ÇOK PENCERELİ KESİRLİ ZAMAN FREKANS ANALİZİ

Yalçın ÇEKİÇ[1] **Aydın AKAN**[2]

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
[1] Bahçeşehir Üniversitesi, Bahçeşehir, İstanbul
e-posta: yalcin@eng.bahcesehir.edu.tr
[2] İstanbul Üniversitesi, 34850, Avcılar, İstanbul
e-posta: akan@istanbul.edu.tr

Anahtar sözcükler: Zaman-frekans analizi, Evrimsel izge, Kesirli Gabor açılımı.

ÖZET

Bu çalışmada, çok pencereli kesirli Gabor açılımı yardımı ile yeni bir Zaman-Frekans (ZF) analiz yöntemi önerilmekte ve ayrık zamanlı durağan olmayan işaretlerin spektrum analizine uygulanmaktadır. Kullanılan kesirli Gabor açılımı, dikdörtgen olmayan bir ZF kafesi oluşturmaktadır. Böylece dar ve geniş bandlı işaretlerin ZF analizleri yüksek çözünürlük ile elde edilebilmektedir. Önerilen yöntemin başarımı örnekler üzerinde sunulmaktadır.

1. GİRİŞ

Zaman Frekans (ZF) analizi bir işaretin taşıdığı enerjisinin, birleşik zaman frekans düzlemine dağılımını veya zamanla değişen güç izgesini elde etmekte kullanılan bir yöntemdir [1]. ZF analizinde ana hedeflerden biri, sinyal enerjisinin birleşik ZF düzlemine dağılımını delta fonksiyonu yerelleşmesi ile elde etmektir; ancak kestirim yöntemlerinin getirdiği kısıtlamalar nedeniyle bu genel olarak mümkün değildir. Bir ZF analiz yöntemi olan Evrimsel Spektrum (ES) yaklaşımı rasgele durağan işaretlerin spektrum gösterimine benzeyen, ancak zamanla değişen bir işaret gösterimine dayanır [2, 3]. Bu Wold-Cramer gösterimine göre durağan olmayan işaretler, rasgele ve zamanla değişen genlik ve faza sahip sinüsoidallerin birleşimi olarak gösterilebilirler [2]. Buna paralel olarak, ayrık zamanlı, sonlu uzunlukta bir $x(n)$ işareti, zamanla değişen genlikli sinüsoidallerin birleşimi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirmektedir [7]:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K-1} X(n,k) e^{jn\frac{2\pi}{K}k} \qquad 0 \le n \le N-1 \quad (1)$$

Ayrıca $x(n)$ işaretinin evrimsel spektrumu $S_{ES}(n,k) = \frac{1}{K}|X(n,k)|^2$ şeklinde verilir ve kestirimi için çeşitli yöntemler önerilmiştir [4, 5, 6, 7, 8]. $x(n)$ işaretinin modellenmesi ve ES kestirimi için gerekli olan $X(n,k)$ çekirdeği [7]'de çok pencereli Gabor katsayıları kullanılarak elde edilmiştir.

Bir ZF gösterim yöntemi olan Gabor açılımı, sinyalleri ZF atomu denen ve zamanda ve frekansta öteleme ile elde edilen taban fonksiyonlarının birleşimi olarak ifade eder [9]. Gabor açılımı sinyal analizi alanında çok çeşitli uygulamalarda başarıyla kullanılmaktadır. Taban fonksiyonları $h_{m,k}(n)$ sabit bir $h(n)$ pencere işlevinin zamanda eşit aralıklarla ötelenmesi ve düzgün aralıklarla sinüsoidal modüle edilmesiyle elde edilir. Bunun sonucunda ZF düzleminde düzgün ve dikdörtgen bir örnekleme kafesi kullanılmış olur. Ancak incelenmekte olan işaret, böyle sabit band genişliği ile modellenemiyor ise (sinüsoidal bileşenlerin toplamından oluşmuyor ise) bu sinyalin Gabor gösterimi yetersiz bir ZF çözünürlüğü sergileyecektir. Çünkü, sinyalin gösteriminde gereğinden fazla Gabor atomu kullanılacaktır. Pratikte karşılaşılan birçok işaret (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen frekans özellikleri gösterir ve bu işaretler klasik Gabor analizi için uygun değildir.

