

BİR REEL SÖNÜMLÜ SINÜS İÇİN MATRİSEL OLMAYAN CRAMÉR-RAO SINIR İFADELERİ

Ersen YILMAZ ve Erdoğan DİLAVEROĞLU

Elektronik Mühendisliği Bölümü

Uludağ Üniversitesi

16059 Görükle, Bursa

E-posta: ersen@uludag.edu.tr, dilaver@uludag.edu.tr

Bildiri Konusu: Elektronik-Haberleşme Tekniği ve Sistemleri

ÖZET

Reel beyaz Gauss gürültüsü içindeki bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin Cramér-Rao sınırlarının matrissel olmayan çözümsel ifadeleri sunulmuştur. İfadeler sınırları işaret gürültü oranı, toplam örnek sayısı ve sinüsün frekansına, sönüm katsayısına ve fazına bağlı bir fonksiyon cinsinden vermektedir. Söz konusu ifadeler sınırların sinüsün fazına olan bağıllığını basit bir biçimde vermektedir. Dolayısıyla, bu ifadeler en büyük ve en küçük sınır değerlerini ve bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerini tartışmada kullanılabilir.

Sonuçlar örnekleme anlarının gelişigüzel seçildiği genel örnekleme durumuna uygulanabilir.

Anahtar Kelimeler: Sönümlü sinüs, parametre kestirimi, Cramér-Rao sınırı, alçak frekanslı sinüs.

1. GİRİŞ

Sinyal işleme alanında karşılaşılan pek çok önemli problem gürültü içindeki bir ya da daha fazla sönümlü ya da sönümsüz sinüsün parametrelerinin kestirimine dayanmaktadır. Bu makalede reel beyaz Gauss gürültüsü içindeki tek bir reel sönümlü sinüsten oluşan aşağıdaki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-\beta_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + e(t) \quad (1)$$

$t = n, n+1, \dots, n+N-1$. Burada α_0 parametresi sinüsün genliğini, φ_0 fazını, β_0 sönüm katsayısını ve ω_0 frekansını göstermektedir. $e(t)$ ortalaması sıfır ve değişintisi σ^2 olan beyaz Gauss gürültüsünü temsil etmektedir. N toplam örnek sayısı ve n örnekleme indisinin ilk değerini göstermektedir.

Model parametreleri α_0 , φ_0 , β_0 , ω_0 ve σ^2 bilinmiyor varsayılmıştır ve bu parametreler eldeki N

adet örnek değeri $y(n)$, $y(n+1)$, ..., $y(n+N-1)$ kullanılarak kestirilecektir.

(1) modeli birden fazla sinyalden oluşmuş modellerin bir prototipidir ve sinyal parametreleri için tasarlanmış kestiricilerin başarımını test etmede yaygın olarak kullanılmaktadır.

Cramér-Rao (C-R) sınırı, bir takım zayıf koşulların sağlanması halinde, herhangi bir yansız kestiricinin değışintisi için bir alt sınır verir [1]. Dolayısıyla, C-R sınırı kullanılan kestiriciden bağımsız olarak veri modelleri için elde edilebilecek en yüksek başarıyı vermektedir. Ele alınan model için, C-R sınırının sinüsün frekansına, sönüm katsayısına, fazına, işaret gürültü oranına ve toplam örnek sayısına bağıllığı ile ilgilenilmektedir.

C-R sınırı modele ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriği alınmak suretiyle bulunur. Bu matrisin birden fazla sinyal içeren modeller için karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı C-R sınırları çözümsel yerine sayısal yoldan hesap edilmektedir [2, 3]. Dolayısıyla, sınırların model parametrelerine olan bağıllıkları sayısal yoldan incelenmektedir.

Bu makalede (1) modelindeki sinüsün genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırları için matrissel olmayan çözümsel ifadeler verilmiştir. Çözümsel sınır ifadeleri başarımlerinin kuramsal olarak incelenmesine olanak verdiğinden önem arz ederler. Her bir sınır işaret gürültü oranı, toplam örnek sayısı ve sinüsün frekansına, sönüm katsayısına ve fazına bağlı bir fonksiyon cinsinden verilmektedir. İfadeler, ilgili Fisher bilgi matrisinin özel bir biçimde ayrıştırılmasının bir sonucu olarak, sınırların sinüsün fazına olan bağıllıklarını basit bir biçimde vermektedir. Dolayısıyla, sınırların faz değışirken alacağı en büyük ve en küçük değerler ve bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerleri kolayca tespit edilebilir.

