

Yeni Bir Yüksek Çözünürlüklü Spektral Kestirim Algoritması

A New High Resolution Spectral Estimation Algorithm

Okyanus TULGAR¹, Ahmet Arif ERGİN²

¹Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
otulgar@gyte.edu.tr

²Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
aergin@gyte.edu.tr

Özet

Geleneksel spektral kestirim algoritmalarında yüksek çözünürlük sağlanabilmesi için yüksek işlem yükü gerekmektedir. Bu durum işlemci ve hafıza kaynakları bakımından problemlere sebep olmaktadır. Bu bildiride tanıtılan ve eksponansiyel verilere uygulanabilen spektral kestirim algoritması ile, geleneksel yöntemlere göre daha az işlem yükü ile yüksek çözünürlük sağlanmaktadır. Önerilen bu algoritma ile çözünürlükteki iyileştirmeye karşılık işlem yükünde meydana gelen artış miktarı yine bu bildiride verilmiştir. Hızlı Fourier Dönüşümü (Fast Fourier Transform, FFT) ve optimizasyon temelli bu algoritmanın sonuçları geleneksel FFT ile karşılaştırılmıştır. Çeşitli İşaret Gürültü Oranları (İGO) ile yapılan simülasyonlarda, İGO değeri 2 dB'nin üzerinde iken harmonik tespitinde FFT'ye göre daha yüksek başarımlar sağlanmıştır. Tepe değer tespiti sonuçları ve Ortalama Karesel Hata (Mean Square Error, MSE) değerleri göstermektedir ki, tanıtılan algoritma kullanılarak sinüzoidal verilerden harmonik hesabı düşük işlem yükü ve yüksek başarımla sağlanmaktadır.

Abstract

In the traditional spectral estimation algorithms, highly computational burden is required to get high resolution. This issue causes problems in terms of processor and memory resources. With the introduced spectral estimation algorithm, which can be applied to exponential data, high resolution is obtained with lower computation burden compared to the traditional methods. The amount of increment in the computational burden corresponds to the resolution improvement has been also given in this paper. The results of this FFT and optimization based algorithm have been compared with the traditional FFT. In the simulations with various Signal to Noise Ratios (SNR), more accuracy compared to the FFT results has been obtained for the harmonic detection with SNR values greater than 2 dB. The peak detection results and Mean Square Error (MSE) values show that the harmonic extraction from sinusoidal data can

be achieved by using the introduced algorithm with low computational burden and high accuracy.

1. Giriş

Eksponansiyel verilerden harmonik tespiti, elektronikte sinyal işlemenin önem kazandığı birçok uygulamada sıklıkla yapılmaktadır. Hesaplamalı elektromanyetik, radar sistemleri, alıcı/verici devreleri ve daha birçok uygulamada spektral kestirimin önemi arttıkça çözünürlük problemi ve hesap yükü etkisini göstermeye başlamıştır. Bu problemi azaltmak için literatürde çeşitli yöntemler mevcuttur. Geleneksel spektral kestirim algoritmalarında yüksek çözünürlük sağlanabilmesi için yüksek işlem yükü gerekmektedir [1]. Bu yöntemlerin en çok kullanılanlarından biri FFT'dir [1]. Tıpkı diğer geleneksel yöntemlerde (Ayrık Cosinüs Dönüşümü, PMUSIC, Welch Yöntemi, Bartlett Yöntemi vb.) olduğu gibi, spektral uzaydaki çözünürlüğü arttırmak için veri uzunluğunu arttırmak gerekmektedir [1]. Bu ise, ölçüm ve hesap sürelerinin uzamasına sebep olmaktadır. Pratikte radar ve benzeri sistemlerde yüksek hassasiyete ihtiyaç olmasının yanı sıra düşük ölçüm ve hesap süresi de gerekmektedir. Dolayısıyla yeterince düşük veri boyutu ile yüksek hassasiyete ulaşılması gerekmektedir [2]. Bu durum, spektral kestirim algoritmalarının uygulama sahasını kısıtlamaktadır. Bu bildiride tanıtılan spektral kestirim algoritması ile, geleneksel yöntemlere göre daha az işlem yükü ile yüksek çözünürlük sağlanmaktadır. Çeşitli İGO değerleri göz önünde bulundurularak yapılan simülasyonlara bakıldığında FFT'ye göre oldukça yüksek başarımlar sağlanmıştır. Bu algoritmanın kısıtı, ölçüm verisinin eksponansiyel yapıya sahip olma ihtiyacıdır. Fakat bu ihtiyaç, elektroniğin birçok uygulamasında sıklıkla sağlanmaktadır [2], [3]. Dolayısıyla, bu bildiride tanıtılan spektral kestirim algoritması, düşük işlem yükü ve yüksek hassasiyeti neticesinde, pratikte harmonik hesabı ve tepe tespiti (peak detection) gerektiren birçok sisteme uygulanabilir durumdadır.

