

Aktif Süspansiyon Sistemleri Kontrolünde Ters Optimal Kontrol Yaklaşımı

Inverse Optimal Control Approach for Active Suspension System Control

Lütfi Ulusoy¹, Sadık Kıvanç Süngü², İbrahim Eksin³, Müjde Güzelkaya³

¹Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Çorlu Mühendislik Fakültesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ, Türkiye

²Eatron Technologies, Warwick, Birleşik Krallık

³Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü, Elektrik-Elektronik Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak, İstanbul, Türkiye

ulusoy@nku.edu.tr, kivancsungu@gmail.com, eksin@itu.edu.tr, guzelkaya@itu.edu.tr

Öz

Bu çalışmada da aktif süspansiyon sisteminin konfor ve sürüş güvenliği isterlerini karşılamak amacıyla ters optimal kontrol temelli yeni bir tasarım yaklaşımı önerilmiştir. Ters Optimal Kontrol (TOK) yaklaşımı, geleneksel optimal kontrol yaklaşımının aksine önceden belirlenmiş bir maliyet fonksiyonu için uygun kontrol kuralını hesaplama problemi değil; önceden belirlenmiş olan bir kontrol kuralının minimum yaptığı maliyet fonksiyonunu bulma problemidir. Çalışmada çeyrek araç modeli kullanılmış ve TOK yaklaşımıyla kararlı, maliyet-etkin ve gerçek zamanda uygulanabilir bir kontrolör tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolör, yine durum geri beslemeli bir kontrolör olan Doğrusal Kuadratik Regülatör (DKR) ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada önerilen TOK tabanlı kontrolörün doğrusal kuadratik regülatöre (DKR) kıyasla yüzde aşımı yaklaşık %20.16'dan %12.47'ye düşürdüğünü, yerleşme zamanını ise %8'den fazla azalttığını göstermektedir. Ayrıca hata kareleri integrali (HKİ) ve mutlak hata integrali (MHİ) gibi performans ölçütlerinde TOK yaklaşımı ile daha düşük hata değerleri elde edilmiştir. Ölçüm gürültüsü ve aktüatör kısıtları altında yapılan benzetimlerde de TOK'un performans üstünlüğünü koruduğu gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar ile önerilen tasarımın DKR'ye alternatif olabileceği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kontrol Lyapunov Fonksiyonu, Doğrusal sistemler, Ters Optimal Kontrol, Aktif Süspansiyon Sistemi, Durum Geri Beslemeli Kontrol, Doğrusal Kuadratik Regulator

Abstract

In this study, a new inverse optimal control-based design approach is proposed to satisfy the comfort and driving safety requirements of an active suspension system. Unlike the conventional optimal control approach, the Inverse Optimal Control (IOC) method does not solve the problem of computing an appropriate control law for a predefined cost function; instead, it seeks the cost function that is minimized by a given control law. A quarter-car model is employed, and a stable, cost-effective, and real-time applicable controller is designed

using the IOC approach. The designed controller was compared with a Linear Quadratic Regulator (LQR), which is also a state feedback controller. This comparison shows that the proposed IOC-based controller reduces the percentage overshoot from approximately 20.16% to 12.47% and reduces the settling time by more than 8% compared to the linear quadratic regulator (LQR). Furthermore, lower error values were obtained with the IOC approach in performance metrics such as integral of squared errors (ISE) and integral of absolute errors (IAE). Simulations conducted under measurement noise and actuator constraints also showed that IOC maintained its performance superiority. These results demonstrate that the proposed design can be an alternative to the LCR.

Keywords: Control Lyapunov Function, Linear Systems, Inverse Optimal Control, Active Suspension System, State Feedback Control, Linear Quadratic Regulator

1. Giriş

Günümüzde araç dinamiği alanında artan performans beklentileri, süspansiyon sistemlerini hem yol tutuşunun iyileştirilmesi hem de yolcu konforunun artırılması açısından kritik bir bileşen hâline getirmiştir. Süspansiyon sistemi, temel olarak araç gövdesi ile yol yüzeyi arasındaki dinamik kuvvet etkileşimini düzenleyerek yol kaynaklı darbelerin, titreşimlerin ve gürültü bileşenlerinin araç içine iletimini sınırlandırmayı amaçlayan yay ve sönümleyici elemanlardan oluşmaktadır. Modern taşıtlarda süspansiyon yapıları genel olarak pasif, yarı aktif ve aktif sistemler olmak üzere üç ana kategoride sınıflandırılmakta olup, her bir yapı farklı düzeyde kontrol edilebilirlik ve performans kazancı sunmaktadır.

Sürüş konforu ile yol tutuş performansının eşzamanlı iyileştirilmesi, süspansiyon sisteminin temel dinamik değişkenleri olan lastik sıkışması ve araç gövdesinin dikey ivmelenmesinin hassas biçimde denetlenmesini gerektirmektedir. İnsan vücudunun düşük frekanslı titreşimlere karşı yüksek duyarlılığa sahip olması nedeniyle gövde ivmesinin sınırlandırılması konfor performansının kritik bir bileşeni olarak öne çıkmaktadır; nitekim 1978 tarihli ISO

raporu, insan bedeninin dikey ivmelenmeye dayanım aralığını 4-8 Hz frekans bandı olarak tanımlamaktadır [1]. Yol tutuşu ve konforun çoğu durumda birbiriyle çelişen iki tasarım hedefi olduğu dikkate alındığında, başarılı bir süspansiyon kontrol stratejisinin bu iki performans ölçütü arasında uygun bir denge tesis etmesi gerekmektedir. Bu ödünleşme, süspansiyon strokunun fiziksel olarak sınırlı olması nedeniyle daha karmaşık bir hâl almakta; strok sınırlarına yaklaşılmaması hem lastik-yol temas kuvvetinin sürekliliğini bozarak yol tutuşunu zayıflatmakta hem de gövde titreşimlerini artırarak konforu önemli ölçüde azaltmaktadır [2]. Sabit yay ve sönümleme katsayılarıyla çalışan pasif süspansiyon sistemleri, değişken yol girdilerine uyum sağlayamadıkları için bu ödünleşmeyi etkin şekilde yönetememektedir. Yumuşak yay kullanıldığında düşük frekanslı girdilerin uzun süreli titreşimlere dönüşmesi, sert yay kullanıldığında ise yüksek frekanslı yol pürüzlülüklerinin doğrudan gövdeye iletilmesi bu yapıların temel sınırlılıklarıdır [3,4]. Yarı aktif süspansiyon sistemleri ise ayarlanabilir sönümleme oranı sayesinde konfor-stabilite dengesini belirgin biçimde iyileştirmekte; düşük enerji gereksinimi, yüksek güvenilirlik ve maliyet etkinliği nedeniyle günümüz otomotiv uygulamalarında yaygın olarak tercih edilmektedir. Bununla birlikte yarı aktif sistemler, dış kuvvet üretme kapasitesine sahip olmadıkları için tam kontrol yeteneği sunamamaktadır.

