

# Enerji Kontrolüne Dayalı Doğrusal Olmayan Model Öngörümlü Denetim ile Ters Sarkacın Yukarı Kaldırılması

## Swinging Up an Inverted Pendulum by Energy Based Nonlinear Model Predictive Control

S.Kahvecioğlu<sup>1</sup>, A. Karamancıoğlu<sup>2</sup>, A. Yazıcı<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Sivil Havacılık Y.O., Havacılık Ele.-Elo Bölümü  
Anadolu Üniversitesi  
skahvecioglu@anadolu.edu.tr

<sup>2</sup>Ele.-Elo. Müh. Bölümü  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
akaraman@ogu.edu.tr

<sup>3</sup>Bilgisayar Müh. Bölümü  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
ayazici@ogu.edu.tr

### Özet

Ters sarkaç, kararsız yapıya sahip, dinamik olarak denge durumu kolay bozulabilen ve doğrusal olmayan matematik modele sahip yetersiz uyarımlı bir sistemdir. Bu özellikleri sebebiyle, ters sarkaç sistemi üzerinde farklı denetim metotları denenebilmektedir. Bu çalışmanın amacı, ters sarkacı aşağı denge konumundan yukarı denge konuma getirmek ve bu konumun komşuluğunda tutabilmek olarak tanımlanan iki denetim problemini çözmektir. Sarkacı yukarı kaldıracak denetleyici için sarkacın enerjisinin kontrolüne dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu kullanılmaktadır. Sarkacı yukarı denge noktası komşuluğunda tutacak denetleyici için ise kayma kipli denetim araçlarına dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu kullanılmaktadır. Sistemin durumuna göre, bu denetleyicilerden sadece bir tanesi aktif olmaktadır. Her iki denetim problemi de girdi, durum ve performans kriterlerinin kullanıldığı doğrusal olmayan programlama problemleri olarak formüle edilmişlerdir. Bu metodun geçerliliği, ters sarkaç problemine uygulandığında elde edilen zamana göre grafikler ile desteklenmektedir.

### Abstract

Inverted pendulum is an underactuated system which has an unstable, and nonlinear dynamic model. Owing to these properties, different control techniques can be tested on this system. The aim of this work is to swing-up the pendulum from its lower stable equilibrium point to its upper unstable equilibrium point and to balance it at the neighborhood of the upper equilibrium point. In order to swing-up the pendulum, energy-based nonlinear model predictive method is used. For balancing, a controller which is designed by using nonlinear

model predictive control based on sliding mode control is used. Only one of the controllers is active, according to the state values of the system. Both of the control problems are formulated as nonlinear optimization problems having some performance criteria. Validity of the methods are shown by the simulation results.

### 1. Giriş

Bu çalışma kapsamında, ters sarkacı aşağı denge konumundan yukarı denge konuma getirmek ve bu konumun komşuluğunda tutabilmek iki ayrı denetim problemi olarak ele alınmaktadır. Sarkacı aşağı denge konumundan yukarı denge konumuna getirecek denetleyici için sarkacın enerjisinin kontrolüne dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu, sarkacı yukarı denge noktası komşuluğunda tutacak denetleyici için ise kayma kipli denetim araçlarına dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu önerilmektedir. Ters sarkaç, doğrusal olmayan matematik modele sahip, uygun denetlenmediğinde denge durumu kolay bozulabilen, sarkaç açısının ve araç pozisyonunun arabaya uygulanan bir girdi ile kontrol edilemediği yetersiz uyarımlı (underactuated) bir sistemdir.

