Statik Elektrik Problemlerinin İncelenmesinde Sonlu Elemenlar (FEM) ile Sonlu Farklar (FD) Methodlarının Kullanılması

N. Füsun Serteller
Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü
Marmara Üniversitesi
fserteller@marmara.edu.tr

Özet

Statik Elektrik alanlarda ve bu konunun en büyük uygulamma alanı olan yüksek gerilim tekniğinde, yalıtkan malzemelerin dayanma gerilimi değerlerinin bilinmesinde matematiksel yöntemler çok önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada da, verilen bir örnek üzerinde Poisson tipi iki boyutlu bir problem nümerik bir yöntem olan Sonlu Elemanlar Metodu (FEM)ve Sonlu Farkalar(FD) Metodu kullanılarak çözülmüştür.FEM metodun doğruluğu, Sonlu Farklar (FD) Metodu ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışma için Mathematica 6. sofware programı kullanılmıştır.

Abstract

Numerical methods play an important role to solve static electric field problems and to define breakdown strength of insulating materials in high voltage technique. In this study, FEM and FD have been used to solve the two-dimensional Poisson Type electrostatic problem on the given sample. FEM has been developed by using Mathematica 6 software and the results have been tested by FD developed by same software too. The results are seen remarkable well.

1 Giriş

Nümerik Yöntemler, son yıllarda elektrik mühendislerinin ve elektrikle ilgilenen araştırmacıların kullandıkları, vazgeçilmez yöntemlerden biri olmuştur. Özellikle son 10 yıldır, yüksek gerilim tekniği, magnetik alanlar, elektrik makinaları ve elektriksel devrelerindeki ısı problemleri ile ilgili konularda sıkça kullanılmıştır. Nümerik yöntemler içinde ençok kullanılanı, sonlu elemanlar metodudur (FEM). Bu metod, hem gerçek çözüme çok yakın olması, hem de kullanılması arzulanan geometriye kolayca uygulanabilmesi açısından, çok kullanışlı bir metodtur. Bunun yanında sonlu farklar metodu da (FD), denklemlerinin çıkarılması ve kolayca geliştirilmesi açısından uygun bir metod olduğu için, sıklıkla, diğer nümerik yöntemleri test etmek için kullanılmaktadır. İki yöntemde bir bölgenin küçük parçalara ayrılıp türevlerinin alınması ve daha sonra parçaların birleştirilerek, bir bütün halinde çözülmesi için gerekli eşitliklerin oluşturulmasına dayanmaktadır. FEM, bölgesel yaklaşımı kullanırken, FD noktasal yaklaşım tekniğini kullanmaktadır. FEM ve FD teknikleri hassas hesap ve büyük bölgeler, için inanılmaz kolaylıklar ve gerçek hesaplara yakın büyük doğruluklarla çözümler vermektedir. Ancak bu tür hesaplar çin bilgisayarların kullanılması zorunludur. FEM ve FD veya bunların integral çözümü olan Sınır elemanları metodu (BEM) kullanılırken, çok sayıda bulunan denklemlerin çözümleri için kapasiteli bilgisayarların kullanılması zorunludur.

Nümerik yöntemlerin günümüzde pekçok hazır programları da mevcutsa da, hem sınır şarlarının daha iyi kullanılması hem de geometrinin daha iyi analiz edilmesi için, her geometri ve sınır şarlarına özel bilgisayar programlarının hazırlanması, problemlerin çözümü açısından daha doğru sonuçlar verecektir[3,4].

2 Matematiksel Modelleme

Bu çalışmada FEM programının genel adımları takip edilmiştir. İki boyutlu Poisson tipi bir denkelem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \qquad (1)$$

ρ_s yük yoğunluğu, ε ortamın iletkenlik katsayısıdır. Yatay sınır şartları 100 V, dikey sınır şartları 40 V olarak alınmıştır. Yük yoğunluğu olmayan ($\rho_s = 0$) bir bölge için denklem (1) tanımlanırsa denklem, Laplace denklemine dönüşür ve aşağıdaki şekli alır.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

