

YAR Görüntüleme ve RKA Ölçümleri için Linear Denklem Destekli Matris Kalem Metodu

Linear Equation Supported Matrix Pencil Method for SAR Imaging and RCS Measurements

Araş. Gör. Okyanus TULGAR¹, Prof. Dr. Ahmet Arif ERGİN²

¹Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
otulgar@gyte.edu.tr

²Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
aergin@gyte.edu.tr

Özet

Matris Kalem Metodu (MKM), eksponansiyel işaret verilerinden yüksek doğrulukla genlik ve kutup bilgilerinin elde edilmesine imkân sağlamaktadır. İki boyutlu Yapay Açıklık Radarı (YAR) ölçümlerinden görüntü oluşturma ve Radar Kesit Alanı (RKA) hesabı için, ölçüm alınan yüzeydeki saçıcı merkezlerin konum ve yansıtıcılık tespitine ihtiyaç vardır. Her bir bakış açısında menzil profili elde etmek için Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) ve spektral kestirim algoritmaları yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada HFD yerine MKM kullanılarak yüksek çözünürlüklü menzil profilleri elde edilmiştir. Saçıcı merkezlerin tespiti için Geri - İzdüşüm (Gİ) algoritmasını kullanmak yerine, doğrusal denklem sistemi oluşturulmuştur. Gİ algoritması, görüntü penceresini ayırma, interpolasyon ve toplama işlemi gerektirmektedir. Bu işlemler interpolasyon hatasına, görüntüde bulanıklığa ve RKA hesabında hataya neden olmaktadır. Bu çalışmada doğrusal denklem sistemi çözülerek yüksek çözünürlüklü YAR görüntü oluşturulmuştur ve yüksek doğrulukla RKA hesabı yapılmıştır.

Abstract

Matrix Pencil Method (MPM) allows obtaining amplitude and pole information with high accuracy from exponential signal data. Two dimensional Synthetic Aperture Radar (SAR) imaging and Radar Cross Section (RCS) calculation have requirements of scattering center location and reflectivity estimation. Fast Fourier Transform (FFT) and spectral estimation algorithms are widely used to obtain range profile for each aspect angle. In this work, range profiles are obtained with high resolution by using MPM instead of FFT or spectral estimation algorithms. A linear equation system is constructed for defining of scattering centers instead of using Back - Projection (BP) algorithm. Discretization of imaging window, interpolation and summation are the requirements of BP algorithm. These processes cause to interpolation error,

blurring image and RCS calculation error. In this work, high resolution image is formed and RCS calculation is done with high accuracy by solving linear equation system.

1. Giriş

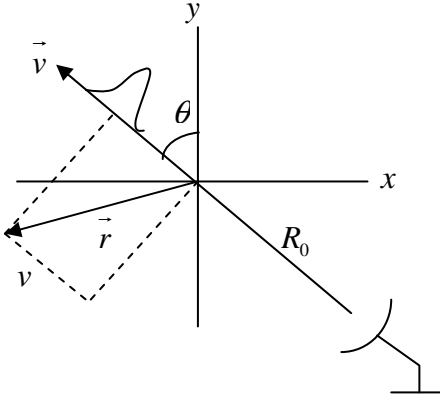
RKA, bir cismin radar dalgalarını yansıtma miktarının ölçütüdür. Cismin saçıcı merkezlerinin yansıtıcılığı ve konumu RKA sonucunu etkileyen temel faktörlerdir. Bu nedenle, saçıcı merkezlerin konum ve genlik tespitindeki hataların azaltılması, RKA hesaplamalarının daha yüksek doğrulukta sonuç vermesini sağlamaktadır. [1]'de MKM ile her bir bakış açısında elde edilen yüksek çözünürlüklü menzil profilleri uzak alan yaklaşımı ile Gİ algoritmasına sokularak YAR görüntüsü oluşturulmuştur. MKM ve Gİ algoritmasının birlikte kullanılması ile nokta yayılma fonksiyonunun görüntü üzerindeki etkisi belirtilmiş olup, elde edilen sonuçlar incelendiğinde menzil yönünde çözünürlük oldukça iyi durumdadır. Fakat nokta yayılma fonksiyonu nedeniyle çapraz menzil yönünde ana lob genişliği ve yan loblar etkisini sürdürmektedir. [2]'de kutupsal frekans diziliminden interpolasyon işlemi yapmadan dairesel konvolüsyon ile menzil profili elde edilmiştir. Fakat nokta yayılma fonksiyonu görüntü kalitesini düşürücü etki yapmaya devam etmektedir. [3]'de iki boyutlu HFD ile YAR görüntü oluşturmak amacıyla, kutupsal frekans dizilimine sahip ölçüm verilerinden eşit aralıklı kartezyen düzleme geçmek için interpolasyon tabanlı bir algoritma geliştirilmiştir. Oluşturulan görüntüler incelendiğinde görüntüdeki bulanıklık ve nokta yayılma fonksiyonu etkisi mevcuttur. Yine bu çalışmada Uyumlu Filtre (UF) ile görüntü oluşturma algoritması anlatılmıştır. UF algoritmasının yüksek hesaplama yükü, uygulamada oldukça zaman almaktadır. Buna karşın görüntüdeki bulanıklık ve ana lob ile yan lob etkisi UF algoritmasında da devam etmektedir.

