Yaklaşık Model Kullanarak Bir Sınıf Eksik Sürülmüş Euler Lagrange Sistemin Kararlı Kılınması

Stabilizing a Class of Under-actuated Euler-Lagrange Systems Using an Approximate Model

Hüseyin Alpaslan Yıldız[1], Leyla Gören Sümer[1]

[1]Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi
alpaslan.yildiz@itu.edu.tr, leyla.goren@itu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada eksik sürülmüş Euler Lagrange (EL) sistemlerin kararlı hale getirilmesi için model yaklaşıklığının kullanıldığı bir yöntem sunulmuştur. Daha önce yapılan çalışmalarda Eksik sürülmüş EL sistemlerin kontrolü için farklı yöntemler öne sürülmüştür. Ancak bu yöntemler bir takım kısmi diferansiyel denklemin (ing. PDE) çözümünü gerektirmektedir ve bu çok da kolay bir yöntem değildir. Eksik sürülmüş sistemlerin kontrolü için çözülmesi gereken ve eşleşme koşulu adı verilen PDE'ler bu çalışmada sistemin genelleştirilmiş atalet matrisi yerine, bir yaklaşıklığı kullanılarak çözülmüş ve kontrol kuralı da bu sonuçlardan elde edilmiştir. Bulunan sonuçlar araç ters sarkaç sistemi üzerinde uygulanmıştır.

Abstract

In this paper, an approach based on approximation of Euler Lagrange system is proposed to stabilize an under actuated nonlinear system. In a number of recent papers several methods have been introduced for stabilizing underactuated EL systems. However these methods contain solving of a set of nonlinear Partial Differantial Equations (PDE) and this is not an easy task. The PDEs named as matching conditions are required to solve for controlling the underactuated systems. In this paper, the PDEs are solved using the approximation of inertia matrix instead of original one. Also the control rule is obtained from these results. Finally, the results are applied to a cart and pendilum system.

1. Giriş

Kontrol mühendisliğinde lineer olmayan Euler Lagrange (EL) sistemlerin kontrol problemi özellikle eksik sürülmüş sistemler için çözümü zor bir problemdir [1]. Bu problemin çözümü için önerilen yöntemlerden birisi de pasifliğe dayalı kontroldür (PBC). Özellikle lineer olmayan EL ve Hamiltonian sistemlerin konum kontrolü probleminin çözümünü sağlayan güçlü bir yöntemdir [2].

Pasifliğe dayalı kontrol yöntemi iki önemli adımdan oluşur. İlk adım sistemin enerji fonksiyonunu biçimlendirerek istenin denge noktasında kararlı kılan $u_{es}(t)$ kontrol işaretinin bulunması ikinci adım ise sisteme sönüm ekleyen ve o noktada asimptotik kararlı hale getirecek $u_{di}(t)$ işaretinin bulunmasıdır. Bu denge noktası kapalı çevrimli sistemin enerji fonksiyonunun minimum noktasıdır [3].

Son yıllarda yapılan çalışmalar daha çok eksik sürülmüş sistemlerin kararlılığını sağlamak amacı ile sistemin hem kinetik hem de potansiyel enerji fonksiyonunu biçimlendirecek bir IDA-PBC yöntemi üzerine yoğunlaşmıştır. Tam sürülmüş bir sistemin sadece potansiyel enerjisini şekillendirmek bu sistemin kararlılığı için yeterli iken eksik sürülmüş bir sistemde, sistemin kinetik enerjisini de biçimlendirmek gerekmektedir. Aynı şekilde eksik sürülmüş EL sistemlerin de toplam enerjiyi şekillendirme önerisi ilk defa [4]'de ortaya konulmuştur ve bundan sonra bu konuda bir çok katkı yapılmıştır ve burada iki temel yaklaşım göze çarpmaktadır: kontrollü Lagrange yöntemi [5], [6], ve IDA-PBC [7], [3]. Literatürde bu konu ile yakından ilgili başka çalışmalar da mevcuttur [8], ayrıca [9]'da bu konu üzerine oldukça geniş bir referans listesi yer almaktadır [10]. Ayrıca mekanik sistemlerin bir kümesi için iki çözümün birbirine dönüşebildiği de gösterilmiştir [11].

