

ELEKTROSTATİK ALAN PROBLEMLERİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Murat UYAR¹

Selçuk YILDIRIM²

^{1,2} Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü, Fırat Üniversitesi, 23119, Elazığ

¹e-posta: muyar@firat.edu.tr

²e-posta: syildirim@firat.edu.tr

ABSTRACT

This work presents solutions of the direct boundary element method (BEM) for two dimensional electrostatic field problems. Numerical solutions obtained in this investigate are for the two-dimensional Laplace equation using the constant elements. For the calculation of electric field intensity using BEM, a software program called 'EFIELD' has been developed in MATLAB software package. Using the developed program, an example on electrode system which includes external regions has been given. Obtained results have been compared with those obtained from ELECTRO package program for verify solution of program. Effect of the increase in elements number to the solution has been also investigated.

Keywords: *Electrostatic Field, Boundary Element Method, Constant Boundary Elements, Laplace Equation.*

1. GİRİŞ

Yüksek gerilim cihazlarının izolasyonu, elektrik güç sistemlerindeki güvenlik gereksinimlerinden dolayı günden güne önem kazanmaktadır. Elektrik alanı ve potansiyel dağılımının belirlenmesi, yüksek gerilim cihazlarının tasarlanması ve geliştirilmesinde çok önemli rol oynamaktadır. Elektrik alan dağılımı bilindiği takdirde kısmi deşarjlar ve bu deşarjların etkileri azaltılabilir [1].

Elektrostatik alanların analizi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler deneysel, analitik ve sayısal yöntemlerdir. Empedans ağları, yarı iletken kağıt, elektrolitik tank gibi deneysel yöntemler geçmişte bazı tasarımlarda kullanılmıştır. Bu analog teknikler, karmaşık yapıdaki cihazlar ile çok yalıtkanlı ve iletkenli ortamlara sahip problemlerin analizinde yetersiz kaldığı için tercih edilmemiştir.

Elektrostatik alanları tanımlayan Laplace ve Poisson denklemlerinin analitik çözümü basit geometriler ve yük dağılımları için elde edilebilir. Fakat bu tip problemlerin çözümü oldukça sınırlı bir kullanım alanına sahiptir. Uygulamada sıkça kullanılan elektrik motorları ve özellikle de yüksek gerilim izolatör geometrileri, basit yük dağılımları ile analiz edilemez ve ayrıca analitik şekilde ifade edilemez [2].

Sayısal yöntemler, yapılan analizlerin doğruluğunu arttırmak ve çözüm süresini azaltmak için uygulamadaki alan problemlerini çözmeye oldukça ilgi çekici olmuştur. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanları ve yük benzetim gibi sayısal yöntemler uygulamada kullanılan en yaygın yöntemlerdir. Bu yöntemler, diferansiyel denklem üzerinden çözüm yapan ve integral denklem üzerinden çözüm yapan sayısal yöntemler olmak üzere iki grupta incelenir. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemi birinci gruba girerken, sınır elemanları ve yük benzetim yöntemi ikinci gruba yer alır.

2. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Sınır elemanları yöntemi, bilim ve teknolojinin farklı branşlarındaki sınır değer problemlerinin çözümü için ortaya çıkarılan bir sayısal yöntemdir [3]. Bu yöntem, sınır integral denklem yöntemi olarak bilinen integral denklem yönteminden türetilmiştir. Geometrik sınırlar üzerinde tanımlanmış sınır şartları ile beraber verilen bir denklemin Green fonksiyonu bilindiğinde, böyle bir sınır değer problemi integral denklem haline getirilebilir [4, 5]:

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (1)$$

Bu sınır integral denkleminde, sınır üzerindeki bir "i" düğümünde hesaplanacak potansiyel u_i ile gösterilir. u^* , iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümüdür:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2)$$

Sınır integral denklemini çözmek amacıyla iki boyutlu bir B bölgesi, 'sınır elemanı' olarak isimlendirilen N tane sınır parçasıyla S sınırı üzerinde ayrıştırılır ve denk.(1)'deki sınır integral denklemi, sınır üzerindeki bir "i" düğümü için şu şekilde yazılabilir:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} u q^* dS = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} q u^* dS \quad (3)$$

Burada u ve q , S_j elemanı üzerindeki potansiyel (u) ve akı (q) değerleridir. S_j sınır elemanı üzerindeki integaller, sayısal integrasyon yöntemleri kullanılarak

çözüldükten sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$Hu = Gq \quad (4)$$

Bu sınır bilinmeyenlerinin bulunması ile bölge içerisinde herhangi bir i noktasındaki potansiyel hesabın için kullanılan çözüm denklemi elde edilir:

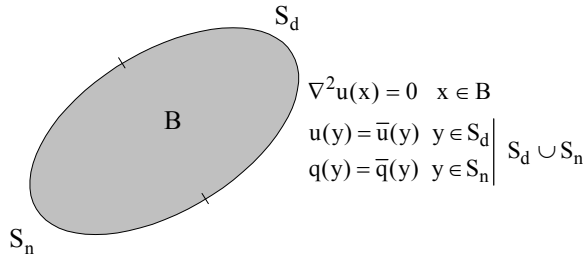
$$u_i = \int_{S_j} q u^* dS - \int_{S_j} u q^* dS \quad (5)$$

Bu denkleme *iç nokta integral denklemi* adı verilir.

3. ELEKTRİK ALAN ANALİZİ

Elektrik alan problemlerinin analizi ile ilgili fiziksel büyüklük genellikle elektrik alan şiddetidir. Yüksek gerilim güç cihazlarının izolasyon tasarımında, elektrot ve dielektrik yüzeyler üzerindeki elektrik alan şiddetinin bilinmesi ve elektrik deşarj problemleri için analiz bölgesi boyunca elektrik alan dağılımının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır [6].

Bir elektrik alan problemi için analiz edilecek bölge sınırları, Dirichlet sınırı (S_d), Neumann sınırı (S_n) ve karışık sınır olmak ($S_d \cup S_n$) üzere üç sınır şartı ile tanımlanabilir (Şekil 1).



Şekil-1. İki boyutlu bir problem bölgesi ve sınırlar

Burada, S_d sınırı üzerine potansiyel (u) ve S_n sınırı üzerine potansiyelin normale göre türevi ($\partial u / \partial n = 0$) uygulanır.

Kartezyen koordinatlardaki potansiyel gradyant vektörü,

$$\vec{E}(x, y) = -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (6)$$

olduğundan denk.(5)'de belirtilen iç nokta integral denklemi dikkate alınarak, ' i ' uygulama noktasına göre gradyant alındığında,

$$(E(x, y))_i = -\int_{S_j} (\nabla_i u^*) q_j dS + \int_{S_j} u_j (\nabla_i q^*) dS \quad (7)$$

elde edilir. Denk.(7)'in daha sade şekli,

$$(E_x)_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_{S_j} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} q_j dS + \int_{S_j} \frac{\partial q^*}{\partial x_i} u_j dS \quad (8)$$

$$(E_y)_i = -\frac{\partial u}{\partial y_i} = -\int_{S_j} \frac{\partial u^*}{\partial y_i} q_j dS + \int_{S_j} \frac{\partial q^*}{\partial y_i} u_j dS \quad (9)$$

olarak yazılır. Denk.(6)'ya göre bu ifadeler elektrik alanının x ve y bileşenlerini temsil etmektedir.

Denk.(8) ve denk.(9)'da temel çözümün bir ' i ' iç noktası üzerinde etkili olduğu ve bütün u ve q değerlerinin daha önceden bilindiği göz önüne alındığında bu denklemlerin matris şeklindeki gösterimi,

$$[E_x] = -[G_x][q] + [H_x][u] \quad (10)$$

$$[E_y] = -[G_y][q] + [H_y][u] \quad (11)$$

şeklinde olur. Denk.(10) ve denk.(11)'in sağ tarafında bilinmeyen yoktur. Bu denklemler kullanılarak elektrik alanın x ve y yönündeki bileşenleri hesaplanır. Burada H_x ile G_x , x bileşenine göre, H_y ile G_y ise, y bileşenine göre $N \times 1$ boyutunda iki etki matrisidir.

Elektrik alanının genliği E_m ve açısı E_θ ise,

$$|\vec{E}_m| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad \text{ve} \quad E_\theta = \tan^{-1} \left(\frac{E_y}{E_x} \right) \quad (12)$$

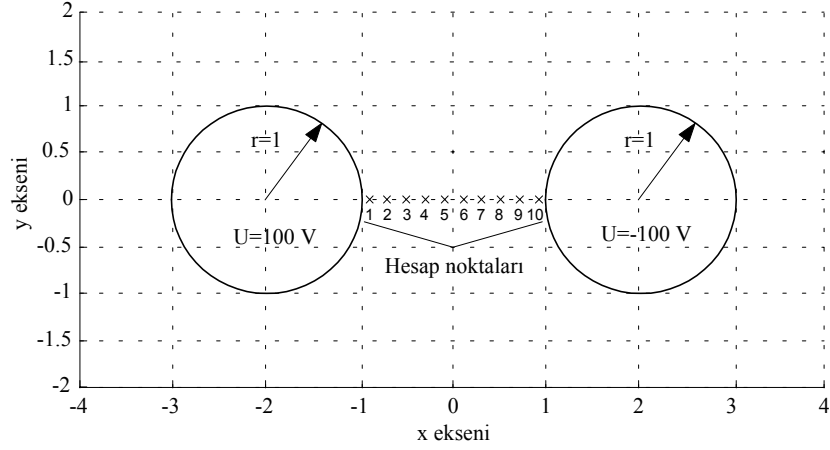
formülleri ile hesaplanabilir [2].

