

Geliştirilmiş 4-DOF Stewart Düzleminin Ters Kinematığı

Kadri BÜRÜNCÜK

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Yakın Doğu Üniversitesi, Lefkoşe, KKTC

e-posta: buruncuk@neu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Stewart düzlemi, Kinematik,

ABSTRACT

A 3-DOF Stewart Platform has upper and lower platforms with equilateral triangular shape. In the present article this platform is augmented by locating an extendible limb at the mass centre of the upper platform along the direction of the unit normal vector. Previously obtained results [1,2] for the kinematic of 3-DOF Stewart Platform is extended to study the kinematic of this augmented mechanism. In particular the problem that is studied is to determine the motion of all the limbs when the tip of the extendible limb is constrained to move in space from one point to another along any function passing through these points with a suitable velocity and acceleration profiles. If the positions of the two points in space, and also the z component of position vector of the mass centre for the upper platform are given then the rest of the information about the inverse kinematic of the mechanism is supplied by a written Matlab program. Through this program one can easily calculate the lengths, velocity and acceleration for each limbs.

Giriş

Standart düzlem ilk olarak [6] tekerlek testi için tasarlanmış ve üretilmiştir. Daha sonra bu tasarıya ismini veren Steward 1965 yılında [7] bu konudaki makalesini yayınladı. Bu makalede düzlemin uygulama alanları olarak uçak simulatörü, makine parçaları, evrensel torna makinesi ve petrol çıkarma aracı olması önerilmiştir.

Geçen yıllar içerisinde Stewart düzlemi artan bir ivme ile birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. [1]-[8]. Bu artan ilgi, yanında birçok uygulama alanını daha getirmiştir: Sualtı araştırmaları, hava ve deniz kurtarma çalışmaları, uzay araştırmaları vs.

Stewart düzleminin bazı avantajları şöyle sıralanabilir; Birçok robot manipulatorleri seri link mekanizmasına sahiptir fakat Steward platformu Paralel link mekanizmasına sahiptir. Paralel link mekanizmasının temel fikri iki düzlemi belli sayıda bağlantı ile bağlamaktır. Bu yükü bacaklara dağıtacak ve ağırlık kaldırma kapasitesini artıracaktır. Aynı zamanda hassasiyet ve tekrarlanabilirlik özelliğininide artıracaktır. Bunun yanında toplam hata her bağlantıdaki hatanın ortalamasına eşit olacaktır. Fakat seri

mekanizmalarda toplam hata her bağlantıdaki hataların toplamına eşittir.

Literatürde çok farklı konfigürasyonlarda Steward düzlemi bulmak mümkündür. Bunlarda bacak sayıları, düzlem modeli ve bağlantı farklılıkları gözlenebilir. Şekil 1 de gösterilen düzlem bu makalede ele alınan modeldir. Alt ve üst düzlemler eşkenar üçgenlerden oluşmaktadır. Üst düzlemin ağırlık merkezine dik ve uzayabilen bir bacak eklenerek model genişletilmiştir. 3-DOF Stewart düzlemi için önceden elde edilen [1,2] tüm sonuçlar burada kullanılmış ve bu 4-DOF düzlem için genişletilmiştir. Özellikle modelin ters kinematığı detaylı olarak incelenmiştir.

3-DOF Stewart Düzlemi

3-DOF Stewart düzlemi şekil-1 de görüldüğü gibi eşkenar üçgen seçilen alt ve üst düzlemlerden oluşmaktadır. Alt ve Üst düzlemlerin köşelerinin pozisyon vektörleri seçilen koordinat sistemlerine göre $(S(OXYZ))$ and $(\Sigma(Oxyz))$ şöyledir [1,2,3].

$$q_1 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} -R/2 \\ (\sqrt{3}/2)R \\ 0 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} -R/2 \\ -(\sqrt{3}/2)R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -r/2 \\ (\sqrt{3}/2)r \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} -r/2 \\ -(\sqrt{3}/2)r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