Bu yöntemler geri besleme yoluyla, açık çevrim sistemi, istenilen denge noktasında kararlı bir sınıf sisteme çevirebilmeyi amaçlar. Böyle bir geri besleme kuralı eşleşme koşulu adı koşulların çözümü ile elde edilir. Bu koşullar doğrusal olmayan bir takım kısmi diferansiyel denklemler (ing. PDE) içerirler. Literatürdeki çalışmalar daha çok bu PDE'lerin çözümlerine yoğunlaşmışlardır. Önerilen yöntemlerin başarı kriteri elde edilen PDE'lerin çözülme olasılığına dayanmaktadır [12].

EL sistemlerde eşleşme koşullarının çözümü için [2]'de λ yöntemi olarak bilinen bir yöntemle, eşleşme koşulları bir dizi kısmi diferansiyel denklemler şeklinde yeniden düzenleyerek çözüme gidilmiştir. Bu yöntem daha önce yapılan kontrollü lagrangian [6] yönteminden daha geniş bir çözüm kümesine sahiptir.

Daha önce doğrusal Hamiltonian sistemlerin eşleşme koşullarının çözümündeki kolaylığını daha geniş bir çözüm kümesinde uygulayabilmek için sistemin model yaklaşıklığı kullanılmıştır [10]. Bu çalışmanın amacı [10]'da önerilen yaklaşımın kontrollu lagrange yöntemine genişletmektir. Eşleşme koşullarının çözümü için sunulacak yöntemin temel bakış açısı sistemin atalet matrisini, bir dizi sabit atalet matrislerinin radyal temelli fonksiyonlarla birlikte harmanlanmasından oluşturulmak ve bu şekilde eşleşme koşullarının yaklaşık çözümlerini elde etmeye dayanır [10]. Bu sayede gerçek sistemin enerji fonksiyonu biçimlendirilecek ve asimptotik kararlılığın sağlanması için sönüm eklenecektir. Bulunan sonuçlar araç ters sarkaç sistemi üzerinde uygulanacaktır.

2. Ön Bilgiler

Konfigürasyon uzayı Q n boyutlu ise, bir Euler Lagrangian sistem (EL):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial d}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q}) - \frac{\partial d}{\partial q}L(q,\dot{q}) = G(q)u \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır [6]. Burada $G(q) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ olmak üzere $n < m$ ise sistem eksik sürülmüştür. Benzer şekilde istenen kapalı çevrimli sistemin EL modeli,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial d}{\partial \dot{q}}L_c(q,\dot{q}) - \frac{\partial d}{\partial q}L_c(q,\dot{q}) = u_c \tag{2}$$

şeklinde olsun. Burada ya $u_c = 0$ veya jiroskopik bir kuvvet olarak tanımlanmıştır [6].

Toplu parametreli sistemler için lagrangian fonksiyonu:

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} - V(q) \tag{3}$$

şekilde tanımlanır [6]. Bu durumda kontrolsüz ve kontrollü sistemin hareket denklemleri,

$$M\ddot{q} + \frac{\partial M\dot{q}}{\partial q}\dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T M\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Gu \tag{4a}$$

$$M_c\ddot{q} + \frac{\partial M_c\dot{q}}{\partial q}\dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T M_c\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} = u_c \tag{4b}$$

biçiminde elde edilir.

Açık çevrim (4a) ve kapalı çevrim (4b) sistemlerin eşleşmesi için gerekli koşullar, aşağıdaki denklemlerin eşitlenmesinden elde edilir [12].

$$\ddot{q} = M^{-1}Gu - M^{-1}\frac{\partial M\dot{q}}{\partial q}\dot{q} + \frac{1}{2}M^{-1}\frac{\partial \dot{q}^T M\dot{q}}{\partial q} - M^{-1}\frac{\partial V}{\partial q} \tag{5}$$

$$\ddot{q} = M_c^{-1}u_c - M_c^{-1}\frac{\partial M_c\dot{q}}{\partial q}\dot{q} + \frac{1}{2}M_c^{-1}\frac{\partial \dot{q}^T M_c\dot{q}}{\partial q} - M_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q} \tag{6}$$