YAR görüntüleme ortaya çıkan nokta yayılma fonksiyonu, bulanma, ana lob ve yan lob etkileri RKA hesaplarında hata kaynağıdır. Bu çalışmada menzil profillerinin yüksek çözünürlükle elde edilmesi için MKM

kullanımına ek olarak, saçıcı merkezlerin tespiti için Gİ algoritması yerine doğrusal denklem sistemi oluşturulmuştur. Bu denklem sisteminin çözümü saçıcı merkezlerin konumunu vermektedir. Elde edilen saçıcı merkezlerin kompleks genlik değerleri ise MKM algoritması ile belirlenmektedir.

Bu çalışmada ikinci bölümde problemin teorisi, üçüncü bölümde MKM ile saçıcı merkezlerin konum ve saçıcılık değerlerinin bulunması, dördüncü bölümde ise elde edilen sonuçlar verilecektir.

2. Problemin Teorisi



Şekil 1: YAR ölçüm sistemi

Şekil 1'de RKA hesaplaması için kullanılacak olan YAR ölçüm sistemi görülmektedir. Şekilde görülen her bir parametrenin tanımı aşağıda verilmiştir.

θ :Bakış açısı.

\vec{r} :Saçıcı merkez vektörü.

\vec{v} :Bakış doğrultusu vektörü.

R_0 :Anten ile cisim koordinat sistemi arasındaki uzaklık.

v :Saçıcı merkezin bakış doğrultusuna dik izdüşümü.

Şekil 1'deki anten alıcı ve verici olarak kullanılmaktadır. Antenden gönderilen elektromanyetik dalgaların bir kısmı cisim üzerindeki saçıcı merkezlerden geri yansıtılarak alıcı antene gelmektedir. Alınan dalgaya ait ifade uzak alan yaklaşımı altında (1)'de görüldüğü gibidir [1].

$$E^s(R_0, k) = -j\omega \frac{\mu\epsilon}{4\pi R_0} \sum_{i=1}^M a_i e^{-jk\vec{r}_i \cdot \vec{v}} \quad (1)$$

Denklem (1)'de görülen parametrelerin tanımı aşağıda verilmiştir.

ω :Açısal frekans.

μ :Manyetik geçirgenlik katsayısı.

ϵ :Dielektrik katsayısı.

k :Dalga sayısı.

M :Saçıcı merkez sayısı.

a_i :Saçıcı merkezin kompleks genliği.