Bildirinin geri kalanında, Bölüm 2'de algoritmanın detayları, Bölüm 3'de yapılan simülasyonlar ve Bölüm 4'de çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. Teorik Bilgi

Bir ölçüm sisteminde f_s örnekleme frekansıyla toplanmış ekspanansiyel veriler,

$$x(n) = \sum_{i=1}^M A_i \exp(j2\pi f_{0,i} n t_s), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

formuna sahiptir. Burada M harmonik sayısını, $f_{0,i}$ i indisli harmoniğin frekansını, $t_s = 1/f_s$ örnekleme zaman aralığını, n örnek indisini, N ise veri boyutunu göstermektedir. Bu sinyalin harmonik bileşenlerini tespit etmek için genellikle FFT kullanılmaktadır [1]. Ölçüm zaman aralığının sınırlı, $N < \infty$, olması sebebiyle, $x(n)$ işaretinin FFT ile elde edilen frekans spektrumu,

$$X(f_k) = \sum_{i=1}^M A_i \text{Sinc}(f_k - f_{0,i}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

ifadesine sahip olmak üzere, bu fonksiyon ayrık uzayda sadece $f_k = -f_s/2 + k\Delta f$ eşit aralıklı frekans örnek noktalarında bir değere sahiptir [1]. Dolayısıyla, frekans noktaları arasındaki aralık, FFT ile elde edilen spektrumun çözünürlüğünü belirlemektedir. N noktalı FFT işlemi için frekans çözünürlüğü $\Delta f = f_s/N$ ifadesine sahiptir [1]. Bu ifadede örnekleme frekansı yerine t_s cinsinden eşiti yazılırsa,

$$\Delta f = \frac{1}{t_s N} = \frac{1}{T}, \quad T = t_{\max} - t_{\min}, \quad (3)$$

elde edilir. Burada T verinin zaman uzayındaki boyunu ifade etmektedir. Buradan anlaşılacağı üzere, çözünürlükte yapılması arzu edilen N_δ kadarlık artış için zaman genişliğinin de N_δ katına çıkarılması gerekmektedir. Öyle ki, örnekleme zaman aralığı sabit iken verinin boyutu NN_δ olmaktadır. N noktalı FFT işleminin hesap yükü $N \log_2 N$ ifadesine sahiptir [1]. Çözünürlüğün N_δ katına çıkarıldığı durumda ise hesap yükü, $NN_\delta \log_2(NN_\delta)$ olmaktadır. Bu ifade açılırsa,

$$\begin{aligned} NN_\delta \log_2(NN_\delta) &= NN_\delta (\log_2(N) + \log_2(N_\delta)) \\ &= N_\delta \underbrace{N \log_2(N)}_{N\text{-FFT}} + N_\delta N \log_2(N_\delta), \end{aligned} \quad (4)$$

elde edilir. Dolayısıyla, N ve NN_δ noktalı FFT için gerekli işlem yükleri arasındaki oran,

$$\gamma = \frac{N_\delta \log_2(NN_\delta)}{\log_2(N)}, \quad (5)$$

olmaktadır.