Bu işlem sonucu, kinetik enerji eşleşme koşulu,

$$G^{\perp}\left[\left(\frac{\partial M\dot{q}}{\partial q} - MM_c^{-1}\frac{\partial M_c\dot{q}}{\partial q}\right)\dot{q} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^T M\dot{q}}{\partial q} - MM_c^{-1}\frac{\partial \dot{q}^T M_c\dot{q}}{\partial q}\right) + MM_c^{-1}u_c\right] = 0 \tag{7}$$

ve potansiyel enerji eşleşme koşulu ise;

$$G^{\perp}\left(\frac{\partial V}{\partial q} - MM_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q}\right) = 0 \tag{8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $G^{\perp}: (\mathbb{R}^{n-m})^T \to (\mathbb{R}^n)^t$, G'nin sol yok edicisidir.

(4a) ile verilen açık çevrim sistemi (4b) sistemine eşleyen kontrol işareti $u(t)$ ise,

$$u = (G^TG)^{-1}G^T\left(\left(\frac{\partial M\dot{q}}{\partial q} - MM_c^{-1}\frac{\partial M_c\dot{q}}{\partial q}\right)\dot{q} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T M\dot{q}}{\partial q} - \frac{1}{2}MM_c^{-1}\frac{\partial \dot{q}^T M_c\dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} + MM_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q} - u_c\right)\right) \tag{9}$$

şekilde elde edilir [6].

Kontrol işaretinin elde edilebilmesi için önce (7) ve (8) de verilen eşleşme koşullarını sağlayan bir $M_c(q) > 0$ ve jiroskopik olma özelliğinde bir $u_c(t)$ yani $u_c(t)\dot{q} = 0$ olan bir fonksiyonun var olması ve hesaplanması gerekir, [6].

Eşleşme koşullarının genel çözümü literatürde mevcut değildir.Bazı özel durumlara ilişkin bir kaç yöntem önerilmiştir [6], [7], [3], [8]. Ayrıca Gören-Sümer, Şengör, 2015'in yaklaşık model kullanarak PDE'lerin çözümüne ilişkin bir çalışması mevcuttur. Bu çalışmada Hamiltonian sistemlerin eşleşme koşullarının çözümünde sistemin yaklaşık bir modelinin kullanılması önerilmiştir.

Bu çalışmada aynı yöntem EL sistemlere uyarlanacaktır. Sonuçta, bu PDE lerin yaklaşık çözümleri elde edilip kontrol işaretinin oluşturulmasında kullanılacaktır. Bu amaçla, önce sistemin yaklaşık modeli elde edilecek daha sonra yeni eşleşme koşulları yaklaşık modeller kullanılarak tekrar elde edilecektir.

3. Yaklaşık Model ve Eşleşme Koşulları

Sistemin yaklaşık modelini elde etmek için; bir EL sistemin konfigürasyon uzayında, *r* alt bölgesi tanımlansın:

$$\mathbb{S}_r \triangleq \{q | h_r(q) \geq h_l(q), l = 1,2,\ldots,n, r \neq l\} \tag{10}$$

Burada $h_i(q)$'ler, $0 < h_i(q) \leq 1$ koşulunu sağlayan skalar fonksiyonlardır. Sistemin genelleştirilmiş eylemsizlik matrisinin bir yaklaşıklığı,

$$\widehat{M}(q) = \sum_i h_i(q)M_i \tag{11}$$

olarak tanımlanır. Burada $M_i > 0$ $M_{ci} > 0, \forall i$ koşulunu sağlar. $h_i(q)$ fonksiyonları radyal merkezli fonksiyonlar veya üyelik fonksiyonları olarak seçilebilir.

Yaklaşık modelin gerçek modele yakınlığı,

$$\min \left\| M(q) - \sum_i h_i(q)M_i \right\| \tag{12}$$

ifadeleri ile verilir.

