

Zamanla Değişen Bazı Doğrusal Sistemler İçin Yeni Bir Çözüm Yöntemi

For Some Time Varying Linear Systems A New Solution Method

İhsan DAL¹, Arif NACAROĞLU²

¹Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gaziantep Üniversitesi
idal72@hotmail.com

²Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gaziantep Üniversitesi
arif1@gantep.edu.tr

Özet

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin çözümünde Laplace dönüşümünün de içinde bulunduğu birçok çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Ancak zamanla değişen doğrusal sistemlerin genel bir analitik çözüm metodu bulunmamaktadır. Zamanla değişen doğrusal sistemlerin çözülebilmesi, bu sistemlerin uygun transfer matrisleri ile zamanla değişmeyen doğrusal sistemlere dönüştürülebilmesi ile mümkündür. Bu makalede, zamanla değişen doğrusal sistemlerin, zamanla değişmeyen doğrusal sistemlere dönüştürülmesini sağlayan sınırlı sayıdaki sınıflandırmalara (A_1 Class, A_h Class **HG** Class) yeni bir sınıf eklenmiş ve belirtilen yeni sınıf için çözüm metodu açıklanmıştır. Sistemin bu var olan sınıflandırma sistemlerinden hangisine ait olduğunun belirlenmesi, sistemin öz değerlerinin yapısı ile doğrudan ilişkilidir ve bu çalışmada yine öz değerler dikkate alınarak, yukarıda belirtilen A_1 Class, A_h Class **HG** Class sınıflarına ait olmayan yeni bir çözüm yöntemi açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zamanla değişen doğrusal sistemler, Çözülebilir doğrusal sistemler

Abstract

There have been various solution methods including Laplace transform developed for Time invariant Linear Systems (TILS). However, there isn't a general analytical solution method for Time Varying Linear Systems (TVLS). To solve these systems, we should find suitable transfer matrices to transform TVLS into TILS so that analytical solution becomes possible. In this paper, we have added a new class to existed solution classes (A_1 Class, A_h Class **HG** Class) to transform TVLS into TILS and the proposed new solution class is explained. Determination of any system's class is directly related to the structure of the system's eigenvalues and in this study we also take eigenvalues into consideration to explain a new solution class apart from existed solution classes.

Keywords: Time varying linear system, Solvable linear system

1. Giriş

Zamanla değişen n boyutlu doğrusal sistemler

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

Burada, x: durum vektörü (nx1 elemanlı vektör)
u: kontrol vektörü (1x1 elemanlı vektör)
A: sistem matrisi (nxn elemanlı matris)
B: giriş matrisi (nx1 elemanlı matris)

olarak adlandırılır. A(t) ve B(t) elemanları, devre elemanları ile doğrudan ilişkilidir ve bu elemanların zamana bağlı olup olmamaları, tüm sistemin zamana bağlı olup olmaması sonucunu tayin eder.

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemler için ise A(t)=A ve B(t)=B olduğundan, zamanla değişmeyen n boyutlu doğrusal sistemler

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Bu sistemin genel bir çözüm yöntemi mevcut olup, (2) eşitliğine Laplace dönüşümü uygulanarak

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (3)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (4)$$

sistem çözümü mümkün hale gelir. (4) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulanarak x(t) aşağıdaki gibi elde edilir. [1]

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (5)$$

Sisteme giriş uygulanmadığı zaman (u(t) = 0), yani homojen zamanla değişmeyen sistemler için x(t)

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (6)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. [2] Ancak zamanla değişen sistemler için bu şekilde genel bir çözüm yöntemi bulunmamaktadır. **A₁ Class**, **A_h Class** ve **HG Class** çözüm metotları kullanılarak bazı zamanla değişen sistemler, uygun transfer matrisleriyle zamanla değişmeyen sistemlere dönüştürülerek, bu sistemlerin çözümü mümkün hale gelmektedir. [3], [4] ve [5]

Zamanla değişen bir sistemin **A₁ Class**, **A_h Class** veya **HG Class**'tan birine ait olup olmaması, sistemin öz değerleriyle doğrudan ilişkilidir.

