süzgeç

Bandpass bandlimited signal: Bantgeçiren bantsınırlı işaret

Band stop filter: Band söndüren süzgeç

Bandwidth: Bantgenişliği

Base band: Temel bant

~ communication: ~ iletişimi

~ signal: ~ işareti

Bias voltage: Öngerilim

Binary: İkili

~ code word: ~ kod sözcüğü

~ communication: ~ iletişim

~ sequence: ~ dizi

Broadcasting: Yayın

Brightness signal: Parlaklık işareti

**Capacitor: Sığaç**

Causal: Nedensel

~ function: ~ işlem

left ~ : sol ~

Channel capacity: Kanal sığası

Choke coil: Boğucu bobin

Chopper: Kıyıcı

~ demodulator: ~ demodülatör

~ modulator: ~ modulator

Coefficient: Katsayı

Coherent detection: Eşvreli sezme

Color television system: Renkli televizyon dizgesi

Color vector: Renk vektörü

Communication: İletişim

Compandor: Sıkıştırıcı-genleştirici

Comparator: Karşılaştırıcı

Compatibility: Bağdaşabilirlik

reverse ~ : ters ~

Complex: Karmaşık

~ conjugate: ~ eşlenik

~ transfer function: ~ geçiş işlevi

Compound: Bileşik

~ modulation: ~ modülasyon

~ video signal: ~ görüntü işareti

Compressor: Sıkıştırıcı

Conditional probability: Koşullu olasılık

Conduction: İletim

Constant: Değişmez

Continuous: Sürekli

~ wave (CW) modulation: ~ dalga (SD) modülasyonu

Conversion: Çevrim  
 Convolution: Katlanma (Konvolüsyon)  
     ~ integral: ~ tümlevi  
 Criteria: Ölçüt  
 Cross-talk: Çapraz-konuşum  
 CW (continuous wave): SD (Sürekli dalga)

De-emphasis: Ters vurgu

Definite: Belirli

Delay: Gecikme

Delta function: Delta işlevi

Delta modulation: Delta modülasyonu  
 adaptive ~: Uyarlamalı ~

Delta modulation: Delta modülasyonu

hunting in ~: ~ nda arama

idling noise in ~: ~ nda arama gürültüsü

start up in ~: ~ nda başlama

slope overload in ~: ~ nda eğim sınırlanması

Demodulation: Demodülasyon

Demodulator: Demodülatör

Derivative: Türev

Design: Tasarım

Detector: Sezici

Deviation: Sapma

frequency ~: frekans ~ sı

phase ~: evre ~ sı

~ ratio: ~ oranı

Diagonal clipping: Çapraz kırpma

Differential: Türevsel

~ phase shift keying (DPSK): ~ evre kaydırmalı anahtarlama  
 (TEKA)

~ pulse code modulation (DPCM): ~ vurum kod modülasyonu (TVKM)

Differentiation: Türev alma

exact ~: tam ~

Differentiator: Türev alıcı

Digital: Sayısal

~ communication: ~ iletişim

~ modulation: ~ modülasyon

Direct current (dc): Doğru akım (da)

Direct FM: Doğrudan FM

Direct tuned circuit modulation: Doğrudan akortlu devre modülasyonu

Dirichlet conditions: Dirichlet koşulları

Discrete: Kesikli

~ spectrum: ~ görüme

Discriminator: Ayırtaç

frequency ~: ~ ayırtacı

Distortion: Bozulma

Distortionless transmission: Bozulmasız iletim



Domain: Bölge

Double side band (DSB): Çift yan bant (ÇYB)

DPCM (Differential pulse code modulation): TVKM (Türevsel vurum kod modülasyonu)

DPSK (Differential phase shift keying): TEKA (Türevsel evre kaydırmalı anahtarlama)

DSB (Double side band): ÇYB (Çift yan bant)

