

BELİRSİZLİK İÇEREN SİSTEMLERİN GUTMAN-HAGANDER METODUYLA KONTROLÜ

İhsan BAYIR¹

Ahmet UÇAR²

¹Dicle Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi,
Elektrik -Elektronik Mühendisliği Bölümü, 21280 Diyarbakır

²Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Elektrik -Elektronik Mühendisliği Bölümü, 23119 Elazığ

¹e-posta: bayihsan@dicle.edu.tr

²e-posta: aucar1@firat.edu.tr

Anahtar sözcükler: Otomasyon ve Kontrol, Sınırlandırılmış Kontrol, Lyapunov Kontrolü, Belirsiz Sistemler.

ABSTRACT

In this study, a method is given to control dynamical systems with matched uncertainty by constrained control signal. In advance, the bounds of uncertainty and the limitation of control signal are known. Since the control signal law is obtained by employing Lyapunov method, asymptotic stability of closed loop is achieved.

Control signals contains three parts; a low gain linear controller for stabilizing the closed loop system, a nonlinear controller, on-off, meet the effects of uncertainty, and a linear controller to achieve desired time response performance.

In order to design controller a procedure is given to highlight the design steps. The effective of the controller is shown by considering a system containing uncertain elements. Thus, the robustness of the closed loop system is observed.

1. GİRİŞ

Bir sistem dinamiğinin modellenmesinde sistem parametrelerinde belirsizlikler bulunabilir veya sistem dinamiğinin bir kısmı tam modellenemeyebilir. Bu gibi sistemlere kontrol tasarlanırken bu belirsizliklerin göz önüne alınarak sistem performansının garantilenmesi gerekmektedir [1]. Literatürde çeşitli belirsizlik içeren sistem türleri ve bu sistemler için verilmiş kontrolörler önerilmiştir [2-5].

Bu çalışmada, Gutman-Hagander [2, 6] tarafından önerilen, sınırlı bir girişe sahip ve parametre değişiminden dolayı sistem dinamiğinde parametre belirsizliği olan sistemlerin Lyapunov metodu ile kontrolü verilecektir.

Verilen metodun çalışabilmesi için belirsizlikle ilgili aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir: a) Belirsiz parametrenin değişim aralığı bilinmeli ve bu değişim sistemin bant genişliği içinde etkin olmalıdır. b) Belirsizlik sistemin kontrol kanalında olmalıdır.

Bu kontrol tekniğinde, sistem önce düşük kazançlı bir durum geri beslemeli kontrolör ile kararlı hale getirilir. Elde edilen yeni sistem için bir kvadratik Lyapunov fonksiyonu bulunur [1] ve buna göre başka bir durum geri beslemeli kontrol hesaplanır. Bu iki kontrolör toplanarak belirsizliklerin sınırlarına göre saturasyon sınırları belirlenir. Verilen yöntemler ile kontrol çıkışında saturasyon olmasına rağmen, belirlenen başlangıç değerlerini oluşturan küme içinden başlayan belirsizlik içeren sistemin kararlılığı garantilenerek hedeflenen performans sağlanır.

2. SİSTEM TANIMI ve PROBLEM FORMULASYONU

$x \in \mathbb{R}^n$ değişkeni, \dot{x} durum değişkeninin türevi, $u \in \mathbb{R}^l$ ve $\eta \in \mathbb{R}^n$ sırası ile kontrol işareti ve belirsizlik olmak üzere;

$$\dot{x} = Ax + B(u + \eta), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

Burada A , B uygun boyutta matrislerdir. Sistemin durum değişkenlerinin iyi ölçüldüğü ve geribesleme için uygun olduğu kabul edilmektedir. Belirsizlik vektörü η ise ρ_j ve r_j

$$\mathcal{V} = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| \leq r_j(x) \leq \rho_j \} \quad (2)$$

ile sınırlıdır. Kontrol işareti u ;

$$g_j \leq u_j \leq h_j \quad j = 1, \dots, m \quad (3)$$

ile sınırlı ve

$$[g_j + \rho_j, h_j - \rho_j] \quad j = 1, \dots, m \quad (4)$$

aralığında tüm j değerleri için u_j nin mevcut olduğu varsayalım. u kontrol işaretiyle sistemin

$$[A, B] \quad (5)$$

matrisleri kararlı hale getirilebilir [6].