Network analizör ile her bir bakış açısında frekans taraması yapılarak ölçülen S parametrelerinin ifadesi (2)'de görüldüğü gibidir.

$$S_{mn} = \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \sum_{i=1}^M a_i e^{-2jk\vec{r}_i \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

Burada m alıcı antenin network analizöre bağlandığı port numarasını, n ise verici antenin bağlandığı port numarasını göstermektedir. RKA tanım olarak anten ile ölçüm sistemi arasındaki mesafeye bağımlı değildir. Bu nedenle ölçüm alınan S parametrelerinden bu mesafenin etkisi kaldırılırsa denklem (3)'deki ifade elde edilir.

$$F = \sum_{i=1}^M a_i e^{-2jk\vec{r}_i \cdot \vec{v}} \quad (3)$$

Saçıcı merkez vektörü iki boyutlu konum vektörü belirtmektedir.

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \quad (4)$$

Buna göre, denklem (3) aşağıdaki hali almaktadır.

$$F(\theta, k) = \sum_{i=1}^M a_i e^{-2jk(x_i \sin\theta + y_i \cos\theta)} \quad (5)$$

Dalga sayısı yerine frekans karşılığı yerine konulursa denklem (6) elde edilmektedir.

$$F(\theta, f) = \sum_{i=1}^M a_i e^{-2j\frac{2\pi f}{c}(x_i \sin\theta + y_i \cos\theta)} \quad (6)$$

$k_v = 2f/c$ olmak üzere denklem (7) yazılabilir [1].

$$F(\theta, k_v) = \sum_{i=1}^M a_i e^{-j2\pi k_v(x_i \sin\theta + y_i \cos\theta)} \quad (7)$$

Denklem (7)'nin kutupları, saçıcı merkezlerin her bir bakış açısındaki doğrultuya dik izdüşümünü vermektedir [1].

$$v_i = x_i \sin\theta + y_i \cos\theta \quad (8)$$

Burada i saçıcı merkez indisini göstermektedir. Denklem (9)'da saçıcı merkezlerin menzil profillerinden elde edilmesini sağlayan integral ifadesi verilmiştir [1].

$$f(x, y) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\theta, k_v) \cdot e^{j2\pi k_v(x \sin\theta + y \cos\theta)} k_v dk_v d\theta \quad (9)$$

Yukarıdaki ifadede görülen açı ve frekans değerleri ölçüm sisteminde ayrı haldedir. Belirli bir frekans ve açı taraması neticesinde elde edilen menzil profillerinden saçıcı merkezleri elde etmek için [1]'de Gİ algoritması kullanılmıştır. Gİ algoritması, görüntü penceresini ayrıklaştırma, interpolasyon ve toplama işlemi gerektirmektedir. Bu işlemler interpolasyon hatasına, görüntüde bulanıklığa ve RKA hesabında hataya neden olabilmektedir. Bu çalışmada Gİ algoritması kullanmak yerine doğrusal denklem sistemi oluşturulmuştur. P menzil profili matrisi, Θ trigonometrik açı matrisi, X saçıcı merkezlerin konum matrisi olmak üzere aşağıdaki matris çarpımı yazılabilir.

$$P = X \cdot \Theta \quad (10)$$

Buradaki menzil profili matrisi denklem (11)'de görüldüğü gibidir.

$$P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1K} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{M1} & v_{M2} & \cdots & v_{MK} \end{pmatrix}_{M \times K} \quad (11)$$

Açı taramasının ayırık olması nedeniyle aşağıdaki ifade geçerlidir. Burada K ölçümde kullanılan açı sayısıdır.

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]_{1 \times K} \quad (12)$$

Denklem (10)'da görülen menzil profili ve trigonometrik açı matrisleri ise (13) ve (14)'de verilmiştir.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & y_M \end{pmatrix}_{M \times 2} \quad (13)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \cdots & \sin \theta_K \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_K \end{pmatrix}_{2 \times K} \quad (14)$$

Denklem (11), (13) ve (14), denklem (10)'da yerine konulursa doğrusal denklem sistemi elde edilmektedir. Söz konusu denklem sisteminde $K > 2$ için artık belirtilmiş denklem sistemi söz konusudur. Bunun anlamı, ikiden fazla açı taraması için denklem sisteminde bilinmeyen sayısı denklem sayısından azdır. $K < 2$ için bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazladır. Bu durumda saçıcı merkezlerin konumu tespit edilememektedir. Bu nedenle, ölçüm alırken frekans taraması en az iki farklı açıda yapılmalıdır.

