

# BİOELEKTROMAGNETİK DALGA PROPAGASYONUNUN KESİN ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

Konu: Tıp Elektronigi

İnci Akkaya

İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Bölümü  
Maslak-İstanbul Fax: 0212 285 35 65

**Özet:** Biyoelektromagnetizmada, pek çok yazarın yapıldığı kabuller, yani insan vücudunu homogen kabul etmek ve Poisson denklemini çözmek, gerçekte yetersizdir. Hodgkin-Huxley modeli de, zaten bu yetersizliği düzenlemek için vaz edilmiştir. Daha kesin bir çözüm yolu ise, insan vücudunun homogen olmayan yapısını göz önüne alarak, Maxwell denklemlerini çözmektir. Aksionlar için, silindirik koordinatlar kullanılarak kesin dalga çözümleri yapılabilir. Bir aksionun eksenine paralel ve radyal elektrik alan bileşenlerinin ve aksionu çevreleyen magnetik alan bileşeninin ifadeleri elde edilebilir. Kas lifleri ve damarlar için de çözüm yolu aynıdır. Çeşitli liflerde ilerleyen işaretlerin propagasyon hızları farklı farklı olmaktadır.

Bu nedenle, bir kaynak işaretinin yapısı hakkında sağlam bir bilgi edinmek için, kaynağa çok yakın noktalarda ölçüm yapılması tavsiyeye şayandır.

## 1. Giriş

Vücut içindeki elektromagnetik alanların çözümünde frekansın sıfır olarak kabul edilmesi vücudun da homogen olarak kabul edilmesi, çok ciddi hata kaynaklarıdır. Elektriksel işaretlerin sinir ve kas lifleri boyunca ilerlemeleri ise genelde, dağılmış parametrelili hat problemleri olarak ele alınmıştır. (Hodgkin-Huxley modeli) Bunun dışında, dalga propagasyonunu sözkonusu eden yazar pek bulunmamaktadır. Frekansın sıfır gibi alınması ve vücudun homogen gibi kabul edilmesi alan ifadelerini fazla basitleştirmekte ve Poisson denklemini temel denklem olarak alınmaktadır.

## 2. Vücutun yapısı ve içindeki olaylar

Gerçekte vücut homogen olmamasından başka, yöne de bağlı yapıdadır. (anisotropiktir) Vücut içindeki en büyük iletkenlik aksionlarıki olup 0,8 S/m dir. Bundan sonra kanın iletkenliği 0,6 S/m olarak gelir. Kasların boyuna iletkenlikleri 0,5 S/m dir. İletkenlik yağ dokularında 0,2 S/m; kemiklerde 0,126 S/m, miyelinsiz aksionların zarlarında ise  $1,77 \cdot 10^{-6}$  S/m dir. Miyelinsiz aksionların zarlarının bağlı dielektrik sabiti 8 olup hemen hemen

$$\sigma \approx \omega \epsilon$$

( $\sigma$  = iletkenlik;  $\omega = 2\pi f$ ;  $f$  = frekans;  $\epsilon$  = dielektrik sabiti) bağımsızını gerçekleştirir. Miyelinli aksionların miyelin tabakasındaki iletkenlik ise, miyelinsiz aksion zarlarından da daha küçüktür.

Maxwell denklemlerini, vücut için, fazörler kullanarak yazalım:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon(\vec{r})\vec{E} + \sigma(\vec{r})\vec{E} + \vec{I}_{kaynak} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \quad (1.2)$$

( $\vec{H}$  = magnetik alan;  $\vec{E}$  = elektrik alanı;  $\mu_0$  = boşluğun magnetik geçirgenliği =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m) Aksion zarlarının dışındaki vücutta,

$$\omega \epsilon(\vec{r}) \ll \sigma(\vec{r}) \quad (\text{aksion zarı dışında}) \quad (1.3)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu özellikten dolayı kaynak akımı içermeyen bir nokta için,

$$\nabla \cdot [j\omega \epsilon(\vec{r})\vec{E}] + \nabla \cdot [\sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})] = 0$$
$$; \left[ \vec{I}_{kaynak}(\vec{r}) = 0 \right] \quad (2.1)$$

de (1.3) göz önünde tutularak,

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0; \quad (\vec{I}_{kaynak} = 0 \text{ için}) \quad (2.2)$$

yazabiliriz.

