

# DİNAMİĞİNDE BELİRSİZLİK İÇEREN BİR UÇAĞIN BOYLAMASINA HAREKETİNİN DAYANIKLI DENETİMİ

Günyaz ABLAY<sup>1</sup>

Ahmet UÇAR<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Elektrik-Elektronik Müh. Ana Bilim Dalı, 23119 – Elazığ  
e-posta: g\_ablay@yahoo.com

<sup>2</sup>Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi  
Elektrik-Elektronik Müh. Böl., 23119 – Elazığ  
e-posta: aucar1@firat.edu.tr

## ÖZET

*Bu çalışmada bir uçak dinamiğinin boylamasına hareketinin denetiminin yapılması için bir dayanıklı durum geribeslemeli denetleç önerilmiştir. Uçağın uçuş zarfı içinde istenen bir uçuş konumunda yeterli sürede tutulması başlıca bir denetim problemidir. İç ve dış ortam bozucu etkilerden dolayı uçağın dinamiği, kısa bir süre içinde olsa, değişerek belirsizlik oluşturabilir. Bu belirsizlikler, denetim sinyali tanım bölgesi içinde (matched uncertainty) veya dışında (mismatched uncertainty) tanımlanabilir.*

*Bir uçağın belirlenen uçuş zarfı içinde tutulması için tasarlanan denetleç, hangi tür belirsizlik olursa olsun beklenen performansı sağlaması gerekir. Burada önerilen denetleç, denetim sinyali tanım bölgesi dışında tanımlan belirsizlik (mismatched uncertainty) olması durumunda kapalı çevrimli sistemin hedeflenen performans sağlayacak türdendir. Önerilen denetleç doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısımdan oluşmuştur. Denetlecin doğrusal kısmı optimal kuadratik regülatör (LQR) yöntemi temelli olup nominal uçak modelinin hedeflenen performansı göstermesi için tasarlanmıştır. Denetlecin doğrusal olmayan kısmı ise iki konumlu hibrit özellikte olup, sistemdeki belirsizlikleri karşılamak üzere kapalı çevrimli sistemin kararlılığını Lyapunov yöntemine göre sağlayacak biçimde tasarlanmıştır.*

**Anahtar Sözcükler:** Uçuş Denetim, Belirsizlik İçeren Sistemler, Doğrusal Denetim, Doğrusal Olmayan Denetim.

## 1. GİRİŞ

Hava araçları geri besleme için kullanılan ölçümlerden, bozucu etkilerden ve modellenemeyen dinamiklerden dolayı belirsizlikler içerir [1-3]. Hava araçlarında olduğu gibi genellikle mühendislik sistemleri yapıları gereği parametre ve model belirsizliği içerir. Ayrıca belirsizlikler sistemin bilinmeyen parametrelerinden, tanımlanması zor olan doğrusal olmayan bağlantılardan ve modellenemeyen dinamiklerden meydana gelebilir ve belirsizlik içeren

sistemlerin denetimi için bir çok denetleç geliştirilmiştir [4-7].

Burada kullanılan denetleç, [7]'de önerilen doğrusal olmayan durum geribeslemeli bir denetleç olup, birçok sisteme uygulanmış ve etkinliği kanıtlanmıştır.

Bu çalışmada [7]'deki denetleç, denetim sinyali tanım bölgesi dışında tanımlan belirsizlik (*mismatched uncertainty*) içeren ve doğrusal olmayan uçağın boylamasına hareketinin denetimi için tasarlanmıştır. Bu girişten sonra ikinci bölümde, çalışılacak sistemin tanımı ve problem formülasyonu verilmiştir. Üçüncü bölümde denetleç tasarlanmıştır. Yayımla dördüncü bölümünde ise uygulama olarak [1]'de tanımlanan bir uçak dinamiği kullanılmış ve sonuçlar beşinci bölümde tartışılmıştır.