Ters sarkacın yukarı kaldırılmasının enerji kontrolü ile denetimi çalışmaları, arabaya uygun denetim girdileri uygulanarak sarkaca enerji aktarılmasına dayanmaktadır. Aström ve Furuta'nın çalışmalarında ([1], [2]) sarkacı yukarı denge konumuna getirmek için enerjinin bang-bang denetim ile artırılmasına dayanmaktadır. Yoshida'nın çalışmasında [3] ise enerjinin değişimi, sarkacın açısı ve açısız hızına bağlı olarak elde edilen arabanın ivmesinin işaretine göre belirlenmektedir. Chatterjee ve arkadaşlarının çalışmasında [4], diğer çalışmalardan farklı olarak aracın hareket ettiği ray uzunluğu ve denetim girdisi üzerindeki kısıtlar da dikkate

alınarak yukarı kaldırma denetimi incelenmektedir. Muşkinja ve Tovornik'in [5] çalışmaları fuzzy kural setinin kullanıldığı kural tabanlı çözüm yaklaşımına bir örnektir.

Ters sarkacın kararlı hale getirilmesi probleminde en genel yaklaşımlar, doğrusallaştırma ve kutup yerleştirme tekniklerine dayanmaktadır. Örneğin, Bugeja [6] çalışmasında kararlılık için durum geribesleme yanında kutup yerleştirmeyi kullanmıştır. Bu yaklaşımı kullanarak, doğal frekans ve sönümlenme oranı belirlenen değerlere ayarlanmıştır. Yoshida'nın [3] çalışması kararlılık probleminin doğrusallaştırma ile çözüldüğü bir örnek olarak incelenebilir. Bu çalışmada kararlı duruma getiren geri besleme katsayısı LQ kriterini sağlayacak şekilde seçilmiştir. Zhong ve Röck'ün [7] çalışmalarında tek denetim girdisi ile kontrol edilen serbestlik derecesi üç olan bir ters sarkaç sisteminin kararlı hale getirilmesinde doğrusallaştırma yönteminin kullanımı incelenmiştir.

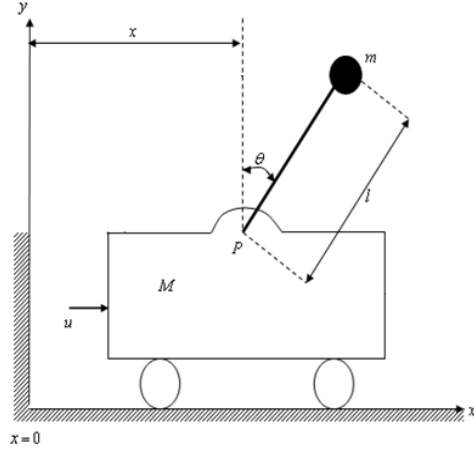
Model öngörüllü denetim, tasarımcıların, sistem kısıtlarını ve performans kriterlerini tasarım aşamasında sürece dahil edebilmesine izin veren bir yaklaşımdır. Maciejowski'nin [8] yazmış olduğu kitapta öngörüllü denetimin temelleri verilmektedir. Findeisen ve Allgöwer'in [9] çalışmaları model öngörüllü denetim metodu için kapsamlı bir gözden geçirme olarak incelenebilir.

[11] ile verilen çalışmada, yukarı kaldırma problemi doğrusal olmayan programlama problemi olarak ele alınmıştır. (Esnek) Kısıt denklemleri sarkacın açısına ve açılal hızına göre farklı kurallar geliştirilerek oluşturulmuştur. Bu çalışmanın [11] den farklı yanı, yukarı kaldırma problemi için tek bir (esnek) kısıt oluşturulması ve amaç fonksiyonunun farklı tanımlanmasıdır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, kullanılan ters sarkaç sistemi ile ilgili kısa bir bilgi sunulmakta ve sistem dinamiklerinin sürekli ve kesikli zaman modelleri verilmektedir. Üçüncü bölümde, ters sarkaç yukarı kaldırma problemi için optimizasyon problemi modeli oluşturulması ele alınmaktadır. Dördüncü bölümde, ters sarkaç kararlılık problemi için optimizasyon problemi modeli oluşturulması ele alınmaktadır. Beşinci bölümde, bu çalışma kapsamında incelenen yaklaşımın işlerliğini örnekleyen bilgisayar benzetimleri yer almaktadır. Altıncı bölümde ise sonuçlar yer almaktadır.