### 3-Aksonların işaret iletmeleri

Aksonların  $\sigma$  iletkenlikleri diğer bütün doku iletkenliklerinden daha büyük olduğu için, akson zarları da çok yalıtkan oldukları için aksonlar elektrik alanı propagasyonu için uygun ortamlardır. Bunlardaki alan bulmak için, bir aksonu, zarını ve etrafındaki dokuyu 3 ortamdan oluşmuş tabakalı bir yapı olarak (Şekil 1) ele almak gerekir. Sabitleri

$$\epsilon_2; \mu_0 \text{ ve } \sigma_2$$

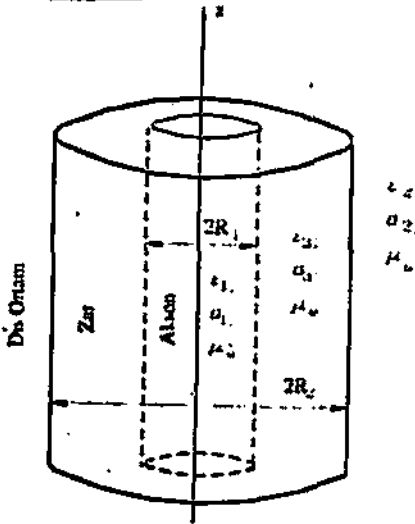
olan dış doku ortamının içinde, sabitleri

$$\epsilon_3; \mu_0 \text{ ve } \sigma_3$$

olan akson zarı; zarın içinde de sabitleri

$$\epsilon_1; \mu_0; \sigma_1$$

olan akson silindiri bulunsun. Aksonun yarıçapı  $R_1$ ; zarın dış yarıçapı  $R_2$  olsun. Bu üç ortamın sabitleri



Şekil 1. Bir aksonun, zarının ve dışındaki ortamın modellenmesi

$$\sigma_1 \gg \omega \epsilon_1 \quad (3.1)$$

$$\sigma_2 \gg \omega \epsilon_2 \quad (3.2)$$

$$\sigma_1; \sigma_2 \gg \sigma_3 \quad (3.3)$$

eşitsizliklerini sağlar. Şekil 1'deki silindirin eksenini  $z$  eksenini olarak seçilmiştir. Silindirik  $(\rho, \varphi, z)$  koordinatları kullanılırsa bulunacak olan çözümlerin de (İ. Akkaya) sadece  $E_\rho; E_z$  ve  $H_\varphi$  bileşenleri bulunur. Alanların  $\varphi$  açısından bağımsız olduğu düşünülürse, alan ifadeleri

$$\gamma = j\beta + \alpha = j(\text{ilerleme sabiti}) + \text{zayıflama sabiti} \quad (4.1)$$

olmak üzere, 1 ortamında

$$E_{\rho 1} = a_1 J_1(k_{11} \rho) e^{-\gamma z} / (j\omega \epsilon_1 + \sigma_1) \quad (4.2)$$

$$E_{z 1} = -a_1 J_0(k_{11} \rho) e^{-\gamma z} k_{11} / (j\omega \epsilon_1 + \sigma_1) \quad (4.3)$$

$$H_{\varphi 1} = a_1 J_1(k_{11} \rho) e^{-\gamma z} \quad (4.4)$$

olup

$$k_{11} = \sqrt{\omega \mu_0 (\omega \epsilon_1 - j\sigma_1) + \gamma^2} \quad (4.5)$$

tır. 3 ortamında

$$E_{\rho 3} = [a_3 J_1(k_{13} \rho) + b_3 N_1(k_{13} \rho)] e^{-\gamma z} / (j\omega \epsilon_3 + \sigma_3) \quad (4.6)$$

