

# ÇOK BİLEŞENLİ İŞARETLER İÇİN ANLIK FREKANS KESTİRİMİ

Mahmut ÖZTÜRK

Aydın AKAN

İstanbul Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Avcılar, 34850 İstanbul  
e-posta: {mahmutoz,akan}@istanbul.edu.tr

*Anahtar Kelimeler: Anlık frekans, Zaman-frekans analizi, Evrimsel izge, Gabor açılımı.*

## ÖZET

*Bu çalışmada çok bileşenli işaretlerin anlık frekansının kestirimi için bir yöntem sunulmaktadır. Önerilen yöntem, işaret için bir zaman frekans izgesi hesaplanması, ve ardından bu birleşik ZF yoğunluk işlevinden bir anlık frekans kestirimi elde edilmesinden oluşmaktadır. Zaman frekans güç yoğunluğu, çok pencere Gabor açılımı ile hesaplanan evrimsel izgelerin, en küçük kareler yöntemiyle en uygun bir ortalaması olarak hesaplanır. Anlık frekans, elde edilen evrimsel izgeden yerel zaman-frekans bölgeleri içinde zaman koşullu ortalama frekans olarak kestirilir. Yöntemimizin başarımı örnekler üzerinde karşılaştırmalar ile verilmektedir.*

## 1. GİRİŞ

Bir sinyalin anlık frekansı (AF),  $\omega(t)$ , bu sinyale karşılık gelen  $x(t) = A(t) e^{j\phi(t)}$  analitik sinyalinin fazının zamana göre türevi olarak tanımlanır [1]. Ayrıca, birleşik zaman-frekans (ZF) yoğunluğu anlamında, sinyalin AF'ı belli bir andaki ortalama frekans (veya zaman koşullu ortalama frekans) olarak da tanımlanır [2]:

$$\langle \omega \rangle_t = \omega(t) = \int \omega \frac{S(t, \omega)}{S(t)} d\omega \quad (1)$$

ve burada

$$S(t) = \int S(t, \omega) d\omega$$

zamanda güç yoğunluk işlevi ( $|x(t)|^2$ ) olup ZF güç yoğunluk işlevinin,  $S(t, \omega)$ , zamanda kenar yoğunluğu olarak elde edilir. Bir sinyalin AF'nın kestirimi haberleşme, radar, biyomühendislik gibi bir çok sinyal işleme uygulamasında karşılaştığımız önemli bir problemdir [3, 4]. Örneğin, yayılmış izgeli haberleşme sistemlerinde bozucu girişler, anlık frekansları kestirilerek ve zamanla değişen bir filtre kullanılarak temizlenebilirler [5]. Bu çalışmada önerilen yöntemle, AF, sinyal için en küçük kareler yaklaşımı ile hesaplanan bir çok pencere ortalama evrimsel izge yardımıyla kestirilmektedir.

<sup>1</sup>Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No.: B-833/08022001.

ZF sinyal analizi, durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen güç izgesinin elde edilebilmesi için kullanılan bir yöntemdir [2]. Wigner-Ville İzgesi (WVI) durağan olmayan rasgele  $x(t)$  süreci için, zamana bağlı bir güç izgesi olarak şöyle tanımlanır [6]:

$$P(t, \omega) = E \{W(t, \omega)\} \\ = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x(t - \frac{\tau}{2}) x^*(t + \frac{\tau}{2})] e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}$$

ve burada  $W(t, \omega)$  Wigner Dağılımını (WD) göstermektedir. Buna göre yukarıdaki ifade, bahsedilen sürecin farklı gerçeklemelerinin Wigner-Ville dağılımlarının istatistiksel ortalamasıdır. Durağan olmayan  $x(t)$  sürecinin birçok gözlemine sahip olduğumuzda, WVI kestirimi için bu gözlemlerin ayrı ayrı WVD'lerinin grup ortalamasını kullanabiliriz. Ancak genelde bu mümkün değildir;  $x(t)$  rasgele sürecinin sadece bir gözlemi ile kestirim yapılması gerekir. Bu durumda, yumuşatıcı bir kernel işlevi kullanılan zaman-frekans dağılımları (ZFD) ile WVI kestirilmeye çalışılır [2].

