

AYRIK \mathcal{H}_∞ MODEL EŞLEME PROBLEMİNİN TEK SERBESTLİK DERECELİ STATİK DURUM GERİBESLEMESİ İLE ÇÖZÜMÜ

Murat AKIN

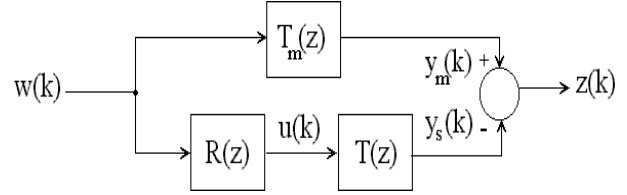
Atilla BİR

Elektrik Mühendisliği Bölümü
Elektrik-Elektronik Fakültesi
İstanbul Teknik Üniversitesi, 80626, Maslak/İstanbul
murakin@elk.itu.edu.tr abir@elk.itu.edu.tr
Fax:(+90)212 285 67 00

Anahtar Sözcükler: Model Eşleme Problemi, Doğrusal Matris Eşitsizlikleri, \mathcal{H}_∞ Optimal Kontrol, Tek Serbestlik Dereceli Statik Durum Geribeslemesi

Abstract

The aim of this paper is to develop a new approach for solving the discrete model matching problem, by static state feedback in the sense of \mathcal{H}_∞ optimality criterion, using Linear Matrix Inequalities (LMIs). The main contribution of this study could briefly be explained as to reformulate the discrete model matching problem in LMI formulation and to present the solvability conditions of the problem, and to give a design procedure for the one degree of freedom static state feedback control law, that provides the best performance of the discrete \mathcal{H}_∞ model matching problem.



Şekil.1

Burada transfer fonksiyonları matrisinin ayrık \mathcal{H}_∞ normu,

$$\|G(z)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0; 2\pi]} \sigma_{max}(G(e^{j\omega})) \quad (2)$$

ilişisini sağlar.

1 GİRİŞ

$T(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ kontrol edilmek istenen sistemin kararlı açık çevrim transfer fonksiyonları matrisi, $T_m(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ ise kontrol edilen sisteme kapalı çevrimli durumda kazandırmak istediğimiz davranış ölçütlerini sağlayan, diğer bir deyişle uygun sıfır-kutup dağılımına sahip bir model sistemin kararlı transfer fonksiyonları matrisini ifade etsin. Ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme problemi,

$$\gamma_{opt} = \inf_{R(z) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_m(z) - T(z)R(z)\|_\infty \quad (1)$$

eniylemek anlamına gelir. Buna göre bir $R(z)$ kontrolörü yardımıyla $T(z)$, $T_m(z)$ 'ye γ_{opt} 'in büyüklüğüne göre eşlenmek istenir, (Şekil.1).

\mathcal{H}_∞ model eşleme problemi, Nevanlinna-Pick Problemi'ne [3] ya da Nehari Problemi'ne [5,6], indirgenerek çözülebilmekte, ayrıca daha farklı yaklaşımlarla da incelenebilmektedir [10]. İlk iki yaklaşımın ortak özelliği problemlerin yapısı gereği önce γ_{opt} 'in bulunması, sonra kontrolör tasarımına geçilmesidir. Sözü edilen çalışmaların tümünde $R(z)$ bir önkontrolör olarak yer alır ve sistem çift serbestlik dereceli dinamik durum geribeslemesi şeklinde değerlendirilir [11].

\mathcal{H}_∞ model eşleme probleminin, doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımından yararlanılarak sürekli sistemler için çift serbestlik dereceli dinamik durum geribeslemesi şeklinde çözümü [9]'da; ayrık sistemler için çift serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi şeklinde çözümü ise [1]'de uygulanmıştır.