Sinüslerin sönümsüz olması durumunda burada ele alınan veri modeline (ve bu modelin kompleks değeri karşılığına) ilişkin çözümsel sınır ifadeleri [4-6] numaralı kaynaklarda çıkarılmıştır. Dolayısıyla, burada sunulan çalışma [4-6] kaynaklarındaki çalışmanın bir devamı şeklindedir.

2. CRAMÉR-RAO SINIR İFADELERİ

Cramér-Rao (C-R) teoremi, $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\phi}_0$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\omega}_0$ sırasıyla, α_0 genliğinin, ϕ_0 fazının, β_0 sönüm katsayısının ve ω_0 frekansının herhangi bir yansız kestiricisi olmak üzere, her bir kestiricinin değışintisi için bir alt sınır verir:

$$\text{var}\{\hat{\alpha}_0\} \geq B_{\alpha_0}, \text{ var}\{\hat{\phi}_0\} \geq B_{\phi_0}$$

$$\text{var}\{\hat{\beta}_0\} \geq B_{\beta_0}, \text{ var}\{\hat{\omega}_0\} \geq B_{\omega_0}$$

B_{α_0} , B_{ϕ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} sınırları (1) modeline ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriğinin, sırasıyla, α_0 , ϕ_0 , β_0 ve ω_0 parametrelerine karşılık gelen köşegensel elemanlarıdır. Fisher bilgi matrisinin özel bir biçimde ayrıştırılması suretiyle B_{α_0} , B_{ϕ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} C-R sınırları için aşağıda verilen matrissel olmayan ifadeler elde edilebilir (bu ifadelerin ispatı burada yapılmamıştır):

$$B_{\alpha_0} = \frac{2\sigma^2}{N} (K_0 - K_C \cos 2\phi_0 + K_S \sin 2\phi_0) \quad (2)$$

$$B_{\phi_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N} (K_0 + K_C \cos 2\phi_0 - K_S \sin 2\phi_0) \quad (3)$$

$$B_{\beta_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N^3} (K'_0 + K'_C \cos 2\phi_0 - K'_S \sin 2\phi_0) \quad (4)$$

$$B_{\omega_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N^3} (K'_0 - K'_C \cos 2\phi_0 + K'_S \sin 2\phi_0) \quad (5)$$

Bu ifadelerde SNR işaret gürültü oranını göstermektedir: $\text{SNR} = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma^2}$.

K_0 , K_C , K_S , K'_0 , K'_C ve K'_S katsayıları ϕ_0 fazına bağlı değildir (bu katsayılar sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlıdır) ve aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$K_0 = \frac{X_{11} + X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)}$$

$$K_C = \frac{X_{11} - X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)}$$

$$K_S = -\frac{X_{12}}{X_{11}X_{22} - X_{12}^2}$$

$$K'_0 = \frac{X'_{11} + X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'_{12}{}^2)}$$

$$K'_C = -\frac{X'_{11} - X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'_{12}{}^2)}$$

$$K'_S = -\frac{X'_{12}}{X'_{11}X'_{22} - X'_{12}{}^2}$$

Burada X_{11} , X_{12} , X_{22} , X'_{11} , X'_{12} ve X'_{22} büyüklükleri bu sayfanın alt kısmında gösterilen (6)-(11) ifadeleriyle verilmektedir. Bu ifadelerde $r = 0, 1$ ve 2 olmak üzere