Tanım 1: D kümesi, orijine getirilmek istenen sistemin, durum uzayında başlangıç koşullarının kümesi olsun.

$$L \triangleq [l_1 \mid l_2 \mid \dots \mid l_m] \quad (6)$$

$n \times m$ boyutunda kazanç matrisi olmak üzere

$$u = -L^T x \quad (7)$$

kontrol işareti ile kapalı çevrim sistem matrisi

$$A_c \triangleq A_c(L) \triangleq (A - BL^T) \quad (8)$$

olur ve A_c nin özdeğerleri L ile uygun seçilerek kararlılık ve hedeflenen performans sağlanır.

Tanım 2: $G(L)$ bölgesi, Denklem (7) de verilen doğrusal durum geri beslemenin, başlangıçta (4) sınırlarını aşmadığı bölge olsun.

$$G(L) \triangleq \{z \mid z \in R^n, g_j + \rho_j \leq l_j^T z \leq g_j - \rho_j, j = 1, \dots, m\} \quad (9)$$

dir. A_c kararlı bir matris olduğundan, Lyapunov denklemi

$$A_c^T P_c + P_c A_c = -Q_c \quad (10)$$

$n \times n$ boyutundaki her pozitif tanımlı Q_c için

$$P_c(L, Q_c) \triangleq P_c = P_c^T > 0 \quad (11)$$

matrisini sağlar. O halde

$$\dot{x} = A_c x \quad (12)$$

sistemi için bir Lyapunov fonksiyonu

$$V(x) = x^T P_c x \quad (13)$$

dir. Denklem (13) de verilen Lyapunov fonksiyonun geçerli olduğu c pozitif tanımlı skalar olmak üzere;

$$\Omega \triangleq \Omega(L, P_c, c) \triangleq \{x \mid x^T P_c x \leq c\} \quad (14)$$

bölgesinde, Lyapunov'un Direkt Metodu [1] gereği, $t \geq 0$ için

$$x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega \quad (15)$$

dir. Tanımlanan bu kümelerin;

$$D \subseteq \Omega \subseteq G \quad (16)$$

şartını sağlaması gerekmektedir. Denklem (16) koşulu P_c, c ve L değerleri seçilerek sağlanabilir [2].

3. KONTROL TASARIMI

Bilindiği gibi, sistemleri sürmek için kullanılan birimlerin fiziksel sınırlamaları vardır. Bu sınırlamalar göz önünde bulundurularak doğrusal olmayan kontrolörün saturasyon sınırları aşağıdaki tanımla belirlenmiş olsun.

Tanım 3: Sınırlı kontrol girişinin $\text{sat}(\cdot)$ fonksiyonu

$$\text{sat}_j(r) = \begin{cases} g_j & r \leq g_j \\ r & g_j \leq r \leq h_j \\ h_j & h_j \leq r \end{cases}$$

olsun.

Teorem 1: Denklem (1) sistemi için $\rho_j > 0, j = 1, \dots, m$ ve (3) verilsin. (4) ün sağlandığı; Tanım 1 deki D kümesinin uygun L için A_c yi (6) ve (8) şartını sağlayan $n \times m$ boyutunda L matrisinin olması, (10) Lyapunov denklemini sağlayan $n \times n$ boyutunda $P_c = P_c^T > 0$ ve $Q_c = Q_c^T > 0$ matrislerinin olması, (14) şartını sağlayan bir c sabitinin olması özelliklerine sahip bir küme olduğunu varsayalım. Ω içinde (2) nin sağlandığı varsayalım.

Tanım 4:

$$K \triangleq \text{diag}(k_1, \dots, k_m), k_j \geq 0, j = 1, \dots, m \quad (17)$$

ile tanımlı K matrisi olsun.