$$E_{z 3} = [a_3 J_0(k_{13} \rho) + b_3 N_0(k_{13} \rho)] e^{-\gamma z} k_{13} / (j\omega \epsilon_3 + \sigma_3) \quad (4.7)$$

$$E_{\rho 2} = [a_2 J_1(k_{12} \rho) + b_2 N_1(k_{12} \rho)] e^{-\gamma z} / (j\omega \epsilon_2 + \sigma_2) \quad (4.6)$$

$$E_{z 2} = [a_2 J_0(k_{12} \rho) + b_2 N_0(k_{12} \rho)] e^{-\gamma z} k_{12} / (j\omega \epsilon_2 + \sigma_2) \quad (4.7)$$

$$H_{\varphi 3} = [a_3 J_1(k_{13} \rho) + b_3 N_1(k_{13} \rho)] e^{-\gamma z} \quad (4.8)$$

olup

$$k_{13} = \sqrt{\omega \mu_0 (\omega \epsilon_3 - j\sigma_3) + \gamma^2} \quad (4.9)$$

dur. 2 ortamında

$$E_{\rho 2} = a_2 H_1^{(2)}(k_{12} \rho) e^{-\gamma z} / (j\omega \epsilon_2 + \sigma_2) \quad (4.10)$$

$$E_{z 2} = a_2 H_0^{(2)}(k_{12} \rho) e^{-\gamma z} k_{12} / (j\omega \epsilon_2 + \sigma_2) \quad (4.11)$$

$$H_{\varphi_2} = a_2 H_1^{(2)}(k_{12} \rho) e^{-z} \quad (4.12)$$

olup

$$k_{12} = \sqrt{\omega \mu_0 (\omega \varepsilon_2 - j \sigma_2) + \gamma^2} \quad (4.13)$$

dir. Bu ifadelerde  $J_n$  nyinci derece Bessel fonksiyonu;  $N_n$  nyinci derece Neumann fonksiyonu;

$H_n^{(1)}$  nyinci derece 1. Hankel fonksiyonu;

$H_n^{(2)}$  nyinci derece 2. Hankel fonksiyonudur.

dir. (5) denklemleri,  $a_1, a_2, a_3, b_3$  bilinmeyenlerine göre doğrusal, homogen denklemlerdir. Katsayılar determinantını sıfıra eşitlenir.

$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - j \sigma_i / \omega, (i = 1, 2, 3)$  olmak üzere

$$\frac{\sqrt{(\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2)(\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2)}}{-\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2} H_0^{(2)}(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2} R_2) J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2} R_1)$$

$$[N_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2) - J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) N_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2)]$$

$$+ \frac{\sqrt{(\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2)(\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2)}}{-\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3} H_0^{(2)}(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2} R_2) J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2} R_1)$$

$$[N_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2) - J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) N_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2)]$$

$$+ \frac{\sqrt{(\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2)(\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2)}}{-\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3} H_1^{(2)}(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2} R_2) J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2} R_1)$$

$$[J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2) N_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) - J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) N_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2)]$$

$$+ \frac{(\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2)}{-\omega^2 (\hat{\varepsilon}_3)^2} H_1^{(2)}(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_2 \mu_0 + \gamma^2} R_2) J_1(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_1 \mu_0 + \gamma^2} R_1)$$

$$[J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1) N_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2) - J_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_2) N_0(\sqrt{\omega^2 \hat{\varepsilon}_3 \mu_0 + \gamma^2} R_1)] = 0. \quad (6)$$

(4) ifadelerinde 5 tane bilinmeyen vardır. Bunlar  $a_1, a_2, a_3, b_3$  ve  $\gamma$  dir. Sınır şartları ise