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=n}^{n+N-1} t^r e^{-2\beta_0 t} \quad (12)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=n}^{n+N-1} t^r e^{-2\beta_0 t} \cos(2\omega_0 t) \quad (13)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=n}^{n+N-1} t^r e^{-2\beta_0 t} \sin(2\omega_0 t) \quad (14)$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

$$X_{11} = (\Gamma_0 + C_0) - \frac{(\Gamma_2 - C_2)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 + C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (6)$$

$$X_{12} = -S_0 - \frac{2(C_1C_2 - \Gamma_1\Gamma_2)S_1 + (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (7)$$

$$X_{22} = (\Gamma_0 - C_0) - \frac{(\Gamma_2 + C_2)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 - C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (8)$$

$$X'_{11} = (\Gamma_2 + C_2) - \frac{(\Gamma_0 - C_0)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 + C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (9)$$

$$X'_{12} = S_2 - \frac{2(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1)S_1 - (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_0}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (10)$$

$$X'_{22} = (\Gamma_2 - C_2) - \frac{(\Gamma_0 + C_0)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 - C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (11)$$

(2)-(5) ifadelerinin sağ taraflarındaki ilk terimlerden genlik sınırının genlikten bağımsız olduğu; faz, sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının işaret gürültü oranı SNR ile ters orantılı olduğu; genlik ve faz sınırlarının veri sayısı N 'nin birinci kuvveti biçiminde azaldığı; sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının N 'nin üçüncü kuvveti biçiminde azaldığı görülmektedir.

Düzyük örneklemeye kabulü yapılmasına rağmen (2)-(5) ifadelerinin örneklemeye anlarının gelişigüzel seçildiği genel örneklemeye durumunda da geçerli olacağı açıktır. Bunun için (12)-(14) ifadelerindeki toplama indislerinin uygun olarak değiştirilmesi yeterlidir.

(2)-(5) ifadeleri C-R sınırlarının sinüsün φ_0 başlangıç fazına olan bağılıklarını basit bir biçimde vermektedir. Bu ifadelerden φ_0 faz açısı değişirken her bir sınırın alacağı en büyük ve en küçük değerler ve bu değerleri veren kritik faz değerleri kolayca bulunabilir. Kritik faz değerleri yansız kestiriciler veren pratik sistemlerin başarımını test etmede en kötü ve en iyi kestirim senaryolarını oluşturmada kullanılabilir.

(2)-(5) ifadelerinden daha fazla yorum yapmak mümkündür. $(B_{\alpha_0})_{\max}$ ve $(B_{\alpha_0})_{\min}$ genlik sınırı B_{α_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini, $(B_{\varphi_0})_{\max}$ ve $(B_{\varphi_0})_{\min}$ faz sınırı B_{φ_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(B_{\varphi_0})_{\max} = \frac{(B_{\alpha_0})_{\max}}{\alpha_0^2} \text{ ve } (B_{\varphi_0})_{\min} = \frac{(B_{\alpha_0})_{\min}}{\alpha_0^2}$$

Benzer şekilde, $(B_{\beta_0})_{\max}$ ve $(B_{\beta_0})_{\min}$ sönüm katsayısı sınırı B_{β_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini, $(B_{\omega_0})_{\max}$ ve $(B_{\omega_0})_{\min}$ frekans sınırı B_{ω_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

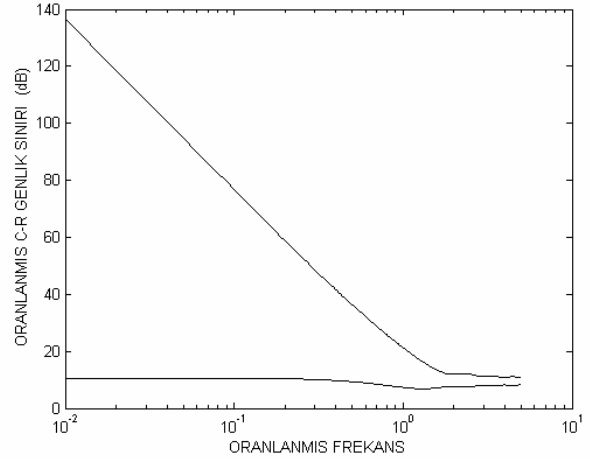
$$(B_{\omega_0})_{\max} = (B_{\beta_0})_{\max} \text{ ve } (B_{\omega_0})_{\min} = (B_{\beta_0})_{\min}$$

En büyük genlik sınırını veren kritik faz değerinde faz sınırı en küçük değerini alır, en küçük genlik sınırını veren kritik faz değerinde faz sınırı en büyük değerini alır:

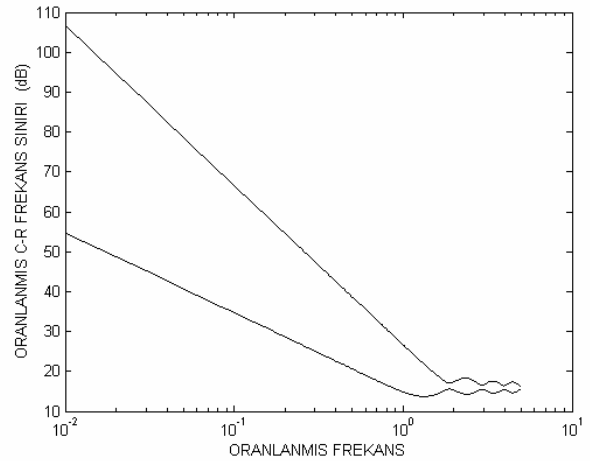
$$\{\varphi_0 : B_{\varphi_0} = (B_{\varphi_0})_{\max}\} = \{\varphi_0 : B_{\alpha_0} = (B_{\alpha_0})_{\min}\}$$

$$\{\varphi_0 : B_{\varphi_0} = (B_{\varphi_0})_{\min}\} = \{\varphi_0 : B_{\alpha_0} = (B_{\alpha_0})_{\max}\}$$

Benzer şekilde, en büyük sönüm katsayısı sınırını veren kritik faz değerinde frekans sınırı en küçük değerini alır, en küçük sönüm katsayısı sınırını veren kritik faz değerinde frekans sınırı en büyük değerini alır:



Şekil 1: Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ile değişimi. Örnek adeti $N = 10$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ ve ilk örneklemeye indisi $n = 1$ alınmıştır.



Şekil 2: Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ile değişimi. Örnek adeti $N = 10$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ ve ilk örneklemeye indisi $n = 1$ alınmıştır.

$$\{\varphi_0 : B_{\omega_0} = (B_{\omega_0})_{\max}\} = \{\varphi_0 : B_{\beta_0} = (B_{\beta_0})_{\min}\}$$

$$\{\varphi_0 : B_{\omega_0} = (B_{\omega_0})_{\min}\} = \{\varphi_0 : B_{\beta_0} = (B_{\beta_0})_{\max}\}$$

(2)-(5) ifadelerinden C-R sınırlarının sinüsün frekansı ω_0 'a ve sinüsün sönüm katsayısı β_0 'a bağılılığı açık bir biçimde gözükmemektedir. Bu bağılıklar sayısal örnekler yardımıyla aşağıda incelenmiştir.

Örnek 1: C-R genlik sınırının en büyük ve en küçük değerleri örnek sayısı $N = 10$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ ve ilk örneklemeye indisi $n = 1$ için Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekilde dikey eksen $B_{\alpha_0} \cdot (1/2\sigma^2) \cdot N$ çarpımını, yatay eksen ω_0 frekansının Ω Fourier

limiti ($\Omega = \pi/N$) cinsinden değerini (ω_0/Ω değerini) göstermektedir (Fourier limiti reel sinüsün periodogram kestiricisi kullanılarak kestirilebilecek en düşük (eşik) frekans değerini verir). Şekilden sınırın en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın $\omega_0/\Omega < 1$ bölgesinde oldukça fazla olduğu görülmektedir. Sınır bu bölgede sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olmaktadır. $\omega_0/\Omega > 1$ bölgesinde söz konusu fark azalmaktadır. Bu ikinci bölgede sınırın faza bağıllığı ihmal edilebilir.

C-R frekans sınırının en büyük ve en küçük değerleri $N=10$, $\beta_0=0.1$ ve $n=1$ için Şekil 2’de gösterilmiştir. Şekilde dikey eksen $B_{\omega_0} \cdot \text{SNR} \cdot N^3$ çarpımını, yatay eksen ω_0/Ω oranını göstermektedir. Sınırın $\omega_0/\Omega < 1$ bölgesinde faza kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu görülmektedir.

