MARTINEZ/PARKS ALGORİTMASI KULLANILARAK IIR GÜÇ SİMETRİK SÜZGEÇ TASARIMI

Emir Tufan Akman
tufane@istanbul edu.tr

İstanbul Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Avcılar, İstanbul

Anahtar kelimeler: PS süzgeç tasarımı, MP algoritması, değişim teoremi.

ÖZETÇE

Bu çalışmada Martinez/Parks (MP) algoritmasına dayanan sonsuz birim dürtü yanıtlı (IIR) Güç Simetrik (PS) süzgeç tasarım yöntemi sunulmuştur. Bu tasarım yönteminde, IIR süzgeç tasarımı için geliştirilmiş MP algoritması, PS özelliği gözönünde bulundurularak değiştirilmiştir. PS süzgeç tasarımında standart analog prototip süzgeç olarak sadece Butterworth ve eliptik süzgeçler kullanılabilmektedir. Bununla birlikte MP algoritması değişim teoremine dayandığı için bu iki tip süzgeçten sadece eliptik süzgeçler kullanılabilir.

I. GİRİŞ

Güç simetrik (PS) süzgeçler tam geri çatımlı (PR) süzgeç tasarımında oldukça önemli rol oynamaktadır [1]. İki kanallı süzgeç öbeği yapısında, alçak geçiren analiz süzgeci, simetrik pay ve PS özelliklerine sahip ise yüksek geçiren analiz süzgeci ve sentez süzgeçlerinin uygun olarak seçimi ile PR sistem elde edilebilir.
PS süzgeçler kullanılarak sonlu birim dürtü yanıtlı (FIR) PR süzgeç tasarım yöntemi ilk olarak [2] ve [3] de sunulmuştur. FIR süzgeçlerin tercih edilmesinin en önemli nedeni doğrusal faz özelliğinin sağlanabilmesidir. Ancak FIR süzgeç tasarımında süzgeç derecesinin oldukça yüksek seçilmesi gerekmektedir. Bu durum süzgeç tasarımında kullanılacak gecikme eleman sayısını etkileyecektir. FIR süzgeçlere alternatif olarak aynı frekans seçiliğinde daha düşük dereceli IIR süzgeçler kullanılmaktadır [4]-[5]. Ancak IIR süzgeç tasarımında, istenilen süzgeç karakteristikleri ile birlikte süzgecin kararlılığının aynı zamanda sağlanması oldukça zordur.
IIR PS süzgeç tasarımında sadece Butterworth ve eliptik süzgeçler kullanılabilmektedir. Chebyshev süzgeçler simetrik olmadığından dolayı bu tasarım için uygun değildir [1]. Bu çalışmada önerilen yöntem, değişim teoreminin kullanıldığı [6] de sunulan algoritmaya dayandığı için, önerdiğimiz PS süzgeç tasarımı eliptik süzgeçler ile sınırlıdır. [6] de sunulan bu algoritma, FIR süzgeç tasarımı için geliştirilmiş Remez değişim algoritmasına dayanmaktadır. Ancak frekans cevabı yerine genlik cevabının karesi kullanılmaktadır. Bu çalışmada, [6] de önerilen MP algoritmasi PS özelliği gözönünde bulundurularak değiştirilmiştir. PS özelliği de geçirme-bandı ve söndürme-bandı dalgalanmaları; geçirme ve söndürme bandı frekans değerlerine ait kısıtlamalar ile sağlanır.
Ayrıca PS süzgeçler ile yarı-bandlı süzgeçler, $H(z) + H(-z) = 1$, arasında oldukça önemli bir ilişki vardır: $H(z^{-1})H(z)$ yarı-bandlı süzgeç özelliğini sağlıyorsa $H(z)$ PS özelliğini sağlar [1]. Dolayısıyla PS IIR süzgeç tasarımı, spektral çarpanlara ayırma işlemi ile rekürsif yarı-bandlı süzgeçler kullanılarak gerçeklenebilir. Rekürsif yarı-bandlı süzgeç tasarımına ait detaylar [7] da verilmiştir.