Aktif süspansiyon sistemleri, aktüatörlerin kontrol edilebilir dinamik kuvvet üretme kapasitesi sayesinde sürüş konforu, yol tutuşu, gövde salınımı ve manevra kararlılığı açısından en yüksek iyileştirme potansiyeline sahip yapı olarak öne çıkmaktadır. Geniş frekans aralığında etkili kontrol sağlayabilmeleri ve doğrusal olmayan yol girdilerine uyum gösterebilmeleri, bu sistemlerin literatürde uzun süredir yoğun ilgi görmesinin başlıca nedenleridir.

Aktif süspansiyon kontrolü için birçok gelişmiş yöntem önerilmiştir. Parametre tanılama ile güçlendirilen modifiye adaptif doğrusal olmayan kayma kipli kontrol, yol girdisi frekansı gövde salınım frekansına yaklaştığında dahi kararlı performans sunmaktadır [5]. Ayrıca, süspansiyon hareketine bağlı olarak değişen efektif bant genişliğiyle çalışan doğrusal olmayan geri adımlamalı kontrol yönteminin, yol tutuşu-konfor ödünleşmesini iyileştirdiği gösterilmiştir [6]. Bu yaklaşımlar, doğrusal olmayan kontrol paradigmaları arasında aktif süspansiyon uygulamalarında öne çıkan yöntemlerdendir.

Aktif süspansiyon sistemlerinde sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri DKR tabanlı denetleyicilerdir. Klasik DKR, yolcu ivmesinin RMS değerini yaklaşık %54 azaltırken, ivme teriminin maliyet fonksiyonuna dâhil edildiği ivme tabanlı DKR bu azaltımı %93'e çıkararak konfor performansını belirgin biçimde artırmaktadır [7]. Ayrıca karışık DKR/ H_∞ yaklaşımı, sensör arızaları gibi nominal dış durumlarda dahi güvenli ve kararlı sürüş sağlayabilmektedir [8]. DKR ile doğrusal olmayan geri adımlama yöntemlerinin entegrasyonu, doğrusal olmayan aktüatör dinamiklerinin bulunduğu senaryolarda etkin sonuçlar vermiştir [9]. Buna ek olarak, durum ve çıkış türevine dayalı geri besleme kullanan alternatif DKR yapılarının, sistem matrisinin tersinin alınabildiği durumlarda uygulanabilir ve başarılı olduğu simülasyonlarla doğrulanmıştır [10].

Optimal kontrol, belirlenmiş bir performans ölçütünü minimize eden kontrol yasasının tasarlanması olarak tanımlanır. Bu performans ölçütü, genellikle sistem durumları ile kontrol işaretinin belirli ağırlıklarla birleştirildiği bir maliyet fonksiyonu biçiminde ifade edilir. Optimal kontrol problemleri

teorik olarak Pontryagin'in maksimum prensibi [11] veya Bellman'ın dinamik programlama yaklaşımı [12,13] ile çözülebile de, doğrusal olmayan sistemlerde Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denkleminin, doğrusal sistemlerde ise Riccati denklemlerinin analitik çözüm gerektirmesi uygulamayı önemli ölçüde güçleştirmektedir. Bu nedenle söz konusu denklemler, DKR benzeri özel durumlar dışında pratikte nadiren tam optimal çözüm üretmektedir [14,15].

Bu zorlukları aşmaya yönelik alternatif bir yaklaşım olan ters optimal kontrol (TOK), önce sistemi kararlı hâle getiren bir geri besleme yasasının belirlenmesini, ardından bu yasayı optimal kılan maliyet fonksiyonunun türetilmesini esas alarak HJB çözümüne olan gereksinimi ortadan kaldırmaktadır [16,17]. TOK yöntemi ilk olarak Kalman tarafından kuadratik maliyet fonksiyonları olan lineer sistemler için ortaya atılmıştır [18]. Daha sonra belirli bir durum geri beslemeli kontrol yasasının optimal olup olmadığını anlamak için TOK probleminin zaman ve frekans tanım bölgesi çözümleri arasındaki ilişkileri sağlayan kararlı regülatör probleminin belirli özelliklerinin ayrıntılı bir incelemesi sunulmuştur [19]. Çok girişli ters doğrusal kuadratik problem ortaya atılmış [14], doğrusal kuadratik problemlerde kapalı çevrimli sistemin kutuplarını istenen bölgeye taşıyarak arzu edilen davranışı sağlayan ağırlıklandırma matrisini bulmak için yeni bir prosedür öne sürülmüştür [20]. TOK problemi için yeni bir optimallik koşul seti belirlenmiş [21], ters optimal regülatör problemi ayrık zamandaki bir doğrusal kuadratik probleminin çözümü için kullanılmıştır [22]. TOK yöntemi, bir uzay aracının kararlılığını sağlayan DKR problemini çözmek için kullanılmıştır [23].

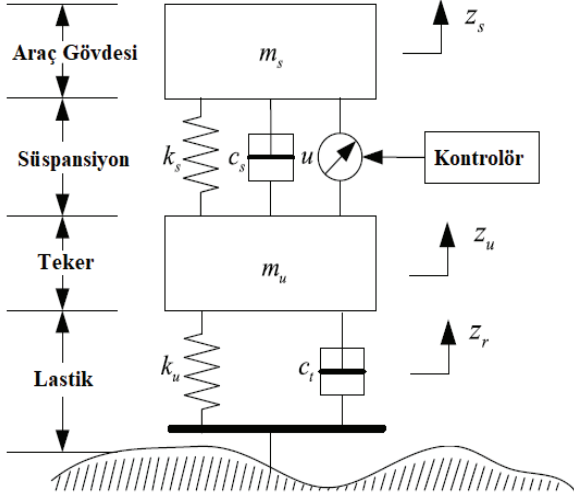
Bu çalışmada, aktif süspansiyon sisteminin konfor ve sürüş güvenliği gereksinimlerini karşılamak amacıyla ters optimal kontrol (TOK) yaklaşımı ele alınmış ve literatürde yaygın olarak kullanılan durum geri beslemeli regülatör (DKR) tabanlı kontrol yöntemleriyle [8, 24] karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Makalenin geri kalanı şu şekilde düzenlenmiştir: İkinci bölümde çalışmada kullanılan iki serbestlik dereceli çeyrek araç modeli ve aktif süspansiyon sistemi tanıtılmaktadır; üçüncü bölümde ters optimal kontrol yaklaşımı doğrusal sistemler için ele alınarak sunulmakta; dördüncü bölümde TOK yönteminin aktif süspansiyon sistemine uygulanışı ayrıntılı olarak açıklanmakta ve beşinci bölümde benzetim çalışmaları ile elde edilen sonuçlar verilmektedir.

2. Aktif Süspansiyon Sistemleri

Aktif süspansiyon sistemleri, pasif yapıdaki yay ve sönümleyici elemanların yerini aktif kuvvet üretebilen aktüatörlerin aldığı veya bu elemanlarla birlikte kullanıldığı sistemlerdir. Bu aktüatörler, süspansiyon sıkışmasından bağımsız olarak kontrol edilebilir kuvvet üretebildiklerinden, sürüş konforu ile yol tutuşu arasındaki yapısal ödünleşmeyi önemli ölçüde azaltabilmektedir [25]. Ayrıca aktif kuvvet üretimi sayesinde savrulma (roll) hareketinin etkin biçimde bastırılması mümkün olmakta ve bu durum savrulma önleyici çubuğa duyulan gereksinimi ortadan kaldırarak daha kompakt ve hafif süspansiyon mimarilerinin tasarlanmasına imkân vermektedir. Bu yaklaşım, hem araç hacminin azalmasına hem de aerodinamik sürüklemenin düşmesine katkı sağlamaktadır [26].