Çözümü yapılmak istenen bölge $(x_n \times y_n)$ şekil.1'de verilmiştir. Burada amaç çözümü aranan bölgeyi, eşit biçok alt bölgelere bölmektir. Bölümler yapıldıktan sonra x yönündeki bölüm sayısısına n_x and y yönündeki bölüm sayısısına da n_y denirse, toplam eleman sayısı ne ile, düğüm sayısı n_d ile ve sınır elemanları sayısı n_p ise:

$$\begin{aligned} ne &= 2n_x n_y \\ n_d &= (n_x+1)(n_y+1) \\ n_p &= 2(n_x+n_y) \end{aligned} \qquad (3)$$

Bu şekilde, çözümü istenen bölge için düğüm ve elemanlar sistematik numaralandırma işlemi tamamlanmış olur (şekil1). Uniform ve nonuniform elemanlara ayırma işlemi bundan sonra çok basittir. Şayet çözümü istenen bölgede nonuniform bir bölmelendirme uygulanaaksa , bölgelerin çok küçük parçalara ayrılması, problemin çözümü açısından daha doğru sonuçlar verecektir. Bölge için yaklaşık çözüm, aşağıdaki denklemle bulunur, denklem (4)

$$V(x,y) \cong \sum_{e=1}^{N} V_e(x,y) \tag{4}$$

burada N üçgen elema sayısını, herbir eleman için uzunluk başına enerji ise denklem (5) ile verilir

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon |E|^2 ds = \frac{1}{2}\int \varepsilon |\nabla V_e|^2 ds \tag{5}$$

Bu denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon [V_e]^T \left[C^{(e)}\right][V_e] \tag{6}$$

Burada T matrisin transpozesini ve $\left[C^{(e)}\right]$ ise katsayılar matrisini göstermektedir. FD ve FEM aynı denklemlerle başlarlar, yani denklem(2) bundan sonra üç nokta yaklaşımı kullanılarak denklemler , çözümü yapılacak aşağıdaki denklem haline dönüştürülürler, yani $V(x,y)$ aşağıdaki denkleme dönüşür[2,3,4]:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(V_{i+j,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \tag{7}$$

Problemin çözümünde karmaşadan kaçınmak ve denklemleri daha basit göstermek için, notasyon (x_i, y_j) yi temsilen (i,j) ifadeleri kullanılmıştır.

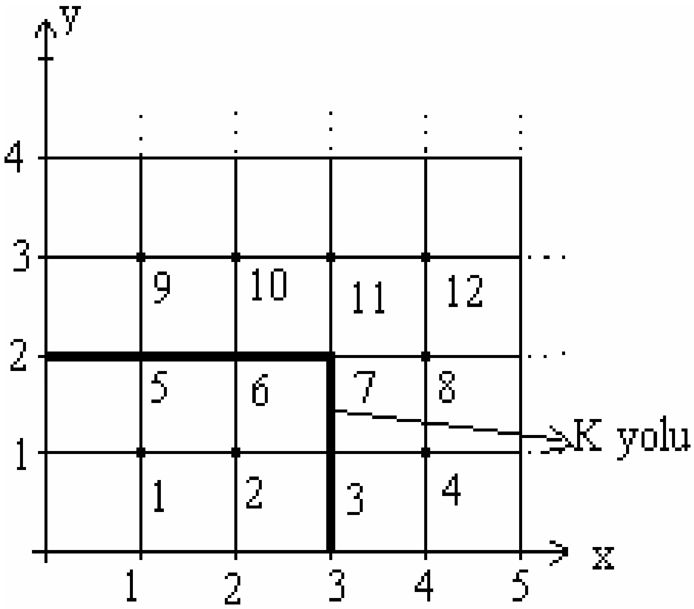
Şekil 1'deki geometriye uygun olarak problemin denklemini Poisson Tip olarak düzenlersek

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=V(x+h,y)-k(x,y)+V(x-h,y)+V(x,y+h)-k(x,y)+V(x,y+h)=-k \tag{8}$$

Olur. Denklemi *V(x,y)* olarak düzenlersek :

$$V(x,y)=\frac{1}{4}(V(x+h,y)+V(x-h,y)+V(x,y+h)+V(x,y-h)+k) \tag{9}$$

Olur. Burada $h = 1/N$. Problem bölgesi N tane eşit parçaya ayrılmıştır ve her birinin uzunluğu, h'yi verir. $N+1$ tane de düğüm noktası mevcuttur. Şekil 1'de bölgeler, düğüm ve elemanlar sayıları verilmiştir [1,2,5,6].