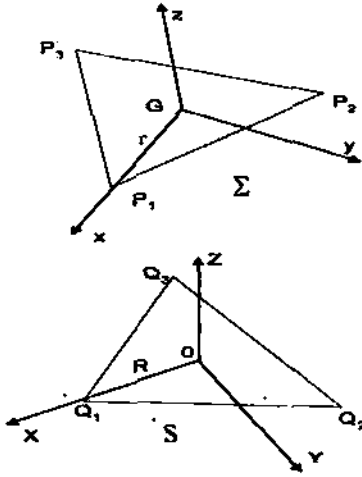
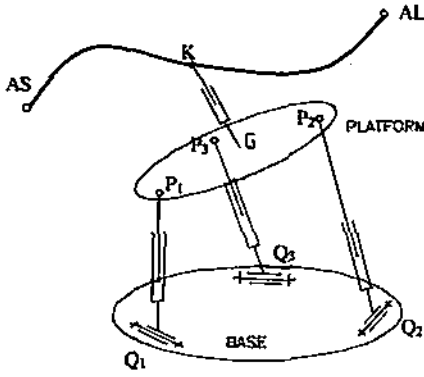
Başlangıçta Σ ve S kordinat sistemlerinin bir biri üzerinde ve aynı orjini paylaştıkları kabul ediliyor. Üst düzlem ağırlık merkezi G noktası ile birlikte hareket ettikten sonra köşe noktaları P_i ($i=1,2,3$) sırasıyla dikey düzlemler Π_1, Π_2, Π_3 üzerinde yer alır ve bu düzlemler dikey OZ doğrusundan geçmektedir. G noktasının pozisyonu

$$\xi = [x_G \ y_G \ z_G]^T \quad (3)$$

olsun. Her bağlantının iki serbestlik derecesi olmasına dikkat edin: Bacak revolute eklem etrafında Q_i ($i=1,2,3$) noktasında dönebilir ve l_i uzunluğu uzayabilir. Fakat bacak sabit Π_i düzleminde kalmak zorundadır. Eğer $T = [t_1 \ t_2 \ t_3]$ üst düzlemin ilk pozisyonundan son

pozisyonuna transformasyonu gösteriyorsa, P_i noktalarının pozisyonları şöyle verilebilir

$$\begin{cases} \mathbf{a} = T\mathbf{p}_1 + \xi \\ \mathbf{b} = T\mathbf{p}_2 + \xi \\ \mathbf{c} = T\mathbf{p}_3 + \xi \end{cases} \quad (4)$$



Şekil 1: Genişletilmiş 3-DOF Stewart düzlemi

Rodrigue formülüne [10] göre

$$T(\mathbf{n}, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \cos\theta \mathbf{I} + (1 - \cos\theta) \mathbf{nn}^T + \sin\theta \mathbf{N} \quad (5)$$

Şöyle ki, $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ döndürme aksisinde yatan birim vektör, \mathbf{N} ise onun skew-symmetric matrisi ve θ döndürme eksenini etrafındaki döndürme açısıdır.

3-DOF Stewart düzleminin [1,2,3] referanslarında önceden elde edilen. sınırlama denklemleri denklem (6)'da yeniden verilmiştir. Burada C ve S sırasıyla $\cos(\theta)$ ve $\sin(\theta)$ yerine geçiyor. Burdaki üçüncü

denklem ya $\sin(\theta)=0$ (ki bu $\theta=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ demek oluyor) veya $n_3=0$. İkinci şıkın olma olasılığı çok daha genel olduğu için $n_3=0$ kabul ediliyor. Buna göre $n_1^2 + n_2^2 = 1$ ve (5) deki T transformasyon matrisi (7) deki şeklini alıyor.

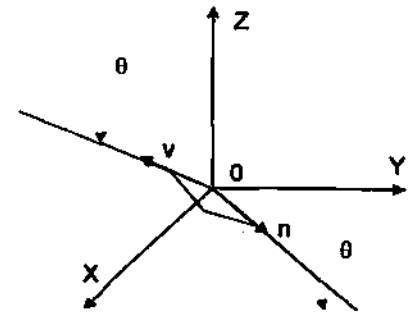
$$\begin{cases} x_{i1} = -\frac{r}{2}(1-C)(n_2^2 - n_1^2) \\ y_{i1} = -r(1-C)n_1n_2 \\ 0 = Sn_3 \end{cases} \quad (6)$$

$$T(\mathbf{n}, \theta) = \begin{bmatrix} C + (1-C)n_1^2 & (1-C)n_1n_2 & Sn_2 \\ (1-C)n_1n_2 & C + (1-C)n_2^2 & -Sn_1 \\ -Sn_2 & Sn_1 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