Denklem (10) kullanılarak saçıcı merkez matrisi aşağıdaki ifade ile elde edilebilir.

$$X = P \cdot \Theta^+ \quad (15)$$

Burada Θ^+ pseudo inverse olmak üzere aşağıdaki denklem ile hesaplanabilir.

$$\Theta^+ = (\Theta^T \cdot \Theta)^{-1} \cdot \Theta^T \quad (16)$$

3. Matris Kalem Metodu

MKM, bir parametreye göre sinüsel değişim gösteren verileri kullanarak kompleks genlik ve kutup noktalarını yüksek doğruluk ile elde etmek için kullanılan algoritmadır [4].

$$y_l = x_l + w_l = \sum_{i=1}^M a_i e^{j\gamma_i l} + w_l \quad (17)$$

Denklem (17)'de l örnekleme indisini, i harmonik indisini, a kompleks genliği, γ kutup noktasını, w ise gürültüyü ifade etmektedir. MKM ile hem genlik ve kutup noktaları belirlenebilirken hem de gürültü bileşenleri bastırılabilir. N örnek sayısı olmak üzere, l örnekleme indisinin ifadesi şu şekildedir.

$$l = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (18)$$

Örnekleme noktalarının alıcı antene gelen sürekli işaretin doğru temsil edebilmesi için Nyquist kriterinin sağlanması gerekmektedir. Bu nedenle örnekleme aralığı için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Delta k_v \leq \frac{1}{2v_{i,\max}} \quad (19)$$

Örnekleme alınmak istenen N nokta sayısına uygun olarak frekans taramasındaki bant genişliği (20)'deki eşitsizliğe uygun olarak belirlenebilir.

$$BW \leq \frac{c \cdot N}{4 \cdot v_{i,\max}} \quad (20)$$

k_v örnek noktalarının ifadeleri (21) ve (22)'de verilmiştir [1].

$$k_v = k_{v,\min} \leq k_v \leq k_{v,\max} \quad (21)$$

$$k_v = n_{\min} \Delta k_v : \Delta k_v : n_{\max} \Delta k_v \quad (22)$$

Ölçüm alınırken belirli bir bakış açısında toplanan verilerin ayırık ifadesi aşağıdaki gibidir [1].

$$F_m = F((m + n_{\min}) \cdot \Delta k_v) = \sum_{i=1}^M r_i z_i^m \quad (23)$$

Burada m sıfır noktasına kaydırılmış frekans noktalarının indisidir. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanmaktadır.

$$m = n - n_{\min} \quad (24)$$

r ve z ifadeleri ise (25) ve (26)'da verilmiştir [1].

$$r_i = a_i z_i^{n_{\min}} \quad (25)$$

$$z_i = e^{-j2\pi v_i \Delta k_v} \quad (26)$$

L kalem parametresi olmak üzere $N/3 \leq L \leq N/2$ değer aralığında MKM en iyi performansı sağlamaktadır [5].

Örnekleme noktalarından (27) ifadesi elde edilebilir [1].

$$[F] = [f_0, f_1, \dots, f_L]_{(N-L) \times (L+1)} \quad (27)$$

$[F]$ matrisinin her bir elemanı ise (28)'de verilmiştir [1].

$$f_i = [F_i, F_{i+1}, \dots, F_{N-L+n-1}]^T \quad (28)$$

Bu durumda, (27)'deki ifade tekil değer ayrıştırma kullanılarak (29)'daki formda yazılabilir [1].

$$[F] = [U]_{L \times L} [\Sigma]_{L \times (L+1)} [V]^H_{(L+1) \times (L+1)} \quad (29)$$

Burada H kompleks eşlenik transpozunu göstermektedir. $[\Sigma]$ matrisinin son sütunu sıfır değerlerinden oluşmaktadır. Bu sütunun atılması halinde diagonal yapıya sahip tekil değer matrisi elde edilir. $[U]$ ve $[V]$ ise bu tekil değerlere karşılık gelen birim uzunluklu vektörlerden oluşmuş matrislerdir [1]. σ tekil değer matrisinin diagonal elemanları olmak üzere, toplam M adet harmonik için tekil değerler (30)'da görüldüğü gibidir [4].