Effective: Etken

~ value: ~ değer

Electromagnetik spectrum: Elektromanyetik görüngen

Emphasis: Vurgu

de ~ : ters ~

pre ~ : ön ~

Energy: Erke

Energy spectral density: Erke görüngen yoğunluğu

one sided ~ : tek yanlı ~

Envelope detector: Zarf sezici

average ~ : ortalama ~

Equlizing filter: Dengeleme süzgeci

Error: Yanılgı

~ function: ~ işlevi

Even function: Çift işlev

Existance: Varlık

region of ~ : ~ bölgesi

Expander: Genleştirici

Expansion: Açınım

Exponential function: Üstel işlev

Fading: Sönümlenme

selective ~ : seçmeli ~

Feedback: Geribesleme

Filter: Süzgeç

Filtering: Süzme

FKS (Frequency shift keying: FKA(Frekans kaydırmalı anahtarlama)

Flat top sampling: Düz tepeli örnekleme

Fold over error: Üst üste katlanma yanılgısı

Fourier like series expansion: Fourier benzeri seri açınımı

Fourier series: Fourier serisi

complex ~ : karmaşık ~

trigonometric ~ : trigonometrik ~

Fourier transform: Fourier dönüşümü

~ pairs: ~ çiftleri

Frequency: Frekans

fundamental ~ : ana ~

instantaneous ~ : ansal ~

Frequency conversion: Frekans çevrimi

Frequency deviation: Frekans sapması  
 Frequency discriminator: Frekans ayırtacı  
 Frequency division multiplexing: Frekans bölümlü çoklama  
 Frequency modulation (FM): Frekans modülasyonu (FM)  
 Frequency multiplication: Frekans çarpımı  
 Frequency shift keying (FSK): Frekans kaydırımlı anahtarlama (FKA)  
 Frequency spectrum: Frekans görüngenisi  
 Function: İşlev  
     periodic  $\sim$ : dönemli  $\sim$   
 Fundamental frequency: Ana frekans

Gate function: Kapı işlevi

Generation: Üretim  
 Grid: Izgara  
 Guard band: Koruma bandı

Half-wave rectification: Yarı-dalga doğrultma

Hard limiter: Keskin sınırlandırıcı  
 Heterodyne: Heterodin etmek (Karıştırmak)  
 High pass filter: Yüksek geçiren süzgeç  
 Hilbert transform: Hilbert dönüşümü  
      $\sim$  filter: Hilbert dönüşüm süzgeci  
 Hold circuit: Tutma devresi  
 Hue signal: Renk tonu işareti  
 Hunting (in DM): (DM de) arama  
 Hyperbolic function: Hiperbolik işlev

Ideal: Düşüncel

$\sim$  filter:  $\sim$  süzgeç  
 Identity: Özdeşlik  
 Idling noise: Arama gürültüsü  
 Image frequency: Hayal frekans  
 Impulse: Dürtü  
      $\sim$  function:  $\sim$  işlevi  
      $\sim$  response:  $\sim$  tepkesi  
      $\sim$  train:  $\sim$  dizisi  
 Input: Giriş, girdi  
 Indirect FM: Dolaylı FM  
 Instantaneous: Ansal  
      $\sim$  frequency:  $\sim$  frekans  
      $\sim$  sampling:  $\sim$  örnekleme  
 Integral: Tümülev  
 Intercarrier receiver: Taşıyıcılararası alıcı  
 Interference: Girişim  
 Inverse: Evrik  
      $\sim$  transform:  $\sim$  dönüşüm

Laplace transform: Laplace dönüşümü

inverse  $\sim$  : evrik  $\sim$

two-sided  $\sim$  : iki-yanlı  $\sim$

$\sim$  pairs: Laplace dönüşüm çiftleri

Leading edge modulation (PDM): Ön kenar modülasyonu (VSM)