## 2. SİSTEM TANIMI VE FORMÜLASYON

Belirsizlik içeren fiziksel bir dinamik sistemin durum uzay diyagramı,

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\sigma)]x(t) + [B + \Delta B(\sigma)]u(t) + H v(t), \quad (1)$$
$$x(t_0) = x_0$$

biçimindedir. Burada,  $x(t) \in R^n$  durum vektörü,  $u(t) \in R^r$  denetim vektörü,  $v(t) \in R^l$  giriş vektörü,  $A \in R^{n \times n}$  sistem matrisi,  $B \in R^{n \times r}$  giriş matrisi ve  $H \in R^{n \times l}$  girişe uygulanan bozucu yada doğrusal olmayan elemanların matrisidir.  $\Delta A(\sigma(t))$  ve  $\Delta B(\sigma(t))$ ,  $\sigma(t)$  parametresine bağlı olup sistem matrisindeki belirsizlikleri ve giriş matrisindeki belirsizlikleri içerir.  $Hv(t)$  terimi girişteki belirsizlikleri yada doğrusal olmayan terimleri içerir.

Denklem (1)'deki sistemin nominal kısmı,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

dir.

Denklem (1)'deki sistemle ilgili olarak aşağıdaki tanım ve kabullerin sağlandığı varsayılmıştır.

**Tanım 1:** Bir  $f(\cdot) : D \times R \rightarrow R^q$ ,  $D \subset R^l$  fonksiyonu, ancak ve ancak her bir  $t \in R$  için  $f(\cdot, t)$

sürekli bir fonksiyon, her bir  $x \in D$  için  $f(x, \cdot)$  fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir ve  $D \times R$ 'nin her bir  $C$  altkümesi tüm  $(x, t) \in C$  için,  $M_C(\cdot)$  Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu olmak üzere,  $\|f(x, t)\| \leq M_C(t)$  şartını sağlıyorsa Caratheodory olarak adlandırılır.

*Kabul 1:* Belirsizlik parametreleri  $\sigma \in R^p$  Lebesgue ölçülebilirler.

*Kabul 2:*  $G(\cdot) \in R^{rxn}$ ,  $\Delta\tilde{A}(\cdot) \in R^{n \times n}$ ,  $E(\cdot) \in R^{rxr}$ ,  $\Delta\tilde{B}(\cdot) \in R^{n \times r}$ ,  $F \in R^{rxl}$  ve  $\tilde{H} \in R^{n \times l}$  birer Caratheodory matris fonksiyonları olmak üzere,

$$\Delta A(\sigma) = BG(\sigma) + \Delta\tilde{A}(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{A}, \quad (3a)$$

$$\Delta B(\sigma) = BE(\sigma) + \Delta\tilde{B}(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{A}, \quad (3b)$$

$$H = BF + \tilde{H} \quad (3c)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\Delta\tilde{A}(\cdot) \in R^{n \times n}$ ,  $\Delta\tilde{B}(\cdot) \in R^{n \times r}$  ve  $\tilde{H} \in R^{n \times l}$  denkleştirme şartını sağlamayan kısımlar olup denklem (3)'teki eşitlikleri sağlayacak şekilde keyfi olarak seçilebilirler veya bunların seçimi tek değildir. Belirsizlikleri içeren  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  ve  $H$  matrislerinin denklem (3)'teki gibi ayrıştırılması denetim tasarımını etkileyebildiği gibi sistem performansını da etkileyebilmektedir [5].

*Kabul 3:* Denklem (2)'de verilen sistemin tüm durum değişkenleri ölçülebilirdir ve sistemin nominal kısmı  $(A, B)$  tüm durum denetlenebilir.

### 3. DENETLEÇ TASARIMI

Denetleç tasarımı, denklem (4)'te verildiği gibi, doğrusal  $u_l(t)$  ve doğrusal olmayan  $u_n(t)$  denetleçlerinin toplamından oluşmuştur.

