ELEKTRİK ALAN HESAPLAMALARINDA KULLANILAN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Selçuk YILDIRIM[1] **Murat UYAR**[2]

[1,2] Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü
Fırat Üniversitesi, 23119, Elazığ

[1]e-posta: syildirim@firat.edu.tr [2] e-posta: muyar@firat.edu.tr

Anahtar sözcükler: Elektrik Alanı, Sonlu Farklar Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sınır Elemanları Yöntemi

ABSTRACT
In this article, a comparative study of Finite Difference Method (FDM), Finite Element Method (FEM) and Boundary Element Method (BEM) used for calculation of electric field is given. A simple example which boundary condition given has been modeled and interior points have been obtained for three methods. The results have been compared with the analytical one. It has been shown that BEM with considerably small data input has better result.

1. GİRİŞ
Elektrik alanı ve potansiyel dağılımının hesaplanması elektrik ve elektronik cihazların tasarımı ve işletimi gibi çeşitli uygulamalarda gereklidir. Bu uygulamaların bazıları şunlardır:

- Yüksek gerilimli sistemlerin, makine sargılarının, kabloların izolasyon tasarımında ve elektronikte kullanılan bazı elemanların elektrik alan şiddetinin belirlenmesinde,
- Gaz deşarjlarının araştırılmasında,
- Çok yüksek gerilim cihazlarının tasarımında ve bu cihazların etrafındaki elektrik alanlarının etkilerinin belirlenmesinde,
- Elektrostatik filtreler ve X – Ray cihazları gibi endüstriyel uygulamalarda.

Elektrik alanlarını hesaplamak için, basit geometriye sahip problemlerde analitik çözüm yöntemleri kullanılarak problemin tam çözümü elde edilebilir. Ancak, genellikle elektrik alan problemleri Laplace ve Poisson tipi kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edileceğinden bu denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak cebirsel denklemlere dönüştürülmesi gerekmektedir. Sayısal çözüm yöntemlerindeki ortak kavram, temel alan denklemlerinin veya bir eşdeğer integral formülasyonunun bir lineer denklem sistemine indirgenmesidir. Bu yöntemler, B bölgesinde yapılan yaklaşımlar ve sadece S sınırı üzerinde yapılan yaklaşımlar olmak üzere iki sınıfta incelenebilir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri birinci sınıfta, sınır elemanları yöntemi ise ikinci sınıfta değerlendirilmektedir.

2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ
Bu yöntemde, herhangi bir koordinat yönünde kısaltılmış bir Taylor serisinin açılımından faydalanarak, fark operatörü B bölgesi üzerine yerleştirilmiş bir dörtgensel ızgaranın her noktasında ayrıştırılır ve uygulanır. Denklem sistemleri ya iterasyonla ya da doğrudan çözülür. Bu yöntemin dezavantajları, problem geometrisinin kabaca modellenmesi ve özellikle açık alan problemlerinde bilinmeyenlerin çok sayıda olmasıdır [1]. Herhangi bir düğüm için fark denklemi, bu düğümü çevreleyen dört düğümdeki potansiyeli içerir.

$$\begin{aligned} & k_1 V_{i-1,j} + k_2 V_{i,j-1} + k_3 V_{i+1,j} \\ & + k_4 V_{i,j+1} - k_0 V_{i,j} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Bu denklemdeki k sabitleri (k=0,1,2,3,4), ızgara boyutları, dielektrik katsayıları ve sınır şartlarına bağlı olarak verilir. Çözüm için denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[A]\,[V] = [a] \tag{2}$$

Burada $[A]$, n bilinmeyenli düğüm potansiyellerinden oluşan $n\ x\ n$ boyutlu bir katsayılar matrisidir. $[V]$ bilinmeyen potansiyellerden oluşan $n\ x\ 1$ boyutlu bir sütun matristir ve $[a]$ ise bilinen potansiyelleri kapsayan sınır şartları matrisidir [2].

3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ
Sonlu elemanlar yöntemi bir varyasyonal formülasyon kullanır [3]. Bu yöntemde, problem bölgesi eleman olarak isimlendirilen çok küçük alt alanlara bölünür. Elemanlar tüm bölgeye düzenli olarak dağıtılabilir veya bölgenin çeşitli kısımlarında yoğunlaştırılabilir. Eleman geometrileri ve bilinmeyenler, düğüm değerlerini içeren polinomlarla ifade edilir. Her elemanın içindeki enerji minimize edilerek Laplace denklemi $(\nabla^2 u = 0)$ için çözüm bulunur. İki boyutlu bir elektrostatik problemde sistemin toplam enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \tag{3}$$

olarak yazılır. Burada V elektrostatik potansiyel ve ε dielektrik katsayısıdır [4].