## 2. Ters Sarkaç Modeli

Şekil 1'de gösterildiği üzere, ters sarkaç sistemi temel olarak hareket eden bir araba üzerine monte edilmiş bir sarkaçtan oluşur. Sistem tek bir denetim girdisi (arabaya uygulanan kuvvet) ile kontrol edilen iki çıkışa sahip (arabanın pozisyonu ve sarkacın açısı) yetersiz uyarımlı bir sistemdir. Sarkaç  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$  ve  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  olmak üzere iki adet denge noktasına sahiptir. Sarkaç kararlı olan aşağı denge noktası  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$  konumundayken, durumunu değiştiren herhangi bir bozucu etkiye maruz kaldığında tekrar bu konumuna geri dönmektedir. Sarkaç kararsız olan yukarı denge konumundayken  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  uygun denetlenmezse, bu konumundan giderek uzaklaşmaktadır.



Şekil 1: Ters sarkaç sistemi

Sistemin parametreleri ve benzetimlerde kullanılan tipik değerler Tablo 1'de verilmiştir:

Tablo 1: Ters sarkaç için parametrelerin tanımları ve değerleri

Parametre	Sembol	Değer	Birim
Arabanın kütlesi	M	3	kg
Sarkacın kütlesi	m	0.5	kg
Sarkaç kolu uzunluğu	l	0.5	m
Sürtünme katsayısı	b	2	kg/s
Yerçekimi ivmesi	g	9.81	m/s <sup>2</sup>

Newton prensipleri kullanılarak, ters sarkaç sisteminin matematiksel modeli şu şekilde oluşturulabilir [10]:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + ml\ddot{\theta} \cos \theta + b\dot{x} = u \quad (1)$$

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta$$

Sistemin durum uzayı matris gösteriminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-bx_2 + ml \sin(x_3)x_4^2 - mg \sin(x_3) \cos(x_3)}{M + m - m \cos(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{(bx_2 - ml \sin(x_3)x_4^2) \cos(x_3) + (M + m)g \sin(x_3)}{l(M + m - m \cos(x_3)^2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\cos(x_3) \end{bmatrix} u$$

Daha kısa bir gösterimle, bu denklem

$$\dot{X} = f(X) + h(X)u \quad (2)$$

olarak yazılabilir.  $x$  arabanın pozisyonunu,  $\theta$  sarkacın açısını göstermek üzere, burada  $X$  vektörünün elemanları  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$  şeklindedir ve  $u$  denetim girdisini göstermektedir. Euler yöntemi kullanılarak, denklem aşağıdaki kesikli model olarak ifade edilebilir:

$$X(k+1) = F(X(k)) + H(X(k))u(k) \quad (3)$$

Denklem (3) ile verilen ifade de  $T$  örnekleme zamanını göstermek üzere  $F(X(k)) := X(k) + Tf(X(k))$  ve

$H(X(k)) := Th(X(k))$  olarak tanımlanmaktadır. Bu ifade geliştirilerek benzer şekilde  $N$ . adım ileri durum öngörümü  $X(k+N)$ , aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$X(k+N) = \hat{F}(X(k)) + \hat{H}(X(k))U(k,N) \quad (4)$$

Burada  $N$ -adımlık denetim girdisi dizisi

$$U(k,N) := \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

olarak tanımlanmaktadır;  $\hat{F}$  ve  $\hat{H}$  fonksiyonları (3) denkleminin  $N$  adım için yinelenmesi ile elde edilmektedir.