Çok pencereli Gabor açılımı, sonlu uzunlukta bir $x(n), 0 \le n \le N-1$ işareti için [7]

$$x(n) = \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k}\,\tilde{h}_{i,m,k}(n) \qquad (2)$$

olarak verilmiştir. Burada kullanılan taban fonksiyonları

$$\tilde{h}_{i,m,k}(n) = \tilde{h}_i(n-mL)e^{jn\frac{2\pi}{K}k} \qquad (3)$$

$\tilde{h}_i(n)$ ölçeklenmiş ve periyodik hale getirilmiş ($\tilde{h}_i(n) = h_i(n+rN)$, r tamsayı) sentez penceresi olup birim enerjiye sahip bir ana Gabor penceresinden $h_i(n) = 2^{i/2}\ h_0(2^i n),\ i = 0, 1, \cdots, I-1$ şeklinde elde edilmektedir. Burada I kullanılan pencere sayısını göstermekte, M, K, L, L' pozitif tamsayıları $ML = KL' = N$ şartını sağlamaktadır. M ve K sırasıyla zaman ve frekanstaki örnek sayılarını, L ve L' ise zaman ve frekans adımlarını göstermektedir.

[2]Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No.: UDP-12/21062002 ve BYP-6/05062002.

Çok pencereli Gabor katsayıları

$$a_{i,m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \tilde{\gamma}^*_{i,m,k}(n) \quad (4)$$

ile elde edilir ki burada $\tilde{\gamma}_{i,m,k}(n) = \tilde{\gamma}_i(n - mL)\, e^{j\frac{2\pi k}{K}n}$ ve $\tilde{\gamma}_i(n)$ analiz penceresi $\tilde{h}_i(n)$'e ikili dik olacak şekilde hesaplanır [9]. ES kestirimi (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} X(n,k) &= \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k}\, \tilde{h}_i(n-mL) \\ &= \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1} X_i(n,k) \end{aligned} \quad (5)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (4)'deki Gabor katsayıları yukarıda yerine konarak,

$$X(n,k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell)\, \mathrm{w}(n,\ell) e^{-j\ell\frac{2\pi}{K}k} \quad (6)$$

elde edilir ki burada $\mathrm{w}(n,\ell)$ zamanla değişen pencere fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(n,\ell) &= \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1} \mathrm{w}_i(n,\ell) \\ &= \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{\gamma}^*_i(\ell-mL)\tilde{h}_i(n-mL)\right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra ES hesabı (6) eşitliği kullanılarak veya (5)'deki $X_i(n,k)$ farklı ortalama yöntemleri ile birleştirilerek elde edilir. Ancak analiz edilen sinyal zamanla değişen frekans özellikleri gösteriyor ise, çok pencere ile yapılan sinüsoidal analizlerin ortalamasıyla elde edilen ES de yeterli bir ZF çözünürlüğü veremeyecektir.

Durağan olmayan işaretlerin Gabor analizinde ZF çözünürlüğünü arttırmak amacıyla taban fonksiyonlarında doğrusal frekans modülasyonlu çırplar kullanılmakta, veya işaretin zamanla değişen frekans karakteristiğine uyumlu yapılmaktadır [8, 10, 11]. Bu yöntemlerin bir çoğunda işareti en iyi temsil eden taban fonksiyonlarını bulabilmek için çok sayıda deneme yapılarak bunlar arasından seçim yapılmaktadır. Dolayısı ile çok uzun ve zaman alıcı hesaplamalar gerekmektedir.