Bu çalışmada, daha önce herhangi bir yöntemle

çözüldüğü bilinmeyen, ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme problemi tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi ile önce ayrık \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemine indirgenmekte, daha sonra doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözülmekte ve kontrolör tasarımı için bir algoritma önerilmektedir.

Bu çalışmada, $KerM$ ve ImM , sırasıyla M matrisinin sıfır ve görüntü uzaylarını; N^T , bir N matrisinin transpozisini ve $P > 0$ ise P matrisinin positif tanımlı (positive definite) olduğunu ifade edecektir.

2 AYRIK \mathcal{H}_∞ MODEL EŞLEME PROBLEMİNİN AYRIK \mathcal{H}_∞ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNE İNDİRGENMESİ

Şekil.2'de ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme probleminin tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi ile çözümlenmesini sağlayacak blok diyagramı görülmektedir. Burada (A, B, C, D) kontrol edilmek istenen sistemin yani $T(z)$ 'nin, (F, G, H, J) ise model sistemin yani $T_m(z)$ 'nin herhangi bir durum uzayı modelini ifade etmektedir:

$$T(z) : \quad x(k+1) = Ax(k) + Bv(k) \quad (3)$$

$$y_s(k) = Cx(k) + Dv(k) \quad (4)$$

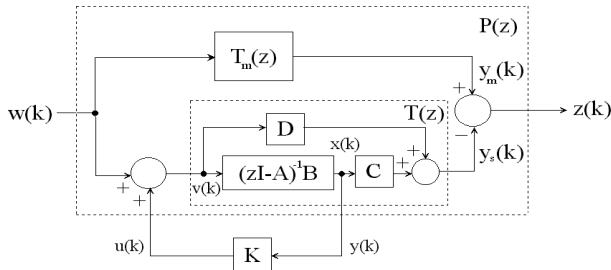
$$T_m(z) : \quad q(k+1) = Fq(k) + Gw(k) \quad (5)$$

$$y_m(k) = Hq(k) + Jw(k) \quad (6)$$

$x(k) \in \mathcal{R}^{n_s}$, $q(k) \in \mathcal{R}^{n_m}$, $v(k) \in \mathcal{R}^m$, $w(k) \in \mathcal{R}^m$, $y_m(k) \in \mathcal{R}^p$, $y_s(k) \in \mathcal{R}^p$ özelliklidir ve kontrol işareti $u(k)$,

$$u(k) = Kx(k) \quad (7)$$

şeklinde geribeslenmektedir.



Şekil.2

$P(z)$ sisteminin durum uzayı modeli şu şekilde ifade

edilebilir:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (8)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + (J - D)w(k) - Du(k) \quad (9)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

İşlemleri basitleştirmek için aşağıdaki matrisleri tanımlayalım:

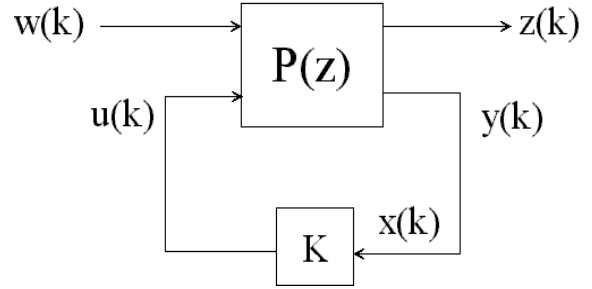
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_m \times m} \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} I_{n_s} & 0_{n_s \times n_m} \end{bmatrix} \quad D_1 = J - D \quad (13)$$

$$D_2 = -D \quad (14)$$

Şekil.3'de de görüldüğü gibi tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemeli ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme problemi, ayrık \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemine eşdeğerdir:



Şekil.3

Şekil.2 ve 3'teki sistemin $w(k)$ 'dan $z(k)$ 'ya kapalı çevrim transfer fonksiyonu,

$$A_{cl} = \underline{A} + B_2KC_2 \quad (15)$$

$$B_{cl} = B_1 \quad (16)$$

$$C_{cl} = C_1 + D_2KC_2 \quad (17)$$

$$D_{cl} = D_1 \quad (18)$$

olmak üzere,

$$T_{zw}(z) = D_{cl} + C_{cl}(zI - A_{cl})^{-1}B_{cl} \quad (19)$$

şeklinde elde edilir. Ancak bilindiği gibi \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemi ancak iç kararlılık şartı altında çözülebilir. Kapalı çevrimli sistemin iç kararlı olmasını sağlayacak koşullar ise aşağıdaki Lemma'dan türetilir.