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_M > \sigma_{M+1} > \dots > \sigma_L \quad (30)$$

Tekil değerlerin en yüksek değerli M tanesi (17)'deki harmonik sayısını belirtmektedir [1]. Diğer tekil değerler gürültü bileşenlerine ait olmak üzere, gürültünün sıfır olduğu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir [5].

$$\sigma_j = 0, \quad j > M \quad (31)$$

Tekil noktaların elde edilebilmesi için $M \leq L \leq N - M$ değer aralığı sağlanmalıdır [1]. N adet örnek noktasından

anamlı M adet noktanın seçilmesi neticesinde oluşturulacak yeni veri matrisi (32)'de görüldüğü gibi ifade edilebilir [6].

$$[F]_{L \times (L+1)} = [U]_{L \times M} [\Sigma]_{M \times M} [V]_{(L+1) \times M}^H \quad (32)$$

Denklem (32)'de görülen yeni veri matrisinden aşağıdaki matrisler elde edilebilir.

$$[\Gamma_1] = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$[\Gamma_2] = \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Burada \leftrightarrow her bir satır elemanının yatay doğrultuda döndürülmesini ifade etmektedir. κ_1 ve κ_2 matrisleri ise (35) ve (36)'da verilmiştir.

$$\kappa_1 = [F(1, 2, \dots, L; 1, 2, \dots, L)] \quad (35)$$

$$\kappa_2 = [F(1, 2, \dots, L; 2, 3, \dots, L+1)] \quad (36)$$

Denklem (23)'de gösterilen z değerleri ise (37)'deki ifade ile elde edilebilir [4].

$$z_{M \times 1} = eig([\Gamma_1]^+ [\Gamma_2]) \quad (37)$$

Burada $eig(\)$ operatörü öz değerleri vermektedir. YAR ölçümlerinde belirli bir bakış açısındaki frekans taraması neticesinde menzil profilinin konum değerleri (38)'deki ifade ile bulunabilir.

$$v_i = -\frac{\angle z_i}{2\pi\Delta k_v}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (38)$$

Denklem (23) matris formunda yazılırsa (39) elde edilir [1].

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^N & z_2^N & \dots & z_M^N \end{pmatrix}_{(N+1) \times M} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix}_{M \times 1} \quad (39)$$

Bu durumda, içerisinde kompleks genlik değerlerini barındıran r değerleri (40) ile elde edilebilir.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^N & z_2^N & \dots & z_M^N \end{pmatrix}^+ \cdot F \quad (40)$$

Menzil profilinin kompleks genlik değerleri ise aşağıdaki ifade ile hesaplanabilir.

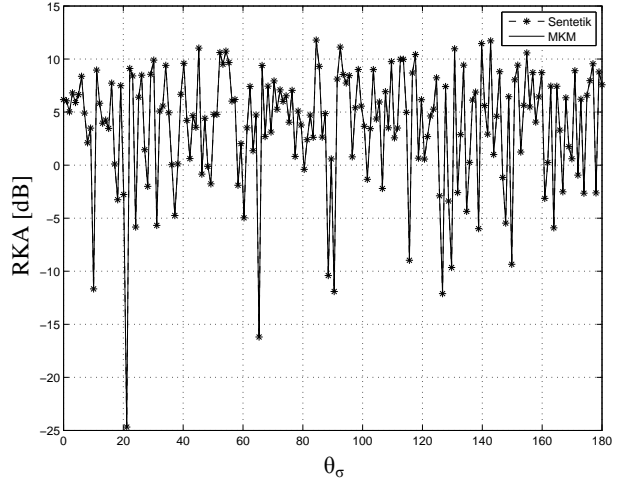
$$a_i = \frac{r_i}{z_i^{n_{\min}}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (41)$$

Ölçüm alınan cismin RKA değeri ise (42) ifadesi ile bulunabilir.