2.1. Geliştirilen Algoritma

Ölçüm verilerinin spektrumunda en yüksek genliğe karşılık gelen frekans değeri,

$$f_c = \arg \max_{f_k} |X(f_k)|, \quad (6)$$

olmak üzere,

$$y(n) = x(n) \exp(-j2\pi f_c n t_s), \quad (7)$$

ifadesinin FFT ile elde edilen spektrumu,

$$Y(f_k) = \sum_{i=1}^M \text{Sinc}(f_k - (f_{0,i} - f_c)), \quad (8)$$

denkleminde sahiptir [1]. Bu ifadede $f_c = f_{0,i}$ olması durumunda Sinc() fonksiyonu en yüksek değerini almaktadır [1]. Bu durumda,

$$\lim_{f_c \rightarrow f_{0,i}} Y(f_k) = A_i + e \quad (9)$$

olmaktadır. Burada e , diğer frekans harmoniklerinden kaynaklanan yan lobların katkısını belirtmektedir. İterasyon indisi l olmak üzere, i indisli harmonik için güncelleme denklemleri şu şekilde yazılabilir,

$$\text{Aşama 1: } y_l(n) = x_i(n) \exp(-j2\pi \nu_l n t_s)$$

$$\text{Aşama 2: } Y_l(f_k) = \text{FFT}(y_l(n)), \quad \Gamma_l = Y_l(0)$$

$$\text{Aşama 3: Eğer } |\Gamma_l| \geq |\Gamma_{l-1}|, \quad f'_i = \nu_l, \quad A'_i = \Gamma_l,$$

$$\nu_{l+1} = \nu_l + \lambda \Delta f / N_\delta, \quad l = l + 1,$$

$$\text{Eğer } |\Gamma_l| < |\Gamma_{l-1}|, \text{ iterasyonu bitir,}$$

$$x_{i+1}(n) = x_i(n) - A'_i \exp(j2\pi f'_i n t_s),$$

$$X_{i+1}(f_k) = \text{FFT}(x_{i+1}(n)), \quad i = i + 1.$$

Dikkat edilmesi gereken husus olarak, $i = 1$ indisli harmonik için $x_i(n) = x(n)$ alınarak her bir iterasyona başlanır ve tüm i değerleri için Aşama 3'deki sonlandırma kriteri sağlanana kadar iterasyonlar tekrarlanır. Burada λ ve başlangıç frekansı ν_0 'ın doğru belirlenmesi iterasyonların yakınsama hızını arttırmaktadır. Her bir i indisli harmonik için,

$$f_c = \arg \max_{f_k} |X(f_k)| \text{ seçildiği durumda,}$$

$$f_{c1} = f_c - \Delta f / 2, \quad f_{c2} = f_c + \Delta f / 2, \quad (10)$$

olsun. Eğer $|X(f_{c1})| > |X(f_{c2})|$ ise harmonik frekansı f_{c1} ile f_c arasındadır. Bu durumda, $\nu_0 = f_{c1}$ alınır. İlk iterasyonda $\nu_0 < f_c$ olduğundan her bir iterasyonda ν_l değerinin artırılması gerekmektedir. Bunu sağlamak için $\lambda = 1$ alınmalıdır. Eğer, $|X(f_{c1})| < |X(f_{c2})|$ ise harmonik frekansı f_{c2} ile f_c arasındadır. Bu durumda, $\nu_0 = f_{c2}$ alınır. İlk iterasyonda $\nu_0 > f_c$ olduğundan her bir iterasyonda ν_l değerinin azaltılması gerekmektedir. Bunu sağlamak için $\lambda = -1$ alınmalıdır.

