

BİR REEL SÖNÜMLÜ SINÜSÜN PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİNE İLİŞKİN KRİTİK FAZ DEĞERLERİ İÇİN BASİT İFADELER

Ersen YILMAZ ve Erdoğan DİLAVEROĞLU

Elektronik Mühendisliği Bölümü
Uludağ Üniversitesi, 16059, Görükle, Bursa
E-posta: ersen@uludag.edu.tr, dilaver@uludag.edu.tr

ÖZET

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsün parametrelerinin (genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekansının) kestirimi konusu ele alınmıştır. Parametre kestiricilerin değişimleri için bir alt sınır olan Cramér-Rao sınırlarının, sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde, sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada alçak frekans durumunda ve toplam örnek sayısının yeteri kadar büyük ve sönüm katsayısının küçük olması varsayımları altında Cramér-Rao sınırlarının en büyük ve en küçük değerlerine karşılık düşen kritik faz değerleri için basit ifadeler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sönümlü sinüs, parametre kestirimi, Cramér-Rao sınırı, alçak frekanslı sinüs.

1. GİRİŞ

Gürültü içindeki bir sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimi sinyal işleme alanında karşılaşılan önemli problemlerden biridir. Bu makalede reel beyaz Gauss gürültü ekli bir reel sönümlü sinüsten oluşan aşağıdaki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-\beta_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + e(t), \quad t = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Burada α_0 sinüsün genliğini, φ_0 fazını, β_0 sönüm katsayısını ve ω_0 frekansını göstermektedir; $e(t)$ ortalaması sıfır ve değişintisi σ^2 olan beyaz Gauss gürültüyü temsil etmektedir; N toplam örnek sayısıdır.

(1) modeli birden fazla sinyal içeren modellerin bir prototipidir ve sinyal parametreleri için tasarlanmış kestiricilerin başarımını test etmede yaygın olarak kullanılmaktadır.

Cramér-Rao (C-R) sınırı, bir takım zayıf koşulların sağlanması halinde, herhangi bir yansız parametre kestiricisinin değişintisi için bir alt sınır verir [1]. Dolayısıyla, C-R sınırı pratik kestiricilerin başarımını

değerlendirmede bir denek taşı olarak sıkça kullanılmaktadır.

C-R sınırı modele ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriği alınmak suretiyle bulunur. Bu matrisin birden fazla sinyal içeren modeller için karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı C-R sınırları çözümsel yerine sayısal yoldan hesap edilmektedir.

Kaynak 2’de (1) modelinin daha genel bir hali için Fisher bilgi matrisi çıkarılmıştır. (1) modelindeki sinüsün genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırları [2]’deki sonuçlar kullanılarak sayısal yoldan hesap edilebilir.

(1) modeline ilişkin C-R sınırlarının sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, bu alçak frekans durumu için, sınırların faz değişirken alacağı en büyük ve en küçük değerlerine karşılık düşen kritik faz değerlerinin (yani, en kötü ve en iyi kestirim durumlarına tekabül eden faz değerlerinin) tespit edilmesi önem kazanmaktadır. Problemin herhangi bir parametreye ilişkin C-R sınırı için bir çözümü sınırın sinüsün fazına olan bağıllığını açık bir biçimde veren (matrisel olmayan) çözümsel bir ifadesinin çıkarılmasını gerektirir. Dahası, bu bağıllık kritik faz değerlerinin çözümsel olarak tespit edilmesine olanak verecek şekilde basit olmalıdır.

Yazarların yakın zamanda yayınlanan bir makalesinde [3] (1) modeline ilişkin C-R sınırları için çözümsel ifadeler çıkarılmıştır. Bu ifadeler sınırların sinüsün fazına olan bağıllıklarını basit bir biçimde vermektedir. Dolayısıyla, en büyük ve en küçük sınırları veren kritik faz değerleri [3]’deki ifadeler kullanılarak kolayca tespit edilebilir.

Bu makalede, toplam örnek sayısının yeteri kadar büyük ve sinüsün sönüm katsayısının küçük olması varsayımları kullanılarak, kritik faz değerleri için basit ifadeler sunulmuştur. Bu basit kritik faz ifadeleri sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde geçerlidir.