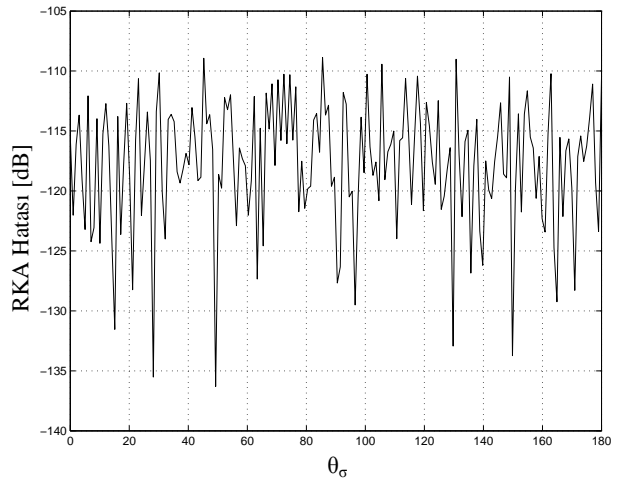
$$\sigma(f, \theta) = \left| \sum_{i=1}^M a_i e^{j4\pi \frac{f}{c} (x_i \sin \theta + y_i \cos \theta)} \right|^2 \quad (42)$$

4. Simülasyonlar

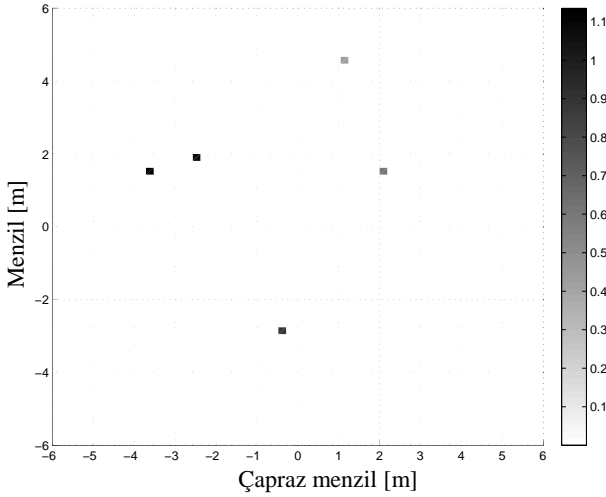
MKM ve doğrusal denklem sistemi çözümünün beraberce kullanılması ile geliştirilen algoritmanın test edilebilmesi için MATLAB programı kullanılmıştır. $N = 128$, $L = 64$, $M = 5$ alınmıştır. Menzil ve çapraz menzildeki en yüksek konum değerleri 5 m, bant genişliği ise 500 MHz alınmıştır. Frekans taraması $2 \text{ GHz} \leq f \leq 2.5 \text{ GHz}$ aralığında yapılmıştır. Açık taraması $-90 \leq \theta \leq 90$ derece aralığından 10 farklı bakış açısında yapılmıştır. Yazılan kod ile saçıcı merkezlerin konum ve genlik değerleri rastgele belirlenmiş olup, gürültünün etkisi incelenmemiştir. Oluşturulan sentetik verilerden MKM ve doğrusal denklem sistemi çözümü ile görüntü oluşturulmuştur. Ayrıca, geliştirilen algoritma kullanılarak elde edilen saçıcı merkezlerden RKA hesabı yapılmıştır. RKA değerleri hesaplanırken $0 \leq \theta \leq 180$ derece aralığı kullanılmıştır.



