

Genel olarak bir sistemin matematiksel modeli, durum denklemleri ile

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad x(0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer f_i fonksiyonlarının hepsi x_i değişkenlerine göre lineerse sistem de lineer olur ve durum denklemleri matris formunda basitçe ifade edilebilir. Bu durumda sistem kalıcı hal cevabı olarak bir denge noktası davranışı (kararlı yada kararsız) gösterir. Eğer herhangi bir f_i fonksiyonu nonlineer kısım içeriyorsa, bu sistem nonlineer sistem olarak adlandırılır. Bu durumda sistemin durum denklemleri matris formunda ifade edilemez. Sistemin kalıcı hal davranışı, çoğunlukla limit cycle veya denge noktası davranışı gösterir. Nonlineer sistemlerin dinamik davranışlarının incelenmesi için çeşitli metotlar mevcuttur: Linearizasyon tekniği, sinusoidal describing fonksiyon, Lyapunov'un II. Kriteri, Popov metodu vb. Ancak bu teknikler, genellikle sadece ya lokal davranışları göz önüne aldığı için ya da sadece sistemin kararlılığını incelediği için sistemin global davranışlarını elde etmede yetersiz kalmaktadırlar. Nonlineer dinamiklerin incelenmesi için geliştirilen bu metotlarla tanımlanamayan bazı nonlineer davranış türleri de vardır. Bunlardan sisteme herhangi bir giriş verilmeden elde edilen bir tür, "kaotik davranış" olarak adlandırılır. Bu davranışın limit cycle'dan farklı olan özellikleri temel olarak

1. Rastgele değil deterministik tipte olması,
2. Başlangıç şartlarına aşırı duyarlılık göstermesi,
3. Sınırsız sayıda değişik periyodik salınımlar içermesi,
4. Genliği ve frekansı tespit edilemeyen ancak sınırlı bir alan içinde değişen karmaşık davranışlar olması,
5. Gürültü benzeri güç spektrumuna sahip olması şeklinde sıralanabilir.

3. CHUA DEVRESİ VE KAOS

Şekil 1'den de görüldüğü gibi Chua devresi bir lineer bobin (L , iç direnci r_0), bir lineer direnç (R), iki lineer kondansatör (C_1, C_2) ve Chua diyodu [2] olarak adlandırılan bir nonlineer dirençten (N_R) oluşur. N_R direnci Şekil 2'de de görüldüğü gibi parça-parça lineer bir karakteristiğe sahiptir.

Chua devresi üç adet durum denklemleri ile tanımlanır:

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L}V_2 - \frac{r_0}{L}I_L \quad (2)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2}I_L - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \quad (3)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}f(V_1) \quad (4)$$

Burada $f(\cdot)$, N_R direncinin Şekil 2'de gösterilen parça-parça lineer karakteristiğini temsil etmekte olup

$$I_R = f(V_R) = G_b V_R + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|V_R + E| - |V_R - E|)$$

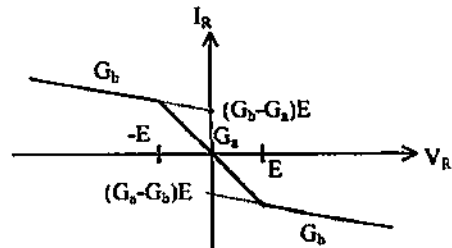
$$= \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a)E & ; V_R < -E \\ G_a V_R & ; -E \leq V_R \leq E \\ G_b V_R + (G_a - G_b)E & ; V_R > E \end{cases}$$

ile tanımlanır ($E > 0, G_a < 0, G_b < 0$).