Model öngörümü denetim, ufku süresince kullanacağı denetim girdileri dizisinin tamamını, denetlenen sistemin kısıtlarını dikkate alan bir optimizasyon kriterine göre hesaplar. Bu şekilde hesaplanan dizinin ilk elemanını sisteme denetim girdisi olarak uyguladıktan sonra yeni oluşan bilgileri dikkate alarak, önündeki ufuk için aynı hesaplamayı tekrar yapar. Bu süreç denetim hedefleri gerçekleşinceye kadar bu şekilde tekrarlanır. Diğer bir ifade ile, model öngörümü denetim, tasarımcıların sistem kısıtlarını dikkate alan optimal denetim girdilerini uzun bir zaman aralığı için hesaplamasına imkan tanıyan, ancak bu hesaplamaların tamamını kullanmak yerine, sadece yeni bilgiler gelinceye kadar gerekli kısmını kullanan, ardından da bu hesaplamayı yeniden yapan bir denetim yaklaşımıdır. Bu çalışmada, gerek sistem modeli gerekse optimizasyon ölçütleri dolayısıyla, çözülmek istenen problem doğrusal olmayan model öngörümü denetim yaklaşımı sınıfına girmektedir.

### 3. Ters Sarkaç Yukarı Kaldırma Problemi

Ters sarkaç yukarı kaldırma (swing-up) problemi, sarkacı kararlı aşağı denge konumundan kararsız yukarı denge konumunun belirli bir komşuluğuna uygun denetim girdileri uygulanarak getirme şeklinde tanımlanabilir.

Herhangi bir kontrole maruz kalmayan bir ters sarkacın enerjisi, verilen bir  $(\theta, \dot{\theta})$  çifti için şu şekilde yazılabilir [1,2]:

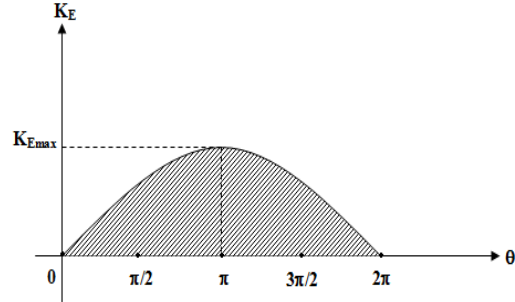
$$E = K_e + P_e = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta - 1) \quad (6)$$

Burada  $J := ml^2$  sarkacın bağlantı noktası etrafındaki eylemsizlik momentini ifade etmektedir. Sarkacın enerji değişiminin ifadesi, (6) ile verilen denklemin zamana göre türevi alınarak yazılabilir:

$$\frac{dE}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta} = -m\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta \quad (7)$$

Model öngörümü denetim ile çözdürülecek olan ters sarkaç yukarı çıkma problemi, doğrusal olmayan optimizasyon problemi olarak i.adımda, (8) ile verilen denklemler ile formüle edilebilir. Oluşturulan problemde amaç enerji değişimleri toplamını maksimum yaparak, sistemin enerjisini başlangıç enerjisi olan  $-2mgL$  değerinden yaklaşık olarak 0 değerine getirmektir. Bu problemdeki ilk sekiz kısıt sistemin mekaniğinin ve fiziksel şartların dayattığı zorunlu kısıtlardır (hard constraints). Son kısıt ise tasarım stratejisi dolayısıyla oluşan kısıttır (soft constraint).

Burada,  $x_3 - K_E$  arasındaki ilişkiyi gösteren kısıt eşitliği Şekil 2 de verilen bölge olarak seçilmiştir:



Şekil 2:  $x_3 - K_E$  kısıtı

$$\max_u \sum_{i=0}^N -M_p L x_4(i) \cos(x_3(i)) \left( \frac{-bx_2(i) + M_p L \sin(x_3(i))x_4^2(i) - M_p g \sin(x_3(i)) \cos(x_3(i)) + u(i)}{M_c + M_p - M_p \cos^2(x_3(i))} \right)$$

$$\text{ö.k. } x_1(i+1) = x_1(i) + Tx_2(i)$$

$$x_2(i+1) = x_2(i) + T \left( \frac{-bx_2(i) + M_p L \sin(x_3(i))x_4^2(i) - M_p g \sin(x_3(i)) \cos(x_3(i)) + u(i)}{M_c + M_p - M_p \cos^2(x_3(i))} \right) \quad (8)$$

$$x_3(i+1) = x_3(i) + Tx_4(i)$$

$$x_4(i+1) = x_4(i) + T \left( \frac{(bx_2(i) - u(i) - M_p L \sin(x_3(i))x_4^2(i)) \cos(x_3(i)) + (M_c + M_p)g \sin(x_3(i))}{L(M_c + M_p - M_p \cos^2(x_3(i)))} \right)$$

$$u_L \leq u(i) \leq u_U$$

$$x_{1L} \leq x_1(i) \leq x_{1U}$$

$$x_{2L} \leq x_2(i) \leq x_{2U}$$

$$x_{4L} \leq x_4(i) \leq x_{4U}$$

$$K_e(i+1) \leq -x_3^2(i+1) \frac{K_{e\max}}{\pi^2} + x_3(i+1) \frac{2K_{e\max}}{\pi}$$

#### 4. Ters Sarkaç Kararlılık Problemi

Ters sarkaç kararlılık (stabilization) probleminde amaç sarkacı yukarı denge konumu komşuluğunda bir başlangıç koşulundan yukarıdaki denge konumuna getirmek ve sonrasında bu konumda tutmaktır.

Ters sarkaç kararlılık problemi doğrusal olmayan optimizasyon problemi olarak i.adımda şu şekilde formüle edilebilir:

$$\min_u (g_1 x_1(k+N) + g_2 x_2(k+N) + g_3 x_3(k+N) + g_4 x_4(k+N))^2$$

$$\text{ö.k. } X(k+1+i) = F(X(i)) + H(X(i))U(k, i)$$

$$u_L \leq u(i) \leq u_U \quad (9)$$

$$x_{1L} \leq x_1(i) \leq x_{1U}$$

$$x_{2L} \leq x_2(i) \leq x_{2U}$$

$$x_{3L} \leq x_3(i) \leq x_{3U}$$

Kararlı kayma yüzeyi parametreleri  $g_1, \dots, g_4$ , ters sarkacın yukarı denge konumunda doğrusallaştırılmış sistem dinamiği göz önüne alınarak  $s(X) := g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4$  kayma yüzeyini kararlı hale getirecek şekilde seçilmiştir.

Denetim girdileri dizisi  $U(k, N)$ , yörünge ile kayma yüzeyi  $s(X) = 0$  arasındaki mesafeyi minimum yapacak şekilde seçilir. Amaç fonksiyonu minimum, yani sıfır değerine, durumlar kayma yüzeyi yakın komşuluğunda olduğu zaman ulaşır. Yörünge, kayma yüzeyinin komşuluğuna hapsedildiğinde, sistem dinamikleri kısıtı yörüngeyi orijine doğru hareket etmeye zorlar.