Sisteme ilişkin Lagrangian fonksiyonu, $\widehat{M}(q)$ ifadesi kullanılarak,

$$\hat{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T\widehat{M}(q)\dot{q} - V(q) \tag{13}$$

şeklide tanımlanır. Bu durumda sistemin hareket denklemi:

$$G(q)u = \frac{d}{dt}\left(\widehat{M}(q)\dot{q}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widehat{M}(q)\dot{q}}{\partial q}\right)^T\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \tag{14}$$

olarak elde edilir. Bu ifadede $\widehat{M}(q)$'lar yerine yazıldığında açık çevrimin sistemin yaklaşık modeli:

$$G(q)u = \sum_i \left[h_i(q)M_i\ddot{q} + \left(\dot{q}^T\nabla_q h_i(q)\right)M_i\dot{q} - \frac{1}{2}M_i\dot{q}\nabla_q^T h_i\dot{q}\right] + \frac{\partial V}{\partial q} \tag{15}$$

olarak bulunur.

Bir önceki bölümde (10) ve (11) ile verilen tanımlar uygulanarak (4b)'de verilen kapalı çevrim sistemin yaklaşık modeli,

$$\sum_i \left[h_{ci}(q)M_{ci}\ddot{q} + \left(\dot{q}^T\nabla_q h_{ci}(q)\right)M_{ci}\dot{q} - \frac{1}{2}M_{ci}\dot{q}\nabla_q^T h_{ci}\dot{q}\right] + \frac{\partial V_c}{\partial q} = u_c \tag{16}$$

şeklinde yazılabilir. Önbilgiler bölümünde özetlenen standart kontrollü lagrangian yönteminde izlenen yol kullanılarak eşleşme koşulları çıkartılırsa kinetik enerji eşleşme koşulu,

$$G^{\perp}\left[\sum_i \left[\left(\dot q^T \nabla_q h_i(q)\right) M_i - \frac{1}{2} M_i \dot q \nabla_q^T h_i\right]\dot q - \hat M \hat M_c^{-1} \sum_i \left[\left(\dot q^T \nabla_q h_{ci}(q)\right) M_{ci} - \frac{1}{2} M_{ci}\dot q \nabla_q^T h_{ci}\right]\dot q + \hat M \hat M_c^{-1} u_c\right] = 0 \qquad (17a)$$

ve potansiyel enerji eşleşme koşulu,

$$G^{\perp}\left[\frac{\partial V}{\partial q} - \hat M \hat M_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q}\right] = 0 \qquad (17b)$$

Kontrol işareti ise,

$$u = (G^T G)^{-1} G^T \left(\left(\frac{\partial \hat M \dot q}{\partial q} - \hat M \hat M_c^{-1}\frac{\partial \hat M_c \dot q}{\partial q}\right)\dot q - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot q^T \hat M \dot q}{\partial q} - \frac{1}{2}\hat M \hat M_c^{-1}\frac{\partial \dot q^T \hat M_c \dot q}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} + \hat M \hat M_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q} - u_c\right)\right) \qquad (18)$$

olarak bulunur.

Potansiyel enerji eşleşme koşulunun yaklaşık çözümü için, bir $S(q) = \hat M \hat M_c^{-1}$ matrisi tanımlayalım, bu durumda,

$$S(q) = \sum_i M_i h_i(q) \sum_i M_{ci}^{-1} h_{ci}(q) \qquad (19)$$

Eğer kapalı çevrimli sistem için $h_{ci}(q)$ fonksiyonları,

$$h_{ci}(q) \triangleq \begin{cases} 1 & q \in \mathbb{S}_i \\ 0 & q \notin \mathbb{S}_i \end{cases} \qquad (20)$$

şeklinde seçilirse $S(q)$ matrisi,

$$S(q) = \sum_i h_i(q) M_i M_{ci}^{-1}$$
$$S_i(q) = h_i(q) M_i M_{ci}^{-1} \qquad (21)$$

ve potansiyel enerji eşleşme koşulu ise,

$$G^{\perp}\left[\frac{\partial V}{\partial q} - \left(\sum_i h_i(q) M_i M_{ci}^{-1}\right)\frac{\partial V_c}{\partial q}\right] = 0 \qquad (22)$$

olacaktır. Aynı zamanda $\nabla_q h_{ci}(q) = 0$ olacağı için kinetik enerji eşleşme koşulu:

$$G^{\perp}\left[\sum_i \left[\left(\dot q^T \nabla_q h_i(q)\right) M_i - \frac{1}{2} M_i \dot q \nabla_q^T h_i\right] + \left(\sum_i h_i(q) M_i M_{ci}^{-1}\right) J_c\right]\dot q = 0 \qquad (23)$$

şeklinde yazılır.