Son yıllarda kesirli Fourier dönüşümü (KFD) [12], kesirli Fourier serisi [13], ve ayrık zamanlı KFD [14] tanımı üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmada, ayrık zamanlı sinyallerin yüksek çözünürlüklü, zamanla değişen spektrum kestirimi için çok pencereli kesirli bir ES yöntemi verilmektedir. Kesirli ES, dikdörtgen olmayan bir örnekleme kafesi üzerinde tanımlanmış, kesirli Gabor açılımı yardımıyla elde edilmektedir. Bu yeni açılımın taban fonksiyonları kesirli Fourier serisi ve örnekleme kullanılarak elde edilmiştir. Bu taban işlevleri ile ZF düzlemi paralelkenarlar biçiminde bölütlenmekte ve bunların köşe noktaları örnekleme kafesini oluşturmaktadır.

2. KESİRLİ GABOR AÇILIMI

Bir $x(n)$, $0 \le n \le N-1$, işareti için ayrık zamanlı kesirli çok pencereli Gabor açılımı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k,\alpha}\, \tilde{h}_{i,m,k,\alpha}(n) \quad (7)$$

Burada $a_{i,m,k,\alpha}$ kesirli Gabor katsayılarını, α kesir derecesini göstermekte olup taban foksiyonları,

$$\tilde{h}_{i,m,k,\alpha}(n) = \tilde{h}_i(n-mL)\, W_{\alpha,k}(n)$$

ve $\tilde{h}_i(n)$ daha önce olduğu gibi bir pencerenin ölçeklenmesi ve periyodikleştirilmesiyle elde edilir. $W_{\alpha,k}(n)$ ise kesirli çekirdek fonksiyonudur:

$$W_{\alpha,k}(n) = e^{j[-\frac{1}{2}(n^2+(k\frac{2\pi}{K}\sin\alpha)^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}n]}$$

Bu çekirdek [13]'deki Kesirli Fourier Serisi (KFS) taban fonksiyonlarının zamanda örneklenmesi ile elde edilmiştir. (7) eşitliği $\alpha = \pi/2$ için klasik Gabor açılımına dönüşür. M, K, L, ve L' paremetreleri klasik Gabor açılımındaki parametreler ile aynıdır. Sayısal olarak kararlı bir çözüm elde edebilmek için $L \le K$ koşulu sağlanmalıdır. $L = K$ koşulu kritik örnekleme, $L < K$ ise fazla örnekleme durumunu göstermektedir. Gabor katsayıları klasik Gabor açılımına benzer olarak,

$$a_{i,m,k,\alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \tilde{\gamma}^*_{i,m,k,\alpha}(n) \quad (8)$$

ile verilir ve buradaki analiz fonksiyonları aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{\gamma}_{i,m,k,\alpha}(n) = \tilde{\gamma}_i(n-mL)\, W_{\alpha,k}(n)$$

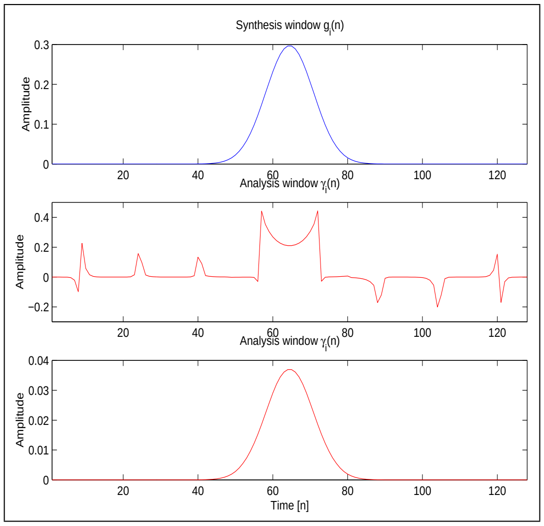
burada $\tilde{\gamma}_i(n)$, (4) eşitliğindeki ikili dik analiz penceresidir.