Her eleman üç düğüm (i , j , m) ile tanımlanır. Her eleman içindeki elektrostatik potansiyel, elemanların düğümleri ile ilişkili $\left[V^e\right]$ potansiyel değerinin bir fonksiyonudur.

$$V = [N]\left[V^e\right] = \left[N_i \; N_j \; N_m\right]\begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Burada $[N]$, düğüm koordinatlarının lineer fonksiyonlarını içeren şekil fonksiyonları matrisidir. Sonuç denklem sistemi ise, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[B][V] = [b] \tag{5}$$

Burada $[V]$ matrisi, bütün bilinmeyen düğüm potansiyellerini içerir. $[B]$ ise katsayılar matrisidir. $[b]$ matrisi, şekil fonksiyonları matrisi $[N]$ ile sınır şartlarına bağlıdır.

4. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Sınır elemanları yöntemi, elektrik alan denklemlerinin çözümü için farklı bir yaklaşım kullanır. Bu yöntemde, ilk önce problemi tanımlayan kısmi diferansiyel denklem bir sınır integral denklemine dönüştürülür [5].

$$c_i u_i + \int_S u\, q^* dS = \int_S q\, u^* dS \tag{6}$$

Bu denklemde, sınır üzerindeki bir "i" düğümünde hesaplanacak potansiyel u_i ile gösterilir. u^*, iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümüdür ve, $u^* = \frac{1}{2\pi} ln\left(\frac{1}{r}\right)$'dir. Ayrıca, $q = \partial u / \partial n$ ve $q^* = \partial u^* / \partial n$'dir. c_i, "i" noktasının konumuna bağlı bir katsayıdır.

Problem bölgesinin S sınırı sabit, lineer ve parabolik olarak isimlendirilen sınır eleman tiplerinden biriyle N sayıda elemana ayrıştırıldıktan sonra sınır integral denklemi sınır üzerindeki bir "i" düğümü için şu şekilde yazılabilir:

$$c_i\, u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} u\, q^* dS = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} q\, u^* dS \tag{7}$$

S_j sınır elemanı üzerindeki integraller, sayısal integrasyon yöntemleri kullanılarak çözüldükten sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$H\, u = G\, q \tag{8}$$

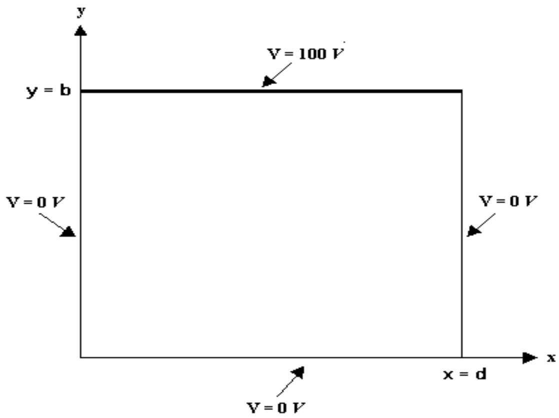
Bu denkleme sınır şartı uygulandıktan sonra,

$$[A]\,[x] = [y] \tag{9}$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir.

5. UYGULAMALAR

Uygulama olarak, sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen düzlemsel bir elektrot sistemi seçilmiştir (Şekil-1). Bu sistem, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemi ile modellenerek çözülmüştür.



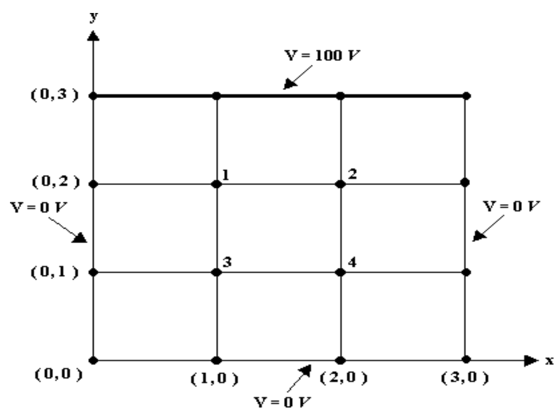
Şekil-1. Örnek Problem

Problemin analitik çözümü ise,

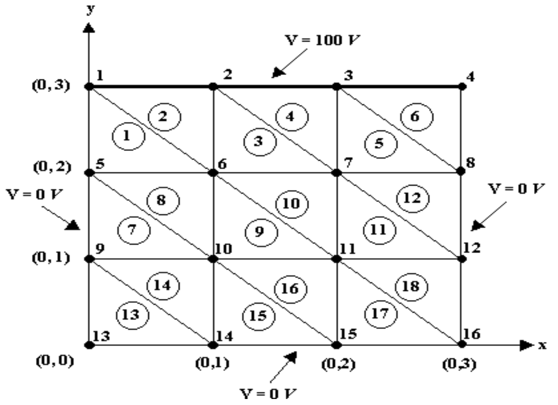
$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ (tek\ sayı)}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{sinh(m\pi x / b)}{sinh(m\pi d / b)} sin\frac{m\pi y}{b} \tag{10}$$

şeklindedir [7].