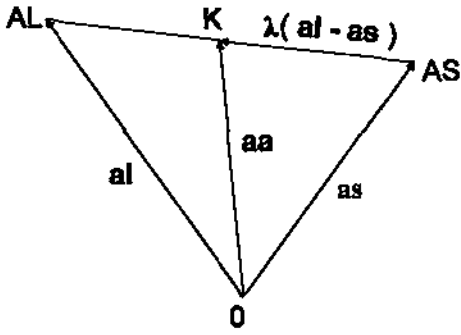
4-DOF Stewart Düzleminin Ters Kinematiki

Bu makalede bahsedilen 3-DOF Stewart düzlemi üst düzlemin ağırlık merkezine dik olarak yerleştirilen uzayabilen bacakla genişletilmiştir. Uzayda AS, AL ve z_G büyüklüklerinin biliniyor olduğunu varsayalım. Burda ele alınan problem, üst düzleme dik olarak yerleştirilen uzayabilen bacağın uç noktasının AS noktasından AL noktasına kadar bir doğru boyunca uygun hız ve ivme ile hareket etmeye zorlandığı zaman diğer üç bacağa hareketi ile ilgili tüm parametreleri elde etmektir. Uzayabilen bacağın pozisyon değişikliği için şekil 3'de de görüldüğü gibi başlangıç ve bitiş anlarında sıfır hız ve ivme elde etmek için $\lambda(t)$ fonksiyonu seçilmelidir. Bu şartın sağlanması için $\lambda(t)$ aşağıdaki gibi seçilmelidir [1,12]

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{2\pi}{T}t - \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] - \sin\left[\frac{2\pi}{T}t - \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \right) \quad (8)$$



Şekil 2: Transformasyonun gösterilişi



Şekil 3: Vektörel görünüş

Şekil 3 den aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$aa = as + \lambda (al - as) \quad (9)$$

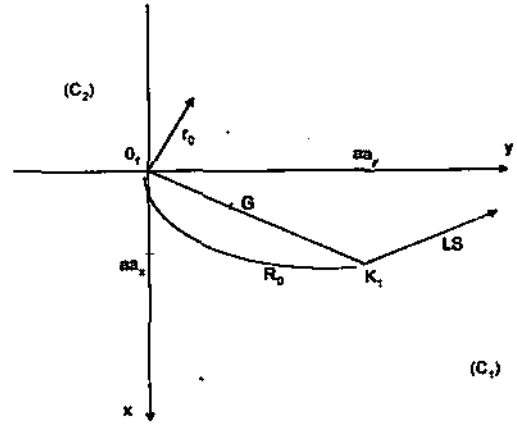
l_1, l_2, l_3 uzunluklarını elde etmek için [1,2] deki benzer yöntem kullanılabilir: z_G verildiğine göre G noktası şekil 5 deki gibi bir Π dik düzleminde yatmaktadır. K noktasının K_1 izdüşümü bir an için ele alırsak, G noktasının Π düzleminde (C_1) çemberinde yatması zorunludur. Bu çemberin merkezi K_1 ve yarıçapı

$$r_1 = (aa_z - z_G) \tan(\theta) = L \sin(\theta) \quad (10)$$

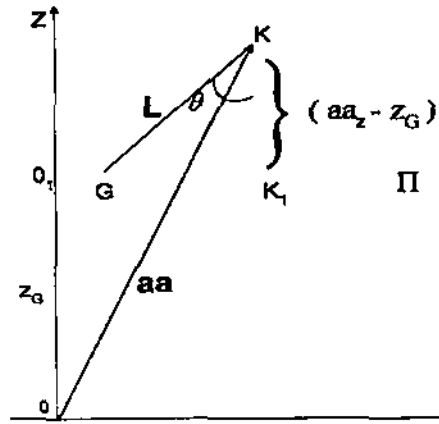
Burdaki θ [1] rotasyon açısıdır. Aslında (C_1) çemberi Π düzlemi ile K noktasında olan ve yarıçapı L olan kürenin kesişimidir. Diğer taraftan G noktası r_0 yarıçaplı (C_2) çemberi üzerinde yatmasını gözönüne alalım. Aslında (C_2) çemberi merkezi 0 noktasında olan $\left[\frac{L}{2} \right]$ yarıçaplı küre ile Π düzleminin kesişimidir. $R_0 = |O_1 K_1|$ uzunluğu ile r_0 yarıçapı için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$R_0 = \sqrt{aa_x^2 + aa_y^2}, \quad r_0 = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} \quad (11)$$