4 KONTROLÖR TASARIMI

Theorem 3.4, tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemeli ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme probleminin çözülebilirlik koşullarını verir, ancak kontrolörün tasarımında da kullanılabilir:

Adım 1: γ_{opt} için (26) ve (27) doğrusal matris eşitsizliklerini aynı anda sağlayan bir $X_{cl} > 0$ matrisi, "The LMI Control Toolbox" [8] kullanılarak belirlenir.

Adım 2: (32) doğrusal matris eşitsizliği çözülerek tek serbestlik dereceli statik durum geribesleme matrisi $K \in \mathcal{R}^{m \times n_s}$ elde edilir.

5 SONUÇLAR

Bu çalışmada tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi ile ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözümü öngörülmüştür. Bunun için ayrık \mathcal{H}_∞ model eşleme problemi önce ayrık \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemine indirgenmiş, sonra \mathcal{H}_∞ optimal kontrol probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözmek için geliştirilen yaklaşımdan yararlanılarak, problem tek serbestlik dereceli statik durum geribeslemesi ile çözebilmek için gerçekleşmesi gereken genel koşullar elde edilmiş ve nihayet kontrolör tasarımı için geçerli bir algoritma türetilmiştir.

6 KAYNAKLAR

- [1] Akın M. and Gören L., The \mathcal{H}_∞ Discrete Model Matching Problem by Static State Feedback, 3rd WSEAS Annual Symposium on Mathematical Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering, Athens, Greece, 2001 and WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, Vol.1, pp. 87-93, Jan 2002.
- [2] Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E. and Balakrishnan V., Linear Matrix Inequalities in System and Control

Theory, SIAM, 1994.

- [3] Doyle J. C., Francis B. A. and Tannenbaum A. R., Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Company, 1992.

[4] Doyle J. C., Packard A. and Zhou K., Review of LFTs, LMIs and μ , PROCEEDINGS on the IEEE CONFERENCE on DECISION and CONTROL, pp. 1227-1232, 1991.

[5] Francis B. A., A course in \mathcal{H}_∞ Control Theory, No.88, Lecture Notes in Control and Information Sciences, New York:Springer-Verlag, 1987.

[6] Francis B. A. and Doyle J. C., Linear Control Theory with An \mathcal{H}_∞ Optimality Criterion, SIAM JOURNAL on CONTROL and OPTIMIZATION, Vol.25, No.4, 1987.

[7] Gahinet P. and Apkarian P., A Linear Matrix Inequality Approach to \mathcal{H}_∞ Control, INTERNATIONAL JOURNAL of ROBUST and NONLINEAR CONTROL, Vol.4, pp. 421-428, 1994.

[8] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. and Chilali M., The LMI Control Toolbox, PROCEEDINGS on the IEEE CONFERENCE on DECISION and CONTROL, pp. 2038-2041, 1994.

[9] Gören L. and Akın M., A Multiobjective \mathcal{H}_∞ Control Problem: Model Matching and Disturbance Rejection, PROCEEDINGS on IFAC 15th TRIENNIAL WORLD CONGRESS, 2002.

[10] Hung Y. S., \mathcal{H}_∞ Optimal Control Part I, II, INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL, Vol.49, No.4, pp. 1291-1359, 1989.

[11] Kucera V., Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems, Prentice-Hall International, London, 1991.