#### 5. Benzetimler

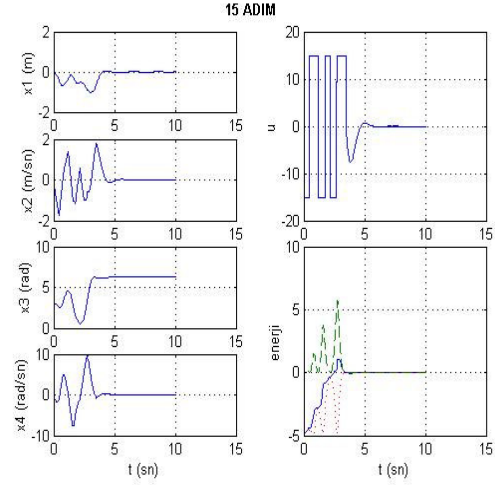
Bu bölümde (8) ve (9) ile verilen optimizasyon problemleri farklı öngörüm ufukları için ele alınmıştır. Benzetimlerde sarkaç üzerinde önce yukarı kaldırma işlemi sonra da kararlılık işlemi gerçekleştirilmektedir. Elde edilen grafiklerde her iki işlem de gösterilmektedir. Denetim girdisinin sınırları  $[u_L, u_U] = [-15, 15]$ , durumlar üzerindeki sınırları ise  $[x_{1L}, x_{1U}] = [-1.05, 1.05]$ ,  $[x_{2L}, x_{2U}] = [-5, 5]$ ,  $[x_{3L}, x_{3U}] = [-10, 10]$  olarak kullanılmıştır. Deneyler boyunca kararlı kayma yüzeyinin parametreleri olarak  $(g_1, g_2, g_3, g_4) = (2, 1.5, 5, 1.5)$  kullanılmıştır.  $T$ , 10ms olarak belirlenmiştir. Benzetimin ana kodları MATLAB programında yazılmıştır. Bu kodların çalışması sırasında, optimizasyon problemlerinin çözümü için, GAMS programı çağrılmaktadır. GAMS programında MINOS çözücüsü kullanılmaktadır.

Farklı adımlar için yapılan benzetimlerin grafikleri Şekil 3-6'da verilmiştir. Durumların ve girdinin değerleri, kısıtlara uygun sınırlar içinde kalmaktadır. Bu şekillerde sol sütunlardaki grafikler sistem durumlarını, sağ üst sütun sistem girdisini, sağ alt grafik ise enerjinin zamana bağlı değişimini göstermektedir. Enerjinin kinetik ve potansiyel bileşenleri de ayrıca gösterilmiştir Burada düz çizgi enerjiyi, nokta potansiyel enerjiyi ve kesikli çizgi de kinetik enerjiyi göstermektedir. Enerjinin birimi  $\text{kgm}^2/\text{sn}^2$  (joule), denetim girdisinin birimi ise  $\text{kgm}/\text{sn}^2$  (Newton) dir.

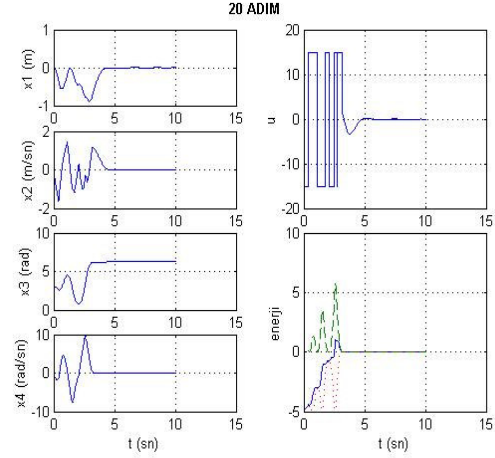
Tablo 2 de her bir deney için elde edilen yukarı çıkma süreleri verilmiştir.

Tablo 2: Deneyler sonucunda yukarı çıkma süreleri

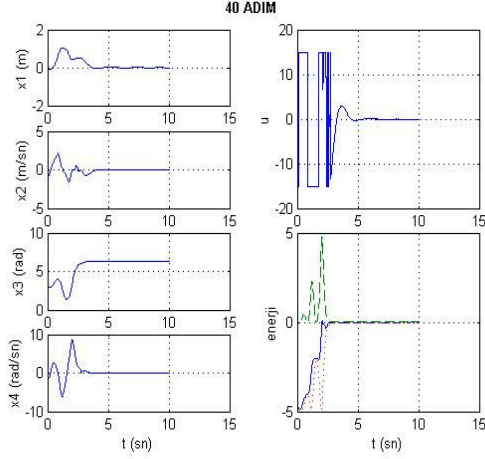
Deney No.	Yukarı kaldırma öngörüm adım sayısı	Yukarı çıkış süresi
1	15	3.35 sn
2	20	3.15 sn
3	40	2.74 sn
4	45	2.71 sn