(C_1) ve (C_2) çemberlerinin ikisinde Π düzleminde yatmasına göre, ikisinin kesişimi bize G noktasının pozisyonunu verecektir. Tek çözüm elde etmek için iki çemberin bir birine teğet oldukları durum ele alınacaktır. G noktasının OZ doğrusuna mümkün olduğu kadar yakın olması için Şekil 4 teki durum ele alınmıştır. $R_0 - r_1$ 'in artı veya eksi olma durumuna göre $\overline{O_1 G} = k \overline{O_1 K_1}$ bağıntısı ve (10), (11) denklemleri yardımı ile aşağıdaki denklem yazılabilir



Şekil 4: Π düzlemindeki G noktasının geometrisi



Şekil 5: Dikey düzlemdeki vektörel ifade ve rotasyon açısı

$$k = \frac{R_0 - r_1}{R_0} = 1 - \frac{(aa_z - z_G) \tan(\theta)}{\sqrt{aa_x^2 + aa_y^2}} \quad (12)$$

Bu sebeple

$$x_G = k aa_x, \quad y_G = k aa_y \quad (13)$$

Bu denklemde tek bilinmeyen θ parametresidir. Diğer yandan (6) daki zorlama denkleminin (ilk iki denklemin karelerini alarak toplarsak)

$$r_0 = \frac{1}{2} r(1 - C) \quad (14)$$

Sonra $r_0 = R_0 - r_1$ bağıntısı

$$\sqrt{aa_x^2 + aa_y^2} = \frac{1}{2} r(1 - C) + (aa_z - z_G) \tan(\theta) \quad (15)$$

haline gelir ve buradan çözülecek olan θ (13) deki x_G ve y_G parametrelerinin çözümünü verecektir. Şekil 5 ve (7) deki T transformasyon bağıntısından

$$aa = \begin{bmatrix} aa_x \\ aa_y \\ aa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} Sn_2 \\ -Sn_1 \\ C \end{bmatrix} \quad (16)$$

yazılabilir ve rotasyon doğrusu üzerindeki birim vektör n 'in bilinmeyen parametreleri şöyle hesaplanabilir,

$$n_2 = \frac{aa_x - x_G}{LS}, \quad n_1 = \frac{y_G - aa_y}{LS} \quad (17)$$

Birim dik vektör v 'nin (7)deki t_3 vektörünün aynisi olduğuna dikkat edin:

$$v = [Sn_2 \quad -Sn_1 \quad C]^T \quad (18)$$

Bu bilgilerle (7) veya (5) ve (4)deki a , b , c den T hesaplanabilir. Daha sonra tüm bilgileri toparlayarak bacak uzunlukları şöyle hesaplanabilir,

$$l_1 = |a - q_1|, \quad l_2 = |b - q_2|, \quad l_3 = |c - q_3| \quad (19)$$

Aşağıdaki türev tanımından bacak hız ve ivmeleri hesaplanabilir

$$l_1' = \frac{l_1(t + \Delta t) - l_1(t)}{\Delta t} \quad (20)$$

Tüm bu bağıntılar yazılan MATLAB programı ile hesaplanmaktadır.

Bu bölümde uzaydaki AS ve AL doğruları arasında bir doğru boyunca uzayabilen bacağın uç noktasının hareketi incelendi. Fakat esas problem bacağın uç noktasının bir sinüs eğrisini takip etmesi idi. Eğer sinüs eğrisi belli bir zaman aralıklarına bölünerek diskirite edilirse ve yukardaki yöntem her aralık için tekrarlanırsa yaklaşık olarak sinüs eğrisini elde etmiş olacağız. Seçilen zaman aralıkları ne kadar küçük olursa sinüs eğrisine o kadar yaklaşmış oluruz.

Sonuçları analiz edebilmemiz açısından aşağıdaki örnek verilmiştir.

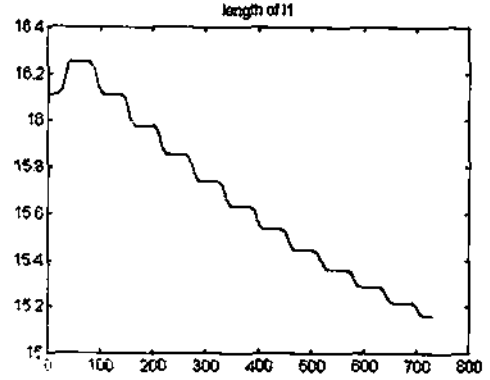
ÖRNEK:

Yukarda açıklanan yöntem için hazırlanan MATLAB programı aşağıdaki parametreler için çalıştırılmıştır.