Süspansiyon kontrolünün tasarımında araç dinamiğinin modellenmesi temel bir aşamadır ve bu süreçte çeşitli kabuller kaçınılmazdır. Literatürde farklı karmaşıklık seviyelerinde çok

sayıda model bulunmakla birlikte, kontrol çalışmaları çoğunlukla üç temel yapı üzerinde yoğunlaşmaktadır: iki serbestlik dereceli çeyrek araç modeli, dört serbestlik dereceli yarım araç modeli ve yedi serbestlik dereceli tam araç modeli. Kontrol algoritmasının gerektirdiği hesaplama yükü ve arama yöntemine bağlı olarak model seçimi değişebilmekle birlikte, teker dinamiklerini içermesi ve yaygın kullanım alanı nedeniyle çeyrek araç modeli [24] bu çalışmada tercih edilmiştir.



Şekil 1: Aktif Süspansiyonu modellemek için kullanılan elektro-hidrolik aktüatörlü Çift Kütle-Yay-Sönümleyicili çeyrek taşıt süspansiyon modeli

Şekil 1'de, k_s süspansiyon yay katsayısını, c_s sönümleme katsayısını ve m_s taşıt gövdesi kütleini ifade etmektedir. z_s araç gövdesinin dikey konumu, z_u tekerin dikey konumu, $\dot{z}_s$ gövde hızı, $\dot{z}_s$ gövde ivmesi ve $\dot{z}_u$ teker hızı olarak tanımlanmıştır. Ayrıca z_r , yol yüzeyinin dikey değişim hızını göstermektedir. Durum değişkenleri, girişler ve çıkışlar sırasıyla $\mathbf{x} = [z_s - z_u \ \dot{z}_s \ z_u - z_r \ \dot{z}_u]^T$, $\mathbf{u} = [\dot{z}_r \ F_c]^T$ ve $\mathbf{y} = [z_s - z_u \ \dot{z}_s]^T$ alınarak, çeyrek araç modelinin durum uzayı gösterimi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Burada tanımlanan hareket denklemlerini kullanarak $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{C}_c$, and $\mathbf{D}_c$ matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s + c_t}{m_u} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{c_t}{m_u} & -\frac{1}{m_s} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{k_s}{m_s} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}$$

3. Ters Optimal Kontrol Yöntemi

Bu bölümde, kontrol yasasının ayrı bir kuadratik Kontrol Lyapunov Fonksiyonu kullanılarak elde edildiği regülatör problemi durumu için TOK yaklaşımı [27] sunulmaktadır. Aşağıdaki ifade, kontrol girdisine göre afin olan ayrık zamanlı doğrusal olmayan bir sistem modelini temsil etmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Burada, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ ve $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$ sırasıyla durum, giriş ve sistem çıkış vektörleridir. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ doğrusal olmayan fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar $f(0)=0$ ve $g(\mathbf{x}_k) \neq 0, \forall \mathbf{x}_k \neq 0$ şeklindedir. Regülatör durumu için Ters Optimal Kontrol (TOK) yaklaşımı amaç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$J(\mathbf{x}_k) = \sum_{n=k}^{\infty} (\ell(\mathbf{x}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \quad (3)$$

Burada, $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ pozitif yarı-tanımlı bir fonksiyon, $\mathbf{x}_k$ durum vektörü ve $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ şeklinde bir pozitif ağırlık matrisidir.

Optimallik ilkesinin uygulanabilmesi için yinelemeli bir biçim elde etmek amacıyla (3) şu şekilde yeniden yazılır:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_k) &= \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (\ell(\mathbf{x}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \\ J(\mathbf{x}_k) &= \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + J(\mathbf{x}_{k+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

ve dinamik programlama yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$J^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \{ \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + J^*(\mathbf{x}_{k+1}) \} \quad (5)$$

malîyet fonksiyonunu en aza indiren kontrol kuralı şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{u}_k^* = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_k) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} g^T(\mathbf{x}_k) \frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \quad (6)$$

$J^*(\mathbf{x}_k)$ yi elde etmek için ayrık zamanlı olarak çözülmesi gereken Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) kısmi diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{x}_k) + J^*(\mathbf{x}_{k+1}) - J^*(\mathbf{x}_k) + \\ \frac{1}{4} \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right]^T g(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} g^T(\mathbf{x}_k) \frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

HJB denkleminin çözüm prosedürü oldukça zahmetli bir iştir. Doğrusal regülatör problemi durumunda, bu denklem Riccati denklemine indirgenir.

"Ters Optimal Kontrol (TOK)" yöntemi kullanıldığında HJB denklemini çözmeye gerek yoktur. Literatürde TOK problemini çözmek için çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır [28-

35]. Bu çalışmada [27, 33]'de verilen yaklaşımlar kullanılacaktır. Bu yaklaşımı açıklamak için öncelikle aşağıdaki tanımları vermek gerekir:

• Tanım 1 [33, 36]:

(6)'da verilen $\mathbf{u}_k^*$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ters optimal kontrol kuralıdır:

- Kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$, denge noktası $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ 'ın küresel üstel kararlılığına ulaşmalıdır.
- Kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$, (3) ile tanımlı amaç fonksiyonunu minimize etmelidir. Burada $\ell(\mathbf{x}_k) = -\bar{J}|_{\mathbf{u}_k^*}$ ve $\bar{J} := J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^{*T} \mathbf{R} \mathbf{u}_k^* \leq 0$.

(8)

TOK problemi, $J^*(\mathbf{x}_k)$ bilgisini gerektirir. Bu nedenle, Tanım 1'de verilen koşulları karşılayan bir aday ikinci dereceden CLF aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$J^*(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k \quad (9)$$

Burada $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 'nin pozitif tanımlı ve simetrik olduğu, yani $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ olduğu varsayılır. Sonuç olarak, kararlılığı sağlayan ve maliyet fonksiyonunu (3) en aza indiren ters optimal kontrol yasası, uygun bir $\mathbf{P}$ matrisi seçilerek bulunabilir. Ardından, (6)'daki kontrol yasası şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{u}_k^* = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2} g^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} g(\mathbf{x}_k) \right)^{-1} g^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} f(\mathbf{x}_k) \quad (10)$$

Aşağıdaki teorem, Tanım 1'in gerekliliklerini karşılamak için gerekli koşulu verir.

Teorem 1 [33,36]:

Doğrusal olmayan (2) sistemini ele aldığımızda

$$J(f(\mathbf{x}_k)) \triangleq \frac{1}{2} f^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} f(\mathbf{x}_k), \quad \zeta_Q > 0$$

$$J_f(\mathbf{x}_k) \triangleq J(f(\mathbf{x}_k)) - J(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k) \triangleq g^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} f(\mathbf{x}_k),$$

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k) \triangleq \frac{1}{2} g^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} g(\mathbf{x}_k)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ matrisi varsa

$$J_f(\mathbf{x}_k) - \frac{1}{4} \mathbf{P}_1^T(\mathbf{x}_k) (\mathbf{R} + \mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k))^{-1} \mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k) \leq \zeta_Q \|\mathbf{x}_k\|^2 \quad (11)$$

(10) kontrol yasası, (2) sisteminin denge noktasını ($\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$) global üstel anlamda kontrol edilebilir kılar.