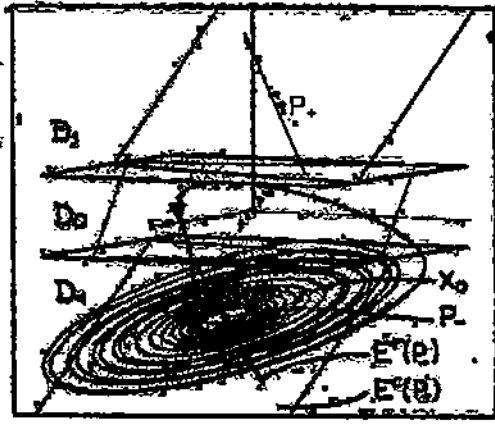
Parça-parça lineer analiz metodu kullanılarak Şekil 2'de verilen nonlineerite üç farklı bölgeye bölünebilir. $V_R < -E$, $|V_R| \leq E$ ve $V_R > E$ şeklindeki bu üç bölge durum uzayında sırası ile D_{-1} , D_0 ve D_1 olarak adlandırılır. Bu bölgeler, U_{-1} ve U_1 olarak adlandırılan iki sınır düzlemi ile birbirinden ayrılır. Devre, her bir bölgede saddle-focus kararlılığına bir denge noktasına sahiptir [3]. Her bir denge noktası, bir reel özdeğer (γ ve buna karşılık gelen E' özvektörü) ile bir çift kompleks özdeğere ($\sigma \pm j\omega$ ve buna karşılık gelen E'' öz düzlemi) sahiptir.

Chua devresinin hangi şartlarda kaotik davranış göstereceği Shilnikov Teoremi ile belirlenebilir. Bu teorem, üçüncü dereceden bir autonomous devrenin kaotik davranış gösterebilmesi için gerekli şartları verir. Buna göre üçüncü dereceden devrenin, kararsız bir reel özdeğeri (γ) ve kararlı bir çift kompleks özdeğere ($\sigma \pm j\omega$, $\sigma < 0, \omega \neq 0$) sahip denge noktası için $|\sigma| < \gamma$ ise ve vektör alanı o denge noktasından geçen bir homoclinic orbit'e (homoclinic orbit, bir trajectorynin $t \rightarrow \infty$ ve aynı zamanda $t \rightarrow -\infty$ için aynı denge noktasına asimptotik olarak yaklaşmasıdır) sahipse, o zaman devre kaotik davranış sergiler [4,5]. Chua devresi $G_a < 0, G_b < 0$ ve C_1 'in yeterince küçük bir değeri için yukarıdaki şartları sağlamaktadır.

Şekil 3'te Chua devresi için bir kaotik davranış şekli verilmiştir. D_0 bölgesindeki bir trajectory, $E'(0)$ bileşeni boyunca denge noktasına (yani orjine) doğru spiral bir şekilde hareket ederken, $E'(0)$ bileşeni boyunca orjinden uzağa üstel olarak itilir. Bu itme etkisi trajectoryyi D_1 veya D_{-1} bölgesine geçmeye zorlar. Aynı şekilde D_1 (veya D_{-1}) bölgesindeki bir trajectory ise kompleks öz düzlem $E''(P_1)$ (veya $E''(P_{-1})$) bileşeni boyunca denge noktasından (yani P_1 (veya P_{-1})) spiral bir şekilde uzaklaşırken, $E'(P_1)$ (veya $E'(P_{-1})$)



Şekil 2. Chua diyodu için v-i karakteristiği.

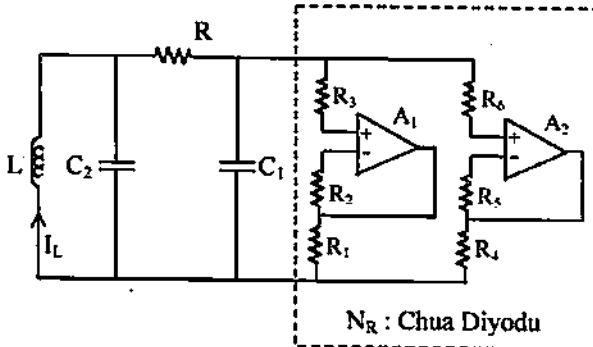


Şekil 3. Chua devresinde kaos hareketi için stretching and folding mechanism [3].

bileşeni boyunca denge noktasına asimptotik olarak yaklaşır. Bu çekme etkisi nedeniyle trajectory, zamanının büyük bir kısmını bu bölgede E' doğrultusunda P (veya P_+) denge noktasına asimptotik olarak yaklaşılmaya çalışmakla geçirir. Devre için global davranış göz önüne alındığında, anlatılan tüm bu durumlar itme-çekme mekanizması (stretching and folding mechanism) olarak adlandırılır.