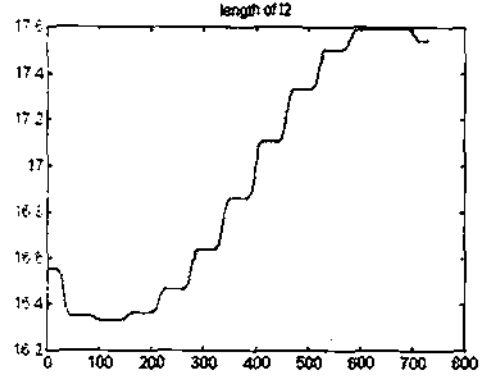
$r=7$
 $R=20$
 $z_G=10$

$as=[1 \sin(1*\pi/180) \ 24]$
 $al=[2*\pi \sin(2*\pi) \ 24]$

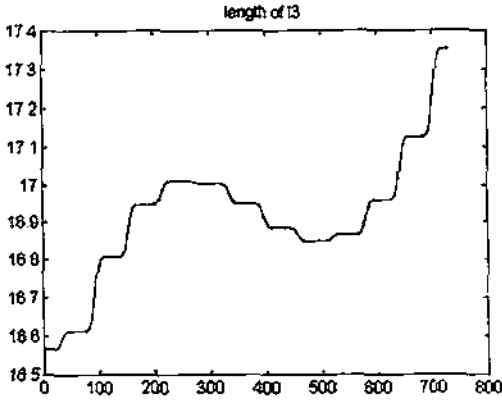
MATLAB programının sonuçları aşağıdaki gibidir. Şekil 6-8 bacak uzunluklarını, Şekil 9-11 bacak hızlarını ve Şekil 12-14 bacak ivme grafiklerini vermektedir. Son olarak ise Şekil 15-17 üst düzleme yerleştirilen uzayabilen bacağın uzunluk, hız ve ivme grafikleri görülmektedir. Tüm hız ve ivme grafikleri incelendiği zaman başlangıç ve bitiş anlarındaki sıfır şartı elde edilmiştir.



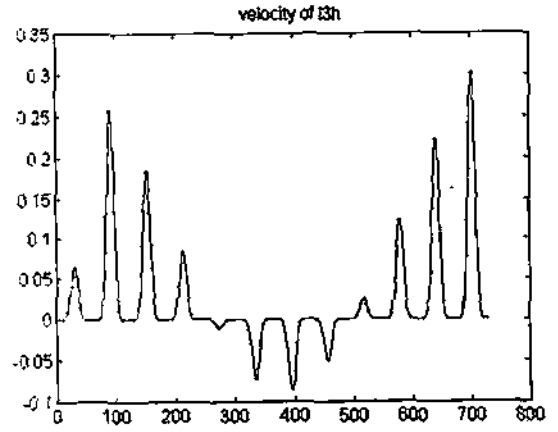
Şekil 6: Birinci bacak uzunluğu (L1)



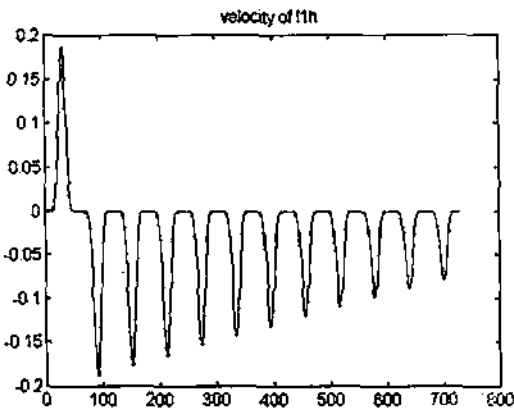
Şekil 7: İkinci bacak uzunluğu (L2)