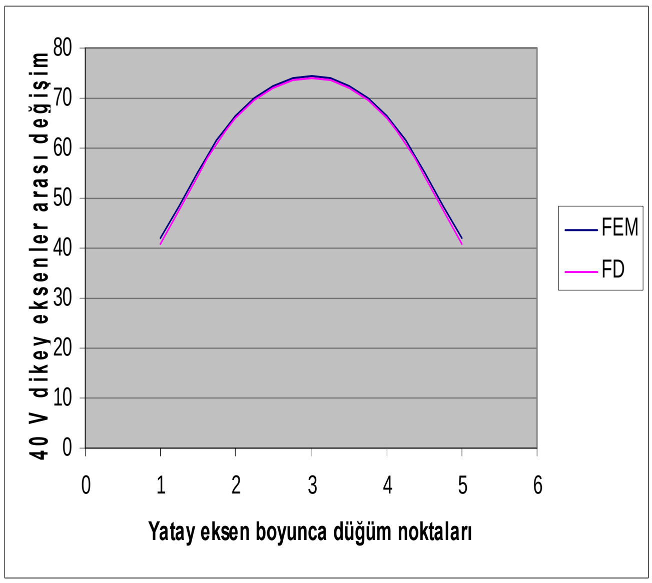


Şekil1: Sonlu elemanlar ve Sonlu Farklar Metodu için Poblem geometrisi tanımı.

Poisson Tip FEM analizi şek.1 için kullanılmış ve FD analizi ile doğruluğu test edilmiştir. Bu analizin sonuçları 3. bölümde verilmiştir.

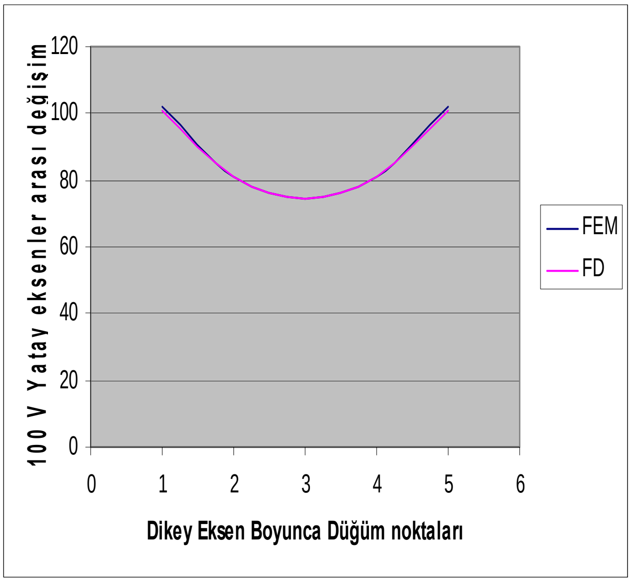
3 Matematiksel Analiz Sonuçları

Bu çalışmada elektriğin çeşitli konularında sıkça kullanılan Poisson tip FEM analizi, Dirichlet sınır koşulları altında şekil 1'de verilen problem için çözülmüştür. Y ekseni ve ona paralel eksen boyunca sınır şartları 40V, x ekseni ve ona paralel eksen boyunca sınır şartları 100V olarak alınmıştır. Bu çalışmada, statik alan gerilim değerleri, Mathematica 6 aracılığı ile yapılmıştır. Programlar, hem programın yapım aşamasında, hem de matematiksel ifadelerin yazımı sırasında, önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Programdan elde sonuçlar, karşılaştırmalı olararak şekil 2, şekil 3 ve şekil 4 de verilmiştir. Bu çalışma için 32 eleman , 25 düğüm noktası seçilmiştir. Programlar bir kere hazırlandıktan sonra, bu değerleri istenildiği kadar çoğaltmak mümkündür.