Verilen bir sinyalin WVI kestirimini elde etmek için [4, 9]'de çok pencere ile hesaplanan spektrogramların en uygun ortalaması şeklinde yeni bir kestirim yöntemi sunulmaktadır. Bu çalışmada ise, çok pencere Gabor açılımıyla elde edilen evrimsel izgelerin [7] en uygun ortalamasını WVI kestirimi olarak kullanılmaktadır [7]. En uygun birleşim katsayıları, bir referans ZFD (sinyale ait WVD olarak alınmaktadır) ile çok pencere ortalama evrimsel izgenin arasındaki karesel hatanın en küçültülmesiyle elde edilir.

## 2. ÇOK PENCERELİ GABOR AÇILIMI İLE EVRİMSSEL İZGE ANALİZİ

Durağan olmayan bir  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , sinyalinin ayrık zaman ve ayrık frekanslı Wold-Cramer gösterimi [11]

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K-1} A(n, \omega_k) e^{j\omega_k n}, \quad (2)$$

olup burada  $\omega_k = 2\pi k/K$ ,  $K$  frekans örneği sayısı ve  $A(n, \omega_k)$  zamanla değişen bir kerneldir. Evrimsel izge

bu kernelden  $S(n, \omega_k) = \frac{1}{K} |A(n, \omega_k)|^2$  olarak hesaplanır. [7]'de bu kernelin, Gabor açılımı katsayılarından elde edilebildiği gösterilmiştir. Çok pencereci Gabor açılımı şöyle gösterilebilir [7]:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k} h_i(n - mL) e^{j\omega_k n} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} A_i(n, \omega_k) e^{j\omega_k n} \quad (4)$$

ve burada  $\{a_{i,m,k}\}$  Gabor katsayıları,  $\{h_{i,m,k}\}$  ise bir Gauss pencere fonksiyonundan ölçekleme, öteleme ve modülasyon ile elde edilen taban fonksiyonlarıdır:

$$h_{i,m,k}(n) = h_i(n - mL) e^{j\omega_k n} \quad (5)$$

ve sentez penceresi  $h_i(n)$  birim enerjili bir pencereden

$$h_i(n) = 2^{i/2} g(2^i n), \quad i = 0, 1, \dots, I - 1.$$

Çok pencereci Gabor katsayıları

$$a_{i,m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \gamma_i^*(n - mL) e^{-j\omega_k n}, \quad (6)$$

ile hesaplanır ve burada analiz penceresi  $\gamma_i(n)$ ,  $h_i(n)$  ve  $\gamma_i(n)$  arasındaki ikili diklik koşulundan çözülür [7]. Böylece, sinyalin (3) ve (4) eşitliklerindeki gösterimlerini karşılaştırarak evrimsel kernel,

$$A_i(n, \omega_k) = \sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k} h_i(n - mL) \quad (7)$$

Gabor katsayıları,  $\{a_{i,m,k}\}$ , yerine konarak kernel işlevi şu biçimde de verilebilir,

$$A_i(n, \omega_k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) w_i(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell}, \quad (8)$$

ki burada  $i$ . ölçek için zamanla değişen bir pencere ortaya çıkmaktadır:

$$w_i(n, \ell) = \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_i^*(\ell - mL) h_i(n - mL).$$

Sonuç olarak  $x(n)$ 'in  $h_i(n)$  penceresi kullanılarak hesaplanan evrimsel izgesi,

$$S_i(n, \omega_k) = \frac{1}{K} |A_i(n, \omega_k)|^2,$$

ve burada  $1/K$  katsayısı doğru enerji normalizasyonu için kullanılmıştır. Ayrıca,  $w_i(n, \ell)$  penceresi birim enerjiye normalize edilerek işaretin toplam enerjisi evrimsel izgede korunmuş olur. Dahası,  $S_i(n, \omega_k)$  negatif olmayan değerlere sahiptir ve kenar yoğunlukları yakınsar [7]. Dolayısı ile birçok ZFD'nın aksine, ZF enerji yoğunluk işlevi olarak yorumlanabilir ve AF kestiriminde kullanılabilir.