$\rho = R_1$  de

$$E_{\varphi_1}(R_1; \varphi; z) = E_{\varphi_2}(R_1; \varphi; z) \quad (5.1)$$

$$H_{\varphi_1}(R_1; \varphi; z) = H_{\varphi_2}(R_1; \varphi; z); \quad (5.2)$$

$\rho = R_2$  de de

$$E_{\varphi_1}(R_2; \varphi; z) = E_{\varphi_2}(R_2; \varphi; z) \quad (5.3)$$

$$H_{\varphi_1}(R_2; \varphi; z) = H_{\varphi_2}(R_2; \varphi; z) \quad (5.4)$$

Bu denklemin,  $\gamma$  nn çözüleceği karakteristik denklemdir. Milyonlarca bir aksonda,  $R_1, 0,3 \mu m$  ile  $1,3 \mu m$  arasında değerler almaktadır,  $R_2$  ise  $R_1 + 7,5 \cdot 10^{-9} m$  dir.

#### 4. Aksonların İlettiği İşaretlerin Tartışması

Karakteristik denklemin çözümü olan  $\gamma$ ;  $R_1$  ve  $\omega$  parametrelerine bağlıdır. Deneysel olarak da,  $\gamma$  mm R, e bağılılığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak, aksonların iletildiği işaretlerin propagasyon hızı, farklı çaplardaki aksonlarda, farklı değerler alır. Herhangibir işaret kaynağında, işaretin t zamanına göre değişimi  $f(t)$  olsun. Bu işaret,  $V_1$  hızı ile ilerlediği bir akson üzerinde  $\ell$  kadar uzakta,  $f(t - \ell/V_1)$  yapısında yer alır.  $V_2$  hızı ile ilerlediği bir akson üzerinde ise,  $\ell$  kadar uzakta  $f(t - \ell/V_2)$  işareti bulunur.  $\ell$  uzaklığına gelen bütün aksonların taşıdığı işaretlerin toplamı ise,

$$F(t) = \sum_i A_i f(t - \ell/v_i)$$

olur.  $F(t)$  ile  $f(t)$  birbirinden çok farklı yapıda olabilirler. Bu sonuç, damarlar veya kas lifleri üzerinden yayılan işaretler için de geçerlidir. Zaten EKG ve EEG eğrileri de, vücudun farklı yerlerinde, farklı görünümler arz etmektedir. Bu farklı görünümlerin bir sebebi, kardiyak vektörünün, veya beyin dipolünün, üç boyutlu bileşenlerinin farklı yapıda olmalarıdır. Fakat diğer önemli sebep, yukarıda belirtildiği gibi,  $V_i$  propagasyon hızlarının farklı kablolarında farklı olmasının sebep olduğu distorsiyondur. Kardiyak vektörünün veya beyin dipolünün zamana göre değişmesi hakkında doğru bilgi elde edebilmek için; ölçünün yapıldığı noktanın  $\ell$  uzaklığının, minimuma indirilmesi gerekmektedir.

### 5. Sonuçlar

Homogen olmayan, hatta anizotropik olan insan vücudundaki alanları Poisson denklemi ile çözmek yetersiz kalmaktadır. Maxwell denklemleri liflerdeki alanları çözmek için elverişlidir. Silindirik  $(\rho, \varphi, z)$  koordinatları kullanıldığında liflerde, elektrik alanının  $\rho$  ve  $z$  bileşenleri, magnetik alanın  $\varphi$  bileşeni bulunmaktadır.

EKG nin kalpteki olayları doğru olarak göstermesi için; benzer şekilde, EEG nin beyindeki olayları doğru olarak göstermesi için; ölçümler, işaret kaynağına en yakın noktalarda yapılmalıdır.

### 6. Kaynaklar.

1. Akkaya, "Analysis of the circular cylindrical dipole of any material, in any medium"; İ.T.Ü. Bülteni, Vol. 34, 1981, Nr. 1, pp 29-49
1. Akkaya, "The radiation field, the impedance, the top loading, and the coated case and the buried case of imperfectly conducting cylindrical dipole, by the way, conclusions on the concept of surface impedance" İ.T.Ü. Bülteni, Vol. 34, 1981 Nr. 2, pp 136-159.
- S. Deutsch, A. Deutsch, "Understanding the Nervous System", IEEE Press, 1992