Üstelik, bu kontrol yasası, (3)'te verilen maliyet fonksiyonunu, $\ell(\mathbf{x}_k) = -\bar{J}|_{\mathbf{u}_k^*}$ ve optimal değer fonksiyonu $J^*(\mathbf{x}_k) = J^*(\mathbf{x}_0)$ ile en aza indirgemesi anlamında ters optimaldir. Bu teoremin kanıtı [33, 36]'da verilmiştir. Bu teoreme göre, TOK problemi, ayrık zamanlı afin-girdili doğrusal olmayan sistem modelleri için uygun bir $\mathbf{P}$ matrisi bulma problemine dönüşür [33, 37-39].

Bu çalışmada ele alınan aktif süspansiyon modeli doğrusal bir sistemdir. Ele alınan optimal kontrol probleminde doğrusal sistemler için uyarlanması gerekmektedir. İncelenen sistem doğrusal olduğunda, ters optimal kontrol yaklaşımının, sistemi kararlı hâle getirmek ve ilgili maliyet fonksiyonunu minimize etmek amacıyla çözülen ayrık zamanlı cebrik Riccati denklemlerine bir alternatif oluşturduğu literatürde gösterilmiştir [40,41].

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \quad (12)$$

olarak verilmiş bir sistemi kararlılaştıran kontrol kuralı (10)'daki $g(\mathbf{x}_k) \rightarrow B$ ve $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow A \mathbf{x}_k$ olarak değiştirilirse

$$\mathbf{u}_k^* = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \quad (13)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{R} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}} > 0$ olarak seçilirse (13) ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^* &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \\ &= -(\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (14)$$

Buna göre (11) ifadesi

$$J(f(\mathbf{x}_k)) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k, \quad \zeta_Q > 0$$

$$J_f(\mathbf{x}_k) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k) \triangleq \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k,$$

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$$

olarak tanımlanır ve yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{2} - \frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k}{2} \dots \\ &- \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \\ &+ \frac{\mathbf{u}_k^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}_k^*}{2} + \frac{\mathbf{u}_k^{*T} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}_k^*}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

bulunur. Burada $\mathbf{P}$ yoluyla (15)'deki ifadenin arzu edilen negatiflik miktarı değiştirilebilir [28]. Bu negatiflik, $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}} > 0$ şeklinde bir pozitif tanımlı matris ile aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$\bar{J} \leq -\frac{\mathbf{x}_k^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_k}{2} \quad (16)$$

Burada, (16) ifadesini sağlayan bir $\mathbf{P}$ matrisi seçildiğinde, (13) ters optimal kontrol kuralı ile kontrol edilen (12)'de verilmiş olan sistem kapalı çevrimde global ve üstel olarak kararlıdır. (16) ifadesi, aşağıdaki gibi yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_k^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \dots \\ &- 2 \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \dots \\ &+ \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \dots \\ &\times (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (17)$$

ve yeniden düzenlenirse doğrusal kuadratik regülatör problemlerinde olduğu gibi ayrık zamanlı cebrik Riccati denklemi elde edilir[40]:

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Burada ters optimal kontrol kuralı (13) tarafından minimize edilen anlamlı maliyet fonksiyonu $l(\mathbf{x}_k) \triangleq -\bar{J} = \frac{\mathbf{x}_k^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_k}{2}$ seçilerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(l(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}_k) \end{aligned} \quad (18)$$

4. Aktif Süspansiyon sistemine Ters

Optimal Kontrol Yönteminin Uygulanması

Bu bölümde TOK yaklaşımı ile tasarlanan kontrolör bölüm 2’de verilmiş olan çeyrek araç modeline uygulanacaktır. Uygulanacak olan kontrol yaklaşımı (12) de verilen ayrık zamanlı durum denklemlerine ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için sistem matrisi (1)’in ayrıklaştırılması gerekmektedir. Ayrıklaştırma işleminde, örnekleme zamanı T_s , Shannon örnekleme teoremine uygun biçimde seçilir. Buna göre, açık çevrim transfer fonksiyonunun Bode diyagramında genlik eğrisinin 40 dB azaldığı frekans $\omega_s \cong 6283$ rad/s olmak üzere, örnekleme frekansının $\omega_s \gg 2\omega_c$ şartını sağlayacağı bir $T_s = 0.001$ olarak belirlenir ve sistem bu örnekleme periyodu kullanılarak ayrık zamana dönüştürülür [42].

Tasarlanacak olan kontrolör, kuadratik bir Lyapunov Kontrol Fonksiyonu (9) kullanılarak denklem $J(\mathbf{x}_k) = \sum_{n=k}^{\infty} (l(x_n) + u_n^T R u_n)$ şeklinde (3)’de verilen maliyet fonksiyonunu minimum yapacaktır. Bu kontrol kuralı doğrusal sistem için (13)’de verildiği gibi (Burada $\mathbf{u}$ girişlerinden z_r bozucu giriş olarak F_c ise kontrol girişi olarak kabul edilerek) yazılırsa:

$$u_k^* = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \quad (19)$$

kontrol problemi pozitif tanımlı ve simetrik olan $\mathbf{P}$ ’yi arama problemine dönüşecektir. $\mathbf{P}$ matrisi araması, önceki bölümlerde belirtilen başarımlar ölçütleri göz önünde bulundurularak Büyük Patlama-Büyük Çöküş (Big Bang-Big Crunch) (BP-BÇ) [43] metodu kullanılarak aranmıştır. BP-BÇ etkili bir küresel arama algoritması olup, benzerleriyle karşılaştırıldığında daha hızlıdır ve tasarımcı tarafından atanması gereken daha az parametreye ihtiyaç duyar. Bu bağlamda BP-BÇ algoritmasında tanımlanması gereken temel parametreler; aranan değişken sayısı, her iterasyonda oluşturulan popülasyon büyüklüğü, maksimum iterasyon sayısı, karar değişkenlerine ait alt ve üst sınırlar ile başarımlar ölçütlerine dayalı olarak tanımlanan amaç fonksiyonudur. Bu çalışmada, ters optimal kontrol tasarımında kullanılan $\mathbf{P}$ matrisi pozitif tanımlı ve simetrik yapıda olduğundan, bağımsız karar değişkeni sayısı 10 olarak belirlenmiştir. Her iterasyonda oluşturulan popülasyon büyüklüğü 2000, maksimum iterasyon sayısı ise 10 olarak seçilmiştir. Problemin çözümü için tek bir uygun $\mathbf{P}$ matrisinin elde edilmesinin yeterli olması nedeniyle, elitist bir seçim stratejisi benimsenmiş ve bu doğrultuda iterasyon sayısı sınırlı tutulmuştur. Karar değişkenlerine ait arama aralığı alt ve üst sınırlar için $[-1000, 1000]$ olarak belirlenmiş olup, bu aralığın ele alınan sistem için yeterli olduğu değerlendirilmiştir; farklı uygulamalarda söz konusu sınırlar sistem gereksinimlerine bağlı olarak genişletilebilir veya daraltılabilir. Optimizasyon sürecinde minimize edilen amaç fonksiyonu ise, daha önce tanımlanan başarımlar ölçütleri doğrultusunda, yol tutuşunu temsil eden süspansiyon sıkışması ile sürüş konforunu temsil eden araç gövde ivmelenmesini içeren hata temelli bir performans kriteri olarak oluşturulmuştur. Yol tutuşu için önceden bahsedileceği üzere taşıt gövdesi ile teker arasındaki sıkışma ifadesi olan $(z_s - z_u)$, araç gövde ivmelenmesi ise $\ddot{z}_s$ ifadesinin minimumlaştırılması gerekmektedir. Bu durumda yapılacak olan $\mathbf{P}$ araması, aşağıda verilmiş olan çok amaçlı fonksiyonun minimumlaştırılması ile bulunacaktır.