Level: Düzey

Limiters: Sınırlandırıcı

hard  $\sim$  : keskin  $\sim$

Line spectrum: Çizgi görünüşü

Linear system: Doğrusal dizge

causal  $\sim$  : nedensel  $\sim$

physically realizable  $\sim$  : fiziksel olarak gerçekleştirilebilir  $\sim$

time invariant  $\sim$  : zamanla değişmez  $\sim$

Long wave: Uzun dalga

Loudspeaker: Sesyayar

Low pass band limited signal: Alçakgeçiren bantlı işaret

Low pass filter: Alçak geçiren süzgeç

Lower side band: Alt yan bant

M-ary alphabet: M-li alfabe

Magnitude spectrum: Büyüklük görünüşü

Matched filter: Uyumlu süzgeç

Medium wave: Orta dalga

Microphone: Sesalır

Modulation: Modülasyon

$\sim$  index:  $\sim$  derecesi

Modulator: Modülatör

Monophonic: Monofonik

Mean square error: Kareseel ortalama yanılğı

Mixing: Karıştırmak

Narrowband FM: Darbant FM

Natural sampling: Doğal örnekleme

Noncoherent detection: Eşevreli olmayan sezme

Nonsynchronous demodulation: Eşzamanlı olmayan demodülasyon

Noise: Gürültü

idling  $\sim$  : arama  $\sim$  sü

quantization  $\sim$  : nicemeleme  $\sim$  sü

Odd function: Tek işlev

On-off keying (OOK): Var-yok anahtarlama (VYA)

OOK (On-off keying): VYA (Var-yok anahtarlama)

Oscillator: Salınma

voltage controlled  $\sim$  : gerilim denetimli  $\sim$

Output: Çıkış,çıktı

Overmodulation: Aşırı modülasyon

**Pair: Çift**

- PAM (Pulse amplitude modulation):** VGM (Vurum genliği modülasyonu)  
**Parameter:** Parametre, değiştirgen  
**PCM (Pulse code modulation):** VKM (Vurum kod modülasyonu)  
**PDM (Pulse duration modulation):** VSM (Vurum süresi modülasyonu)  
**Periodic function:** Dönemli işlev  
**Periodic pulse train:** Dönemli vurum dizisi  
**Phase:** Evre  
     ~ deviation: ~ sapması  
     ~ modulation: ~ modülasyonu  
**Phase locked loop:** Evre kilitleyici döngü  
**Phase sift keying (PSK):** Evre kaydırmalı anahtarlama (EKA)  
     Differential ~ : Türevsel ~  
**Phase spectrum:** Evre görünüşü  
**Phasor:** Evreoku  
**Physically realizable system:** Fiziksel olarak gerçekleştirilebilir dize  
**PM (Phase modulation):** EM (Evre modülasyonu)  
**Power:** Güç  
     average ~ : ortalama ~  
**Power spectral density:** Güç görünüş yoğunluğu  
     one sided ~ : tek-yanlı ~  
**PPM (Pulse position modulation):** VYM (Vurum yeri modülasyonu), vurum durumu modülasyonu  
**Preamplifier:** Önyükseltec  
**Pre-emphasis:** Ön-vurgu  
**Probability:** Olasılık  
     ~ of error: Yanılgı olasılığı  
**Property:** Özellik  
**PSK (Phase shift keying):** EKA (Evre kaydırmalı anahtarlama)  
**Pulse amplitude modulation (PAM):** Vurum genliği modülasyonu (VGM)  
**Pulse code modulation (PCM):** Vurum kod modülasyonu (VKM)  
**Pulse count demodulator:** Vurum sayıcı demodülatör  
**Pulse duration modulation (PDM):** Vurum süresi modülasyonu (VSM)  
     leading edge modulation: ön kenar modülasyonu  
     trailing edge modulation: arka kenar modülasyonu  
**Pulse modulation:** Vurum modülasyonu  
**Pulse position modulation (PPM):** Vurum yeri modülasyonu (VYM), vurum konumu modülasyonu  
**Pulse time modulation:** Vurum zamanı modülasyonu  
**Pulse width:** Vurum genişliği  
**PWM (Pulse width modulation):** VSM (Vurum süresi modülasyonu), vurum genişliği modülasyonu

**Quality factor:** Nitelik sayısı

**Random process:** Rasgele süreç

**Rate:** Hız

**Ratio detector:** Oran sezici

Receiver: Almaç, alıcı  
 Rectangular pulse: Dikdörtgen vuruş  
 Rectification: Doğrultma  
 Rectifier: Doğrultmaç  
 Repeater: Yineleyici  
 Representation: Gösterim  
 Response: Tepke  
 Resonance: Rezonans  
 Ripple: Dalgacık  
 Rise time: Yükseliş süresi  
 Rms value: Etken değer