4. DEĞİŞKEN BOBİNLİ DEVRENİN PRATİK GERÇEKLEŞTİRİMİ

Şekil 1'deki Chua devresini gerçekleştirmede en önemli nokta nonlinear elemanın nasıl tasarlanacağıdır. Chua diyodu değişik elektronik elemanlar kullanılarak değişik şekillerde gerçekleştirilebilir [6,7]. Burada M.P. Kennedy tarafından gerçekleştirilen ve ayrıntıları [1]'de verilen nonlinear eleman yapısı temel alınmıştır. Kullandığımız devre yapısı Şekil 4'te görüldüğü gibi iki op-amp ve altı dirençle gerçekleştirilen Chua diyodu ile iki kondansatör, bir direnç ve bir ayarlı bobinden oluşmaktadır. Tasarmlanan devreye ait eleman listesi Tablo 1'de verilmiştir. Tabloda Chua diyodu için verilen değerler, $v-i$ karakteristiğinde $G_a = -757 \mu S$, $G_b = -409 \mu S$ ve $E = 1V$ olacak şekilde seçildi.



Şekil 4. Pratik olarak gerçekleştirilen Chua devresi.

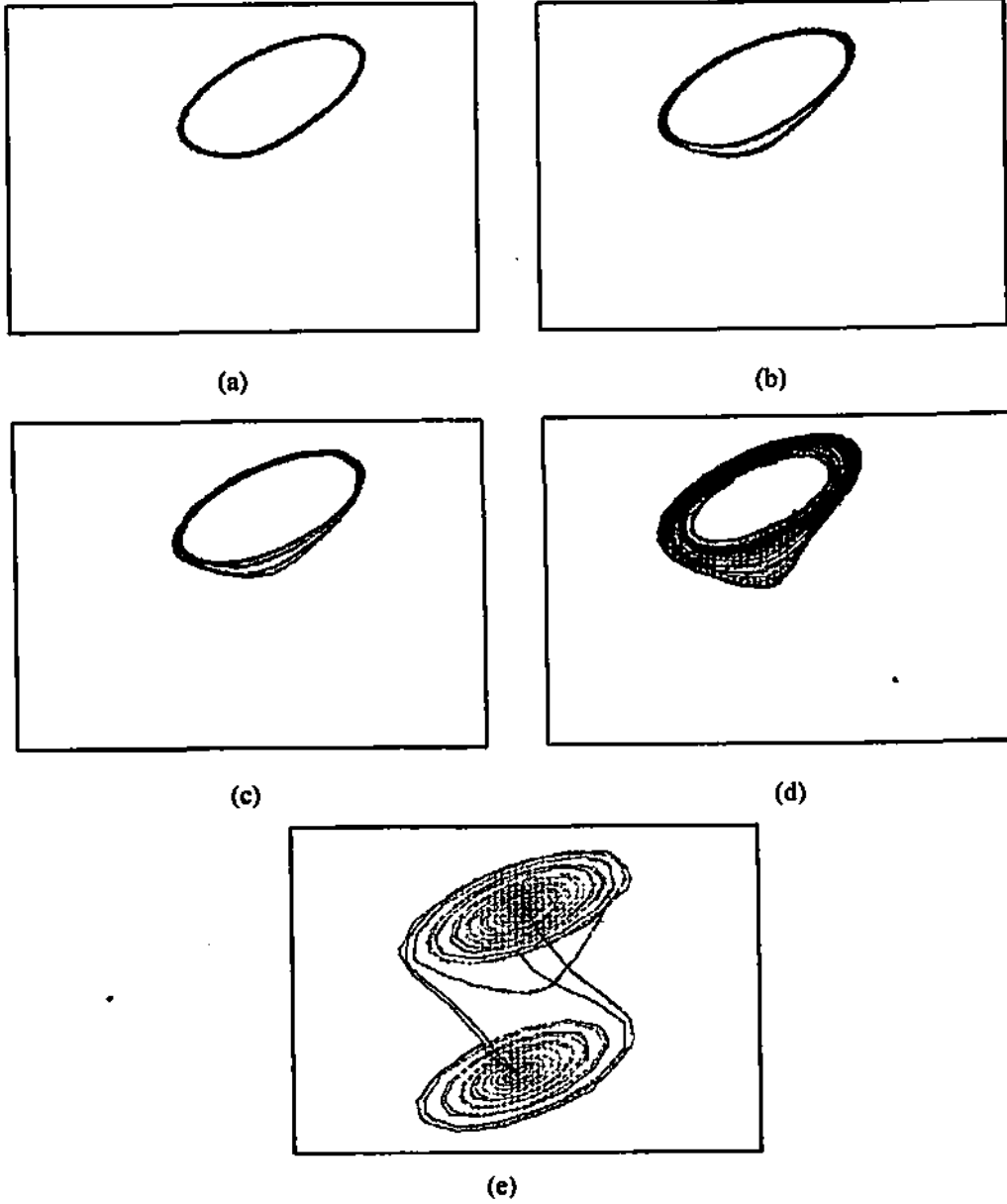
Tablo1. Gerçekleştirilen devreye ait elemanlar.