$$\sum_{k=0}^N \lambda_1 |z_{s,k} - z_{u,k}| + \lambda_2 |\ddot{z}_{s,k}| \quad (20)$$

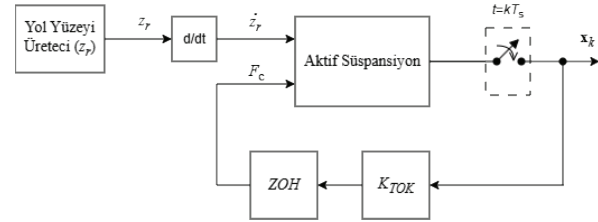
λ_1 ve λ_2 , ağırlık katsayılarıdır. Bu çalışmada sırasıyla 1 ve 1/30 olarak seçilmiştir. Bu seçimin temel amacı, amaç fonksiyonunu oluşturan farklı fiziksel büyüklüklere sahip başarımlar ölçütlerinin sayısal ölçeklerini dengelemek ve herhangi bir terimin optimizasyon sürecine orantısız biçimde baskın olmasını önlemektir. Böylece, yol tutuşu ve sürüş konforunu temsil eden hata terimleri arasında daha dengeli bir ödünleşme sağlanması hedeflenmiştir. (20)’deki verilen kriter ek olarak $\mathbf{P}$ matrisi araması sırasında aşağıdaki koşulların sağlanması da göz önünde bulundurulmuştur [41]:

- (1)’de verilmiş olan sistemi girişten-duruma global kararlı yapması.
- Elde edilen $\mathbf{P}$ matrisi $J(x_k) = x^T P x$ şeklinde yazılan Lyapunov Kontrol Fonksiyonu’nu radyal olarak sınırlandırıyor ve $J(x_k + 1) - J(x_k) + u_k^{*T} R u_k^* \leq -\sigma(x_k) + l_d \|d_k\|$ eşitsizliğini sağlıyor olması.

Burada $\sigma(x_k)$ pozitif tanımlı bir fonksiyon, l_d pozitif bir sabit, $\|d_k\|$ ise k anındaki yol bozucusunun Öklid normudur. Bu koşullar sağlandıktan sonra elde edilen $\mathbf{P}$ matrisi ile bulunan TOK sabit kazancı

$$K_{io} = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (21)$$

şeklinde gösterilebilir. z_r bozucu giriş olarak F_c ise kontrol girişi olarak kabul edilerek, TOK kullanılarak elde edilen kontrol blok diyagramı aşağıdaki şekildedir.



Şekil 2: Ayrık-zamanlı Ters Optimal Kontrol Blok Diyagramı

Burada sürekli zamanlı sistemden belirli örnekleme aralıkları ile alınan sistem durumları $\mathbf{x}_k$ ile gösterilmiştir. Sürekli zamanda K_{TOK} yu uygulayabilmek için 1. Mertebeden tutucu (ZOH) kullanılmıştır.

5. Benzetim Çalışmaları

Bu bölümde TOK yaklaşımı ile tasarlanan kontrolör denklem (1)’de modellenmiş olan çeyrek araç modeline uygulanacaktır. Yapılacak olan tasarım ayrık zamanda olacağı için sisteme uygun örnekleme periyodu 0.001s olarak seçilmiştir. Aktif süspansiyon parametreleri Çizelge 1’de verilmiştir[44]. Denklem (12)’de verilmiş olan sistem ve giriş matrisleri, birinci mertebeden tutucu ve 0.001 saniye örnekleme periyodu ile elde edildiğinde, sistem ve giriş matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.999369 & 0.000994 & 0.001243 & -0.000991 \\ -0.365339 & 0.996772 & -0.003957 & 0.003218 \\ 0.000447 & 0.0000038 & 0.9987555 & 0.000993 \\ 0.89247 & 0.0078847 & -2.483042 & -0.985904 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.0000029 & 0.0000007 \\ 0.0000092 & 0.0004059 \\ -0.00099709 & -0.00000049 \\ 0.00621054 & -0.0009916 \end{bmatrix},$$

Denklem (12)’de verilen $\mathbf{u} = [\dot{z}_r \ F_c]^T$ girişlerinden $\dot{z}_r$ bozucu giriş olarak F_c ise kontrol girişi olarak kabul edilmiştir. Deney düzeneğinin hareket kabiliyeti sınırları içerisinde yol girdisi verilmiştir. Bu yol girdisi 0.02m tümseğe karşılık gelmektedir. Bu tümsek değeri için kontrol yaklaşımlarının benzetim çalışmaları yapılmıştır.

Çizelge 1. Aktif süspansiyon sistem parametreleri[44].

Parameter	Value	Unit
k_s	900	N/m
m_s	2.45	kg
k_u	1250	N/m
m_s	2.45	kg
m_u	1	kg
c_s	7.5	Ns/m
c_t	5	Ns/m

$R = 0.01$ seçilerek (20) ifadesini minimumlaştırırken i ve ii ifadelerini de sağlayan $\mathbf{P}$ matrisi araması yapıldığında aşağıdaki matris elde edilir:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3209.863 & -1371.29 & -515.86 & -363.26 \\ -1371.29 & 3847.22 & 1944.85 & -58.79 \\ -515.86 & 1944.85 & 1624.42 & 358.15 \\ -363.26 & -58.79 & 358.15 & 504.58 \end{bmatrix}$$

Bu durumda (21) ifadesi ile elde edilen geri besleme kazancı $K_{TOK} = [59.17 \ -75.96 \ -81.63 \ 24.15]$ şeklindedir.

Aktif süspansiyon kontrolü için literatürde sıkça karşımıza çıkan bir diğer kontrol yöntemi DKR kontrolördür [8, 24]. Sistem durumları ağırlık matrisi $\mathbf{Q}$ ve kontrol işareti ağırlık terimi R olmak üzere DKR’in tasarım parametrelerini içeren amaç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$J_{DKR}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \int_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + R(u(t))^2 \quad (27)$$

Burada $\mathbf{Q}$ matrisi aşağıdaki gibi seçilmiştir [44]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$ matrisi ve $R=0.01$ için DKR geribesleme kazancı MATLAB fonksiyonu “lqr.m” kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mathbf{K}_{DKR} = [24.6621 \ 48.8733 \ -0.4720 \ 3.6846]$$

TOK ve DKR’ nin sonuçları karşılaştırmalı olarak Şekil 3’de verilmiştir. Bu çalışmada, kontrol yaklaşımlarının deneysel uygulanabilirliği ve işletme güvenliği dikkate alınarak, aktif süspansiyon sistemine ait aktüatör sınırları, doyum etkileri ve fiziksel kısıtlar literatürde bildirilen sınırlar doğrultusunda değerlendirilmeye dâhil edilmiştir [44–46]. Gerçekleştirilen benzetim çalışmaları sonucunda elde edilen tüm büyüklüklerin, söz konusu kaynaklarda tanımlanan fiziksel ve operasyonel kısıtlar içerisinde kaldığı doğrulanmıştır.