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (4)$$

#### 3.1. Doğrusal Denetleç

Doğrusal denetleç tasarımı denklem (1)'in sadece denklem (2) ile verilen nominal kısmı esas alınarak yapılır. Nominal sistemin kararlılığını sağlamak ve hedeflenen geçici rejim yanıtını oluşturmak için optimal doğrusal kuadratik regülatör (LQR) yöntemi kullanılarak tasarım yapılacaktır. Kuadratik performans indeksi  $Q$  pozitif simetrik durum ağırlık ve  $R$  pozitif simetrik denetim ağırlık matrisleri olmak üzere;

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q_R x(t) + u_l^T(t)R u_l(t)] dt \quad (5)$$

dir. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemin optimal denetimi;  $P_R$  pozitif simetrik bir matris olup, denklem (6) ile verilen indirgenmiş Riccati matris denkleminin çözümü [8] olmak üzere;

$$A^T P_R + P_R A - P_R B R^{-1} B^T P_R + Q_R = 0 \quad (6)$$

Denetlecin doğrusal kısmı,

$$u_l(x) = -R^{-1} B^T P_R x(t) = -Kx(t) \quad (7)$$

dir.

#### 3.2. Doğrusal Olmayan Denetleç

Doğrusal olmayan denetim tasarımında denklem (1)'de verilen sistemin tümü esas alınarak tasarım yapılır. Doğrusal olmayan denetimin amacı, belirsiz parametrelerin etkilerini karşılamak ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlamaktır. Denklem (2)'deki nominal sistem ve denklem (7)'de verilen denetleçten oluşan kapalı çevrim sistemin kararlı sistem matrisi,  $\bar{A} = A - BK$  ve  $Q_L \in R^{n \times n}$  pozitif tanımlı simetrik matris olmak üzere;  $P_L$  aşağıdaki Lyapunov denkleminin çözümüdür:

$$P_L \bar{A} + \bar{A}^T P_L + Q_L = 0 \quad (8)$$

Denetlecin doğrusal olmayan kısmı,  $\varepsilon$  denetim tasarımcısı tarafından belirlenen pozitif bir sabite olmak üzere;

$$u_n(x) = \begin{cases} -\frac{B^T P_L x}{\|B^T P_L x\|} \rho(x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\frac{B^T P_L x}{\varepsilon} \rho(x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (9)$$

dir. Denklem (3)'te verilen kabuller ve denklem (4)'te verilen denetleç  $u(t) = -Kx + u_n(x)$ , denklem (1)'de yerine yazılırsa kapalı çevrimli sistem;

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu_n + B(G(\sigma)x - E(\sigma)Kx + E(\sigma)u_n + Fv) + \Delta\tilde{A}x - \Delta\tilde{B}Kx + \Delta\tilde{B}u_n + \tilde{H}$$

olur. Tüm belirsizlikler  $e(x, t)$  ve  $\tilde{e}(x, t)$ 'de bir araya toplanırsa [5];

$$e(x, t) = G(\sigma)x - E(\sigma)Kx + E(\sigma)u_n(x) + Fv \quad (10)$$

$$\tilde{e}(x, t) = \Delta\tilde{A}x - \Delta\tilde{B}Kx + \Delta\tilde{B}u_n + \tilde{H} \quad (11)$$

olur. Burada,  $e(x, t)$  denetim sinyali tanım bölgesi içinde (*matched uncertainty*) tanımlanan belirsizlikleri ve  $\tilde{e}(x, t)$  denetim sinyali tanım bölgesi dışındaki (*mismatched uncertainty*) belirsizlikleri gösterir. Böylece kapalı çevrimli sistem,

$$\dot{x} = \bar{A}x + B(u_n(x) + e(x, t)) + \tilde{e}(x, t) \quad (12)$$

olarak elde edilir. Denklem (10)'daki belirsizlikler  $e(x, t)$ , aşağıdaki norm eşitsizliğini sağlar;

$$\|e(x, t)\| \leq \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|G(\sigma)x\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)Kx\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| \rho(x) + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \triangleq \rho(x) \quad (13)$$

ve

$$1 - \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| > 0 \quad (14)$$

olmak üzere [7],  $\rho(x)$  fonksiyonu;

$$\rho(x) \triangleq \left[ 1 - \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| \right]^{-1} \left[ \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|G(\sigma)x\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)Kx\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \quad (15)$$

olur. Böylece denklem (9)'da tanımlanan denetlecin doğrusal olmayan kısmının katsayısı  $\rho(x)$  tanımlanmış ve belirlenmiş olur.