İteratif işlemlerin kaç kez yapılacağı, örneklenmiş verideki harmonik sayısı ile alakalıdır. Bu sebeple, örneklenmiş verideki harmonik sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için Tekil Değer Ayrışımı (Singular Value Decomposition, SVD) kullanılmaktadır [4].

$$[\Psi] = [\Psi_0 \Psi_1 \dots \Psi_L]_{(N-L) \times (L+1)} \quad (11)$$

$$\Psi_n = [x(n) \ x(n+1) \dots x(N-L+n-1)]_{1 \times (N-L)}, \quad (12)$$

olmak üzere, $[\Psi]$ matrisinin SVD'si,

$$[\Psi] = [\mathbf{U}][\Sigma][\mathbf{V}]^H; \quad \sigma_1 > \sigma_2, \dots, \sigma_M > \sigma_{M+1}, \dots, \sigma_L, \quad (13)$$

şeklinde hesaplanır [5]. Burada, tekil değerler $\sigma_q = [\Sigma]_{q,q}$ $q = 1, 2, \dots, L$ olmaktadır. SVD işleminin yüksek hassasiyetle yapılabilmesi için $N/3 < L < N/2$ alınmalıdır [6]. Eşitlik (13)'de ilk M adet tekil değer, diğer $q > M + 1$ indisli tekil değerlere göre yüksek değer almaktadır [6]. Öyle ki, $\sigma_q \approx 0$, $q > M + 1$ olmaktadır [6]. Tolerans değeri τ olması

durumunda, $\sigma_i \geq \tau\sigma_{\max}$ ifadesini sağlayan σ_i değerlerinin sayısı M değerini vermektedir [5]. Buradan, örneklenmiş veride bulunan harmonik sayısı ve dolayısıyla, iterasyonların kaç kez yapılacağı tahmin edilmektedir. Örneklenmiş verinin İGO değeri azaldıkça σ_q , $q > M + 1$ tekil değerlerinin genliği artmaktadır. Hatta, İGO değerinin yeterince düşük olduğu durumda gürültü ve işaret bileşenlerine ait tekil değerler birbirine karışmaktadır. Bu durumda, SVD işleminin performansı azalmakta ve geliştirilen algoritmanın başarımı düşmektedir [5]. Bölüm 3 simülasyon sonuçlarında bu durumun sebep olduğu hatalar daha detaylı verilecektir.

Aşama 1 ile 3 arasında verilmiş olan güncelleme denklemleri neticesinde, spektral kestirimin çözünürlüğü N_δ oranında artmasına karşılık işlem yükü de artmaktadır. Fakat bu işlem yükündeki artış oranının eşitlik (5)'de verilen orana göre daha az olması gerekmektedir. Her bir l indisli iterasyonda 2 kez N noktalı FFT işlemi yapılmaktadır. İterasyona başlarken ν_0 ile f_c arasında eşitlik (10) gereğince $\Delta f/2$ kadar fark vardır. Her bir iterasyonda ν_l değeri f_c frekansına $\Delta f/N_\delta$ kadar yaklaşmaktadır. Harmonik frekansının ν_0 ile f_c arasında olduğu düşünülürse, toplam l sayısı en fazla,

$$I = \frac{\Delta f/2}{\Delta f/N_\delta} = \frac{N_\delta}{2}, \quad (14)$$

olmaktadır. Dolayısıyla, her bir harmonik için toplam $2I = N_\delta$ adet N noktalı FFT işlemi vardır. Bu durumda, çözünürlükteki N_δ kadarlık artışa karşılık işlem yükündeki artış oranı,

$$\gamma' \leq \frac{N_\delta N \log_2(N)}{N \log_2(N)} = N_\delta, \quad (15)$$

olmaktadır. Eşitlik (5) ile (15) birbirine oranlanırsa, geleneksel FFT'ye göre,

$$\frac{\gamma'}{\gamma} \geq \frac{N_\delta \log_2(NN_\delta)}{N_\delta \log_2(N)} = \frac{\log_2(NN_\delta)}{\log_2(N)}, \quad (16)$$

kadarlık hız artışı söz konusudur.

3. Simülasyonlar

Bu bildiriye geliştirilen algoritmanın performansını test etmek için Çizelge 1'deki harmonikler kullanılmıştır.