Burada TOK yaklaşımının kontrol başarımı açıkça görülebilmektedir. TOK, DKR ile benzer fakat daha hızlı sonuç vermekte hem konfor hem de yol tutuşu açısından oldukça iyi başarımlar göstermektedir.

Çizelge 2 de yüzde aşım (%AŞ), yerleşme Zamanı (t_{yer}), yükselme zamanı ($t_{yük}$), hata kareleri integrali (HKİ), hata kareleri zamanla integrali (HKZİ), mutlak hata integrali (MHİ), mutlak hata zamanla integrali (MHZİ), kontrol işaretlerindeki toplam değişim (TD) kriterlerinin TOK ve DKR için aldıkları değerler verilmiştir. TOK kontrol yapısının özellikle yüzde aşım (%AŞ) ve yerleşme zamanındaki (t_{yer} deki) başarımı göze çarpmaktadır. Kontrol işaretinin toplam değişimi (TD) değerinin yüksek olması ise daha hızlı yerleşme zamanına sahip olması ve daha az aşımına sahip olması nedeniyle beklenen bir davranıştır. Burada Çizelge 2’den de görüldüğü gibi TD ve hemen hemen eşit olan yükselme zaman ($t_{yük}$) dışındaki tüm başarımlar ölçütlerinde TOK yaklaşımının başarımı daha yüksektir.

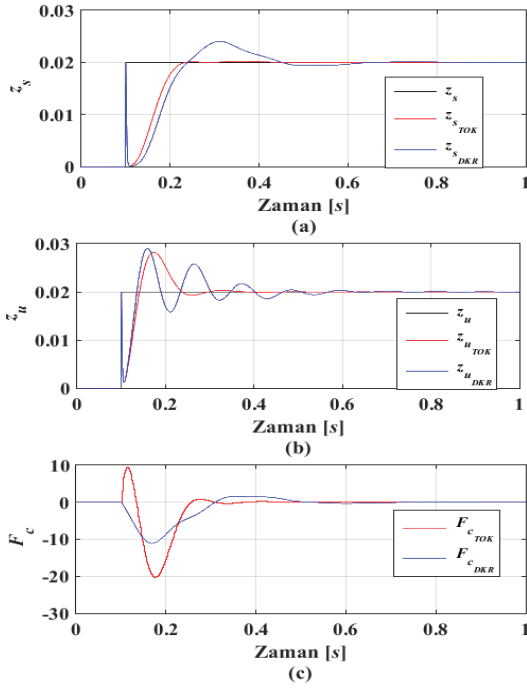
Gerçek zamanlı uygulamaya yakın değerlendirme olabilmesi için z_s ve z_u durumlarına ölçüm gürültüsü eklenmiştir. Sonuçlar Şekil 4’te ve başarımlar ölçütleri değerlendirilmesi ise Çizelge 3’te verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde Şekil 4’te gürültünün çıkıştaki etkisi açıkça görülebilmektedir. Çizelge 3’te verilen değerler incelendiğinde bir önceki tabloda olduğu gibi TOK’de %AŞ, t_{yer} , HKİ, HKZİ, MHİ, MHZİ değerlerinde daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 2. Benzetim Çalışmasının Kontrolörlere göre Başarım Ölçütleri

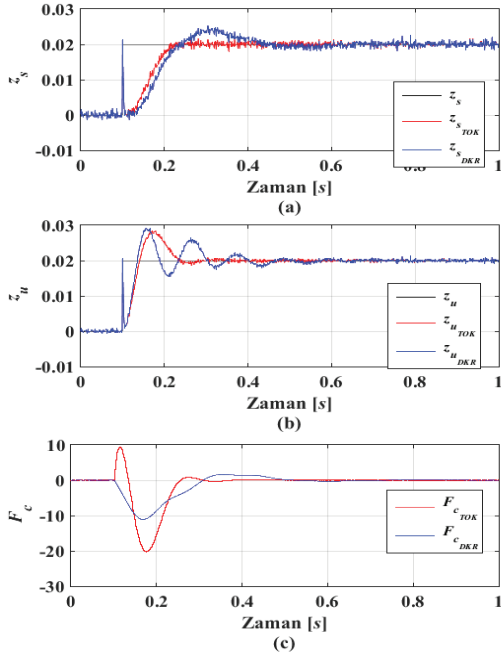
Kontrol Yöntemi	%AŞ	t_{yer} (s)	$t_{yük}$ (s)	HKİ (m ²) $\int_0^{\infty} e^2(t)dt$	HKZİ (m ² s ²) $\int_0^{\infty} te^2(t)dt$	MHİ(ms) $\int_0^{\infty} e(t) dt$	MHZİ (ms ²) $\int_0^{\infty} t e(t) dt$	TD (N) $\sum_{k=2}^{\infty} u_k - u_{k-1} $
TOK	12.469	16.304e ⁻²	80.000e ⁻⁵	32.932e ⁻⁵	19.358e ⁻⁵	16.767e ⁻³	9.724e ⁻³	62.036e ⁻³
DKR	20.162	17.722e ⁻²	80.000e ⁻⁵	33.960e ⁻⁵	19.727e ⁻⁵	16.863e ⁻³	9.785e ⁻³	26.181e ⁻³

Çizelge 3. Ölçüm Gürültüsü Eklendiğinde Benzetim Çalışmasının Kontrolörlere göre Başarım Ölçütleri

Kontrol Yöntemi	%AŞ	t_{yer} (s)	$t_{yük}$ (s)	HKİ (m ²) $\int_0^{\infty} e^2(t)dt$	HKZİ (m ² s ²) $\int_0^{\infty} te^2(t)dt$	MHİ (ms) $\int_0^{\infty} e(t) dt$	MHZİ (ms ²) $\int_0^{\infty} t e(t) dt$	TD (N) $\sum_{k=2}^{\infty} u_k - u_{k-1} $
TOK	12.469	16.217e ⁻²	75.451e ⁻⁵	32.935e ⁻⁵	19.386e ⁻⁵	16.813e ⁻³	9.729e ⁻³	67.779e ⁻³
DKR	20.162	17.475e ⁻²	75.451e ⁻⁵	33.968e ⁻⁵	19.754e ⁻⁵	16.911e ⁻³	9.790e ⁻³	31.185e ⁻³



Şekil 3. TOK ve DKR için benzetim sonuçları sırasıyla (a) z_s durumları, (b) z_u durumları (c) F_c kontrol girişleridir.