II. GÜÇ SİMETRİK SÜZGEÇLERİN ÖZELLİKLERİ

Nedensel gerçek katsayılı IIR süzgece ait transfer fonksiyonu, $H(z)$,

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = K z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - \bar{b}_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - \bar{a}_k)} \qquad (1)$$

olarak verilsin. Burada b_k ve a_k sırasıyla pay ve payda katsayıları; M ve N pay ve payda dereceleri; $\bar{b}_k$ ve $\bar{a}_k$ sırasıyla sistemin sıfırları ve kutupları; K sabit bir sayıdır ($N > 0$ için sıfır/kutup iptali olmadığı durumda). Süzgeç katsayılarının gerçek olması nedeniyle, $H(z)$nin tüm sıfırları ve kutupları ya gerçektir ya da birbirinin eşleniğidir. Süzgecin kararlı olması için tüm kutuplar birim çemberin içinde olmalıdır. $H(z)$ aşağıda verilen özelliği sağlıyorsa

$$H(z^{-1})H(z) + H(-z^{-1})H(-z) = 1 \qquad (2)$$

PS süzgeç olarak isimlendirilir. $z = e^{j\omega}$ durumunda (2) eşitliği

$$|H(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j(\omega-\pi)})|^2 = 1. \qquad (3)$$

olarak yazılır. Süzgecin PS özelliği sağlaması durumunda (1)

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z^2)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N/2} a_{2k} z^{-2k}} = E z^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-\bar{b}_k)}{\prod_{k=1}^{N/2}(z^2-\bar{a}_{2k})} \quad (4)$$

olarak yazılır. Burada $H(z)$ transfer fonksiyonunun paydası çift güçlüdür [1]. Bu nedenle $H(z)$ nin kutupları ya sanal eksen üzerindedir ya da $\pi/2$ye göre simetriktir. Bu nedenle kutuplar

$$\bar{a}_k = j\beta_k, \qquad -1<\beta_k<1 \quad (5)$$

veya

$$\bar{a}_k = \mp\alpha_k + j\beta_k, \qquad \sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}<1. \quad (6)$$

şeklindedir. $H(z)$ nin PR sistem için uygun olabilmesi nedeniyle payinin da tek dereceli ve simetrik (veya antisimetrik) olması gerekir. Giriş bölümünde belirtildiği gibi PS IIR süzgeç tasarımı Butterworth ve eliptik süzgeçler ile sınırlıdır. Butterworth süzgeç, kesim frekansında, Ω_c, genlik cevabı 3dB olacak şekilde tasarlandıktan sonra, çiftdoğrusal dönüşümle elde edilen sayısal süzgeç PS özelliğini sağlar [1].
Eliptik süzgeç kullanılması durumunda süzgeç özelliklerine ait kısıtlar

$$(\delta_s)^2 = 4\delta_p(1-\delta_p) \quad (7)$$

şeklindedir. Burada δ_p ve δ_s sırasıyla geçirme-bandı ve söndürme-bandına ait dalgalanmaların tepe noktalarıdır. Ayrıca diğer kısıt

$$\omega_p+\omega_s=\pi \quad (8)$$

olarak verilir. Burada da ω_p ve ω_s sırasıyla geçirme-bandı ve söndürme bandı frekans değerleridir. Dolayısıyla ω_s ve δ_s verildiği durumda ω_p ve δ_s sırasıyla (8) ve (7) eşitlikleri kullanılarak bulunur. $H(z)$e ait kutuplar (6) eşitliğinde verildiği gibi olmalıdır. Buna ek olarak eliptik PS süzgece ait transfer fonksiyonunun sıfırları da

$$\bar{b}_k = -\gamma_k \mp j\theta_k, \qquad \sqrt{\gamma_k^2+\theta_k^2}=1. \quad (9)$$

formunda olmalıdır.

III. TASARIM ALGORİTMASI

Bu çalışmada önerilen yöntem MP algoritmasına dayandığı için, süzgeç tasarımı sadece eliptik tasarım ile sınırlıdır.
Amaç, MP yöntemi ile (5)de verilen PS özelliği sağlanacak şekilde süzgeç katsayılarının bulunmasıdır. MP yöntemi Remez algoritmasına dayanmaktadır. Remez algoritması, FIR süzgeç tasarımı için geliştirilmiş bir algoritmadır. Bunun nedeni frekans cevabının, $H(e^{j\omega})$, FIR süzgeçler ile gerçek yapılabilmesidir. IIR süzgeç tasarımı durumunda $H(e^{j\omega})$ doğrusal faz özelliğine sahip olmadığı için gerçek yapılamaz. Bu problemi ortadan kaldırmak amacıyla, süzgecin frekans cevabı,$H(e^{j\omega})$, yerine genlik cevabının karesi, $|H(e^{j\omega})|^2$, gözönünde bulundurulmuştur. Gerçek katsayı durumunda $H(z)H(z^{-1})$nin birim çember ($z=e^{j\omega}$) üzerindeki karşılığı $|H(e^{j\omega})|^2$ya eşittir. PS süzgeç durumunda (5) kullanılarak