Denklem (14) sağlanmak şartıyla,  $\rho_1(\cdot) : R^n \rightarrow R$  olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &\triangleq \left[ 1 - \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| \right]^{-1} \left[ \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|G(\sigma)\| \|x\| \right. \\ &\quad \left. + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)K\| \|x\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ &\triangleq a + b \|x\| \end{aligned} \quad (16)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} a &\triangleq \left[ 1 - \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| \right]^{-1} \left[ \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ b &\triangleq \left[ 1 - \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)\| \right]^{-1} \left[ \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|G(\sigma)\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|E(\sigma)K\| \right] \end{aligned}$$

dir. Denklem (15) ve (16)'daki tanımlardan görüldüğü gibi,

$$\rho_1(x) \geq \rho(x) \quad (17)$$

dir.

Denklem (11)'de verilen belirsizlik  $\tilde{e}(x,t)$ 'nin norm eşitsizliği:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}(x,t)\| &= \left\| \Delta\tilde{A}(\sigma)x - \Delta\tilde{B}(\sigma)Kx + \Delta\tilde{B}(\sigma)u_n(x) + \tilde{H} \right\| \\ &\leq \tilde{G} \|x\| + \tilde{G}_v \end{aligned} \quad (18)$$

olarak bulunur [5]. Burada,

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\triangleq \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|\Delta\tilde{A}(\sigma)\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|\Delta\tilde{B}(\sigma)K\| + \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|\Delta\tilde{B}(\sigma)\| b \\ \tilde{G}_v &\triangleq \max_{\sigma \in \mathcal{A}} \|\Delta\tilde{B}(\sigma)\| a + \max_{v \in \mathcal{V}} \|\tilde{H}\| \end{aligned}$$

dir.

*Teorem 1:* Denklem (1)'de tanımlanan ve kabul 1-3 şartlarını sağlayan sistemin denklem (7) ve (9)'da tanımlanan denetleçler ile oluşturduğu kapalı çevrim dinamiği kararlıdır ve hedeflenen performansı sağlar.

*İspat:* Denklem (12)'de verilen kapalı çevrimli sistem için Lyapunov fonksiyonu  $\forall x \in R^n$  için,

$$V(x,t) = x^T P_L x > 0, \quad x \neq 0 \quad (19)$$

olarak alınır,  $V(x,t)$ 'nin türevi;

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) &= \nabla_x^T V(x,t) [\bar{A}x + B(u_n + e)] \\ &\quad + \nabla_x^T V(x,t) \tilde{e}(x,t) \end{aligned} \quad (20)$$

olur. Burada türev alma işlemi için denkleştirilebilen ve denkleştirilemeyen belirsizlikleri ayrı ayrı inceleyelim ve daha sonra birleştirelim.

a) *Denkleştirilebilen belirsizlikler;*

$P_L = P_L^T > 0$  olduğundan  $P_L x + P_L^T x = 2P_L x$  olarak yazılabileceğinden,

$$\nabla_x^T V(x,t) [\bar{A}x + B(u_n + e)] = -x^T Q_L x + 2x^T P_L B(u_n + e)$$

olur.

b) *Denkleştirilemeyen belirsizlikler;*

Denklem (18)'de verildiği gibi  $\tilde{e}(x,t)$ 'nin norm eşitsizliği  $\|\tilde{e}(x,t)\| \leq \tilde{G} \|x\| + \tilde{G}_v$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \nabla_x^T V(x,t) \tilde{e}(x,t) &= 2x^T P_L \tilde{e} \\ &\leq 2\lambda_{\max}(P_L) \|x\| [\tilde{G} \|x\| + \tilde{G}_v] \\ &\leq 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G} \|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G}_v \|x\| \end{aligned}$$

olarak bulunur [5]. Böylece Lyapunov fonksiyonunun türevi,

$$\dot{V}(x,t) = -x^T Q_L x + 2x^T P_L B(u_n + e) + 2x^T P_L \tilde{e} \quad (21)$$