Çizelge 1: Harmonik özellikleri.

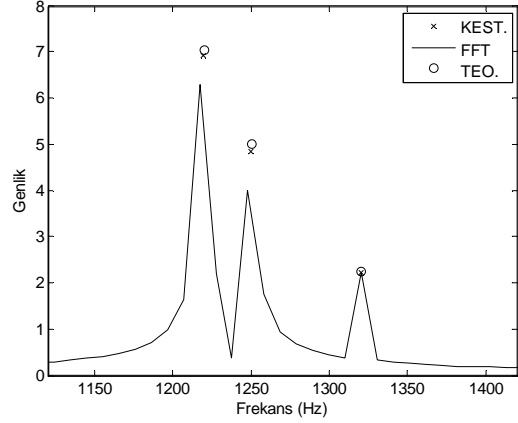
A_i	$f_{0,i}$ (kHz)
3-4j	1.25
1+2j	1.32
0.5-7j	1.22

Çizelge 1'deki harmonik özellikleri ile eşitlik (1) kullanılarak veriler oluşturulurken örnekleme frekansı $f_s = 5280$ Hz, nokta sayısı $N = 2L = 512$, $N_\delta = 30$ alınmıştır. Simülasyonlarda kullanılan İGO değerleri -10 dB ile 30 dB arasında 1 dB adım aralığına sahiptir. SVD işlemi için tolerans değeri

$\tau = 0.1$ seçilmiştir. Ortalama Karesel Hata (Mean Square Error, MSE) değerleri hesaplanırken,

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| x(n) - \sum_{i=1}^M A'_i \exp(j2\pi f'_i n t_s) \right|^2, \quad (17)$$

formülü kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1. Spektrum grafiği, İGO = 30 dB.

Şekil 1'den kolayca görüleceği üzere, geliştirilen spektral kestirim algoritmasının başarımı FFT'ye göre daha yüksektir. FFT ile elde edilen frekans noktalarının teorik frekanslar ile arasındaki fark, tepe değerlerin genliğinde düşmelere sebep olmuştur. Bu bildiride geliştirilen algoritmanın yüksek hassasiyeti sayesinde, frekans noktalarındaki yüksek başarıma ek olarak genlik değerlerinde de yüksek başarımlar sağlanmıştır. Çizelge 2'de elde edilen genlik ve frekans değerleri verilmiştir.

Çizelge 2: Simülasyon sonuçları, İGO = 30 dB.

Teorik		Kestirim		FFT	
$ A_i $	$f_{0,i}$ (kHz)	$ A'_i $	$f_{0,i}$ (kHz)	$ A_i _{fft}$	$f_{0,i}$ (kHz)
5	1.25	4.81	1.2499	3.98	1.2478
2.24	1.32	2.23	1.3200	2.23	1.3200
7.02	1.22	6.92	1.2193	6.29	1.2169

Çizelge 2'den görüldüğü üzere, kestirim sonuçları teorik değerlere oldukça yakınen, FFT sonuçları teoriden farklıdır. Özellikle, frekansta ufak hataların genlikte yüksek hatalara sebep olduğu görülmektedir. Çizelge 3'de bu durum daha net özetlenmiştir.

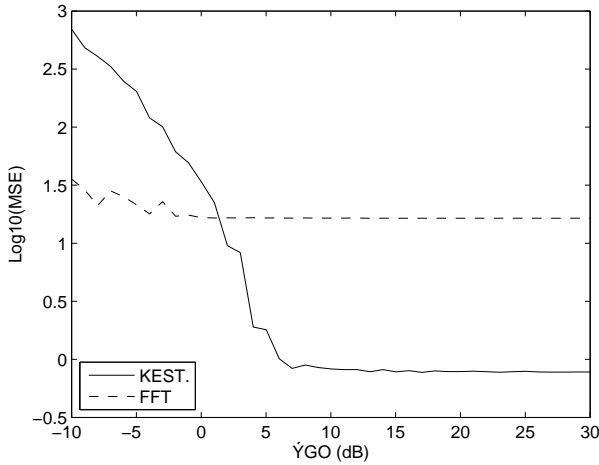
Çizelge 3: Hata değerleri, İGO = 30 dB.