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N/2} a_{2k} z^{-2k}} \times \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{N/2} a_{2k} z^{2k}} = \frac{\sum_{k=-M}^{M} d_k z^{-k}}{\sum_{k=-N/2}^{N/2} c_{2k} z^{-2k}} \quad (10)$$

eşitliği yazılır. $z=e^{j\omega}$ için (10)

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{d_0+2d_1\cos(\omega)+\ldots+2d_M\cos(M\omega)}{c_0+2c_2\cos(2\omega)+\ldots+2c_N\cos(N\omega)}. \quad (11)$$

olarak yazılır. Değişim teoremine göre, söndürme bandında en az $M+1$ değişim (ω_p frekansındaki değişim dahil) geçirme bandında da en az $N+1$ değişim (ω_s frekansındaki değişim dahil) vardır [6]. Bu durumda

$$|H(e^{j\omega_r})|^2 = (1\pm\delta_p)^2 \quad (12)$$

ω_r, $r=0,1,\ldots,N$ ($\omega_N=\omega_p$) ve

$$|H(e^{j\omega_r})|^2 = 0 \quad veya \quad (\delta_s)^2 \quad (13)$$

ω_r, $r=N+1,\ldots,N+M+1$ ($\omega_{N+1}=\omega_s$ ve $\omega_{N+M+1}=\pi$) eşitlikleri yazılabilir. (7) eşitliği (13) de yerine konulursa

$$|H(e^{j\omega_r})|^2 = 0 \quad veya \quad 4\delta_p(1-\delta_p) \quad (14)$$

elde edilir. Bu durumda (12) eşitliği kullanılarak ($\omega_N=\omega_p$ olacak şekilde), $N+1$ geçirme-bandı eşitliği

$$\begin{aligned}
&(1-\delta_p)^2[c_0+2c_2\cos(2\omega_N)+\ldots+2c_N\cos(N\omega_N)]\\
&\quad = d_0+2d_1\cos(\omega_N)+\ldots+2d_M\cos(M\omega_N)\\
&(1+\delta_p)^2[c_0+2c_2\cos(2\omega_{N-1})+\ldots+2c_N\cos(N\omega_{N-1})]\\
&\quad = d_0+2d_1\cos(\omega_{N-1})+\ldots+2d_M\cos(M\omega_{N-1})\\
&\quad\vdots\\
&(1\pm\delta_p)^2[c_0+2c_2\cos(2\omega_0)+\ldots+2c_N\cos(N\omega_0)]\\
&\quad = d_0+2d_1\cos(\omega_0)+\ldots+2d_M\cos(M\omega_0)
\end{aligned} \quad (15)$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde (14) eşitliği kullanılarak ($\omega_{N+1}=\omega_s=\pi-\omega_p$ olacak şekilde) $M+1$ durdurma-bandı eşitliği

$$4\delta_p(1-\delta_p)[c_0+2c_2\cos(2\omega_{N+1})+\ldots+2c_N\cos(N\omega_{N+1})]$$

$$= d_0+2d_1\cos(\omega_{N+1})+\ldots+2d_M\cos(M\omega_{N+1})$$

$$0 = d_0 + 2d_1 \cos(\omega_{N+2}) + \ldots + 2d_M \cos(M\omega_{N+2})$$

$$\vdots$$

$$0 = d_0 + 2d_1 \cos(\omega_{N+M+1}) + \ldots + 2d_M \cos(M\omega_{N+M+1})$$

veya

$$4\delta_p(1-\delta_p)[c_0 + \ldots + 2c_N \cos(N\omega_{N+M+1})]$$

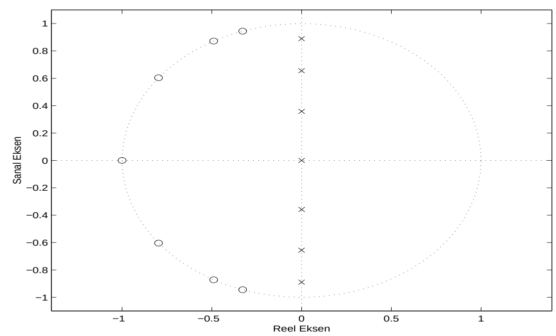
$$= d_0 + 2d_1 \cos(\omega_{N+M+1}) + \ldots + 2d_M \cos(M\omega_{N+M+1}) \quad (16)$$