Kesirli Gabor taban işlevlerinin tamlık koşulu (7) eşitliği (8)'da yerine konarak

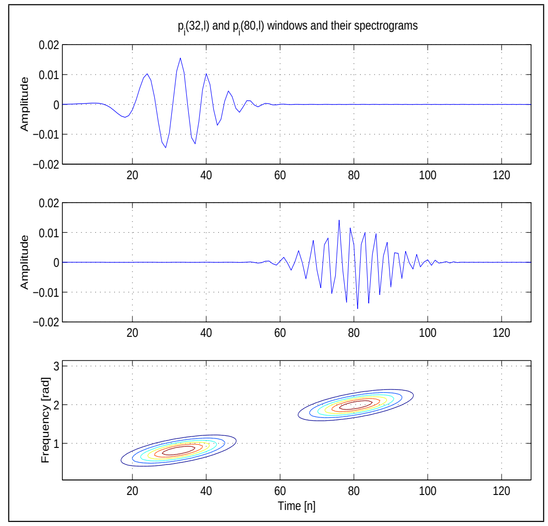
$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{K-1} & \tilde{g}_i(n-mL)\tilde{\gamma}^*_i(\ell-mL)e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-l^2)\cot\alpha]} \\ & \times e^{j\,\omega_k(n-\ell)} = \delta(n-\ell) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Analiz ve sentez taban kümelerinin dikliğini gösteren kesirli ikili diklik koşulu ise, yukardaki tamlık koşulunda ayrık Poisson toplam ilişkisi kullanılarak elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} & \tilde{g}^*_i(n+mK)e^{jk\frac{2\pi}{L}(n+mK)}\tilde{\gamma}_i(n) \\ & \times e^{j(nmK+\frac{m^2K^2}{2})\cot\alpha} = \frac{L}{K}\,\delta_m\delta_k \end{aligned}$$



Şekil 1. Bir Gauss sentez penceresi (en üstte), kritik örnekleme ($L = 16, K = 16$, ortada) ve fazla örnekleme ($L = 8, K = 64$, en altta) durumları için analiz pencereleri γ.



Şekil 2. Evrimsel Spektrum hesabında kullanılan $\mathrm{p}_i(n,\ell)$ penceresi; $n = 32$ (üstte) ve $n = 80$ (ortada) ve bunların ES'ları (altta).

$0 \leq m \leq L' - 1, \quad 0 \leq k \leq L - 1$. Yukarıdaki tamlık ve ikili diklik koşulları, $\alpha = \pi/2$ durumunda klasik sinüsoidal Gabor açılımının koşullarına dönüşmektedir. Bu da yukarıdaki kesirli açılımın, ayrık Gabor açılımının genelleştirilmiş bir hali olduğunu göstermektedir.

Şekil 1'de, bir Gauss sentez penceresi (en üstte) $\tilde{h}_i(n), n = 0, 1, \cdots, 127$, ve onun ikili dik çifti $\tilde{\gamma}_i(n)$ iki farklı örnekleme parametre kümesi ve $\alpha = \pi/4$ için (9) eşitliğinden hesaplanarak verilmiştir. Ortadaki şekilde verilen analiz penceresi $L = 16, K = 16$ ile kritik örnekleme durumunda üretilmiştir. Diğer taraftan en alttaki analiz penceresi ise $L = 8, K = 64$ sabitleri ile fazla örnekleme örneği olarak hesaplanmıştır.

3. KESİRLİ ES ANALİZİ

Bu bölümde yukarıda verilen çok pencereli kesirli Gabor açılımı yardımıyla bir Çok Pencereli Kesirli Zaman Frekans yöntemi önerilmektedir. Verilen bir $x(n)$ işaretinin (2) eşitliğindeki ayrık zamalı ve ayrık frekanslı spektrum gösterimini (7)'deki çok pencereli kesirli Gabor gösterimi ile karşılaştırarak, i. pencere ile hesaplanacak α kesirli ZF çekirdeği aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} X_i^{\alpha}(n,k) &= \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k,\alpha}\, \tilde{g}_i(n - mL) \\ &\times \quad e^{-j\frac{1}{2}(n^2 + (\omega_k \sin\alpha)^2)\cot\alpha} \end{aligned} \tag{9}$$