Makale şu biçimde düzenlenmiştir: İkinci bölümde (1) modeline ilişkin C-R sınırlarının çözümsel ifadeleri tekrarlanmıştır. Sınırlara ait kritik faz değerleri üçüncü bölümde çıkarılmıştır. Dördüncü bölümde kritik faz değerleri için basit ifadeler sunulmuştur. Çalışmanın sonuçları beşinci bölümde verilmiştir.

2. CRAMÉR-RAO SINIR İFADELERİ

Cramér-Rao (C-R) teoremi, $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\phi}_0$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\omega}_0$, sırasıyla, α_0 genliğinin, ϕ_0 fazının, β_0 sönüm katsayısının ve ω_0 frekansının birer yansız kestiricisi olmak üzere, bu kestiricilerin değışintisi için bir alt sınır verir:

$$E\{(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0)^2\} \geq B_{\alpha_0}, \quad E\{(\hat{\phi}_0 - \phi_0)^2\} \geq B_{\phi_0}, \\ E\{(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2\} \geq B_{\beta_0}, \quad E\{(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2\} \geq B_{\omega_0}.$$

Burada $E\{\cdot\}$ beklentiyi göstermektedir. B_{α_0} , B_{ϕ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} sınırları (1) modeline ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriğinin, sırasıyla, α_0 , ϕ_0 , β_0 ve ω_0 parametrelerine karşılık gelen köşegensel elemanlarıdır.

Kaynak 3'de B_{α_0} , B_{ϕ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} C-R sınırları için (matrisel olmayan) çözümsel ifadeler çıkarılmıştır. Bütünlük açısından bu ifadeler aşağıda tekrar edilmiştir:

$$B_{\alpha_0} = \frac{2\sigma^2}{N} (K_0 + K_C \cos 2\phi_0 + K_S \sin 2\phi_0), \quad (2)$$

$$B_{\phi_0} = \frac{1}{\text{SGO} \cdot N} (K_0 - K_C \cos 2\phi_0 - K_S \sin 2\phi_0), \quad (3)$$

$$B_{\beta_0} = \frac{1}{\text{SGO} \cdot N^3} (K'_0 - K'_C \cos 2\phi_0 - K'_S \sin 2\phi_0), \quad (4)$$

$$B_{\omega_0} = \frac{1}{\text{SGO} \cdot N^3} (K'_0 + K'_C \cos 2\phi_0 + K'_S \sin 2\phi_0). \quad (5)$$

Bu ifadelerde SGO sinüse ilişkin sinyal gürültü oranını göstermektedir: $\text{SGO} = \alpha_0^2 / 2\sigma^2$.

K_0 , K_C , K_S , K'_0 , K'_C ve K'_S katsayıları ϕ_0 fazına bağlı değildir (bu katsayılar sinüsün ω_0

frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlıdır) ve aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$K_0 = \frac{X_{11} + X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)},$$

$$K_C = -\frac{X_{11} - X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)},$$

$$K_S = -\frac{X_{12}}{X_{11}X_{22} - X_{12}^2},$$

$$K'_0 = \frac{X'_{11} + X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})},$$

$$K'_C = \frac{X'_{11} - X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})},$$

$$K'_S = -\frac{X'_{12}}{X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12}}.$$

Burada X_{11} , X_{12} , X_{22} , X'_{11} , X'_{12} ve X'_{22} büyüklükleri bu sayfanın alt kısmında gösterilen (6)-(11) ifadeleriyle verilmektedir. Bu ifadelerde $r=0, 1$ ve 2 olmak üzere

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t}, \quad (12)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t} \cos(2\omega_0 t), \quad (13)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t} \sin(2\omega_0 t) \quad (14)$$

kısaltmaları kullanılmıştır. (Uygunluk açısından K_C ve K'_C terimlerinin işareti burada farklı tanımlanmıştır.)