olarak yazılabilir. [6] de sunulan MP algoritmasında, c_k ve d_k katsayıları verilen δ_p değeri için δ_s minimum olacak şekilde elde edilir. Bu algoritmanın (7) ve (8) de verilen kısıtlar gözönünde bulundurularak değiştirilmiş şekli şu şekildedir:

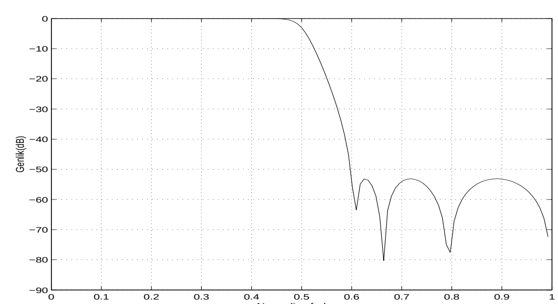
- Verilen δ_s ve ω_s değerleri için (7) and (8) kullanılarak sırasıyla δ_p and ω_p bulunur.
- Bu değerlere karşılık gelen en küçük tek tam sayı değeri, süzgeç derecesi (M) olarak belirlenir.
- Durdurma bandı ve söndürme bandı dalgalanmalarına ait tepe değerleri yuvarlanmış M değeri için tekrar hesaplanır.
- Başlangıç $N + M + 2$ değişim frekans kestirimleri $|H(e^{j\omega})|^2$ değişiminin uç değerlerine göre belirlenir.
- Bu değerler kullanılarak (15) de verilen $N+1$ denklem veya (16) de verilen $M+1$ denklem çözülüp, bir sonraki özyineleme için yeni değişim frekans kestirimleri ve δ_s^2 elde edilir. δ_s in bu değeri için (7)kullanılarak δ_p bulunur.
- Bu değerler için [6] de sunulan MP algoritması kullanılarak c_k ve d_k katsayıları bulunur.
- Son olarak b_k ve a_k katsayıları (10) eşitliği kullanılarak elde edilir.

IV. TASARIM ÖRNEĞİ

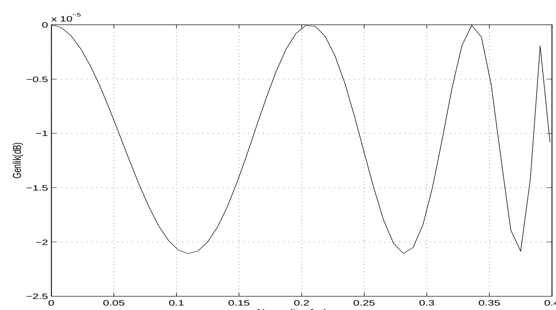
Bu bölümde verilen örnek, önerilen tasarım yönteminin sonuçlarını göstermektedir. Bu tasarım örneğinde, söndürme bandı frekans değeri ile dalgalanma tepesi sırasıyla $\omega_s = 0.6\pi$ ve $\delta_s = 0.01$ olarak seçilmiştir. Geçirme-bandı frekansı, $\omega_p = 0.4\pi$, ve dalgalanma tepsesi, δ_p sırasıyla (8) ve (7) eşitlikleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu özellikleri sağlayan en küçük süzgeç derecesi 5.45 olarak bulunmuş ve en yakın tek tam sayı değeri olan $M = 7$ye yuvarlatılmıştır. M değerinde yuvarlama işlemi yapıldığı için dalgalanma teperelerine ait değerlerin tekrar belirlenmesi gerekmektedir. Bu değerler $\delta_s = 0.0022$ and $\delta_p = 1.26\times10^{-6}$ olarak bulunmuştur. Bölüm III. de verilen algoritma ile elde edilen süzgece ait sıfır-kutup diyagramı Şekil (1) de gösterilmiştir. Şekil (1)de de görüldüğü gibi, sıfırlar birim çemberin sol-yarısında, kutuplar da sanal eksen üzerinde yer almaktadır. Şekil (2) ve (3) de, $H(e^{jw})$e ait genlik cevabının değişimi sırasıyla tüm band için ve geçirme-bandı için gösterilmiştir. Bu şekillerden de görüldüğü gibi geçirme-bandında 8 değişim, södürme bandında 7 değişim söz konusudur. Dolayısıyla elde edilen sonuç değişim teoremini sağlamaktadır. Şekil (4) de $|H(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j(\omega-\pi)})|^2$ değişiminin sabit olduğu görülmektedir. Bu şekil elde edilen süzgecin (3)de verilen PS özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. Son olarak Şekil (5) de grup gecikmesi gösterilmiştir. Bu şekilde de grup gecikmesinin sabit olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla süzgeç doğrusal faz özelliğine sahip değildir. Ancak algoritmayı doğrusal faz özelliği elde edecek şekilde geliştirmek mümkündür.



