

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE İKİ BOYUTLU MANYETİK ALAN ANALİZİ

Kenan TANTAŞ

Selçuk YILDIRIM¹

Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü, 23119, Elazığ

¹e-posta: syildirim@firat.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, sınır elemanları yöntemi kullanılarak demir nüveli bir manyetik devrenin hava aralığındaki iki boyutlu manyetik alan analizi gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, sabit sınır elemanları kullanılarak hava aralığı bölmelemiştir. Sınırlarda ve iç noktalarda manyetik skaler potansiyel ile manyetik alan şiddeti hesaplanmıştır. Örnek uygulamadan elde edilen sonuçlar, analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sınır Elemanları Yöntemi, Manyetik Skaler Potansiyel, Manyetik Alan.

1. GİRİŞ

Elektromanyetik malzemelerin tasarımı için, bu cihazların elektrik ve manyetik alan dağılımlarına ihtiyaç vardır. Bu analizlerde yaygın olarak kullanılan tekniklerden biri sınır elemanları yöntemidir [1].

Sınır elemanları yöntemi moment yönteminin varyasyonudur. Sınır elemanları yöntemi, integral denklem formülasyonlarına dayanmakta ve bilinmeyenler sadece sınırdaki tanımlanmaktadır [2].

Sınır elemanları yöntemi mühendislikte değişik problemlere uygulanmaktadır. Yöntemin temel özelliği, problemi çözmek için gerekli olan verilerin basit olmasıdır. Sınır elemanları yöntemiyle yüksek doğrulukta sonuçların elde edilmesi bu yöntemle olan ilgiyi arttırmıştır [3].

Son yıllarda, sınır elemanları yöntemi araştırmacılar tarafından tercih edilen ve fiziksel problemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan önemli bir teknik haline gelmiştir [4].

2. TEMEL DENKLEMLER

Manyetostatik alan için Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

ve

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

Burada \mathbf{B} akı yoğunluğu vektörü, \mathbf{H} manyetik alan şiddeti vektörü ve \mathbf{J} akım yoğunluğu vektörüdür. Manyetik akı yoğunluğu \mathbf{B} ile manyetik alan şiddeti \mathbf{H} , arasındaki bağıntı;

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3)$$

ile verilir. Burada μ manyetik geçirgenliktir.

Denk.(2)'yi sağlayan bir manyetik vektör potansiyeli şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

Bu durumda, denk.(1),

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilen,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} \quad (6)$$

denkleme haline gelir.

Ortamda akımın olmaması durumunda ($\mathbf{J}=0$), problem bir manyetik skaler potansiyel (V_m) ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (7)$$

Bu durumda denk.(1) doğrulanmış olur:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times (\nabla V_m) = 0 \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (8)$$

ve aşağıdaki Laplace denklemi elde edilir [1].

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu (\nabla^2 V_m) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (9)$$

3. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

V_m skaler potansiyelinin yaklaşık çözümü u , gerçek çözüm de V_m olarak kabul edildiğinde Laplace denklemi,

$$\nabla^2 u = R \quad (10)$$

şeklinde ifade edilir. Burada R , kalanı ifade etmektedir. Genel işlem yolu R kalanını, D çözüm alanı üzerinde minimize etmek ve ortalama olarak sıfırlayabilmek, buradan da yaklaşık çözümü gerçek çözüme mümkün olduğunca yaklaştırmaktır. Bunun için de kalanı uygun olarak seçilecek bir w ağırlık fonksiyonu ile normalize edilmelidir. Yani;

$$(R, w) = 0 \quad (11)$$

yapılmalıdır. Ayrıca denk.(10) kullanılarak, denk.(11), D çözüm alanını ifade etmek üzere,

$$\int_D (\nabla^2 u) w dD = 0 \quad (12)$$

şeklinde bulunur. Bu denkleme ikinci Green özdeşliği uygulanır ve düzenlenirse,

$$\int_D (\nabla^2 u) w dD = \int_S w \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (13)$$

eşitliği elde edilir. Burada S, D çözüm alanının sınırını ifade etmektedir. w ağırlık fonksiyonu yerine, temel çözüm (u*) ifadesi yazılırsa,

$$u_i = \int_S u^* q dS - \int_S u q^* dS \quad (14)$$

ifadesi elde edilir. Burada, iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümü;

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (15)$$

şeklinde dir. Burada r, kaynak noktası ile alan veya değişken noktası arasındaki mesafedir. Denk.(14) çözüm alanı içerisindeki herhangi bir iç nokta için geçerlidir. Ancak bir sınır çözüm yöntemi olarak formüle edilebilmesi için sınır üzerine taşınmalıdır. Bu işlem yapıldığında çözüm alanının sınırı üzerinde geçerli olan,

$$\frac{1}{2} u = \int_S u^* q dS - \int_S u q^* dS \quad (16)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifade Green'in sınır formülü veya sınır integral denklemi olarak bilinmektedir [5].