Eğer

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad (7)$$

homojen zamanla değişen doğrusal sistemin öz değerleri sabit ise sistem **A₁ Class** grubuna ait olup bu sistem için çözüm

$$A_1 A(t) - A(t) A_1 = \frac{dA(t)}{dt} \quad (8)$$

eşitliğini sağlayan A_1 matrisi [3] ile elde edilen

$$T(t) = e^{A_1 t} \quad (9)$$

Transfer matrisi hesaplanabilir. Zamanla değişen doğrusal sistem, dönüşüm matrisi

$$x(t) = T(t)z(t) \quad (10)$$

bağıntısı ile

$$\frac{dz(t)}{dt} = \bar{A}z(t) \quad (11)$$

zamanla değişmeyen doğrusal sisteme dönüşür.

Burada $\bar{A}$ [3]

$$\bar{A} = T^{-1}(t)A(t)T(t) - T^{-1}(t)\frac{dT(t)}{dt} \quad (12)$$

eşitliği ile hesaplanır ve $z(t)$ 'de [2]

$$z(t) = e^{\bar{A}t} z_0 \quad (13)$$

eşitliği ile hesaplandıktan sonra $x(t)$

$$x(t) = T(t)z(t) = e^{A_1 t} e^{\bar{A}t} e^{-A_1 t_0} x(t_0) \quad (14)$$

eşitliği ile bulunur.

Eğer homojen zamanla değişen doğrusal sistemin (7) öz değerleri sabit değil ve birbirlerinin katı ise sistem **A_h Class** grubuna ait olup bu sistem için A_1 matrisi

$$A_1 A(t) - A(t) A_1 = \frac{dA(t)}{h(t)} - \frac{dh(t)}{h^2(t)} A(t) \quad (16)$$

eşitliği ile hesaplanır. A_1 matrisi [3] kullanılarak Transfer matrisi

$$T(t) = e^{A_1 g(t)} \quad (17)$$

eşitliği hesaplanır. (16) eşitliğinde $h(t)$, öz değerlerin taban fonksiyonudur ve sistemin öz değerleri

$$\lambda_1 = k_1 h(t), \lambda_2 = k_2 h(t), \dots, \lambda_n = k_n h(t) \quad (18)$$

şeklinde (17) eşitliğindeki $g(t)$ ise

$$g(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \quad (19)$$

eşitliği ile bulunur. Bu değerler hesaplandıktan sonra $x(t)$ sırasıyla (12), (13) ve (14) eşitlikleri kullanılarak bulunabilir. [3]

Eğer homojen zamanla değişen doğrusal sistem,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) \\ &= \begin{bmatrix} t^{k-1} - t & 1 \\ -(t^2 - 1) & t^{k-1} + t \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (20)$$

şeklinde tanımlı ikinci dereceden bir sistem ise bu sistem **HG Class** grubuna dahil olup sistemin transfer matrisi

$$T(t) = e^{\frac{t^k}{k}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

eşitliği ile bulunur. [5] Burada $x(t)$, **A₁ Class** ve **A_h Class**'ta belirtildiği gibi sırasıyla (12), (13) ve (14) eşitlikleri kullanılarak,

$$x(t) = T(t)\bar{\phi}(t, t_0)T^{-1}(t_0)x(t_0) \quad (22)$$

eşitliği ile elde edilir. [3]

2. Zamanla Değişen Doğrusal Sistemler İçin Yeni Bir Çözüm Sınıfı (IDAL Class)

Zamanla değişen doğrusal sistemlerin çözülebilmesi için sistemin öz değerlerinin önemli bir rol oynadığını belirtmiştik. Zamanla değişen homojen doğrusal sistemleri

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad (23)$$

eşitliği ifade ederiz. Burada zamanla değişen doğrusal sistemin ikinci dereceden bir sistem olduğunu ve

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} f(t) - g(t) & 1 \\ \frac{dg(t)}{dt} - g(t)^2 & f(t) + g(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (24)$$

eşitliğinde belirtilen $f(t)$ integrali alınabilen ve $g(t)$ 'de türevi alınabilen zamana bağlı fonksiyonlar olması şartı ile, sistemin öz değerleri

$$\lambda_1 = f(t) + \sqrt{\frac{dg(t)}{dt}} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = f(t) - \sqrt{\frac{dg(t)}{dt}} \quad (25)$$