Burada J_c : $\dot q^T u_c = \dot q^T J_c \dot q = 0$ özelliğini sağlayan çarpık simetrik bir matristir. Ayrıca (22) den görüldüğü gibi, yaklaşık model oluşturulurken (12) de verilen koşula ek olarak özellikle $h_i(q)$'lar,

$$\min \left\| \frac{\partial V}{\partial q} - \left(\sum_i h_i(q) M_i M_{ci}^{-1}\right)\frac{\partial V_c}{\partial q}\right\| = 0 \qquad (24)$$

ilişkisini sağlayacak şekilde seçilmelidir.

[10]'de verilen Lemma, EL sistem için düzenlenmiş hali aşağıda verilmiştir.

Lemma:

$\nabla_q V_c(q^*) = 0$ ve $V_{c_{hess}}^{q}(q^*) > 0$ olan bir $V_c(q)$ ve $M_{c1} > 0$ olması durumunda aşağıdaki koşul sağlanır:

$$G^{\perp}\left(\frac{\partial V}{\partial q} - M_1 M_{c1}^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q}\right) = 0, \qquad \forall i \qquad (25)$$

Ayrıca r adet matris için aşağıdaki koşul sağlanır:

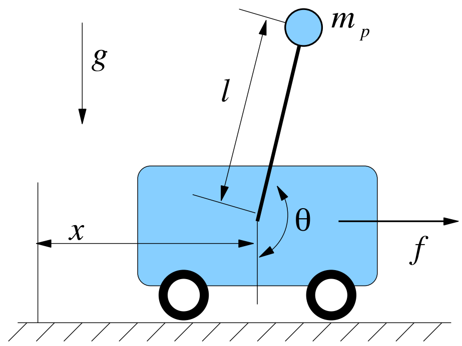
$$G^{\perp}\left(M_i M_{ci}^{-1} - M_j M_{cj}^{-1}\right) = 0, \qquad \forall i, j \qquad (26)$$

İspat:

(26) denklemi tüm $M_i^{-1} M_{ci}$'ler için sağlanması gerektiğinden, lemma'da verilen önkoşullar altında tüm $M_i^{-1} M_{ci}$'ler birbirine eşit olmalı.

4. Araç Ters Sarkaç Sistemi

Araç ters sarkaç sistemi (Şekil-1) eksik sürülmüş, lineer olmayan sistemlere en temel örneklerden birisidir. Çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğu bu sistem üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 1: Araç ters sarkaç sistemi.

Bu sistemin değişkenleri ve enerji fonksiyonları aşağıdaki gibidir [6];

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{2}(M + m)\dot q_2^2 + m\dot q_2 \dot q_1 \cos q_1 + \frac{1}{2} m l^2 \dot q_1^2 \qquad (27)$$

$$V = -mgl \cos q_1 \qquad (28)$$

Yukarı verilen denklemleri kullanarak sistemin hareket denklemlerini aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(m + M)\ddot q_2 + ml\ddot q_1 \cos q_1 - ml\dot q_1^2 \sin q_1 = u \qquad (29)$$

$$ml\ddot q_2 \cos q_1 + ml^2 \ddot q_1 + mgl \sin q_1 = 0 \qquad (30)$$

Yukarıdaki denklemlerin normalleştirilmiş matris forumu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 1 & b\cos q_1 \\ b\cos q_1 & c \end{bmatrix}\ddot q + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} b\dot q_2 \sin q_1 & \frac{1}{2} b\dot q_2 \sin q_1 \; 0 \\ -b\dot q_1 \sin q_1 & 0 \end{bmatrix}\dot q + \begin{bmatrix} -a \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (31)$$

Burada :

$$a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{1}{l}, \quad c = \frac{m + M}{l^2 m}$$

olur.