Kestirim		FFT	
Genlik	Frekans (Hz)	Genlik	Frekans (Hz)
0.19	0.10	1.02	2.20
0.01	0.00	0.01	0.00
0.10	0.70	0.73	3.10

Eşitlik (8) gereğince, örneklenmiş sinyalin spektrumu Sinc() fonksiyonlarının toplamından oluşmaktadır. Sinc()'in hızlı

değişim göstermesinden dolayı, FFT yöntemiyle frekansta yapılacak hata genlikte önemli hatalara sebep olabilmektedir. Çizelge 3’de bu beklentinin sağlandığı görülmektedir. Kestirim algoritmasının sahip olduğu iterasyon işlemleri sayesinde hem frekansta hem de genlikte FFT’ye göre daha az hata meydana gelmiştir. Dolayısıyla, yüksek hassasiyet gerektiren uygulamalar için, bu bildiride geliştirilen kestirim algoritması FFT’ye göre daha uygundur.

Şekil 2’de farklı İGO değerleri için elde edilen MSE değerleri görülmektedir. Dikey eksenin logaritmik değerler ile çizdirilmesinin sebebi, yüksek MSE değerlerinin yanında düşük MSE değerlerinin de görülebilmesini sağlamaktır.



Şekil 2. Hata grafiği.

Şekil 2’deki MSE sonuçları göstermektedir ki, İGO > 2 iken geliştirilen spektral kestirim algoritmasının performansı FFT’den daha iyidir. Öyle ki, İGO > 5 sağlandığı durumda kestirim algoritmasının hatası 0’a oldukça yakındır. İGO < 2 iken FFT’nin daha yüksek performans sağlamasının sebebi, kestirim algoritmasında bulunan SVD işleminin hassasiyetinin düşmesidir. Gürültü gücünün yeterince yüksek olduğu durumda SVD ile elde edilen harmonik sayısında yapılabilecek hata, kestirim algoritmasının performansını düşürmektedir.

4. Sonuçlar

Bu bildiride yapılan çalışmalar göstermektedir ki, FFT ile yapılan spektral kestirimde frekansta yapılan ufak hatalar genlikte ciddi hatalara sebep olabilmektedir. FFT’nin performansını arttırmak için veri uzunluğu (nokta sayısı)’ni arttırmak yerine, bu bildiride geliştirilen spektral kestirim algoritmasının ölçüm verilerine uygulanması, gerekli işlem yükünün ve bilgisayar kaynaklarının azalmasını sağlamaktadır. Elde edilen simülasyon sonuçları göstermektedir ki, İGO’nun yeterince yüksek olduğu durumda, geliştirilen spektral kestirim algoritmasının performansı FFT’den daha iyidir. Makul seviyede nokta sayısına sahip örneklerle yüksek çözünürlüğün sağlanması, ölçüm süresi ve örnekleme problemlerini azaltmaktadır. Dolayısıyla, geliştirilen algoritmanın yüksek hassasiyet ve hız gerektiren sistemlere

uygulanması bakımından geleneksel spektral kestirim algoritmalarına göre ciddi avantajları vardır.

5. Kaynaklar

- [1] Oppenheim, A. V. ve Schaffer, R. W., *Discrete-Time Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2010.
- [2] Skolnik, M., *Radar Handbook*. New York: McGraw-Hill Professional, 2008.
- [3] Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York: Wiley, 1989.
- [4] Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley Cambridge Press, USA, 2010.
- [5] Hua, Y. ve Sarkar, T. K., “Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 38, pp. 814-824, 1990.
- [6] Sarkar, T. K. ve Pereira, O., “Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials”, *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 37, pp. 48-55, 1995.