Bu durumda Gutman-Hagander kontrolü

$$u_j = \text{sat} \left[-l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x) - k_j b_j^T P_c x \right] j = 1, \dots, m \quad (18)$$

olarak elde edilir. Kontrolör, tüm K değerleri ve tüm $x_0 \in D$ değerleri için kapalı çevrimli sistem orijine göre asimptotik kararlıdır.

Kontrol işareti u_j ' nin hesaplanması Şekil 1 ile gösterilmiştir.

Buna göre u_j kontrolörünü elde etmek için tasarım adımları:

1) Sistemin çalışma şartları göz önünde bulundurularak durum değişkenlerinin başlangıç şartları kümesi D belirlenir.

2) Kapalı çevrimli sistemi kararlı yapan, düşük kazançlı doğrusal kontrol $u = -L^T x$ hesaplanır. L^T matrisi, $Q > 0$ ve $R > 0$ olmak üzere seçilen LQR metodu ile hesaplanır.

3) Hesaplanan L değeri için, Denklem (10) da verilen Lyapunov denklemi ile pozitif tanımlı P_c matrisi hesaplanır.

4) $D \subseteq \Omega \subseteq G$ koşulunun belirsizlik sınırları içinde sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

5) Belirsizliği karşılayan doğrusal olmayan kontrolör $(-r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x))$ nin parametreleri $r_j(x)$ ve P_c , sırasıyla denklem (2) ve (10) yardımıyla hesaplanır.

6) Kapalı çevrimli sistemin geçici rejimini iyileştirmek için gerekli olan K kazancı hesaplanır.

Elde edilecek kontrol işareti, iki doğrusal ve bir doğrusal olmayan terimin toplamının saturasyonudur.

k_j nin sistem kararlılığı üzerinde herhangi bir etkisi yoktur. Eğer sistemin kapalı çevrim rejimi iyi ise ve $k_j = 0$ seçilirse kontrol işareti

$$u_j = \text{sat} \left[-l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x) \right] = -l_j^T x - r_j(x) \cdot \text{sgn}(b_j^T P_c x) \quad (19)$$

olur. $k_j = 0$ seçildiğinden dolayı kontrolör işlevini yerine getirecek ve belirlenen sınır şartlarını sağlayacaktır.

$k_j \rightarrow \infty$ seçilirse;

$$u_j = \begin{cases} h_j, & -\text{sgn}(b_j^T P_c x) > 0 \\ -l_j^T x, & b_j^T P_c x = 0 \\ g_j, & -\text{sgn}(b_j^T P_c x) < 0 \end{cases} \quad (20)$$

yani on-off karakteristikli bir kontrolör olacaktır. k_j kazançları hedeflenen geçici rejim performansını sağlayacak şekilde seçilir.

4. UYGULAMA:

Tek eklemden oluşan basit bir robot kolu için, toplam kol uzunluğu 2ℓ , m robot koluna ait kütle, g yerçekimi ivmesi, D viskoz sönüm katsayısı, I robot

kolunun eylemsizlik momenti ($I = \frac{4}{3} m \ell^2$) olmak üzere

sistemin doğrusal olmayan diferansiyel denklemi;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -D/I \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} mg\ell \cdot \sin x_1$$

dir. $(x_1, x_2) = (\theta, d\theta/dt)$ sırasıyla robot kolunun dik eksenle yaptığı açı ile robot kolunun açısal hızıdır ve iyi ölçülmektedir $m = 0.75$ [kg], $\ell = 1$ [m], $D = 1$ [Nms] ve $g = 9.8$ [m/s²] olarak alınır sistem modelindeki “ $mg\ell \cdot \sin x_1$ ” ifadesinin değişim aralığının

$$|mg\ell \cdot \sin x_1| \leq 7.35$$

ile sınırlandırıldığı varsayılın. Bu doğrusal olmayan terimin sınırlarının bilinmesi ve kontrol kanalında bulunması nedeniyle robot kolu sistemi (1) ve (2) ile ifade edilebilir. Dolayısı ile belirsiz sistem için verilen model, doğrusal olmayan robot kolu sistemi için de kullanılabilir. Kontrol işaretinin $|u| \leq 10$ ile sınırlandırıldığı ve

$$D = \{x \mid -2\pi/3 \leq x_1 \leq 2\pi/3, -4\pi \leq x_2 \leq 4\pi\}$$

ile belirlenen başlangıç şartları için etkin olduğu varsayılın.