$$X_{11} = (\Gamma_0 + C_0) - \frac{(\Gamma_2 - C_2)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 + C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}, \quad (6)$$

$$X_{12} = -S_0 - \frac{2(C_1C_2 - \Gamma_1\Gamma_2)S_1 + (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}, \quad (7)$$

$$X_{22} = (\Gamma_0 - C_0) - \frac{(\Gamma_2 + C_2)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 - C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}, \quad (8)$$

$$X'_{11} = (\Gamma_2 + C_2) - \frac{(\Gamma_0 - C_0)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 + C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}, \quad (9)$$

$$X'_{12} = S_2 - \frac{2(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1)S_1 - (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_0}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}, \quad (10)$$

$$X'_{22} = (\Gamma_2 - C_2) - \frac{(\Gamma_0 + C_0)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 - C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}. \quad (11)$$

3. KRİTİK FAZ DEĞERLERİ

(2)-(5) ifadeleri B_{α_0} , B_{φ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} C-R sınırlarını φ_0 fazının basit birer fonksiyonu biçiminde vermektedir. Bu ifadelerden sınırların φ_0 fazına π radyan periyodu ile periyodik olarak bağlı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, faz değerlerinin, mesela

$$\Phi_0 = \left\{ \varphi_0 : \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

aralığında ele alınması yeterli olacaktır.

(4)-(5) ifadelerinden B_{β_0} ve B_{ω_0} sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının, φ_0 fazının fonksiyonları biçiminde düşünüldüklerinde, birbirlerinin $\pi/2$ radyan kadar ötelenmiş halleri oldukları görülebilir. Bu iki sınırın en büyük ve en küçük değerleri aynıdır. Dahası, sınırlardan biri en büyük değerini aldığı anda diğeri en küçük değerini almaktadır, yani, bir sınıra ilişkin en kötü (en iyi) faz değeri diğeri sınıra ilişkin en iyi (en kötü) faz değeri olmaktadır. (2)-(3) ifadelerinden aynı ilişkinin, B_{α_0} genlik sınırı α_0^2 ile bölünmek şartıyla, B_{α_0} ve B_{φ_0} genlik ve faz sınırları arasında da olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, burada sadece genlik ve frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerleri üzerinde durulacaktır.

Sınırların en büyük ve en küçük değerlerini aldığı kritik φ_0 faz değerleri (2)-(5) ifadelerinin φ_0 'a göre türevi alınıp bu türevin sıfıra eşitlenmesi yoluyla kolayca bulunabilir. (Benzer hesaplamalar (1) modelindeki sinüsün sönümsüz olması durumunda frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin elde edilmesinde de karşımıza çıkmaktadır [4].)

Her bir sınırın Φ_0 aralığında sadece bir maksimumu ve bir minimumu vardır. B_{α_0} genlik sınırının maksimumu ve minimumu aşağıda verilmiştir:

$$(\varphi_0)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right), & K_C \geq 0, \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K_C < 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K_C \geq 0, \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right), & K_C < 0. \end{cases} \quad (16)$$

B_{ω_0} frekans sınırının maksimumu ve minimumu aşağıdaki verilmiştir:

$$(\varphi_0)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right), & K'_C \geq 0, \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K'_C < 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K'_C \geq 0, \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right), & K'_C < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Bu ifadelerde

$$\tan^{-1}(\cdot) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ ve } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sayısal örnekler, sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde, yani

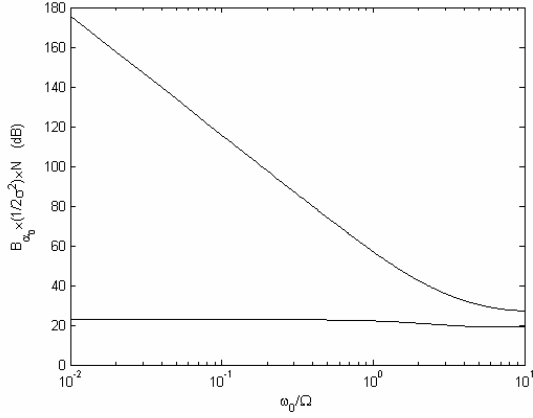
$$\omega_0 < \frac{\pi}{N} \quad (19)$$

için, C-R sınırlarının sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, kritik faz değerlerinin (19) bölgesi için tespit edilmesi önem kazanmaktadır.