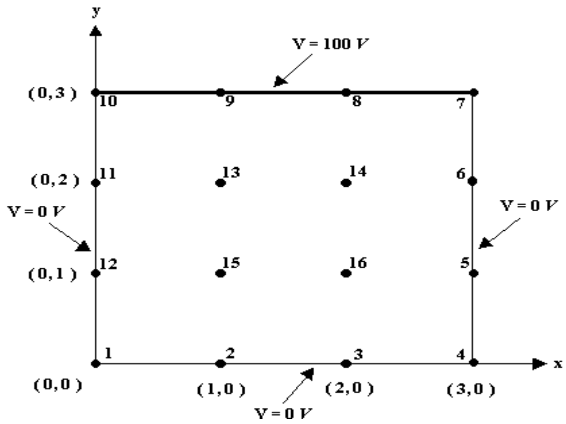
Her üç yöntem için ayrı ayrı ızgara oluşturma (FDM), bölgeyi alt alanlara ayırma (FEM) ve sınırın bölmelenmesi (BEM) prensipleriyle elde edilen modeller aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil-2. Sonlu Farklar Modeli



Şekil-3. Sonlu Elemanlar Modeli



Şekil-4. Sınır Elemanları Modeli

Tablo-1. Sonuçların Karşılaştırılması

Koordinatlar		Sonlu Farklar (FDM)	Sonlu Elemanlar (FEM)	Sınır Elemanları (BEM)	Analitik Çözüm
x	y				
1	3	100.00	100.00	100.00	100.00
1	2	37.500	37.500	37.994	38.170
1	1	12.500	12.500	12.006	11.920
2	2	37.500	37.500	37.994	38.170
2	1	12.500	12.500	12.006	11.920
1	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, elektrik alan hesaplamalarında kullanılan sayısal çözüm yöntemleri karşılaştırılmıştır. Tablo 1.'de sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleri ile elde sonuçlar, analitik çözüm sonuçlarıyla karşılaştırıldığında, analitik çözüme en yakın sonuçların sınır elemanları yöntemi ile elde edildiği görülmektedir.

Sınır elemanları yöntemi, iki boyutlu problemlerde sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerindeki gibi yüzey ayrışımı yerine sadece sınır ayrışımının yapılması, problemin çözümü için yeterli olmaktadır. Bu nedenle problemin boyutsallığı bir derece azalır ve daha az veri girişiyle bir elektrik alan problemi çözülebilir.

Sınır elemanları yönteminin diğer bir üstünlüğü ise, problem bölgesinin içinde veya dışında herhangi bir noktada bölmeleme yapılmadan alanların ve potansiyellerin hesaplanmasının mümkün olmasıdır.

Buna karşın, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerinde problem bölgesi belli bir bölgeyle sınırlanarak keyfi bir sınır şartı uygulanmaktadır ve özellikle açık alan problemlerinde bilinmeyenlerin sayısı oldukça artmaktadır.

Sınır elemanları yöntemi bu üstünlükleri nedeniyle elektrik alan problemlerinin çözümünde, sayısal çözüm yöntemleri içerisinde en uygun yöntem olarak görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Yildir,Y. B., Computer - Aided Field Analysis of High Voltage Apparatus Using The Boundary Element Method, Procedings of the International Coil Windıng Conference, pp. 42-48, 1987.

[2] Flatabö, N., Riege, H., Automatic Calculation of Elecric Fields, Int. Symposium on HV Tecnology (Ish), pp. 17-22, 1972.

[3] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, New York, 1977.

[4] Knutson, S. R., Abdalla, M. D., Pixton, R.M., PC-Based Electrostatic Field Calculation Tecniques, Presented At The 12 th Annual Ideas In Science and Electronics Exposition / Symposium, pp. 166-171,1991.

[5] Yıldırım, S., Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ , 1999.

[6] Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1984.

[7] Gürdal, O., Electromanyetik Alan Teorisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2000.