Şekil 4. TOK ve DKR için ölçüm gürültüsü eklendiğinde benzetim sonuçları sırasıyla (a) z_s durumları, (b) z_u durumları, (c) F_c kontrol girişleridir. Sonuçlar

6. Sonuçlar

Bu çalışmada aracın sürüş güvenliği ve konforundaki en önemli elemanlardan aktif süspansiyon sistemleri için TOK temelli bir kontrolör tasarımı geliştirilmiştir. Çalışmada iki serbestlik dereceli çeyrek araç modeli kullanılmıştır. TOK yönteminin aktif süspansiyon sistemine

uygulanabilmesi için zamanda ayırık sistem modeli elde edilmiştir. Uygulanan yöntem sayesinde kontrol problemi pozitif tanımlı ve simetrik olan P 'yi arama problemine dönüşmüştür. Arama yöntemi olarak küresel ve hızlı bir algoritma olan Büyük Patlama-Büyük Çöküş algoritması kullanılmıştır. Tasarlanan kontrolör, yine durum geri beslemesi temelli bir yöntem olan DKR ile karşılaştırılmıştır. Gerçekleştirilen benzetim çalışmaları, TOK tabanlı denetleyicinin DKR ile karşılaştırıldığında yüzde aşımı **%20.16 seviyesinden %12.47'ye indirdiğini** ve sistemin kararlı duruma ulaşma süresini **%8'in üzerinde kısalttığını** ortaya koymuştur. Bununla birlikte, hata kareleri integrali (HKİ) ve mutlak hata integrali (MHİ) gibi hata temelli performans göstergelerinde TOK yaklaşımı daha düşük değerler üretmiştir. Ölçüm gürültüsü ve aktüatör doyumu gibi pratik kısıtların dikkate alındığı senaryolarda da TOK tabanlı kontrolörün bu performans kazanımlarını koruduğu görülmüş ve TOK tabanlı tasarımın DKR'ye etkin bir alternatif oluşturabileceği gösterilmiştir. TOK tabanlı tasarımın DKR'ye göre bazı avantajlara sahip olduğu görülmüştür. Bu avantajlar aşağıdaki gibi verilebilir:

- Benzetim sonuçları, TOK yaklaşımının DKR'ye kıyasla daha düşük yüzde aşım sergilediğini göstermektedir.
- TOK yaklaşımı, DKR'ye göre **daha kısa yerleşme zamanı** elde ederek sistemin daha hızlı kararlı duruma ulaşmasını sağlamaktadır.
- Hata kareleri integrali, hata kareleri zamanla integrali ve mutlak hata temelli ölçütler gibi hata temelli performans kriterlerinde TOK'un üstünlük sağladığı görülmektedir.
- Kontrol Lyapunov fonksiyonu temelli yapısı sayesinde TOK, cebrik Riccati denklemi çözümüne ihtiyaç duymadan kapalı çevrim sistemin global ve üstel kararlılığını garanti etmektedir.
- TOK yaklaşımı, ölçüm gürültüsü ve aktüatör doyumu gibi pratik kısıtlar altında, DKR'ye kıyasla daha dayanıklı (robust) bir kontrol performansı sunmaktadır.

Önerilen TOK tabanlı yaklaşımın dezavantajı ise;

- Ters optimal kontrol (TOK) yaklaşımı, daha iyi geçici rejim performansı ve kararlılık özellikleri sunmasına rağmen, TOK'ta kontrol işaretindeki toplam değişim artmakta, bu durum aktüatör yükünü yükseltebilmesi.
- Artan kontrol eforu nedeniyle, enerji tüketiminin kritik olduğu uygulamalarda TOK dezavantajlı olabilmektedir.

Elde edilen sonuçlar, ters optimal kontrol (TOK) ve doğrusal kuadratik regülatör (DKR) yöntemlerinin ele alınan aktif süspansiyon sistemi için uygulanabilir olduğunu göstermektedir. Gelecek çalışmalarda, her iki yaklaşımın gerçek zamanlı deneysel sistemler üzerinde uygulanarak performanslarının karşılaştırılması planlanmaktadır.

7. Kaynaklar

- [1] "ISO 2631," *Guide for the evaluation of human exposure to whole-body vibration*. 1978.

- [2] S. M. Savaresi, C. Poussot-Vassal, C. Spelta, O. Sename, and L. Dugard, *Semi-active suspension control design for vehicles*. Elsevier, 2010.
- [3] H. Pang, Y. Chen, J. Chen, and X. Liu, "Design of LQG Controller for Active Suspension without Considering Road Input Signals," *Shock and Vibration*, vol. 2017, pp. 1–13, Feb. 2017, doi: 10.1155/2017/6573567.
- [4] R. Vatankhah, M. Rahaeifard, and A. Alasty, "Vibration control of vehicle suspension system using adaptive critic-based neurofuzzy controller," in *2009 6th International Symposium on Mechatronics and its Applications*, 2009, pp. 1–6. doi: 10.1109/ISMA.2009.5164809.
- [5] A. Alleyne and J. K. Hedrick, "Nonlinear adaptive control of active suspensions," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 3, no. 1, pp. 94–101, 1995.
- [6] J.-S. Lin and I. Kanellakopoulos, "Nonlinear design of active suspensions," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, no. 3, pp. 45–59, 1997, doi: 10.1109/37.588129.
- [7] A. J. Barr and J. I. Ray, "Control of an active suspension using fuzzy logic," in *Proceedings of IEEE 5th International Fuzzy Systems*, 1996, vol. 1, pp. 42–48.
- [8] J. Wu, "A simultaneous mixed LQR/H ∞ control approach to the design of reliable active suspension controllers," *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 2, pp. 415–427, 2017.
- [9] Z. Liu, C. Luo, and D. Hu, "Active suspension control design using a combination of LQR and backstepping," in *2006 Chinese Control Conference*, 2006, pp. 123–125.
- [10] T. H. S. Abdelaziz and M. Valášek, "STATE DERIVATIVE FEEDBACK BY LQR FOR LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 38, no. 1, pp. 435–440, Jan. 2005, doi: 10.3182/20050703-6-CZ-1902.00934.
- [11] L. S. Pontryagin, v. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Interscience Publishers, Inc, 1962.
- [12] R. Bellman, "Dynamic programming," RAND CORP SANTA MONICA CA, SANTA MONICA CA, 1956.
- [13] S. E. Dreyfus and R. Bellman, *Applied dynamic programming*. Princeton University Press, 1962.
- [14] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Optimal control: linear quadratic methods." Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [15] F. L. Lewis, D. Vrabie, and V. L. Syrmos, *Optimal control*. John Wiley & Sons, 2012.
- [16] P. Moylan and B. Anderson, "Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, no. 5, pp. 460–465, 1973.
- [17] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. v Kokotovic, *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?," 1964.
- [19] B. Molinari, "The stable regulator problem and its inverse," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, no. 5, pp. 454–459, 1973.
- [20] N. Kawasaki and E. Shimemura, "Determining quadratic weighting matrices to locate poles in a specified region," *Automatica*, vol. 19, no. 5, pp. 557–560, 1983.
- [21] T. Fujii and M. Narazaki, "A complete optimality condition in the inverse problem of optimal control," *SIAM journal on control and optimization*, vol. 22, no. 2, pp. 327–341, 1984.
- [22] D. Mehdi, M. Darouach, and M. Zasadzinski, "Discrete time lq design from the viewpoint of the inverse optimal regulator," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 15, no. 3, pp. 205–213, 1994.
- [23] M. Krstic and P. Tsiotras, "Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 1042–1049, 1999.
- [24] D. Hrovat, "Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications," *Automatica*, vol. 33, no. 10, pp. 1781–1817, Oct. 1997, doi: 10.1016/S0005-1098(97)00101-5.
- [25] W. Sun, H. Gao, and P. Shi, *Advanced control for vehicle active suspension systems*, vol. 204. Springer, 2020.
- [26] F. E. Veldpaus, I. Besselink, W. J. E. Evers, and A. J. C. Schmeitz, "An active suspension system," 2007.
- [27] F. Ornelas, E. N. Sanchez, and A. G. Loukianov, "Discrete-time nonlinear systems inverse optimal control: A control Lyapunov function approach," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications (CCA)*, 2011, pp. 1431–1436.
- [28] R. A. Freeman and J. A. Primbs, "Control Lyapunov functions: New ideas from an old source," in *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996, vol. 4, pp. 3926–3931.
- [29] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques*, Springer, 2008.
- [30] T. Fujii, "A new approach to the LQ design from the viewpoint of the inverse regulator problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 11, pp. 995–1004, 1987.
- [31] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?," *Journal of Basic Engineering*, vol. 86, no. 1, pp. 51–60, 1964.
- [32] W. Li, E. Todorov, and D. Liu, "Inverse optimality design for biological movement systems," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 9662–9667, 2011.
- [33] E. N. Sanchez and F. Ornelas-Tellez, *Discrete-Time Inverse Optimal Control for Nonlinear Systems*, Boca Raton, FL: CRC Press, 2017.
- [34] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer, 2012.
- [35] K. Sugimoto, "Partial pole placement by LQ regulators: An inverse problem approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 706–708, 1998.
- [36] F. Ornelas-Tellez, E. N. Sanchez, A. G. Loukianov, and J. J. Rico, "Robust inverse optimal control for discrete-time nonlinear system stabilization," *European Journal of Control*, vol. 20, no. 1, pp. 38–44, 2014.
- [37] M. Almobaied, I. Eksin, and M. Güzelkaya, "A new inverse optimal control method for discrete-time systems," in *Proc. 12th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, vol. 1, Colmar, France: IEEE, Jul. 21–23, 2015, pp. 275–280.