4.1. Eşleşme Koşullarının Çözümü

Bu bölümde bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar uygulanarak sistemi asimptotik kararlı hale getiren kontrol kuralı bulunacaktır:

1. Adım: Yaklaşık model için:

$$h_i(q) \triangleq \begin{cases} 1 & q \in \mathbb{S} \\ 0 & q \notin \mathbb{S} \end{cases} \; ve \; h_{ci}(q) \triangleq \begin{cases} 1 & q \in \mathbb{S} \\ 0 & q \notin \mathbb{S} \end{cases} \qquad (32)$$

seçelim ve (22)'de edilen potansiyel enerji eşleşme koşulunu bu ilişkileri kullanarak yazalım:

$$G^{\perp}\left[\begin{bmatrix} mgl\sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} - S_i\begin{bmatrix} \partial V_c/\partial q_1 \\ \partial V_c/\partial q_2 \end{bmatrix}\right] = 0$$
$$mgl\sin q_1 = S_i(1,1)\frac{\partial V_c}{\partial q_1} + S_i(1,2)\frac{\partial V_c}{\partial q_2} \tag{33}$$

Elde edilen PDE'nin genel çözümü:

$$\partial V_c(q) = -\frac{mgl}{S_i(1,1)}\cos(q_1) + \Phi\big(z(q)\big)$$
$$z(q) = (q_2 - q_2^*) - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1 \tag{34}$$

olarak bulunur. Burada $\Phi\big(z(q)\big)$, $q_1^* = 0$ için $\nabla_q\Phi\big(z(q^*)\big) = 0$ koşulunu sağlayan isteğe bağlı, türevi alınabilen bir fonksiyondur. Eğer bu fonksiyon $K_p > 0$ için $\Phi(z) = (K_p/2)z^2$ olarak alınırsa $\nabla_q V_c$

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{mgl\sin(q_1)}{S_i(1,1)} + K_p\left[(q_2 - q_2^*) - \dfrac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1\right] \\ K_p\left[(q_2 - q_2^*) - \dfrac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1\right] \end{bmatrix} \tag{35}$$

olarak elde edilir.

2. Adım: İstenen Potansiyel enerji fonksiyonunun ∇qVc_{hess}>0 koşulunu sağlaması.

$$V_{c_{hess}}^{q}(q) = \begin{bmatrix} -\dfrac{mgl\cos(q_1)}{S_i(1,1)} + K_p\left[\dfrac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1\right] & -\dfrac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1 \\ -\dfrac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}q_1 & K_p \end{bmatrix} \tag{38}$$

hessian matrisinin tüm özdeğerlerini pozitif yapacak koşul:

$$\begin{gathered} \mathrm{s}12 > 0\ ve \\ \big(Cos[q1] < 0\ ve\ s11 > 0\ ve\ Kp > 0\big)\ veya \\ \big(Cos[q1] > 0\ ve\ \ s11 < 0\ ve\ Kp > 0\ ve\ a > 0\big) \end{gathered} \tag{39}$$

olarak elde edilir.–*pi*/2<q_1<*pi*/2 için Cos(q_1)>0 olacağından hessianın pozitif olması için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$S_i(1,2) > 0\ ve\ S_i(1,1)\ ve\ K_p > 0 \tag{40}$$

3. Adım: Sistemi kararlı kılacak M_{ci} ön koşulları (40)'da elde edilmiştir. Bu koşulları sağlayan M_{ci} ler aşağıdaki gibidir;

$$m_{c1}(i) = \frac{1 - s_{12}m_{c2}(i)}{s_{11}},$$
$$m_{c3}(i) = \frac{cos\,q1 - s_{11}m_{c2}(i)}{s_{12}} \tag{41}$$

Sıradaki adım kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak J_{ci}'lerin oluşturulmasıdır. (17b)'de verilen kinetik enerji eşleşme koşulu (32) seçimi için yazılacak olursa:

$$G^{\perp}\left[\left(\sum_i M_i M_{ci}^{-1}\right)J_c\right]\dot{q} = 0 \tag{42}$$

J_c=0 seçilerek sağlanabilir.