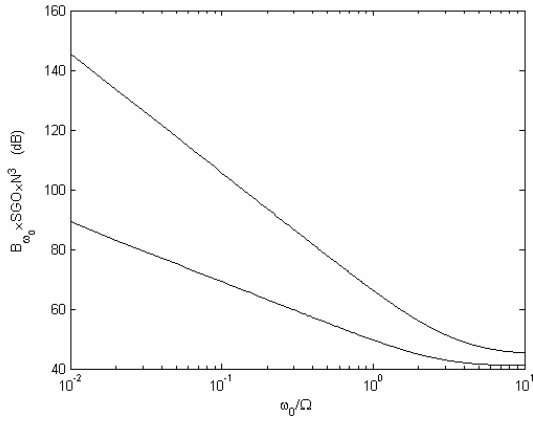
Örnek 1: Toplam örnek sayısı $N=20$ ve sönüm katsayısı $\beta_0=0.5$ durumunu ele alalım. C-R genlik sınırı B_{α_0} 'ın en büyük ve en küçük değerleri Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekilde düşey eksen $B_{\alpha_0} \cdot (1/2\sigma^2) \cdot N$ çarpımını, yatay eksen ω_0 frekansının Ω Fourier limiti ($\Omega = \pi/N$) cinsinden değerini (ω_0/Ω değerini) göstermektedir. Şekilden sınırın en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın $\omega_0/\Omega < 1$ bölgesinde oldukça fazla olduğu görülmektedir. Sınır bu bölgede sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olmaktadır. $\omega_0/\Omega > 1$ bölgesinde söz konusu fark azalmaktadır. Bu ikinci bölgede sınırın faza bağlılığı ihmal edilebilir.

C-R frekans sınırı B_{ω_0} 'ın en büyük ve en küçük değerleri Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekilde düşey eksen $B_{\omega_0} \cdot \text{SGO} \cdot N^3$ çarpımını, yatay eksen ω_0/Ω oranını göstermektedir. Sınırın $\omega_0/\Omega < 1$ bölgesinde faza kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu görülmektedir.

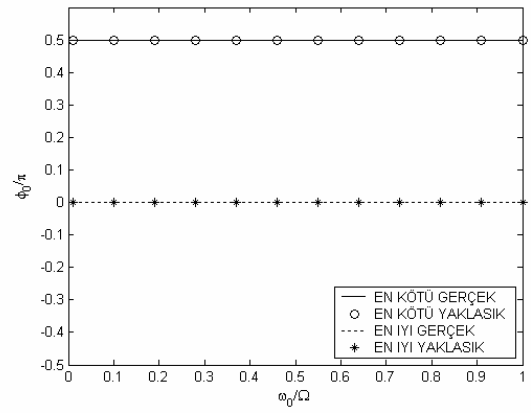
Kritik faz değerlerini veren (15)-(18) ifadeleri karmaşık gözükmemektedir. Bir sonraki bölümde, toplam örnek sayısı N 'nin yeteri kadar büyük ve sönüm katsayısı β_0 'ın küçük olması durumunda, kritik faz değerleri için (19) bölgesinde geçerli olan basit ifadeler sunulmuştur.



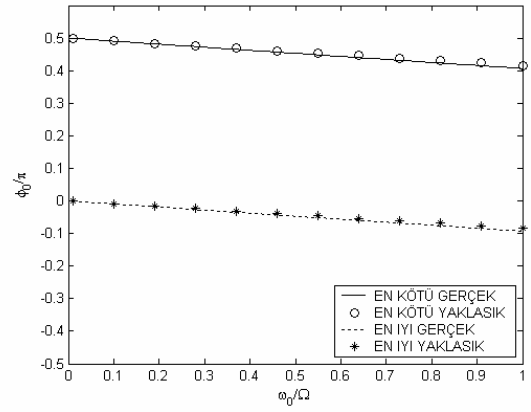
Şekil 1: Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin oranlanmış C-R sınırının en büyük ve en küçük değerlerinin sinüsün frekansı ile değişimi. Toplam örnek sayısı $N = 20$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.5$ 'tir.



Şekil 2: Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin oranlanmış C-R sınırının en büyük ve en küçük değerlerinin sinüsün frekansı ile değişimi. Toplam örnek sayısı $N = 20$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.5$ 'tir.



Şekil 3: Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansı ile değişimi. Toplam örnek sayısı $N = 60$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.



Şekil 4: Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansı ile değişimi. Toplam örnek sayısı $N = 60$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.