Sample: Örnek

Sample-hold circuit: Örnekle-tut devresi  
 Sampler-quantizer: Örnekle-yici-nicemleyici  
 Sampling: Örnekleme

flat-top  $\sim$  : düz tepeli örnekleme  
 instantaneous  $\sim$  : ansal  
 natural  $\sim$  : doğal

Saturation signal: Renk doyma işareti

Series expansion: Seri açılımı

Selective fading: Seçmeli sönümlenme

Series summation: Seri toplama

Shifting property: Kaydırma özelliği

Short wave: Kısa dalga

Shunt modulator: Şönt modülatör

Side band: Yan bant

Signal: İşaret

Signal-to-noise ratio: İşaret-gürültü oranı

Signal-to-quantization noise ratio: İşaret-nicemleme gürültüsü oranı

Single side band (SSB): Tek yan bant (TYB)

Slicing circuit: Dilimleme devresi

Slope demodulator: Eğim demodülatörü

Slope overload (in DM): Eğim sınırlanması (DM de)

Spectrum: Görünge

continuous  $\sim$  : sürekli  $\sim$

discrete  $\sim$  : kesikli  $\sim$

electromagnetic  $\sim$  : elektromanyetik  $\sim$

frequency  $\sim$  : frekans  $\sim$  si

line  $\sim$  : çizgi  $\sim$  si

magnitude  $\sim$  : büyüklük  $\sim$  si

phase  $\sim$  : evre  $\sim$  si

Split sound receiver: Ayrı ses ve görüntü alıcıları

Square law: Kare kuralı

Square wave: Kare dalga

SSB (Single side band): TYB (Tek yan bant)

Stability: Kararlılık

Stage: Kat

Start-up (in DM): Başlama (DM de)

State: Durum  
 Step size: Basamak boyu  
 Subcarrier: Alttaşıyıcı  
 Superheterodyne receiver: Süperheterodin almaç  
 Superposition principle: Süperpozisyon (toplamsallık) ilkesi  
 Suppressed carrier: Taşıyıcısı bastırılmış  
 System: Dizge  
 Synchronizing pulse: Eşzamanlama vuruşu  
 Synchronous demodulation: Eşzamanlı demodülasyon

Telecommunication: Uziletişim

Television receivers: Televizyon alıcıları  
     intercarrier receiver: Taşıyıcılararası alıcı  
     split sound receiver: Ayrı ses ve görüntü alıcı  
 Ternary alphabet: Üçlü alfabe  
 Time: Zaman  
 Time delay demodulator: Zaman gecikmeli demodülatör  
 Time division multiplexing: Zaman bölmeli çoklama  
 Time invariant: Zamanla değişmez  
 Threshold effect: Eşik etkisi  
 Trailing edge modulation (PDM): Arka kenar modülasyonu (VSM)  
 Transducer: Değiştirgeç  
 Transfer function: Geçiş işlevi  
 Transmission: İletim  
 Transmitter: Göndermeç, verici  
 Trap: Kapan  
 Triangular wave: Üçgen dalga  
 Trigonometric Fourier series expansion: Trigonometrik Fourier serisi açılımı  
 Tuned circuit: Akortlu devre

Uniform distribution: Düzgün dağılım

Unit: Birim  
     ~ step function: ~ basamak işlevi  
 Upper side band: Üst yan bant

Variable: Değişken

Vestigial side band (VSB): Artık yan bant (AYB)  
 Video: Görüntü  
     ~ signal: ~ işareti  
 Voltage controlled oscillator: Gerilim denetimli salıngaç  
 VSB (Vestigial side band): AYB (Artık yan bant)

**Wave: Dalga**

**Waveform: Dalgabiçimi**

**Wideband FM: Genişbant FM**

**Zero crossing detector: Sıfır geçiş sezici**

**Zero-one sequence: Sıfır-bir dizisi**