### 3. ANLIK FREKANS KESTİRİMİ

Toplamsal gürültüyle bozulmuş, ayrık zamanlı ve duran olmayan bir  $s(n)$  süreci verilmiş olsun.  $x(n) = s(n) + \eta(n)$  gözlenen sinyali,  $s(n)$  ve  $\eta(n)$  ise sırasıyla sinyal ve gürültü süreçlerini belirtsin. Düşük sinyal/gürültü oranı (SGO) koşulları altında  $s(n)$  sürecinin yüksek çözünürlüklü evrimsel izge kestirimi ve böylece AF kestirilecektir. Bunun için  $S_i(n, \omega_k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, I - 1$ , evrimsel izgelerinin ağırlıklı ortalamasının bir referans ZFD'na en küçük kareler anlamında en yakın olması sağlanacaktır. Verilen  $x(n)$  sinyali için, evrimsel izgeler

$$S_i(n, \omega_k) = \frac{1}{K} \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) w_i(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \right|^2. \quad (9)$$

olup burada  $h_i(n)$  penceresi, ZF düzleminde ideale en yakın yerleşmelerinden dolayı Gauss olarak kullanılır [12]. Sonra  $x(n)$  sürecinin WVİ, çok pencereci evrimsel izgelerin ağırlıklı ortalaması olarak şu şekilde hesaplanır:

$$\hat{P}(n, \omega_k) = \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \quad (10)$$

ve burada  $\{c_i\}$  ağırlık katsayıları aşağıdaki hata fonksiyonunun en küçültülmesiyle elde edilir

$$\varepsilon_i = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left| P_R(n, \omega_k) - \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \right|^2 \quad (11)$$

burada  $P_R(n, \omega_k)$  bir referans ZFD'dır, ve en uygun ZF yerleşmesine sahip olduğu için, Wigner-Ville dağılımı olarak alınmaktadır.

Matris gösterimi kullanarak, (11) eşitliğindeki en küçültme problemi şu şekilde tekrar yazılabilir

$$\min_{c_i} \| \mathbf{P}_R - \mathbf{S} \mathbf{c} \|^2 \quad (12)$$

Bu en küçük kareler en küçültme probleminin çözümü

$$\mathbf{c}^o = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_R$$

burada  $^{\circ}$  optimumu göstermektedir. Sonra, WVİ kestirimi (10) eşitliğinde  $\{c_i^o\}$  kullanılarak, en uygun ağırlıklı ortalama olarak elde edilir. Son olarak  $\hat{P}(n, \omega_k)$  kestirimi, olası negatif  $c_i^o$  katsayıları sebebiyle oluşabilecek negatif değerleri yok etmek için maskelenir ve sonuçta negatif olmayan, zamanla değişen izge:

$$\hat{P}(n, \omega_k)^+ = \begin{cases} \hat{P}(n, \omega_k), & \hat{P}(n, \omega_k) \geq 0; \\ 0, & \hat{P}(n, \omega_k) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

ve burada  $\hat{P}(n, \omega_k)^+$  izgenin yalnızca pozitif kısmını belirtir. Daha sonra çok bileşenli sinyaller için yerel AF  $IF(n, \omega_k)$ , bu ZF güç yoğunluk işlevinin  $P \times Q$  boyutlu küçük ZF bölgeleri içinde zaman koşullu ortalama frekans olarak hesaplanmaktadır:

$$IF(n, \omega_k) = \sum_k \omega_k \frac{\hat{P}(n, \omega_k)^+}{S(n)},$$

$$(p-1)P+1 \leq n \leq pP, \quad (q-1)Q+1 \leq k \leq qQ$$

ve burada  $p = 1, \dots, N/P$  ve  $q = 1, \dots, K/Q$ . Benzetimlerimizde çok bileşenli durağan olmayan sinyallerin hem ZF izgesi hem de yerel AF kestirimi elde edilmiştir.

#### 4. ÖRNEKLER

Önerdiğimiz yöntemin başarımını incelemek için keşifçi iki çarpı sinyali ele alınmaktadır. Şekil 1'de, bu sinyalin  $I = 4$  pencere ile hesaplanan en küçük kareler evrimsel izge kestirimi,  $\hat{P}(n, \omega_k)^+$ , görülmektedir. Şekil 2 bu evrimsel izgeden elde edilen yerel AF kestirimini göstermektedir. Aynı sinyalin zaman koşullu ortalama frekans olarak en küçük kareler evrimsel izgeden hesaplanan global AF'ı Şekil 3'de verilmiştir. Diğer bir örnek olarak sinüsoidal FM ve bir sinüsoidal sinyalin birleşimi ele alınmış ve yerel AF'ı önerdiğimiz yöntemle kestirilmiştir. Şekil 4, bu sinyalin en küçük kareler evrimsel izge kestirimini ve Şekil 5 Yerel AF kestirimini göstermektedir. Aynı sinyalin global AF'ı Şekil 6'de verilmiştir. Görüldüğü gibi önerilen evrimsel izge tabanlı yerel AF kestirim yöntemi klasik (zaman koşullu ortalama frekans ile) AF kestirimine göre çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