4. BASİT KRİTİK FAZ DEĞERLERİ

(15)-(18) ifadeleriyle verilen kritik faz değerleri sinüsün frekansı ω_0 'ın küçük değerleri için ve toplam örnek sayısı N ve sinüsün sönüm katsayısı β_0 ile ilgili aşağıdaki varsayımlar altında oldukça sadeleştirilebilir:

$$\begin{aligned} A1) \quad & N^3 e^{-\beta_0 N} \ll 1, \\ A2) \quad & \beta_0 \ll 1. \end{aligned}$$

A1 varsayımı sinüsün sönümlenene kadar örneklendiğini söylemektedir; yani, toplam örnek sayısı N yeteri kadar fazla olmalıdır. A2 varsayımı sinüsün sönüm katsayısının küçük olduğunu söylemektedir. Bu varsayımların temelinde hızla

sönen yüksek sönüm katsayılı bir sinüsün parametre kestiricilerinin muhtemelen yanlış olacağı, dolayısıyla, C-R sınırlarının uygulanamayacağı düşüncesi yatmaktadır.

Kritik faz değerlerini veren (15)-(18) ifadelerinin $\omega_0 \rightarrow 0$ iken hakim olan terimleri belirlendikten sonra bu terimlere A1 ve A2 varsayımları tatbik edilirse, küçük ω_0 değerleri için, aşağıdaki basit yaklaşık sonuçlar bulunur (bu ara işlemler burada gösterilmemiştir): Genlik kestirimi için

$$(\phi_0)_{\max} \cong \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3, \quad (20)$$

$$(\phi_0)_{\min} \cong -\frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3. \quad (21)$$

$$(\varphi_0)_{\max} \cong \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0}, \quad (22)$$

$$(\varphi_0)_{\min} \cong -\frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0}. \quad (23)$$

Açıkça, (20)-(23) ifadeleri kritik faz değerlerinin sinüsün ω_0 frekansına ve β_0 sönüm katsayısına olan bağıllığını oldukça basit bir biçimde vermektedir. Bu bağıllığın ω_0/β_0 oranı yoluyla olduğu görülmektedir. Ayrıca, ifadeler toplam örnek sayısı N 'ye bağlı değildir. Bu durum sinüsün sönümlenene kadar örneklendiğini belirten A1 varsayımının bir sonucudur.

Sayısal örnekler (20)-(23) ifadeleriyle verilen basit kritik faz değerlerinin A1 ve A2 varsayımları altında (19) bölgesinin tamamında geçerli olduğunu göstermektedir.

Örnek 2: Toplam örnek sayısı $N=60$ ve sönüm katsayısı $\beta_0=0.3$ durumunu ele alalım. (Bu durumda A1 ve A2 varsayımları sağlanmaktadır.) Genlik kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin (15)-(16) ifadeleriyle verilen gerçek (tam) ve (20)-(21) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerleri Şekil 3'te gösterilmiştir. Frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin (17)-(18) ifadeleriyle verilen gerçek ve (22)-(23) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerleri Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekillerdeki yatay eksen ω_0/Ω oranlanmış frekansını ilgililenilen $\omega_0/\Omega < 1$ bölgesi için göstermektedir. Yaklaşık değerlerin gerçek kritik faz değerlerini oldukça yakın bir biçimde takip ettiği görülmektedir.

Bu makalede reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsün genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırlarının en büyük ve en küçük değerlerine karşılık gelen kritik faz değerleri için basit ifadeler sunulmuştur. İfadeler, fazın önemli olduğu, sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması durumunda geçerlidir. Bu kritik faz değerleri alçak frekanslı sinüsler için tasarlanmış pratik kestiricilerin başarımını test etmede en kötü ve en iyi kestirim senaryolarının hızlı bir biçimde oluşturulmasında kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] VAN TREES, H. L., *Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley & Sons Şirketi, New York, A.B.D., 1968.
- [2] YAO, Y. ve PANDIT, S. M., "Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(4), 878-885, 1995.
- [3] YILMAZ, E. ve DİLAVEROĞLU, E., "Bir reel sönümlü sinüs için matrissel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri," *ELECO Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu*, Bursa, 2004.
- [4] DİLAVEROĞLU, E., "Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(2), 463-474, 1998.