Chua Diyodu:		
A1	Op-amp	TL081
A2	Op-amp	TL081
R1	Direnç ¼ W	3.3kΩ
R2	Direnç ¼ W	22kΩ
R3	Direnç ¼ W	22kΩ
R4	Direnç ¼ W	2.2kΩ
R5	Direnç ¼ W	220Ω
R6	Direnç ¼ W	220Ω
Diğer elemanlar:		
R	Direnç ¼ W	1.85kΩ
C1	Kondansatör	1nF
C2	Kondansatör	10nF
L	Bobin (değişken)	1-7mH

Devredeki tüm eleman değerleri sabit tutulup L bobininin değeri değiştirildiğinde, devre, değişik dinamik davranış türleri sergiler. Şekil 5'te pratik olarak elde edilen bu kaotik davranış dizisine ait durum-uzay diyagramları verilmiştir. Bunun için devrede X-Y konumundaki bir osiloskobun X kanalına V_1 ve Y kanalına V_2 gerilimleri bağlanmıştır. L'nin yeterince büyük bir değeri için ($L > 5.25 \text{ mH}$) P_+ ve P_- denge noktaları kararlı ($\gamma < 0$ ve $\sigma < 0$, $w \neq 0$) ve orijindeki denge noktası ise kararsızdır ($\gamma > 0$ ve $\sigma < 0$, $w \neq 0$). Enerji depolayan elemanların başlangıç değerlerine bağlı olarak sistem P_+ veya P_- noktalarında bir *denge noktası davranışı* gösterir. L indüktansı biraz düşürüldüğünde (5.1 mH) denge noktaları, reel özdeğerlerinin işareti aynı kalmasına rağmen, kompleks eşlenikli özdeğerlerinin reel kısımları işaret değiştirilerek pozitif olduğundan kararsız olur. Bu durumda sistem *limit-1 cycle davranışı* olarak adlandırılan bir osilasyon üretir. L indüktansı bu şekilde kademeli olarak düşürüldüğünde *limit-2 cycle* (4.8mH), *limit-4 cycle* (4.75mH), *spiral kaotik attractor* (4.55 mH) ve *double-scroll kaotik attractor* (3.56mH) davranışları elde edilir.

5. DEVRENİN SIMULINK İLE MODELLENMESİ

Şekil 1'de verilen devre Matlab/Simulink ortamında modellendi. Modelde L bobininin iç direnci, bobine seri olarak bağlanmış 5Ω'luk bir direnç şeklinde göz önüne alındı. Buna göre devrenin dinamik davranış dizisi Şekil 6'da görüldüğü gibi elde edildi. Nümerik olarak elde edilen bu davranışların Şekil 5'te gösterilen osiloskop sonuçları ile aynı özelliklere sahip oldukları açık olarak görülmektedir.

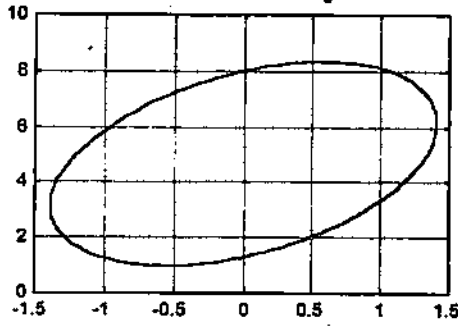


Şekil 5. Şekil 4'te verilen devrenin pratik olarak gerçekleştirilmesiyle elde edilen kaotik davranış türleri: a) limit-1 cycle, b) limit-2 cycle, c) limit-4 cycle, d) spiral kaotik attraktor, e) double-scroll kaotik attraktor (Düşey eksen: V_1 : 2V/div, yatay eksen: V_2 : 0.5V/div).