olarak elde edilir.  $\bar{A} = A - BK$  matrisi kararlı olduğundan pozitif tanımlı ve simetrik  $Q_L$  matrisi için  $P_L$  pozitif tanımlı simetrik bir matristir. İşlem kolaylığı için  $\delta = B^T P_L x$  alınır, o zaman denklem (21)'in sağındaki ikinci terim  $x^T P_L B [u_n(x) + e(x,t)] = \delta^T (u_n + e)$  olur. Denklem (13)'te  $\|e(x,t)\| \leq \rho$  ve denklem (9)'daki doğrusal olmayan denetlecin ilk durumu  $\|\delta\| > \varepsilon$  için,

$$\begin{aligned} \delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left( -\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} + e \right) = \delta^T \left( -\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} \right) + \delta^T e \\ &\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\|\delta\|} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \\ &\leq -\|\delta\| \rho + \|\delta\| \rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Denklem (9)'daki doğrusal olmayan denetlecin ikinci durumu  $\|\delta\| \leq \varepsilon$  için

$$\begin{aligned} \delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left( -\rho \frac{\delta}{\varepsilon} + e \right) = \delta^T \left( -\rho \frac{\delta}{\varepsilon} \right) + \delta^T e \\ &\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\varepsilon} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \quad (22) \\ &\leq -\|\delta\|^2 \frac{\rho}{\varepsilon} + \|\delta\| \rho \end{aligned}$$

olur. Denklem (22)'nin en büyük değerini elde edebilmek için, eğer  $\|\delta\| = \frac{\varepsilon}{2}$  alınır, denklem (22)'nin en büyük değeri,

$$\delta^T (u_n + e) \leq \rho \frac{\varepsilon}{4}$$

olarak elde edilir. Böylece denklem (21)'in sağındaki ikinci terimin en büyük değeri elde edilmiş olur. Bu değer  $\dot{V}(x,t)$ 'de yerine konursa,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) &\leq -x^T Q_L x + \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G} \|x\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G}_v \|x\| \end{aligned}$$

olur. Tüm  $t$  ve tüm  $x$  değerleri için,

$$\begin{aligned} x^T Q_L x - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} - 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G} \|x\|^2 \\ - 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G}_v \|x\| > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

şartı sağlanırsa, Lyapunov fonksiyonunun türevi;

$$\dot{V}(x,t) < 0, \quad x \neq 0 \quad (24)$$

olur. Denklem (9)'un ikinci durumu için kapalı çevrimli sistemin kararlı olduğu başlangıç şartlarının değişim aralığını tespit edelim. Bunun için, denklem (17)'den dolayı denklem (16)'daki  $\rho_1(x) \triangleq a + b \|x\|$  ifadesi denklem (23)'te kullanılırsa, denklem (23),

$$\begin{aligned} \left[ \lambda_{\min}(Q_L) - 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G} \right] \|x\|^2 \\ - \left[ \frac{\varepsilon}{2} b + 2\lambda_{\max}(P_L) \tilde{G}_v \right] \|x\| - \frac{\varepsilon}{2} a > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

olarak yazılabilir. Burada,  $\|x\| = \eta$  olarak tanımlanırsa, sonuçta;

$$\eta = \frac{b\varepsilon/4 + \lambda_{\max}(P_L)\tilde{G}_v}{\lambda_{\min}(Q_L) - 2\lambda_{\max}(P_L)\tilde{G}} + \sqrt{\frac{a\varepsilon/2}{\lambda_{\min}(Q_L) - 2\lambda_{\max}(P_L)\tilde{G}} + \left(\frac{b\varepsilon/4 + \lambda_{\max}(P_L)\tilde{G}_v}{\lambda_{\min}(Q_L) - 2\lambda_{\max}(P_L)\tilde{G}}\right)^2} \quad (26)$$

olarak bulunur.  $x=0$  merkezli,  $\eta$  yarıçaplı  $B(\eta)$  küresi tanımlansın. Tüm  $x \in B(\eta)$  ve tüm  $t \in R^1$  için denklem (24)'te verilen  $\dot{V}(x,t) < 0$  şartı sağlanmış olur.