şeklinde bulunur. Sistemin öz değerlerinin daha önce analitik çözümü tanımlanmış **A₁ Class**, **A_h Class** ve **HG Class**

gruplarında belirtilen sistemlerin öz değerlerinin hiç birisine dahil olmadığını görebiliriz. Bu sistemi zamanla değişmeyen doğrusal sisteme dönüştüren Transfer matrisi

$$T(t) = e^{\int_{t_0}^t f(t) dt} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

eşitliği ile bulunur. Burada A(t) sistem matrisini, zamanla değişmeyen $\bar{A}$ matrisine dönüştürmek için bütün f(t) ve g(t) değerleri için (12) eşitliği kullanılır. Bütün f(t) ve g(t) değerleri için $\bar{A}$ sabit sistemi

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

şeklinde bulunur. Zamanla değişmeyen homojen

$$\frac{dz(t)}{dt} = \bar{A}z(t) \quad (28)$$

doğrusal sistemin de x(t)

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t f(t) dt} \begin{bmatrix} 1 & (t) \\ g(t) & t g(t) + 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

eşitliği ile bulunur. Başlangıç değerleri de hesaba katıldığında

$$x(t) = T(t) \bar{\phi}(t, t_0) T^{-1}(t_0) x(t_0) \quad (30)$$

eşitliğinden x(t) elde edilir.

2.1 Örnek

İkinci dereceden zamanla değişen homojen doğrusal sistemin durum-uzay denklemi

$$\begin{bmatrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \end{bmatrix} = A(t)x(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \sin(t) \cos(t) - 2 \sin(t) - 1 & 1 \\ 2 \cos(t) - (2 \sin(t) + 1)^2 & 2 \sin(t) \cos(t) + 2 \sin(t) + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

şeklinde verilsin. Bu sistemin öz değerleri

$$\lambda_1 = 2 \sin(t) \cos(t) + \sqrt{2 \cos(t)} \text{ ve}$$

$$\lambda_2 = 2 \sin(t) \cos(t) - \sqrt{2 \cos(t)}. \quad (32)$$

olarak hesaplanır. Bu sistemin transfer matrisi

$$T(t) = e^{(\sin(t))^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 \sin(t) + 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

eşitliğinde belirtildiği gibi elde edilir. Bu transfer matrisi kullanılarak zamanla değişen homojen doğrusal sistem

$$\frac{dz(t)}{dt} = \bar{A}z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) \quad (34)$$

eşitliğindeki gibi sabit katsayılı sisteme dönüştürülür. Bu sistem de x(t), başlangıç değerleri de hesaba katılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$x(t) = e^{(\sin(t-t_0))^2} \begin{bmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 2 \sin(t-t_0) + 1 & 2(t-t_0) \sin(t-t_0) + 2 \end{bmatrix} T^{-1}(t_0) x(t_0) \quad (35)$$

3. Sonuçlar

Zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin çözümü için genel bir analitik çözüm metodu vardır. Ancak zamanla değişen doğrusal sistemlerin çözümü için genel bir analitik çözüm yöntemi mevcut değildir. Zamanla değişen doğrusal sistemlerin çözümü uygun bir transfer matrisi kullanılarak, bu sistem zamanla değişmeyen doğrusal sisteme dönüştürüldükten sonra çözümü mümkün olmaktadır.

Bu çalışmada, zamanla değişen doğrusal sistemlerin analitik çözümü için zamanla değişmeyen doğrusal sistemlere uygun transfer matrisi kullanılarak dönüştürülmesini sağlayan sınırlı sayıdaki sınıflandırma tanımına (A_1 Class, A_h Class HG Class) bir yenisi (**IDAL** Class) eklenmiştir. **IDAL** Class ile analitik çözümü olan farklı bir A(t) yapısı önerildiği için zamanla değişen doğrusal sistemlerin çözüm kümesi genişletilmiştir.

4. Kaynaklar

- [1] Bernard Kolman, David R. Hill “Elementary Linear Algebra”, Pearson Prentice Hall, pp-213-225, 2004
- [2] C. Ray Wylie, Louis C. Barrett “Advanced Engineering Mathematics”, McGrawhill, pp-857-914, 1995
- [3] Min-Yen Wu (1980). Solution of certain classes of linear time-varying systems. International Journal of Control. Vol. **31**, No.1, 11-20
- [4] Min-Yen Wu (1980). Solvability and representation of linear time-varying systems. International Journal of Control, Vol. **31**, No.5, 937-945
- [5] Hasan Güneşli, Arif Nacaroglu (2011). A New Solvable Class Linear Time Varying System, University of Gaziantep