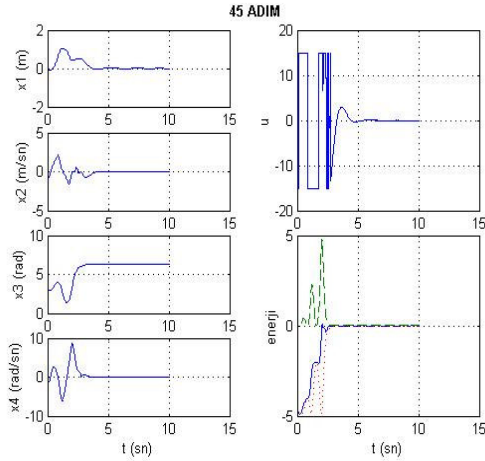
Şekil 3: 15 adım öngörümlü yukarı kaldırma



Şekil 4: 20 adım öngörümlü yukarı kaldırma



Şekil 5: 40 adım öngörümlü yukarı kaldırma



Şekil 6: 45 adım öngörümlü yukarı kaldırma

## 6. Sonuçlar

Bu çalışmada sarkacı yukarı kaldırma ile o konumda tutabilme iki ayrı denetim problemi olarak ele alınmaktadır. Sarkacı aşağı denge konumundan yukarı denge konumuna getirecek denetleyici için sarkacın enerjisinin kontrolüne dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu kullanılmaktadır. Sarkacı yukarı denge noktası komşuluğunda tutacak olan denetleyici için ise kayma kipli denetim araçlarına dayanan doğrusal olmayan model öngörümlü denetim metodu kullanılmaktadır. Yapılan deneyler sonucu, yukarı kaldırma aşamasında öngörüm adım sayısı arttıkça yukarı çıkma süresinin ve enerjideki aşma miktarının azaldığı görülmüştür.

## 7. Kaynaklar

- [1] Aström, K.J., ve Furuta, K., "Swinging up a pendulum by energy control", *Automatica*, Vol.36, 287-295,
- [2] Aström, K.J., ve Furuta, K., "Swinging up a pendulum by energy control", *IFAC 13 th World Congress, San Francisco, California, 1996*
- [3] Yoshida, K. "Swing-up control of an inverted pendulum by energy-based methods", *Proceedings of the American*

*Control Conference*, s. 4045-4047, San Diego, California, June 1999

- [4] Chatterjee, D. , Patra, A. ve Joglear, H.K. "Swing-up and stabilization of a cart pendulum system under restricted cart track length", *Systems and Control Design*, Vol.47, 355-364, 2002
- [5] Muškinja, N. ve Tovornik, B. "Controlling of real inverted pendulum by fuzzy logic", *Controlo'2000, 4<sup>th</sup> Portuguese Conference on Automatic Control*, Guimarães, Portugal, October 2000
- [6] Bugeja, M. "Nonlinear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system", *IEEE Region 8 EUROCON2003*, Ljubljana, Slovenia, September 2003
- [7] Zhong, W. ve Röck, H. "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart", *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*, s. 896-901, Mexico City, Mexico, September, 2001
- [8] Maciejowski, J.M. *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall, 2002
- [9] Findeisen, R. ve Allgöwer, F. "An introduction to nonlinear model predictive control", *21<sup>st</sup> Benelux Meeting on Systems and Control*, Veldhoven, 2002
- [10] Ogata, K. "Modern Control Engineering", Prentice Hall, 1990
- [11] Kahvecioğlu, S. ,Karamancıoğlu, A. Ve Yazıcı, A. "Ters Sarkaç Yukarı Kaldırma Problemine Doğrusal Olmayan Model Öngörümlü Denetimin Uygulanması", *30.Yıl Sempozyumu, Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi*, , 2008 (kabul edildi)