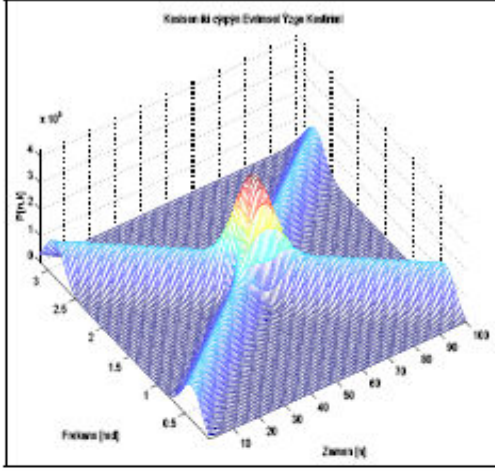
#### 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, çok bileşenli durağan olmayan sinyallerin yerel anlık frekansının elde edilmesi için bir yöntem sunulmaktadır. Yöntemimiz, çok pencereli Gabor açılımı ile hesaplanan evrimsel izgelerin, en küçük kareler anlamında en uygun birleşimine dayanır. En uygun ağırlık katsayıları, evrimsel izgelerin ortalaması ile bir referans ZFD'nin arasındaki hatanın karesel ortalaması en küçültülerek elde edilir. Örnekler, yöntemin çok pencereli evrimsel izge analizi ile yüksek çözünürlüklü ZFD'lerinin üstünlüklerini birleştirdiğini göstermektedir; yani, negatif olmayan ve yüksek çözünürlüklü zamanla değişen izge kestirimi sağlamaktadır. Böylece yerel AF kestirimi, sinyalin her bir bileşeni için ayrı ayrı AF bilgisini verebilmektedir. Oysa klasik global AF ile tüm bileşenler için tek bir  $\omega(t)$  AF fonksiyonu elde edilebilmektedir.

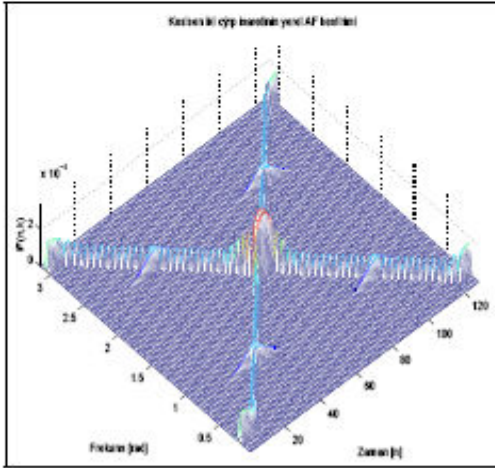
#### KAYNAKLAR

- [1] Cohen, L., and Lee, C., "Instantaneous Frequency, Its Standard Deviation and Multicomponent Signals," *SPIE, Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing III*, Vol. 975, pp. 186–208, 1988.
- [2] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [3] Mandel, L., "Interpretation of Instantaneous Frequencies," *AJP*, Vol. 42, pp. 840–846, Oct. 1974.
- [4] Cakrak, F., Loughlin, P.J., "Multiwindow Time-varying Spectrum with Instantaneous Bandwidth and Frequency Constraints," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 49, No. 8, pp. 1656–1666, Aug. 2001.