Denklem (1) formundaki sistem için

$$\eta = 7.35 \sin x_1$$

ve

$$\rho = \max_{x_1} (|7.35 \sin x_1|) = 7.35$$

dir. L matrisinin hesaplanması için MATLAB’ta `lqr` komutu kullanılır ve

$$Q_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_L = 5$$

alınır $L = [0.4472 \quad 0.4472]$ olarak bulunur. $A_c = (A - BL^T)$ ve

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için Lyapunov denklemi (10)

$$P_c = \begin{bmatrix} 2.118 & 1.118 \\ 1.118 & 1.118 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Denklem (14) ile tanımlı Ω bölgesi için $c = 24.8$ alınır

$|\eta| \leq |mg\ell \cdot \sin x_1| \leq 7.35$ (Ω bölgesi içinde) sağlanır. $b^T P_c = [1.118 \quad 1.118]$ ifadesi (18) de yerine yazılarak kontrol işareti bulunur. Ω bölgesi içinde $|-L^T x| \leq 2.0125$ olarak bulunduğu için tek girişli (1)-(3) sisteminde (4) koşulu $[-2.65, 2.65]$ ile sağlanır. Dolayısıyla (16) sağlanır. Böylece kontrol işaretimiz

$$u = \text{sat} [-(0.4472 + k \cdot 1.118) x_1 - (0.4472 + k \cdot 1.118) x_2 - 7.35 \cdot \text{sgn}(b^T P_c x)]$$

olur.

Şekil 2, Uygulamada elde edilen D , Ω ve G bölgelerini göstermektedir. (16) koşulu sağlanmaktadır. Şekil 3’de, $k = 0.5$ seçimi için simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekil 3.a, x_1 - x_2 durum-uzay diyagramında sistem yörüngesini göstermektedir. Sistem, $b^T P_c x = 0$ düzlemi üzerinden orijine gitmektedir ve asimptotik karardır. Şekil 3.b, durum değişkenleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin, Şekil 3.c kontrol sinyalinin zamana göre değişimini göstermektedir. Kontrol üzerinde başlangıçta -10 alt sınırında bir saturasyon ve $t = 1$ saniyeden itibaren bir titreşim bulunmaktadır. Şekil 4, $k = 2$ seçimi için simülasyon sonuçlarını gösterir. k değerinin artmasıyla durum değişkenlerinin daha hızlı sifira gittiği görülmektedir. Şekil 5, $k = 0$ seçimi için simülasyon sonuçlarını gösterir. Bu seçim ile kontrol sinyali (19) haline dönüşür. Beklediği gibi, kontrol sinyali üzerinde saturasyon oluşmamıştır. Durum değişkenlerinin daha uzun sürede orijine gittiği görülmektedir.

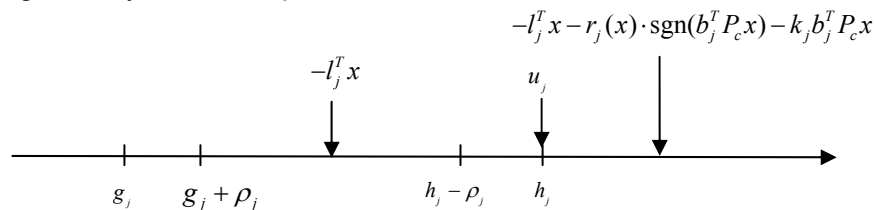
5. SONUÇ

Bu çalışmada verilen yöntem ile kontrol işareti sınırlı olan belirsizlik içeren dinamik sistemler için sistemi orijine götürecektir kontrolör sunuldu.