#### 4. UÇAĞIN BOYLAMSAL HAREKETİ VE DENETİM PROBLEMİ

Bir savaş uçağın boylamsal hareketini yalnızca momentler için ele alalım ve basitleştirmek için uçağın boylamsal hareketinin denetiminin yalnızca yükseklik dümeni açısıyla denetlendiğini varsayalım. Böylece uçağın boylamsal hareketinin denklemleri durum uzay formunda [1];

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{x_1} & X_{x_2} & 0 & -g \cos \gamma_0 \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} & U_0 & -g \sin \gamma_0 \\ \tilde{M}_{x_1} & \tilde{M}_{x_2} & \tilde{M}_{x_3} & \tilde{M}_{x_4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_u \\ Z_u \\ \tilde{M}_u \\ 0 \end{bmatrix} u$$

olarak yazılabilir. Burada  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ ,  $x_1$  uçağın ileriye doğru hızı,  $x_2$  hücum açısı,  $x_3$  yunuslama açısal hızı,  $x_4$  yunuslama açısı,  $g$  yerçekimi ivmesi,  $U_0$  uçağın ileriye doğru denge hızı ve  $X_{x_1}$ ,  $X_{x_2}$ ,  $X_u$ ,  $Z_{x_1}$ ,  $Z_{x_2}$ ,  $Z_u$ ,  $M_{x_1}$ ,  $M_{x_2}$ ,  $M_{x_3}$ ,  $M_{x_4}$ ,  $M_u$  ise ilgilenilen uçuş durumundaki kararlılık türevleridir.  $\tilde{M}_{x_1}$ ,  $\tilde{M}_{x_2}$ ,  $\tilde{M}_{x_3}$ ,  $\tilde{M}_{x_4}$ ,  $\tilde{M}_u$  ise aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{x_1} &= (M_{x_1} + M_{x_2} Z_{x_1}), & \tilde{M}_{x_2} &= (M_{x_2} + M_{x_2} Z_{x_2}) \\ \tilde{M}_{x_3} &= (M_{x_3} + U_0 M_{x_2}), & \tilde{M}_{x_4} &= (-g M_{x_2} \sin \gamma_0) \\ \tilde{M}_u &= (M_u + M_{x_2} Z_u) \end{aligned}$$

Seçilen uçak tipi iki motorlu jet savaş uçağı ve ilgilenilen uçuş durumları için uçuş parametreleri ve kararlılık türevleri tablo 1 ve 2'de verilmiştir. Tablo 1'de verilen  $\tilde{q}$  dinamik basıncı,  $\alpha_0$  denge hücum açısını ve  $\gamma_0$  denge yörünge açısını göstermektedir.

**Tablo 1:** Uçuş durumu parametreleri

Parametre	İrtifa (m)	Mach no.	$U_0$ (m s <sup>-1</sup> )	$\tilde{q}$ (N m <sup>-2</sup> )
Uçuş Durumu	9150	0.8	240	10700
Parametre	$\alpha_0$ (derece)	$\gamma_0$ (derece)		
Uçuş Durumu	+2.5	0		

**Tablo 2:** Kararlılık türevleri (boylamasına hareket)

Kararlılık Türevi	$X_{x_1}$	$X_{x_2}$	$Z_{x_1}$	$Z_{x_2}$	$Z_{x_3}$	
Uçuş Durumu	-	0.012	-0.12	-0.54	-0.002	
Kararlılık Türevi	$Z_u$	$M_u$	$M_{x_2}$	$M_{\dot{x}_2}$	$M_{x_3}$	$M_{x_4}$
Uçuş Durumu	0.036	-12.6	0.69	-0.51	-0.48	0

Tablo 1 ve 2 kullanılarak nominal sistem matrisleri  $A$  ve  $B$ ;

$$A = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & 0 & -9.81 \\ -0.128 & -0.54 & 1 & 0 \\ 0.064 & 0.96 & -0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.036 \\ -12.61 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Sistemin belirsizlikleri içeren matrisleri ve  $\sigma(x,t)$  belirsiz parametreleri,