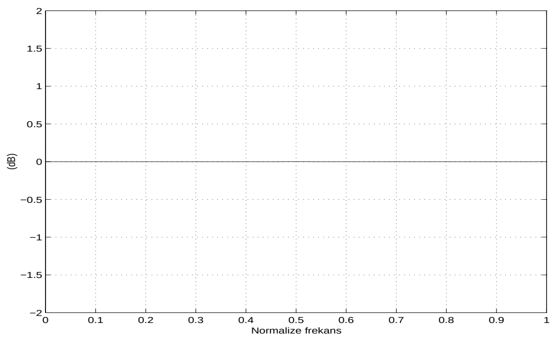
Şekil 1: $H(z)$e ait sıfır/kutup diyagramı.



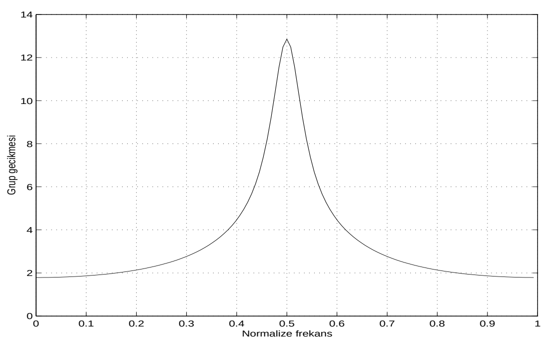
Şekil 2: $|H(e^{j\omega})|$.



Şekil 3: Geçirme bandına ait $|H(e^{j\omega})|$.



Şekil 4: $|H(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j(\omega-\pi)})|^2$.



Şekil 5: Grup gecikmesi.

V. SONUÇ

Bu çalışmada IIR PS için değiştirilmiş Martinez/Parks algoritması sunulmuştur. Bu tasarım algoritması sadece eliptik tasarım için uygundur. Bu nedenle süzgeç özelliklerine ait kısıtlar sadece elipik süzgeç için verilmiştir. Bundan sonraki çalışmada bu algoritmanın doğrusal-fazlı süzgeçler için geliştirilmesi düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

[1] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[2] M. J. T. Smith, T. P. Barnwell, "A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree structured subband coders," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc.*, San Dieago, CA, pp. 27.1.1-27.1.4, March 1984,

[3] F. Mintzer, "Filters for distortion-free two-band multirate filter banks," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* , vol. 33, pp. 626–630, June 1985.

[4] P. P. Vaidyanathan, P. Q. HOANG, "Lattice stuructures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect-reconstruction QMF banks" *IEEE Trans. on ASSP* vol. 36, pp. 81–94, Jan. 1988.

[5] J. D. Johnston, "A filter family designed for use in quadrature mirror filter banks," in *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Processing,* pp. 291-294, Apr. 1980.

[6] L. B. Jackson, "An improved Martinez/Parks algorithm for IIR with unequal numbers of poles and zeros," *IEEE Trans. on Signal Processing*, No. 42-5, pp. 1234–1238, May 1994.

[7] H. W. Schüßler, P. Steffen, "Recursive half-band filters" *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)* vol. 55, pp. 377-388, 2001.