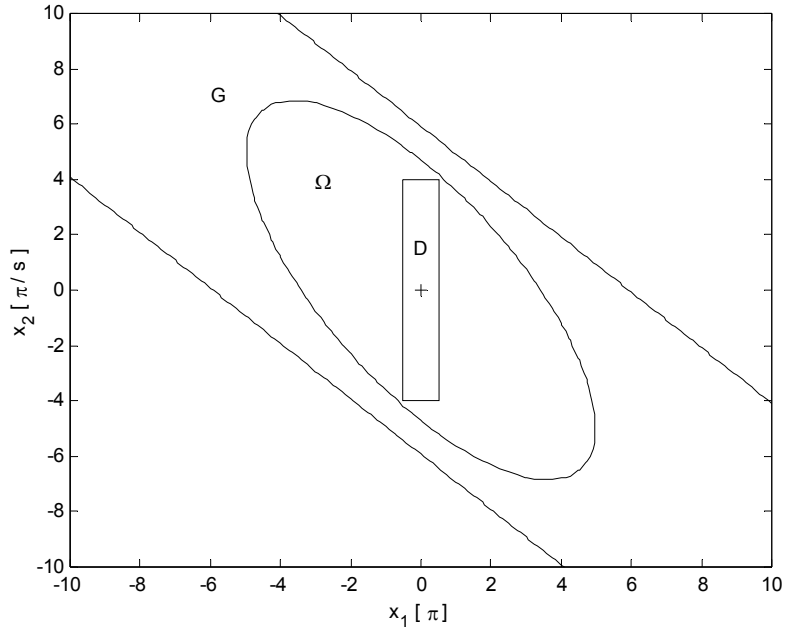
Kapalı çevrimli sistem için asimptotik kararlılık sağlanmaktadır. Kapalı çevrime ait diğer karakteristikler tasarım aşamasında kullanıcı seçimine göre elle ayarlanabilir.

Örnek olarak robot kolundan oluşan bir sistem ele alınmış, kararlılık ve de sınırlı kontrol başarıyla gerçekleştirilmiştir. Ancak, titreşim bir sorun olarak durmaktadır (Şekil 3.c). Kapalı çevrimli sistemin cevabı durum uzay denklemi $b^T P_c x = 0$ a yakın olmasından dolayı yavaştır.