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{43} & 0 \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{25} \\ \sigma_{35} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$|\sigma_{11}| = |\sigma_{12}| = |\sigma_{14}| = |\sigma_{31}| = |\sigma_{32}| = |\sigma_{33}| = |\sigma_{43}| \leq 0.01, \\ |\sigma_{21}| = |\sigma_{22}| = |\sigma_{23}| = |\sigma_{25}| \leq 0.1, \quad |\sigma_{35}| \leq 0.5$$

dir. Böylece denklem (3)'ten dolayı  $G(\sigma(x,t))$  ve  $E(\sigma(x,t))$  matrisleri,

$$G(\sigma) = [\sigma_{21} \ \sigma_{22} \ \sigma_{23} \ 0], \quad E(\sigma) = [\sigma_{35}]$$

olur. Bu matrislerin seçimi [5] gereğince keyfi seçilmiştir.

#### 4.1. Doğrusal Denetlecin Tasarımı

Denklem (5)'te verilen hedeflenen performans indeksi  $Q_R = \text{diag}[1, 10, 50, 1]$  ve  $R = 5$  için Riccati denklemi (7) den,

$$K = [0.4745 \ -0.3869 \ -3.2246 \ -5.3498]$$

olarak bulunur. Bu durumda kapalı çevrimli sistemin özdeğerleri  $\lambda_{1,2} = -0.7643 \pm j0.7933$ ,  $\lambda_3 = -0.7740$  ve  $\lambda_4 = -39.9099$  olur.

#### 4.2. Doğrusal Olmayan Denetlecin Tasarımı

Denklem (8)'de verilen doğrusal olmayan denetimi aşağıdaki formda yeniden yazalım.

$$u_n(x) = \begin{cases} -\rho(x) \text{sgn}(B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\rho(x) \frac{1}{\varepsilon} (B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases}$$

burada  $P_L$ , denklem (9)'da verilen Lyapunov denkleminin  $Q_L = \text{diag}[10, 1, 1, 1]$  için çözümüdür.

Böylece denklem (30)'da verilen  $B^T P_L$  matrisi,

$$B^T P_L = [9.9635 \ 4.3305 \ -1.6015 \ -64.238]$$

olarak bulunur.

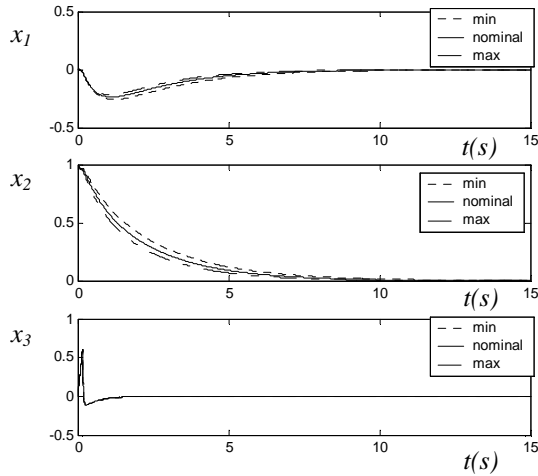
Sonuç olarak  $\rho(x(t))$  fonksiyonu,

$$\rho(x) = 0.2|x_1 + x_2 + x_3| + |0.4745x_1 - 0.3869x_2 - 3.2246x_3 - 5.3498x_4|$$

olarak bulunur.

### 4.3. Simülasyon Sonuçları

Başlangıç şartları  $x(0)=[0,1,0,0]^T$  ve  $\varepsilon = 0.01$  sabit değeri için iki motorlu jet savaş uçağının boylamsal hareketinin simülasyon sonuçları Matlab/SIMULINK programı kullanılarak elde edilmiştir. Belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları Şekil-1, Şekil-2 ve Şekil-3'te verilmiştir. Sistem girişine, maksimum değişim aralığı  $|w(t)| \leq 0.003$  olan bozucu sinyali uygulanmıştır. Şekil-1'de  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  durum değişkenlerinin geçici rejim davranışı verilmiştir. Şekil-1'den de görüldüğü gibi sistem yörüngesi hedeflenen sürede sürekli duruma ulaşmıştır. Şekil-2'de denetim sinyali  $u(t)$ 'nin zamanla değişimi görülmektedir. Denetim sinyalinin sürekli rejim boyunca,  $t \geq 10$  s titreşimsiz ve düşük değerli olması bu denetlecin önemli bir özelliğidir. Şekil-3'te ise şekil-2'deki denetim sinyalinin ayrıntılı değişimi verilmiştir. Şekil 3'deki titreşimler denklem 9'daki tasarım parametresi  $\varepsilon$  büyük seçilerek daha da küçültülebilir, ancak bu durumda Şekil 1'deki durum değişkenlerinin sürekli durum performansı kötüleşir.