5. Adım: Kapalı çevrim sistemin potansiyel enerji fonksiyonu:

$$V_c(q) = \left(\frac{1}{2}K_p\left(-q_2 + qc_2 + \frac{q_1\,s_{12}}{s_{11}}\right)^2 + \frac{a\,cos\,q_1}{s_{11}}\right) \tag{43}$$

olarak bulunur, burada s_{11} , s_{12} , m_{c2} ve K_p parametreleri serbest seçimlidir.

Dikkat edilmesi gereken husus sistemin istenen potansiyel enerji fonksiyonunun bu parametreler ile şekillenmesidir.

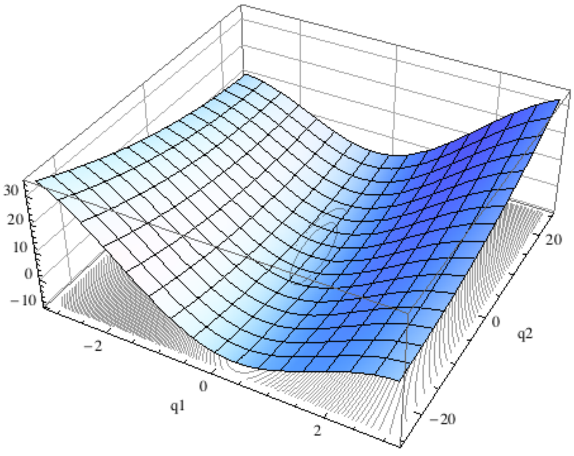
Serbest parametreler aşağıdaki şekilde seçilsin:

$$K_p = 0.015,\ \ m_{c2} = 1,\ \ s_{11} = \ -1,\ \ s_{12} = 10$$

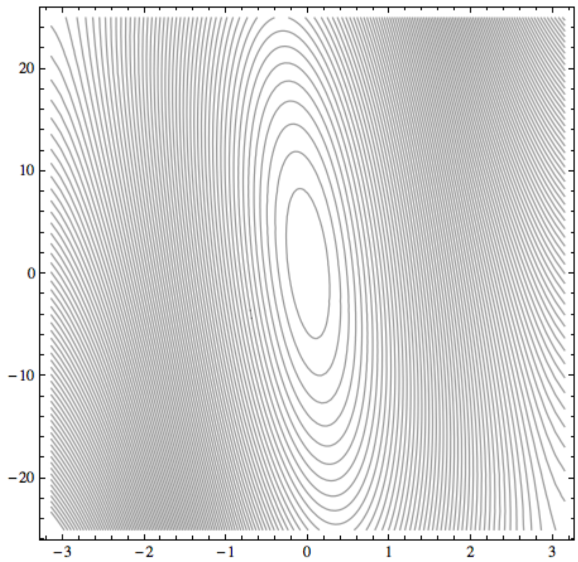
Bu durumda sistemin potansiyel enerji fonksiyonu:

$$V_c(q) = 0.0075(-10q_1 - q_2 + qc_2)^2 - 9.81\,cos\,q_1 \tag{44}$$

olur.



Şekil 2: Atanan potansiyel enerji fonksiyonu .



Şekil 3: Atanan potansiyel enerji fonksiyonunun kontör şekli .

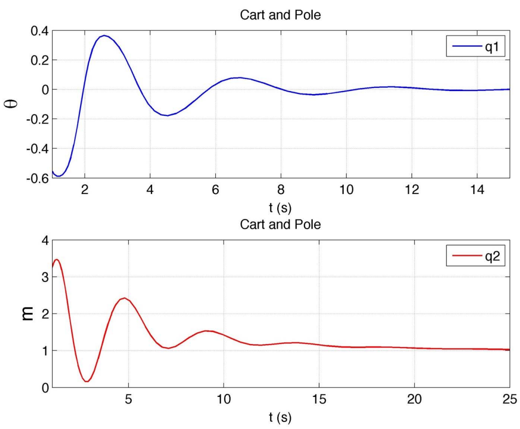
6. Adım: Kontrol işaretinin bulunması ve sönüm ekleme:

(18)'de verilen kontrol işareti örnek sistem için:

$$u = (G^TG)^{-1}G^T\left(\frac{\partial V}{\partial q} - \sum_{i=1}^{r} M_i M_{ci}\frac{\partial V_c}{\partial q}\right) + u_d, r = 12$$
$$u_d = -K_v G^T\dot{q} \tag{45}$$

olur. Benzetim parametreleri de aşağıdaki şekilde seçilsin:

$$m = 1kg,\quad M = 5kg,\quad l = 1m,\quad g = 9.8ms^{-2},$$
$$q_{c2} = 1,\quad K_p = 0.015,\ \ Kv = 5$$



Şekil 4: q_1 ve q_2 durum işaretleri .