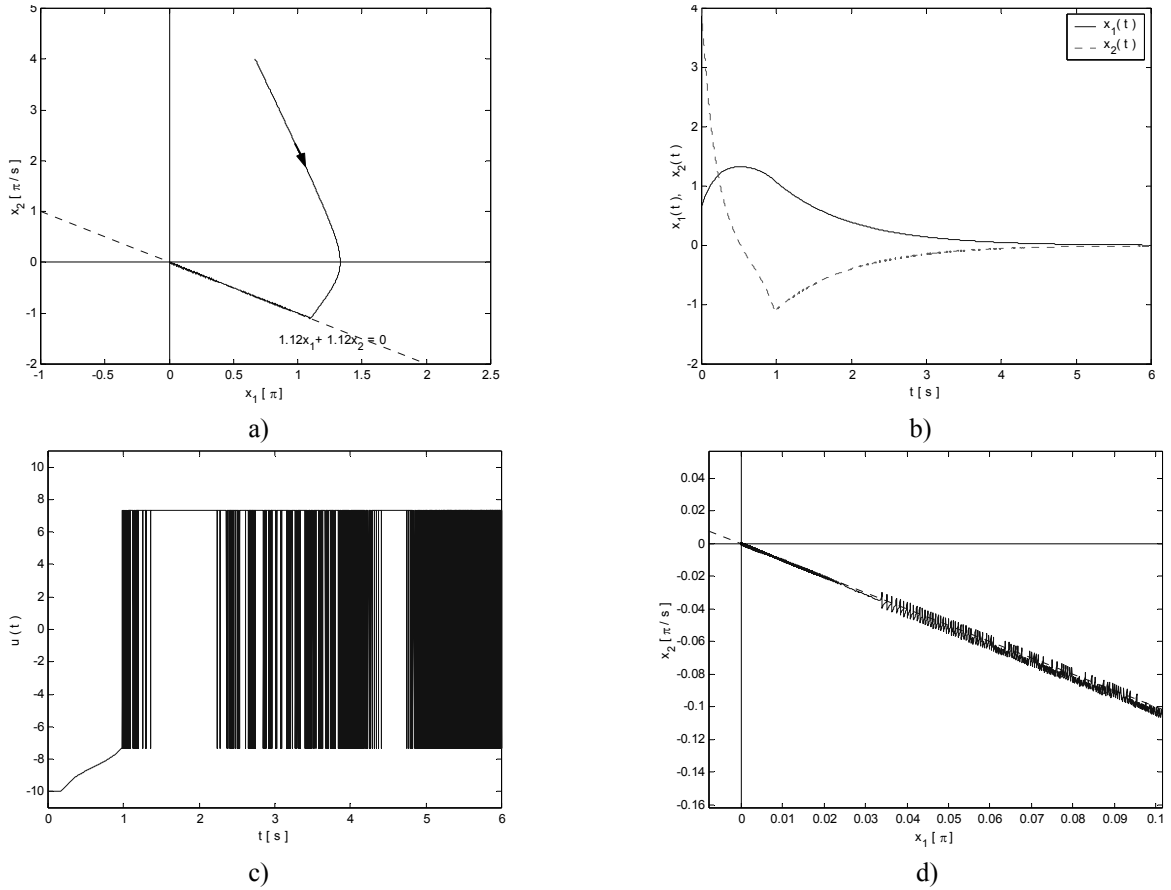
Simülasyon sonuçlarında görüldüğü gibi, $b^T P_c x = 0$ düzlemi boyunca bir titreşim bulunmaktadır (Şekil 3.d). Titreşimi azaltmak için çıkışa birinci dereceden bir filtre $\dot{u} = -u_c + u$ eklenerek titreşim azaltılabilir. Burada u kontrol işareti, u_c bir sabit ve \dot{u} kontrol işaretinin birinci dereceden türevidir.



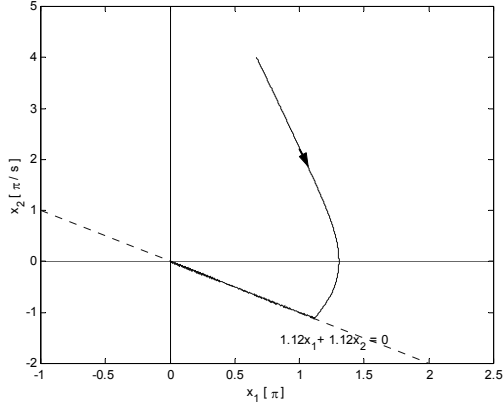
Şekil 1: u_j kontrol sinyalinin saturasyon ve belirsizlik sınırlarına göre hesaplanması



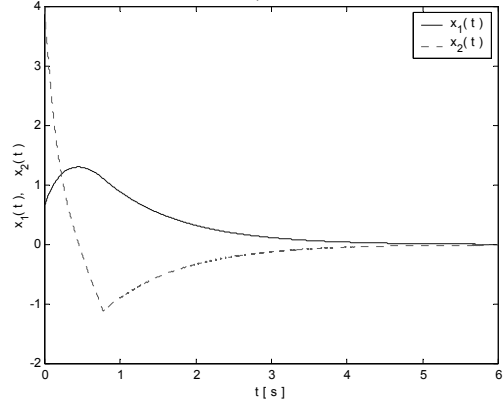
Şekil 2: D , Ω , G bölgelerinin x_1 - x_2 durum uzayında gösterimi.