Daha sonra (8) eşitliğinde verilen kesirli Gabor katsayıları yukarıda yerine konarak

$$X_i^{\alpha}(n,k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell)\, \mathrm{p}_i^{\alpha}(n,\ell)\, e^{-j\omega_k \ell} \tag{10}$$

bulunur. Buradaki zamanla değişen ve kesirli (sinüsoidal olmayan biçimde) modüle edilmiş pencere fonksiyonu,

$$\mathrm{p}_i^{\alpha}(n,\ell) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}_i(n - mL)\tilde{\gamma}_i^{*}(\ell - mL) e^{j\frac{1}{2}(\ell^2 - n^2)\cot\alpha}$$

ile verilmektedir. Sonuç olarak $x(n)$ sinyalinin kesirli ve çok pencereli ZF spektrumu

$$S_i^{\alpha}(n,k) = \frac{1}{K}|X_i^{\alpha}(n,k)|^2, \qquad i = 0, 1, \cdots, I - 1$$

şeklinde elde edilir. $S_i^{\alpha}(n,k)$, daha önce olduğu gibi çeşitli ortalama yöntemleri ile birleştirilerek sonuç elde edilebilir [7]. Ayrıca $\mathrm{p}_i^{\alpha}(n,\ell)$ penceresi işaretten bağımsız olarak hesaplanabilecek ve yukarıdaki evrimsel spektrum hesabı FFT ile işlem yükü azaltılarak yapılabilecektir. Şekil 2'de, $\mathrm{p}_i^{\alpha}(n,\ell)$ penceresi bir ölçek seviyesinde ve $\alpha = \pi/4$ kesir derecesi için, $n = 32$ (üstte) ve $n = 80$ (altta) zaman noktaları için verilmiştir.

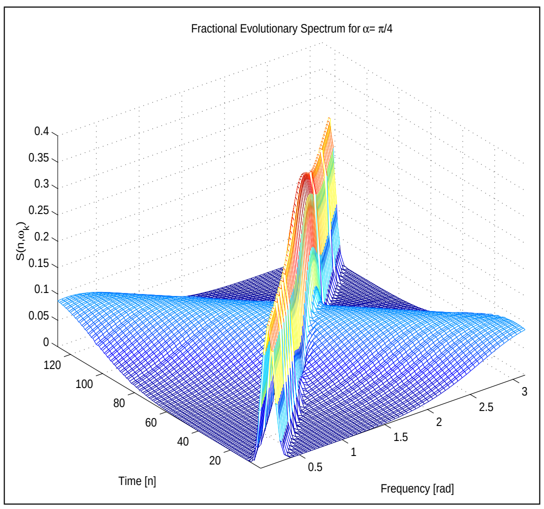
Ayrıca gösterilebilir ki, $\mathrm{p}_i^{\alpha}(n,\ell), \forall i$, pencerelerinin birim enerjiye normalize edilmesi durumunda, çok pencereli kesirli ES, işaret enerjisini korumaktadır.

4. UYGULAMALAR

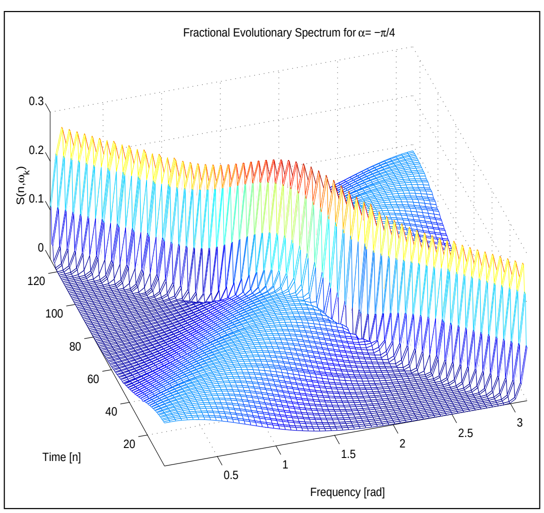
Zaman eksenine biri $\pi/4$ diğeri ise $-\pi/4$ radyan açı yapan iki çırpın birleşiminden oluşan bir işareti gözönüne alalım. Kesirli evrimsel spektrum yöntemi ile bu sinyal, iki ayrı kesir derecesi ile analiz edilmiştir. Şekil 3'da bu sinyalin $\alpha = \pi/4, L = 2, K = 128, I = 3$ kullanılarak hesaplanan kesirli ES kestirimi, ZF düzleminde analiz yönteminin yarattığı dönüşün etkisi yok edildikten sonra verilmektedir. Ayrıca sinyalin ES'si $\alpha = -\pi/4$ ile de hesaplanmış ve Şekil 4'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse, analizde kullanılan kesir derecesi, dolayısı ile kullanılan ZF örnekleme kafesi, herhangi bir sinyal bileşeninin ZF davranışına uyum gösterdiğinde, o bileşenin spektrumu daha yüksek çözünürlük ile elde edilebilmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada ayrık zamanlı, durağan olmayan sinyaller için zamanla değişen ve yüksek çözünürlüklü bir güç spektrumu kestirebilmek için, kesirli bir evrimsel spektrum analiz yöntemi sunulmuştur. İşarete ait evrimsel çekirdek, çok pencereli kesirli bir Gabor açılımı yardımıyla elde edilebilmektedir. Uygulama sonuçları, analizde kullanılan kesir derecesi, işaretin frekans içeriğine uyum gösterdiğinde, yüksek çözünürlüklü bir evrimsel spektrum elde edilebildiğini göstermiştir.