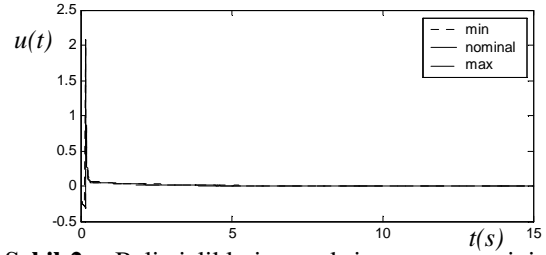
**Şekil-1:** Belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri ve  $x(0)=[0,1,0,0]^T$  ve  $\varepsilon = 0.01$  için; durum değişkenleri  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  değişimleri.

## 5. SONUÇLAR

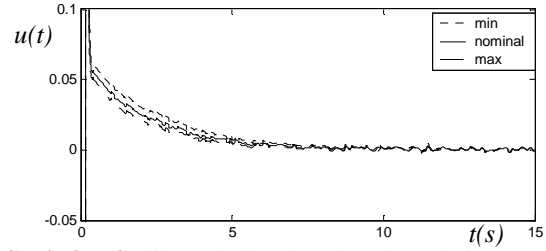
Bu çalışmada, parametre belirsizliği içeren iki motorlu jet savaş uçağının uçuş denetim problemi ele alındı ve uçağın boylamsal hareketinin dayanıklı (robust) durum geribeslemeli denetimi yapıldı. Burada belirsizliklerin değişim aralığı verildiğinden, bu değişim aralığını karşılayan ve hedeflenen kapalı çevrimli sistem performansını da sağlayan [7]'de önerilen denetleç, belirsizlik içeren iki motorlu jet savaş uçağının dinamiği için tasarlandı. Önerilen denetleç, doğrusal ve doğrusal olmayan iki denetleçten

oluşmaktadır. Doğrusal denetleç, nominal sistemin kararlılığını ve hedeflenen geçici durum davranışının görülmesini sağladı. Doğrusal olmayan denetleç ise belirsiz parametrelerin ve doğrusal olmayan elemanların etkisini karşıladı ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağladı.

Tasarlanan denetleç ile nominal modeli kararsız sistem için kapalı çevrim kararlılığı garantilenerek sistem yörüngesinin, parametre belirsizlikleri, giriş bozucusu ve seçilen başlangıç şartları değerlerine rağmen hedeflenen noktaya ulaşması ve orada kalması sağlandı.



**Şekil-2:** Belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri ve  $x(0)=[0,1,0,0]^T$  ve  $\varepsilon = 0.01$  için; denetim sinyali  $u(t)$ .



**Şekil-3:** Şekil 2'deki denetim işaretinin ayrıntılı değişimi.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Mclean D., *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall (UK), 1990.
- [2] Russel J. B., *Performance and Stability of Aircraft*, Arnold, London, (UK), 1996.
- [3] Stevens B. L. and Lewis F. L. *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley & Sons, New Jersey, USA, 2003.
- [4] Schweppe F. C. *Uncertain Dynamic Systems* Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, (USA) 1973.
- [5] Chen Y.H., "On the Robustness of Mismatched Uncertain Dynamical Systems," *ASME J., Measurement, and Control*, vol. 109, No: 1, pp.29-35, 1987.
- [6] Slotine J.J.E. and Li W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [7] Breinl W. and Leitmann G., "State Feedback for Uncertain Dynamical Systems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 22, pp.65-87, 1987.
- [8] Ogata K., *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, 2002.