Örnek 2: C-R sınırlarının sinüsün sönüm katsayısı β_0 ile değişimini görmek amacıyla bir önceki örnek $\beta_0 = 0.01, 0.1, 0.5$ ve 1 değerleri için tekrar edilmiştir. Sonuçlar Şekil 3 ve Şekil 4’de gösterilmiştir. Şekillerden sınırların β_0 artarken arttığı (diğer bir deyişle $1/\beta_0$ artarken azaldığı) görülmektedir. $1/\beta_0$ sabiti sönümlü sinüsün etkin süresi olarak düşünülebilir. Şekillerden, aynı zamanda, belirli bir ω_0 değeri için sınırların en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın β_0 ile arttığı da görülmektedir.

3. SONUÇLAR

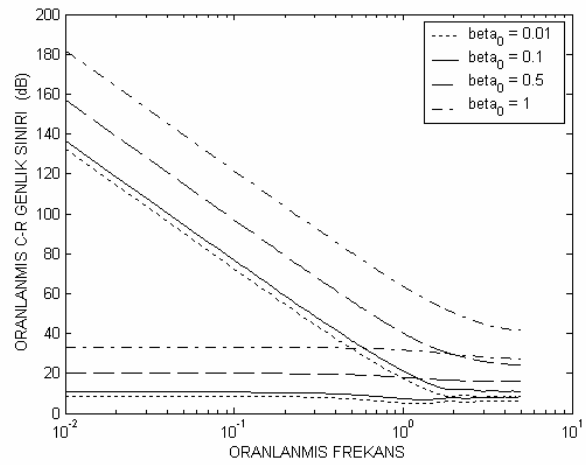
Bu makalede reel Beyaz Gauss gürültüsü eklenmiş bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının matrisel olmayan çözümsel ifadeleri verilmiştir. Bu ifadeler sınırların sinüsün fazına olan bağıllığını basit bir biçimde ortaya koymaktadır. Bunun bir sonucu olarak sınırların faz değişirken alacağı en büyük ve en küçük değerler ve bu değerlere tekabül eden kritik faz değerleri kolayca elde edilebilir. Sayısal örnekler C-R sınırlarının sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğunu göstermektedir.

4. KAYNAKLAR

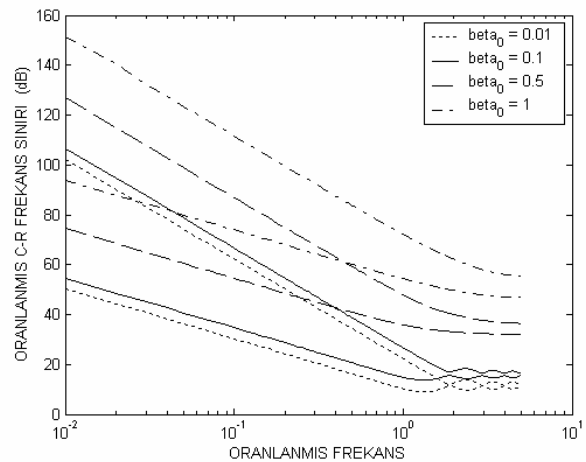
- [1] VAN TREES, H. L., *Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley & Sons Şirketi, New York, ABD, 1968.
- [2] RIFE, D. C. ve BOORSTYN, R. R., “Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations,” *The Bell System Technical Journal*, Vol. 55, No. 9, s. 1389-1410, 1976.
- [3] YAO, Y. ve PANDIT, S. M., “Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process,” *IEEE*

Transactions on Signal Processing, Vol. 43, No. 4, s. 878-885, 1995.

- [4] DİLAVEROĞLU, E., “Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, No. 2, s. 463-474, 1998.
- [5] DİLAVEROĞLU, E., “Bir reel sinüsün genlik ve faz kestiricileri için matrisel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri,” 7. IEEE Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, s. 318-323, 17-19 Haziran 1999, Bilkent, Ankara.
- [6] DİLAVEROĞLU, E., “İki yakın kompleks sinüsün genlik ve faz kestiricileri için matrisel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri,” 8. IEEE Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, s. 545-550, 12-14 Haziran 2000, Belek, Antalya.



Şekil 3: Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ ve ilk örnekleme indisi $n=1$ alınmıştır.



Şekil 4: Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ ve ilk örnekleme indisi $n=1$ alınmıştır.