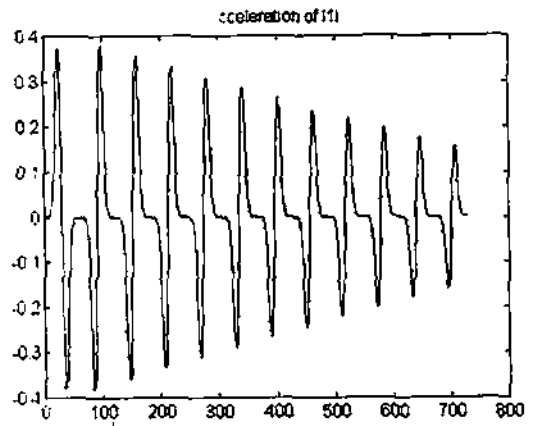
Şekil 8: Üçüncü bacak uzunluğu (L3)



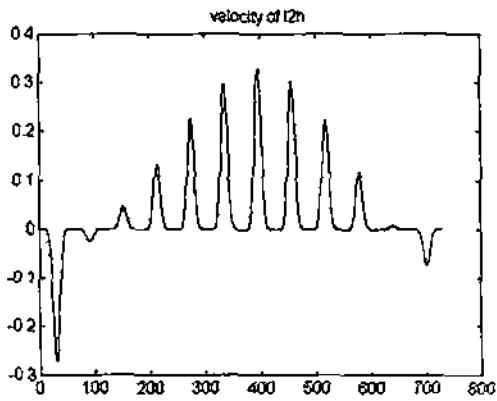
Şekil 11: Üçüncü bacak hızı (L3h)



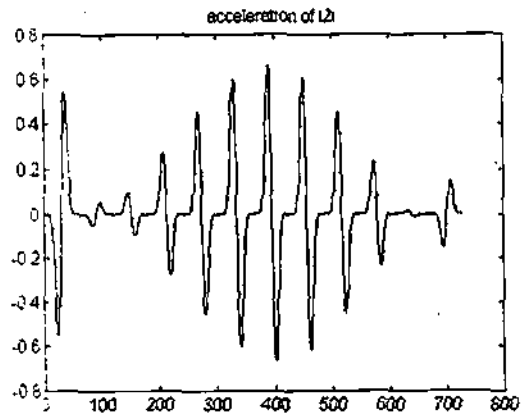
Şekil 9: Birinci bacak hızı (L1h)



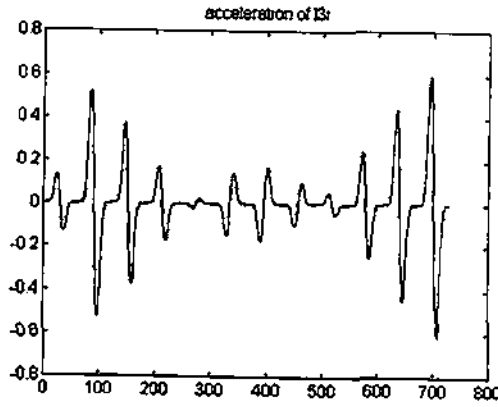
Şekil 12: Birinci bacak ivmesi (L1i)



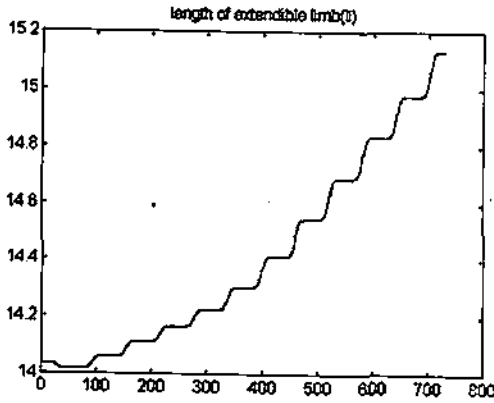
Şekil 10: İkinci bacak hızı (L2h)



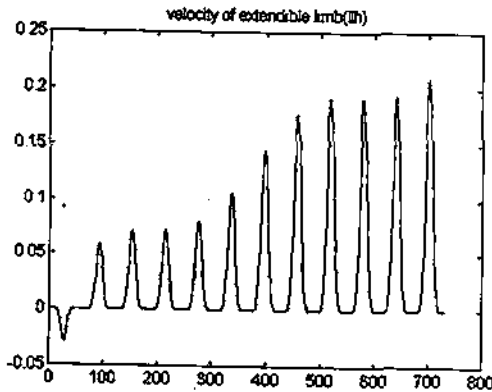
Şekil 13: İkinci bacak ivmesi (L2i)