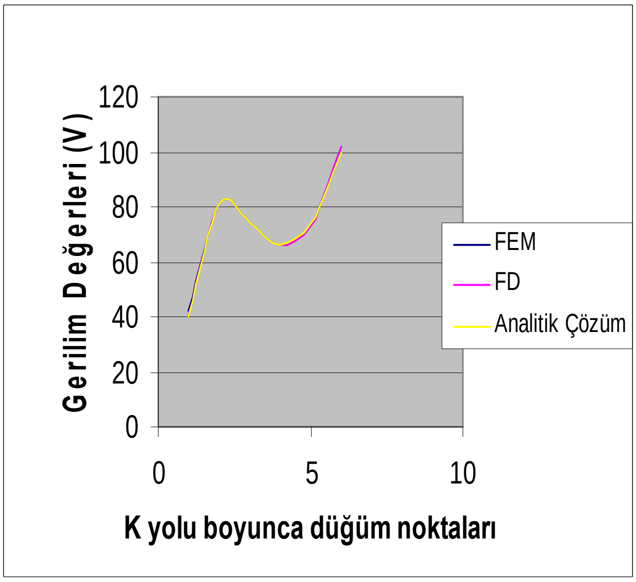
Şekil2: Yatay Eksen Boyunca Gerilim Değişimi.

Şekil 2'de 40V eksenleri arasında gerilim değişimi gösterilmiştir. FEM analizi, FD ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar birebir uyumlu olarak çıkmıştır.



Şekil 3: Dikey Eksen Boyunca Gerilim Değişimi Eğrisi

Şekil 3'de, 100V eksenleri arasında kalan bölgede, gerilim değerlerinin değişimi gösterilmiştir. Bu çalışmada da FEM ve bu analizi test etmek için FD değerleri bulunmuş ve bunlar grafiksel olarak verilmiştir.



Şekil 4: Çözüm bölgesi içinde, bir K yolu boyunca gerilim değişimi değerleri

Şekil 4'de çözüm bölgesi istenen kısımda, bir K yolu boyunca çözümü elde eedilen gerilim değerleri verilmiş, bu değerler FEM, FD ve Analitik çözüm değerleri ile karşılaştırılmıştır. Üç çalışmanında birebir uyumlu olduğu görülmüştür.

4 Sonuç ve Yorumlar

Bu çalışma, Mathematica 6 software aracılığı ile, Poisson Tip, Diriclet sınır koşullarına sahip bir problem için yapılmıştır. Bu çalışmanın sonucunda yapılan FEM programının, FD ve analitik çözüm sonuçları ile tam uyuştuğu görülmüştür. Yüksek gerilim tekniğinde çok kullanılan bu tür çalışmalar, Nuemann ve Robin (karma) sınır şartlarıda kullanılarak, kolayca gerçekleştirilebilinir. Genelde ençok kullanılan sınır şartları dirichlet tipi olduğu için, bu çalışmada, bu sınır şartları kullanılarak problem çözülmüştür. Aynı problemin programı, Laplace tip olarak, Nuemannveya karma sınır şartlarına da kolayca adapte edilebilecek şekildedir. Bu tür problemler magnetik alanlar ve magnetik alanların girdiği, başka bir deyişle, enerji dönüşümü yapabilen diğer elektiriksel cihazlarada, kolayca uygulanabilir .

5 Kaynaklar

[1] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method in Engineering*, NewYork Mc Graw Hill, 1971.
[2] Sadiku M., *Elements of Electromagnetic,* Oxford university press, 2001.
[3]. Agba L.C,. Sadıku M,. Makki A, A further Introduction to finite element Analysis of Electromagnetic Problems, *IEEE transaction on Education*, Vol. 34, No.2, pp.322-329, 1991
[4] W.G. Gray and G.F. Pinder, On the Relationship between the finite Element and Finite Difference Method, *Inter J, Num. Meth. Eng*. vol.14, 1976, pp 893-923.
[5] Kalenderli Ö., Sonlu Elemanlar Metodu Ders Notları, İTÜ matbaası, 2000.
[6] Gil Salvador, Martin Eduardo Saleta and Dina Tobia, Experimental study of the Neumann and Dirichlet boundary conditions in two-dimensional electrostatic problems *Am. J. Phys.,* Vol. 70, No. 12, December 2002.