4. UYGULAMALAR

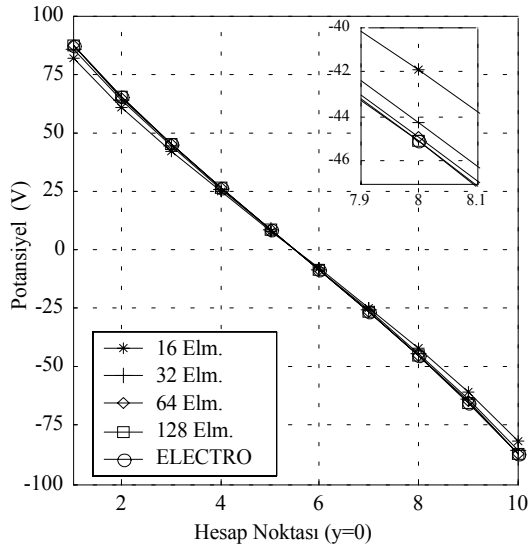
Elektrik alan analizi için MATLAB'da hazırlanan ve EFIELD adı verilen bir program geliştirilmiştir. Bu program, iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümü için sınır elemanları yöntemini kullanmaktadır. Programda problem bölgesinin sınırları, sabit sınır elemanları ile bölmelenmiştir.

İncelenen örnek sistemde, yarıçapları 1 m olan ve y eksenine paralel iki küreden oluşan elektrot sisteminin potansiyel ve elektrik alan dağılımları belirlenmiştir. (Şekil 2). EFIELD programı ile problem geometrisi 16, 32, 64 ve 128 adet sabit sınır elemanı ile bölmelenmiş ve $y=0$ eksenini boyunca belirlenen 10 hesap noktasından değerler alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, ELECTRO paket programı sonuçları ile Tablo 1 ve Şekil 3'de karşılaştırılmıştır. Ayrıca Şekil 4'de eş potansiyel ve eş elektrik alan çizimleri gösterilmiştir.

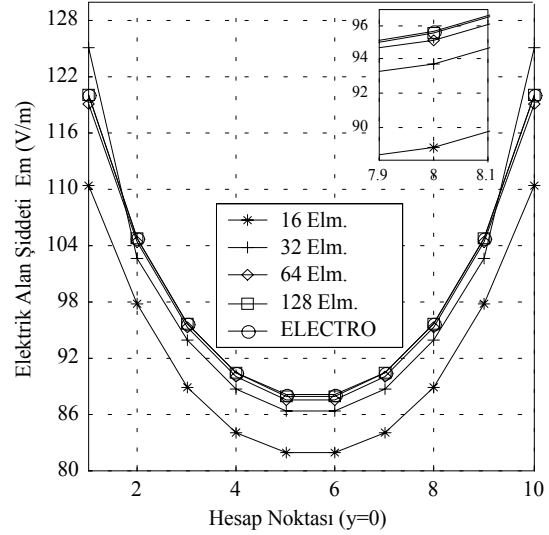
Bu çalışmada kullanılan ELECTRO, sınır elemanları yöntemiyle iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümü için kullanılan bir paket programdır [7].



Şekil-2. Küre-küre elektrot sistemi ve incelenen hesap noktaları



(a)