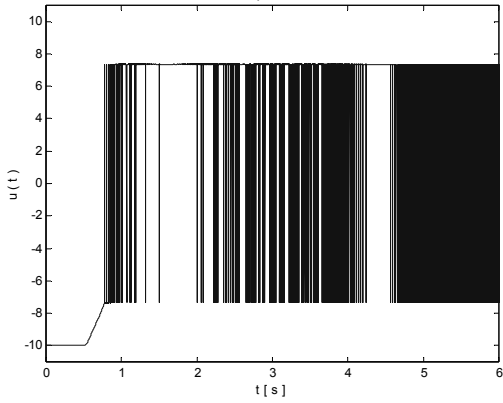
Şekil 3: Örnek olarak alınan sistemde $k = 0.5$ seçimi için simülasyon sonuçları **a)** Sistem yörüngesinin x_1 - x_2 durum uzayında gösterimi **b)** Durum değişkenlerinin zamana göre değişimi **c)** Kontrol sinyalinin zamana göre değişimi **d)** Sistem yörüngesinde $b^T P x = 0$ düzlemindeki titreşimin yakından gösterimi.



a)

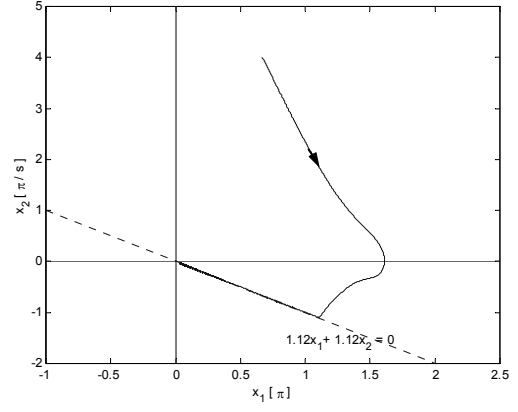


b)

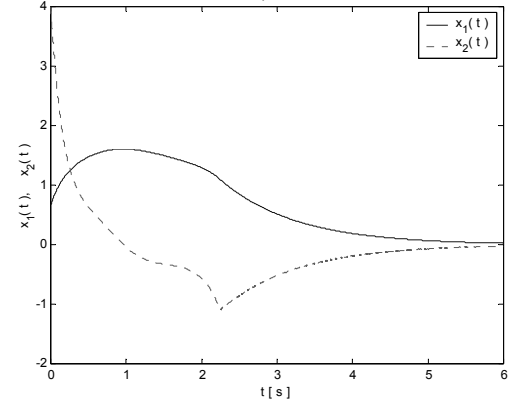


c)

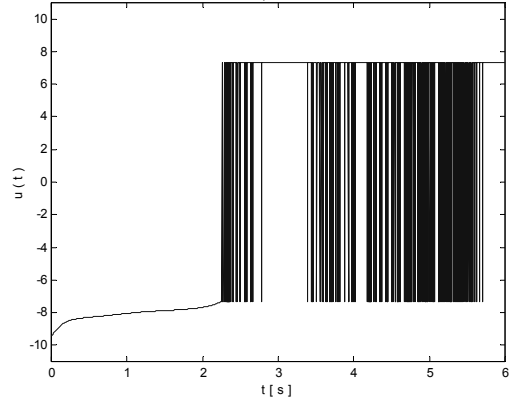
Şekil 4: $k = 2$ seçimi için simülasyon sonuçları



a)



b)



c)

Şekil 5: $k = 0$ seçimi için simülasyon sonuçları

KAYNAKLAR

- [1] Slotine J.J.E., Li W., APPLIED NONLINEAR CONTROL, Prentice-Hall International, 1991.
- [2] Gutman S., Uncertain dynamic systems- A Lyapunov min-max approach. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-24, NO. 3, pp. 437-443, 1979.
- [3] Corless M. J. and Leitmann G., Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-26, NO. 5, pp. 1139-1144, 1981.

- [4] Barmish B. R., Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-28, NO. 8, pp. 848-850, 1983.
- [5] Steinberg A., and Corless M. J., Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamic Systems. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-30, NO.10, pp. 1025-1027, 1985.
- [6] Gutman P.-O., Hagander P., A new design of constrained controllers for linear systems. IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-30, NO. 1, pp. 22-33, 1985.