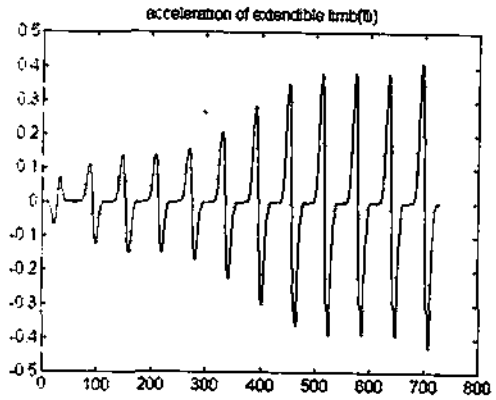
Şekil 14: Üçüncü bacak ivmesi (L3i)



Şekil 15: Uzayabilen bacak uzunluğu (LL)



Şekil 16: Uzayabilen bacak hızı (LLh)



Şekil 17: Uzayabilen bacak ivmesi (LLi)

SONUÇ

Bu makalede izah edilen prosedür 4-DOF Stewart düzlemine uygulanmıştır. Üst düzleme monte edilen ve uzatılan bacağın uç noktasının bir sinüs fonksiyonunu takip etmesi problemi incelenmiştir. Daha önce yapılan çalışmaya [3] küçük eklemeler ve düzenlemeler yaparak aynı yöntem bu probleme de uygulanmıştır. Sinüs fonksiyonu küçük zaman birimlerine bölünerek fonksiyon diskrete edilmiştir. Her iki noktadan geçen doğruların birleşimi olarak kabul edilen sinüs eğrisi [3] deki prosedürün zaman bölmeleri kere tekrarlanarak çözülmüştür.

Örnekteki şekiller incelendiği zaman başlangıç ve sonuç anlarındaki sıfır hız ve ivme şartları sağlanıyor. Fakat hız ve ivme grafiklerinin değerlerindeki osilasyonların iki ana sebebi vardır. Birinci sebebi $\lambda(t)$ fonksiyonunun her zaman aralığında kullanılmış olmasıdır. Bunun yerine sadece ilk ve son zaman bölümlerinde kullanılması bahsedilen sıfır hız ve ivme şartlarını sağlayabilir. İkinci sebebi ise takip edilen eğriden dolayı her iki zaman biriminde iki nokta arasındaki mesafe aynı değildir.

Bu makalede örnek olarak sinüs eğrisi alınmıştır fakat bu yöntem her eğri için uygulanabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Bütüncük, K. and Tokad, Y., Inverse Kinematic of Augmented 3-DOF Stewart Platform, 8th International Machine Design and Production Conference, pp 85-94, September 9-11, 1998, Ankara TURKEY.
- [2] Bütüncük, K. and Tokad, Y., On the Kinematic of 3-DOF Stewart Platform, J. of Robotic Systems, 16(2), 105-118, 1999.
- [3] Fichter, E. F., "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Consideration," *Int. J. Robotics Res.*, 2, 157-182, 1986.

- [4] Lee, K. M. and Shah, D. K., "Kinematic Analysis of a Three-Degree-of-Freedom In-Parallel Actuated Manipulator," IEEE Trans. Robot. Automat., 3, 354-360, 1988.
- [5] Lee, K. M. and Shah, D.K., "Dynamic Analysis of a Three-Degree-of-Freedom In-Parallel Actuated Manipulator," IEEE Trans. Robot. Automat., 3, 361-367, 1988.
- [6] Gough, V. E., "Contribution to discussion to papers on research in automobile stability and control and in type performance, by Cornell staff". Proc. Auto. Div. Instn. Mech. Engrs., 1956-57, 392.
- [7] Stewart, D., "A Platform with six degrees of Freedom", Proc. Instn Mech. Engrs. 1965-66.
- [8] K. Liu, G. Lebret, J. A. Lowe, and F. L. Lewis, "Control of a Stewart-Platform-Based Robotic Milling Cell", Advanced Control Issues for Robot Manipulators ASME, 23-30, 1992.
- [9] Hunt, K. H., Kinematic Geometry of Mechanisms, Claredon Press, Oxford University Press, London, 1978.
- [10] Beggs, J. S., Advanced Mechanisms, The Macmillan Company, New York Collier-Macmillan Limited, London, 1965.
- [11] R. A. Frazer, W. J. Duncan and A. R. Collar, Elementary Matrices, Cambridges at the University Press, 1963
- [12] M. A. Gonzalez-Palacios and J. Angeles, CAM Synthesis, Kluwer Academic Publishers, 1993.