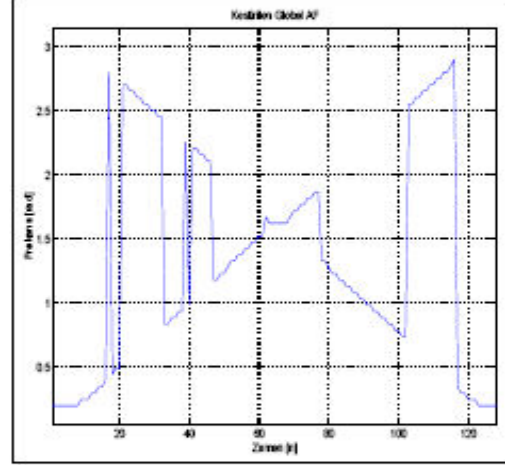
- [5] Akan, A., and Cekic, Y., "Interference Suppression in DSSS Communication Systems Using Instantaneous Frequency Estimation," *The 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems - ICECS'99*, pp. 461–464, Paphos, Cyprus, Sep. 5 - 8, 1999.
- [6] Martin, W., and Flandrin, P., "Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes," *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 33, No. 6, pp. 1461–1470, Dec. 1985.
- [7] Akan, A., and Chaparro, L.F., "Multi-window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis," *Signal Processing*, Vol. 63, pp. 249–262, Dec. 1997.
- [8] Jones, D.L. and Baraniuk, R.G., "An Adaptive Optimal-Kernel Time-Frequency Representation," *IEEE Trans. on Signal Process.*, Vol. 43, No. 10, pp. 2361–2371, May 1995.
- [9] Bayram, M., and Baraniuk, R.G., "Multiple Window Time-Frequency Analysis," *IEEE SP Intl. Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, TFSA'96*, Paris, France, pp. 173–176, Jun. 1996.
- [10] Akan, A., and Chaparro, L.F., "Evolutionary Chirp Representation of Non-stationary Signals via Gabor Transform," *Signal Processing*, Vol. 81, No. 11, pp. 2429–2436, Nov. 2001.
- [11] Priestley, M.B., *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*. Academic Press, London, 1988.
- [12] Suleesathira, R., Akan, A. and Chaparro, L. F., "Discrete Evolutionary Transform for Time-Frequency Signal Analysis," *J. Franklin Institute, Special Issue on Time-Frequency Signal Analysis and its Applications*, pp. 347–364, Vol. 337, No. 4, Jul. 2000.



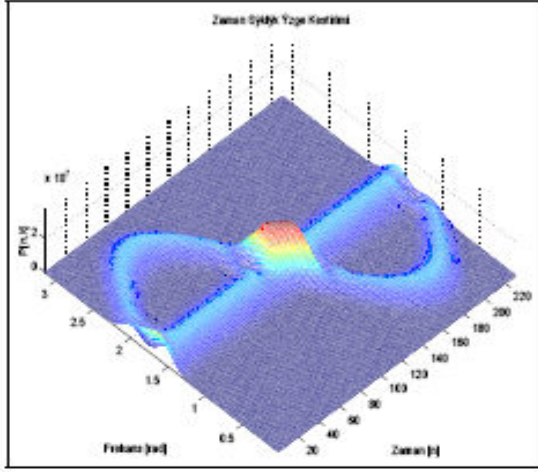
Şekil 1. En küçük kareler evrimsel izge kestirimi.



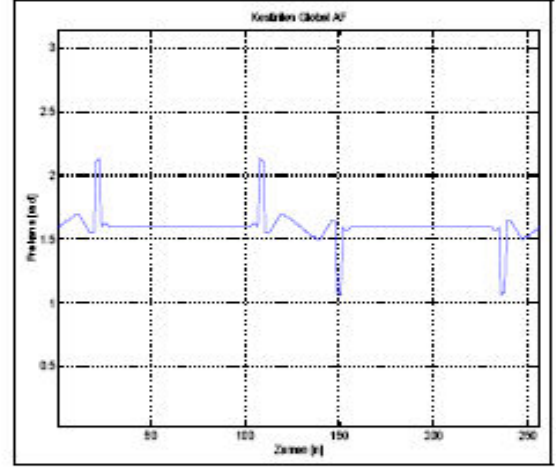
Şekil 2. Kesişen İki çırpı işaretinin yerel AF kestirimi



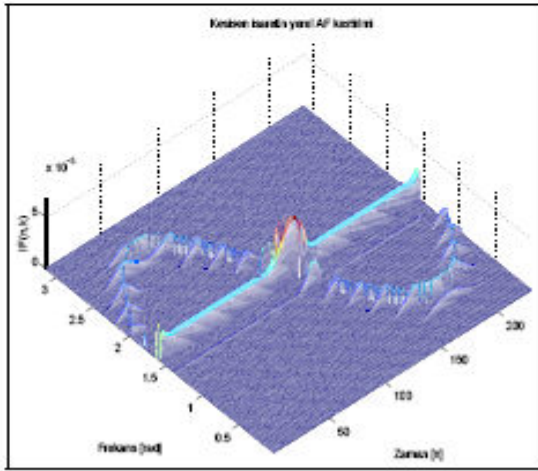
Şekil 3. Zaman koşullu ortalama frekans, AF.



Şekil 4. En küçük kareler evrimsel izge kestirimi.



Şekil 6. Zaman koşullu ortalama frekans AF.



Şekil 5. İki bileşenli işaretin yerel AF'ı.