- [38] M. Almobaied, I. Eksin, and M. Guzelkaya, "Inverse optimal controller based on extended Kalman filter for discrete-time nonlinear systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 39, no. 1, pp. 19–34, Jan. 2018.
- [39] L. Ulusoy, M. Güzelkaya, and İ. Eksin, "Fusion of inverse optimal and model predictive control strategies," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 42, no. 6, pp. 1122–1134, Nov. 2019, doi: 10.1177/0142331219884803.
- [40] A. Al-Tamimi, F. L. Lewis, and M. Abu-Khalaf, "Discrete-time nonlinear HJB solution using approximate dynamic programming: Convergence proof," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 38, no. 4, pp. 943–949, 2008.
- [41] L. Ulusoy, M. Güzelkaya, and İ. Eksin, "Inverse optimal control approach to model predictive control for linear system models," in *2017 10th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)*, 2017, pp. 823–827.
- [42] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949.
- [43] O. K. Erol, and I. Eksin, "A new optimization method: big bang–big crunch," *Advances in engineering software*, 37(2), 106–111, 2006.
- [44] J. Apkarian and A. Abdossalami, "Quanser Active Suspension Experiment Laboratory Guide," 2013.
- [45] **Quanser Inc.**, *Active Suspension Datasheet*, Markham, ON, Canada: Quanser Inc., 2013. [Online]. Available: <https://www.quanser.com/wp-content/uploads/2017/03/Active-Suspension-Datasheet.pdf>. [Accessed: Dec. 23, 2025]
- [46] Quanser Inc., *Active Suspension – User Manual*, Copyright © 2012 Quanser Inc. [Online]. Available: <https://www.scribd.com/document/803093859/Active-Suspension-User-Manual>. [Accessed: Dec. 23, 2025].

Etik Kurul Onayı ve Çıkar Çatışması Beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur. Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Yazar Katkıları

Lütfi Ulusoy (LU) Sadık Kıvanç Süngü (SKS) literatür incelemesi, modelleme, LU, İbrahim EKSİN (İE), Müjde Güzelkaya (MG) bilimsel yayının hazırlanması, LU, SKS Deneyler, LU SKS benzetimler, LU, SKS, İE, MG çalışma konsepti ve tasarım, taslağın oluşturulması, revizyon konularında katkı sağlamıştır.

Özgeçmiş



Dr. Öğr. Üyesi Lütfi ULUSOY, 2008 ve 2012 yıllarında sırasıyla Pamukkale Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden Lisans (B.Sc.) ve Yüksek Lisans (M.Sc.) derecelerini almıştır. 2021 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü'nden Doktora (Ph.D.) derecesini elde etmiştir. Halen Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Elektrik- Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde Doktor Öğretim Üyesi olarak görev yapmaktadır. Başlıca araştırma alanları kontrol ve otomasyon teorisi, yapay sinir ağları ve makine öğrenmesidir.

Özgeçmiş



Yük. Müh. Sadık Kıvanç SÜNGÜ, 2017 ve 2021 yıllarında sırasıyla İstanbul Teknik Üniversitesi Kontrol ve Otomasyon mühendisliğinden Lisans (B. Sc) ve Yüksek Lisans (M.Sc) derecelerini almıştır. 2017-2021 arasında AVL Türkiye'de çalışmış, 2021 itibariyle de Eaton Technologies'de çalışmaktadır. Güncel olarak Baş Mühendis olarak görev yapmakta ve elektrikli araçların batarya yönetim sistemlerindeki durum tahmini algoritmaları üzerine çalışmaktadır.

Özgeçmiş



Prof. Dr. İbrahim Eksin, lisans (BSc), yüksek lisans (MS) ve doktora (PhD) derecelerini Boğaziçi Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü'nden sırasıyla 1976, 1979 ve 1983 yıllarında almıştır. 1983-1985 yılları arasında Honeywell Türkiye Ofisi'nde çalışmıştır. Ardından, İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Fakültesi Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümü'ne katılmıştır. Aynı fakülte ve üniversitede, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü'nde profesör olarak görev yapmış ve yakın zamanda bu bölümden emekli olmuştur. Ancak İTÜ'deki doktora öğrencileriyle çalışmalarına aktif olarak devam etmektedir. Ayrıca IFAC Türkiye Ulusal Üye Organizasyonu (NMO) Başkanlığı görevini yürütmektedir. Araştırma alanları arasında akıllı kontrol sistemleri, optimal kontrol ve evrimsel hesaplama yer almaktadır.

Özgeçmiş



Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA, lisans derecesini 1982 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Fakültesi'nden, yüksek lisans ve doktora derecelerini ise aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü'nden sırasıyla 1984 ve 1990 yıllarında almıştır. Halen İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Fakültesi Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü'nde profesör olarak görev yapmaktadır. Araştırma alanları arasında akıllı kontrol sistemleri, doğrusal kontrol sistem teorisi, optimal kontrol, kesirli mertebeden kontrol sistemleri yer almaktadır.