Şekil 3. Kesişen çırp işaretinin $\alpha = \pi/4$ ile kesirli ES kestirimi.



Şekil 4. Aynı işaretin $\alpha = -\pi/4$ ile kesirli ES kestirimi.

KAYNAKLAR

[1] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[2] Priestley, M.B., “Evolutionary Spectra and Non–stationary Processes,” *J. of Royal Statistical Society, B*, Vol. 27, No. 2, syf. 204–237, 1965.

[3] Melard, G., and Schutter, A.H., “ Contributions to Evolutionary Spectral Theory,” *J. Time Series Analysis*, Vol. 10, syf. 41-63, Jan. 1989.

[4] A. S. Kayhan, A. El-Jaroudi, and L. F. Chaparro, “Evolutionary Periodogram for Non-Stationary Signals,” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 42, No. 6, syf. 1527–1536, June 1994.

[5] A. S. Kayhan, A. El-Jaroudi, and L. F. Chaparro, “Data-Adaptive Evolutionary Spectral Estimation,” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 43, No. 1, syf. 204–213, Jan. 1995.

[6] S.I. Shah, L. F. Chaparro, and A. S. Kayhan, “Evolutionary Maximum Entropy Spectral Analysis,” *IEEE Proc. ICASSP–94*, Vol. IV, syf. 285–288, Adelaide, Australia, Apr. 1994.

[7] Akan, A., and Chaparro, L.F., “Multi–window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis,” *Signal Processing*, Vol. 63, syf. 249–262, Dec.1997.

[8] Akan, A., and Chaparro, L.F., “Evolutionary Chirp Representation of Non-stationary Signals via Gabor Transform,,” Signal Processing, vol. 81, no. 11, syf. 2429-2436, Nov. 2001.

[9] Wexler, J., and Raz, S., “Discrete Gabor Expansions,” *Signal Processing*, Vol. 21, No. 3, syf. 207–220, Nov. 1990.

[10] Akan, A., and Chaparro, L.F., “Signal-Adaptive Evolutionary Spectral Analysis Using Instantaneous Frequency Estimation,” IEEE-SP Proceedings of International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis - TFTS’98, syf. 661–664, Pittsburgh, PA, Oct. 6-9, 1998.

[11] Bultan A., “A Four–Parameter Atomic Decomposition of Chirplets,” *IEEE Tans. on Signal Proc.*, Vol. 47 syf. 731–745, 1999.

[12] Almeida, L.B., “The Fractional Fourier Transform and Time–Frequency Representations,” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 42, No. 11, syf. 3084–3091, Nov. 1994.

[13] Pei, S.C., Yeh, M.H., and Luo, T.L., “Fractional Fourier Series Expansion for Finite Signals and Dual Extension to Discrete–Time Fractional Fourier Transform,” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 47, No. 10, syf. 2883–2888, Oct. 1999.

[14] Candan Ç., Kutay, M.A., and Özaktaş, H.M., “The Discrete Fractional Fourier Transform,” *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 48, syf. 1329–1337, Mayıs 2000.