5. Sonuçlar

Eksik sürülmüş sistemlerin kontrolü çözümü zor olan bir problemdir. Literatürde daha önce [10] Hamiltonial sistemleri ve sistemin yaklaşık modeli kullanılarak çözüm elde edilmiştir ve bu yaklaşım çözüme kolaylık sağlamıştır. Bu çalışmada ise eksik sürülmüş sistemlerin kontrolü Euler Lagrange sistemleri ile ele alınmıştır ve bu sistemin kararlılığı üzerinde durulmuştur. Eksik sürülmüş sistemlerin kontrolünde karşılaşılan zorlukların çözümü için sistemin yaklaşık modeli kullanılmıştır. Bu sayede, eşleşme koşullarında ortaya çıkan PDE'lerin yaklaşık çözümü elde edilmiş ve kontrol işareti oluşturulmuştur.

Sistemin kontrol işaretini oluşturmak için normalde lineer olmayan PDE'lerin çözülmesi gerekmektedir. Ancak önerilen yöntem sayesinde bunun yerine lineer olan PDE'ler çözümü yeterli olmaktadır. Bu yöntem çözümün bulunmasında oldukça kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca çalışmanın bir sonraki aşaması olarak, sistemin açık çevrim sisteminin daha iyi bir yaklaşıklığının elde edilmesiyle, yörünge izleme gibi problemlerin çözümünün elde edilmesi beklenmektedir

6. Kaynaklar

[1] R. Ortega, J.A. Loría Perez, P.J. Nicklasson, and H.J. Sira-Ramirez, "Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications", Springer-V erlag, 1998.

[2] Auckly, D., and Kapitanski, L.,: "On the lambda-equations for matching control laws", SIAM Journal on Control and Optimization, 41, 5, 1372–1388, 2002.

[3] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern and G. Blankenstein, "Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment", IEEE Trans. On Automatıc Control, 47, 8, 1218-1233, 2002.

[4] A. Ailon and R. Ortega, "An observer-based controller for robot manipulators with flexible joints", System and Control Letters, 21, 329–335, 1993.

[5] Hamberg, J. General matching conditions in the theory of controlled Lagrangians. In: Proc. CDC. Vol. 38. pp. 2519–2523, 1999.

[6] Bloch, A.M., Leonard, N.E., and Marsden, J.E.: "Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: The first matching theorem. IEEE Trans. The first matching theorem". IEEE Trans. Automatic Control, 45, 12, 2253–2269, 2000.

[7] R. Ortega, A. J. Van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar, "Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems", Automatica, 38, 4, 585-596, 2002.

[8] Chang, D.E.: "The extended lambda-method for controlled Lagrangian systems", IFAC World Congress Prague, Czech Republic, 2005.

[9] Ortega, R., and Garcia-Canseco, E.: "Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A survey", European Journal of Control, 10, 5, 432-450, 2004.

[10] Gören-Sümer, L., Şengör, N.: "Stabilizing a Class of Under-actuated Hamiltonian Systems" Using an Approximate Model, European Control Conference, Linz, Austria, 2015.

[11] Chang, D.E., Bloch, A.M., Leonard, N.E., Marsden, J. E., and Woolsey, C.A.: "The equivalence of controlled Lagrangian and controlled Hamiltonian systems for simple mechanical systems", ESAIM: Control, Optim. Calculus Variations, 8, 393–422,2002

[12] G. Blankenstein, R. Ortega and A.J. van der Schaft "Matching of Euler-Lagrange and Hamiltonian Systems", IFAC World Congress Barcelona, Spain, 2002.