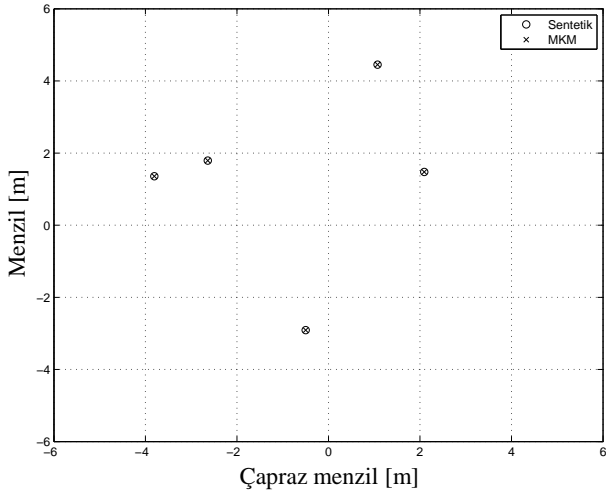
Şekil 2: Açığa bağlı RKA değeri, $f = 2.5 \text{ GHz}$



Şekil 3: Açığa bağlı RKA hatası, $f = 2.5 \text{ GHz}$



Şekil 4: Elde edilen YAR görüntü



Şekil 5: Elde edilen saçıcı merkez konumları

Çizelge 1: Yüzde hata değerleri

Saç. Num.	Genlik Hatası [%]	Menzil Hatası [%]	Çap. Menzil Hatası [%]
1	$0.5114 \cdot 10^{-10}$	$0.4415 \cdot 10^{-12}$	$0.1400 \cdot 10^{-12}$
2	$0.6244 \cdot 10^{-10}$	$0.2232 \cdot 10^{-12}$	$0.1515 \cdot 10^{-12}$
3	$0.1226 \cdot 10^{-10}$	$0.6102 \cdot 10^{-13}$	$0.2003 \cdot 10^{-12}$
4	$0.5510 \cdot 10^{-10}$	$0.2105 \cdot 10^{-12}$	$0.3819 \cdot 10^{-12}$
5	$0.1397 \cdot 10^{-10}$	$0.9975 \cdot 10^{-13}$	$0.6414 \cdot 10^{-12}$

5. Sonuçlar

Şekil 2 ve Şekil 3 incelendiğinde, bu çalışmada geliştirilen algoritma ile uzak alan yaklaşımı altında oldukça yüksek doğrulukta RKA hesaplanabildiği görülmektedir. Öyle ki, tüm açılarda RKA hatası $-105 \text{ dB} < \delta < -140 \text{ dB}$ aralığındadır. Şekil 4 incelendiğinde, elde edilen görüntünün hem menzil hem de çapraz menzilde yüksek çözünürlük sağladığı,

bulanıklık veya ana lob ve yan lob etkilerinin olmadığı görülmektedir. Mevcut algoritmaların sahip olduğu nokta yayılma fonksiyonu bozucu etkisi bu çalışmada geliştirilen algoritmada mevcut değildir. Şekil 5 incelendiğinde saçıcı merkezlerin konumu yüksek hassasiyet ile tespit edildiği görülmektedir. Çizelge 1 incelendiğinde saçıcı merkezlerin menzil, çapraz menzil ve saçıcılık değerlerinin oldukça az hataya sahip olduğu görülmektedir.

6. Kaynaklar

- [1] Özsoy Ş., Ergin, A. A., "Pencil Back-Projection Method for SAR Imaging", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 18, pp. 573 - 581, 2009.
- [2] Mensa, D. L., Halevy, S., Wade, G., "Coherent Doppler Tomography for Microwave Imaging", *Proceedings of the IEEE*, vol. 71, pp. 254 - 261, 1983.
- [3] Rigling, B. D., Moses, L. R., "Polar Format Algorithm for Bistatic SAR", *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 40, pp. 1147 - 1159, 2004.
- [4] Hua, Y., Sarkar, T. K., "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped / Undamped Sinusoids in Noise", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.*, vol. 38, pp. 814 - 824, 1990.
- [5] Pereira, O., Sarkar, T. K., "Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials", *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 37, pp. 48 - 55, 1995.
- [6] Hua, Y., Sarkar, T. K., "On SVD for Estimating Generalized Eigenvalues of Singular Matrix Pencil in Noise", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp. 892 - 900, 1991.