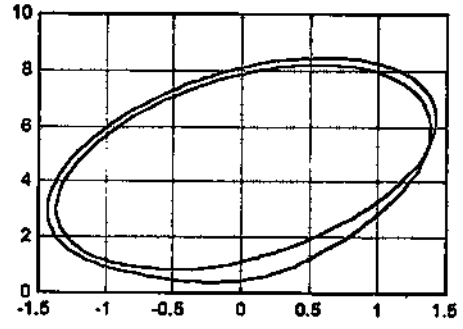
6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, değişken değerli bir bobin kullanılarak Chua devresinde değişik kaotik davranışlar elde edildi. Daha önce devredeki R direnci ve C_1 kondansatörü yardımıyla elde edilen kaotik davranış biçimlerinin tümünün L indüktansı yardımıyla da elde edilebileceği gösterildi. Bu, Chua vd, 1986'da ifade edildiği gibi, nonlinear devrelerde periyodik olmayan davranışların incelenmesi için önemli bir sistem olan Chua devresinin zengin ve kompleks davranışlara sahip olan nadir fiziksel sistemlerden biri olduğu fikrini kuvvetlendirmektedir. Değişken dirençli devrede gözlenenin aksine, bu devre

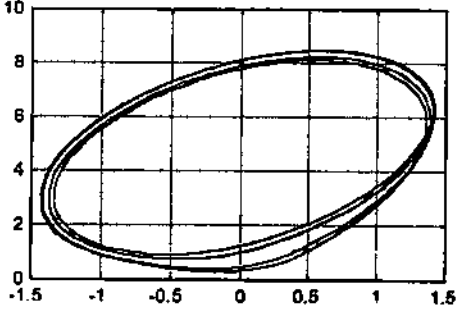
için elde edilen durum uzay diyagramlarına dikkat edilirse kaotik davranışların büyüklüğü genlik olarak aynı kalmaktadır. Bu ise, denge noktalarının pozisyonunun L değerinden bağımsız olmasından kaynaklanmaktadır.



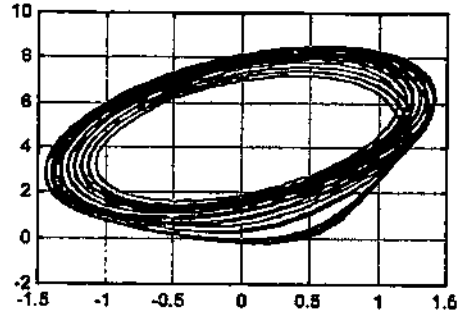
(a)



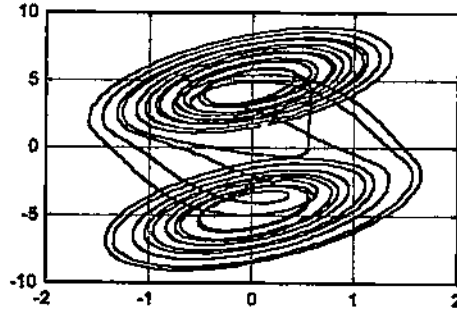
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 6. Matlab/simulink ortamında modellenmiş Chua devresine ait kaotik davranış dizisi: a) $L=5.1$ mH, limit-1 cycle, b) 4.8 mH, limit-2 cycle, c) 4.75 mH, limit-4 cycle, d) 4.55 mH, spiral kaotik attraktor, e) 4.56 mH, double-scroll kaotik attraktor (düşey eksen: V_1 , yatay eksen: V_2).

KAYNAKLAR

1. Kennedy, M.P., "Experimental chaos from autonomous electronic circuits", Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A, 353, 13-32, 1995.
2. Kennedy, M.P., "Robust op amp realization of Chua's circuit", Frequenz, 46, 3-4, 1992.
3. Kennedy, M.P., "Three step to chaos II. A Chua's circuit primer", IEEE Trans. Circuits Syst., Part 1, 40, 657-674, 1993.
4. Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983.
5. Chua, L.O., Komuro, M. and Matsumoto, T., "The double scroll family, Parts I and II", IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-33, 11, 1073-1118, 1986.
6. Chua, L.O., Yu, J.B. and Yu, Y.Y., "Negative resistance devices", Int. J. Circuit Theory Appl., 11, 161-186, 1983.
7. Delgado-Restituto, M., and Rodriguez-Vasquez, A., "A CMOS monolithic Chua's circuit", J. Circuits Syst. Comput., 3, 2, 1993.