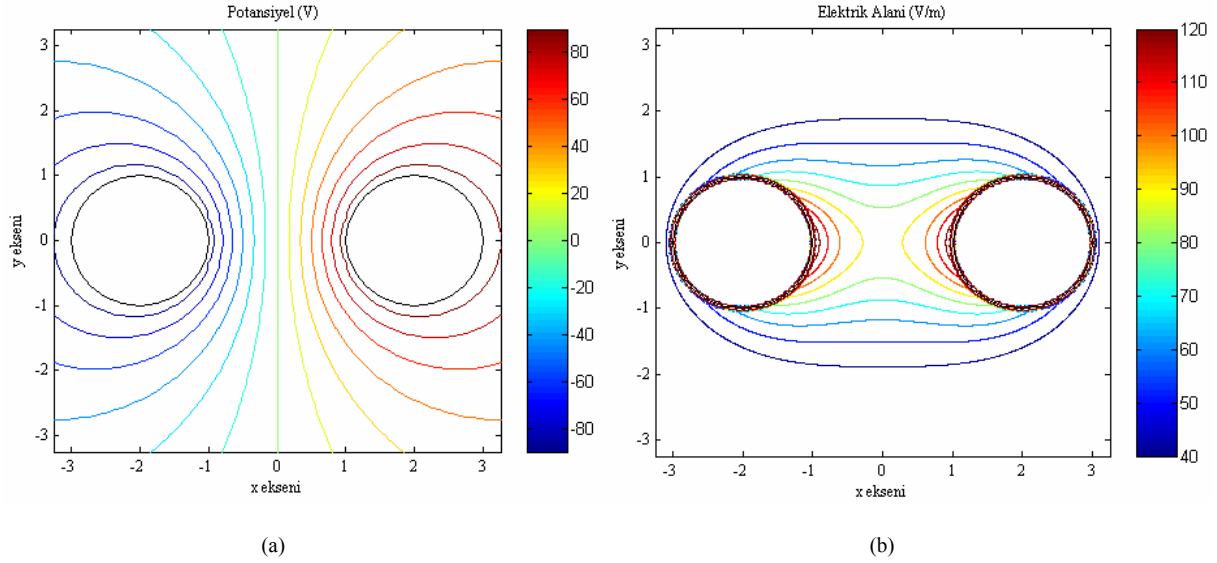


(b)

Şekil-3. (a) y=0 eksenı boyunca potansiyelin değışimi, (b) Elektrik alan şiddetinin değışimi

Tablo 1. Küre-küre elektrot sisteminin 128 eleman ile çözüm sonuçları

Hesap Noktası	Koordinatlar (m)		ELECTRO Programı		EFIELD Programı	
	x	y	U (V)	Em (V/m)	U (V)	Em (V/m)
1	-0.9	0.0	87.439	120.100	87.332	119.937
2	-0.7	0.0	65.083	104.790	65.006	104.654
3	-0.5	0.0	45.118	95.641	45.066	95.527
4	-0.3	0.0	26.570	90.383	26.539	90.278
5	-0.1	0.0	8.7770	87.965	8.7670	87.865
6	0.1	0.0	-8.7770	87.965	-8.7670	87.865
7	0.3	0.0	-26.570	90.383	-26.539	90.278
8	0.5	0.0	-45.118	95.641	-45.066	95.527
9	0.7	0.0	-65.083	104.790	-65.006	104.654
10	0.9	0.0	-87.439	120.100	-87.332	119.937



Şekil-4. (a) Küre-küre elektrot sisteminin eşpotansiyel çizgileri, (b) Eş elektrik alan çizgileri

5. SONUÇLAR

Sınır elemanları yöntemiyle iki boyutlu elektrostatik alan analizi için ilk olarak Laplace denkleminin bir iç nokta integral denklemi elde edilmiştir. Daha sonra bu denklem üzerinden potansiyel gradyant alınarak x ve y yönündeki elektrik alan şiddetini veren formüller elde edilmiştir.

Elde edilen denklemler yardımıyla çözüm yapan EFIELD isimli bir program geliştirilmiştir. Bu program kullanılarak küre-küre elektrot sistemi üzerinde örnek bir uygulama yapılmıştır.

Bu uygulamanın sonuçlarına ilişkin şekil ve grafiklerden de görüldüğü gibi, potansiyel ve elektrik alan şiddeti değerleri doğru bir şekilde elde edilmiştir. Ayrıca, eleman sayısı artırıldığında - problem geometrisinin daha iyi modellenmesi nedeniyle - daha doğru sonuçların elde edildiği görülmüştür.

İki boyutlu bu problem için bir boyutlu sabit sınır elemanları kullanılmıştır. Sınır elemanları yönteminin bu özelliği sayesinde problemin boyutu bir derece indirgenmektedir. Böylece hem veri sayısı azalmakta, hem de çözüm süresi kısalmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Abdel-Salam, M., Electric Fields, Chapter 2 in High Voltage Engineering: Theory and Practice, Dekker, 1990.
- [2] Uyar, M., Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrik Alan Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 77 s., 2004.
- [3] Kythe, P. K., An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Press, London-Tokyo, 1995.

- [4] Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1984.
- [5] Yıldırım, S., Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 113 s., 1999.
- [6] Yamashita, H., Shinozaki, K., Nakamae, E., Boundary- Finite Element Method to Compute Directly Electric Field Intensity with High Accuracy, IEEE Trans. Power Delivery, 3, No.4, 1754-1760, 1988.
- [7] Integrated Engineering Software Inc., ELECTRO: Two-Dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, Users and Technical Manual, Winnipeg, Manitoba, Canada, 1997.