İki boyutlu bir çözüm bölgesinin sınırı N sayıda sınır elemanı ile ifade edilir. Her sınır elemanı üzerinde potansiyel (u) ve potansiyelin normale göre türevi (q) değerlerinin sabit ve elemanın orta noktasında bir çözüm noktasındaki (düğümdeki) değere eşit olduğu kabul edilirse (sabit eleman yaklaşımı), verilen bir 'i' noktası için denk.(16) aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir:

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} u_j q_j^* dS \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{S_j} u_i^* q_j dS \right) \quad (17)$$

Burada incelenen 'i' düğümü ile üzerinde integrasyon yapılan 'j' sınır elemanı arasındaki ilişkiyi ifade eden etki integralleri,

$$G_{ij} = \int_{S_j} u_i^* dS \quad \text{ve} \quad H_{ij} = \int_{S_j} q_i^* dS \quad (18)$$

olarak tanımlanıp aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (19)$$

N sayıda nokta için bütün denklemler matris şeklinde ifade edilirse,

$$[H][u] = [G][q] \quad (20)$$

eşitliği elde edilir. Burada u ve q, düğüm değerlerinden oluşan Nx1 boyutlu vektörlerdir. H ve G matrisleri, NxN boyutlu katsayı matrisleridir. Denk.(20)'ye sınır şartları uygulanarak yeniden düzenlenirse,

$$Cx = f \quad (21)$$

şeklinde lineer bir denklem sistemine dönüştürülür. Burada x bilinmeyenler vektörüdür. Bu denklem sistemi çözülerek sınır üzerindeki bilinmeyen değerler elde edilir [6]. Herhangi bir 'i' iç noktasındaki manyetik skaler potansiyelin değerini hesaplamak için denk.(14) ayrıştırılarak,

$$u_i = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} q u^* dS - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} u q^* dS \quad (22)$$

şeklinde yazılır.

İç noktadaki $q_x = \partial u / \partial x$ ve $q_y = \partial u / \partial y$ manyetik alan şiddetleri, denk.(14)'ün türevi alınarak hesaplanabilir. Böylece i düğümünde,

$$q_x = \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} ds \right) \quad (23)$$

$$q_y = \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial y} ds \right) \quad (24)$$

yazılabilir. Türevler şu şekilde alınır.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (-\ln r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (-\ln r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (26)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right) \right] \quad (27)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right) \right] \quad (28)$$

n_1, n_2 normal birim vektörü olan \hat{n} 'nin bileşenleridir [7].

4. BİLGİSAYAR PROGRAMI

Hesaplamalarda iki boyutlu bir çözüm bölgesinde manyetik alan analizi yapabilen Matlab'da, MSOLV isimli bir program hazırlanmıştır.

Bu programda, koordinatları ve sınır şartları girilen çözüm bölgesinin sınırı sabit elemanlarla bölünerek, etki katsayıları hesaplanmaktadır. Bu katsayılar yardımıyla, sınırdaki bilinmeyen skaler potansiyel (V_m) ve manyetik alan şiddeti (potansiyelin normale göre türevi, $\partial V_m / \partial n$) hesaplanabilmektedir.

Bir manyetik alan problemi geometri, malzeme özellikleri, akımlar, sınır şartları ve temel alan denklemleri ile tanımlanır [1].

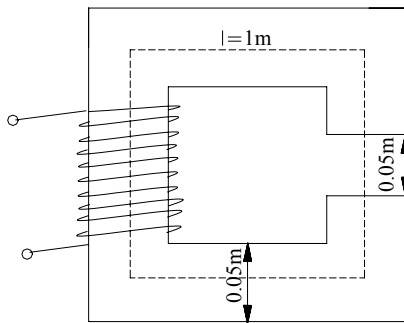
Programın diğer bölümünde, sınır değerleri kullanılarak herhangi bir iç noktadaki skaler potansiyeli ve manyetik alan şiddeti hesaplanmaktadır.

5. UYGULAMA

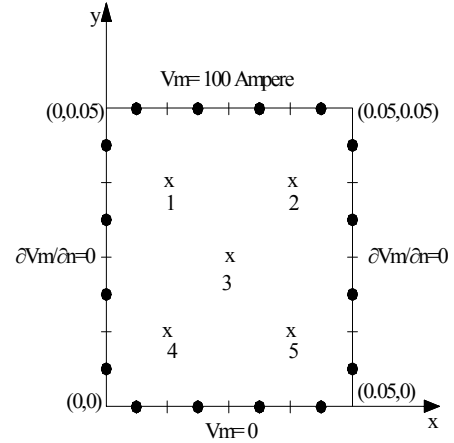
Uygulama için, Dirichlet ve Neumann sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen basit bir demir nüvenin hava aralığı seçilmiştir (Şekil-1). Bu sistem, 4, 8 ve 16 adet sabit sınır elemanı ile bölümlendikten sonra (Şekil-2) etki katsayıları hesaplanarak, sınırlarda ve (0.025, 0.025), (0.0125, 0.0125), (0.0125, 0.0375), (0.0375, 0.0125), (0.0375, 0.0375), iç noktadaki manyetik skaler potansiyel ve manyetik alan şiddeti değerleri hesaplanacaktır.

Örnek problemin analitik çözümü ise aşağıdaki formül ile elde edilebilir.

$$V_m = H \cdot \ell \quad (29)$$



Şekil-1. Örnek Problem



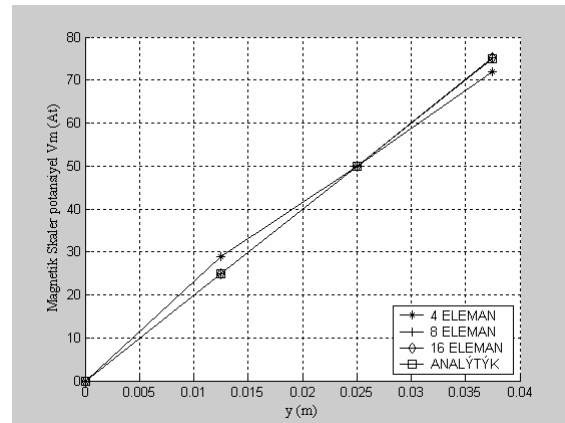
Şekil-2. Hava Aralığının Sınır Elemanlarıyla Bölünmesi

Tablo-1. Manyetik Skaler Potansiyeller

İç Nokta	Sınır Elemanı Sayısı			Analitik Çözüm
	4	8	16	
1	72.041	75.140	75.116	75.000
2	72.041	75.140	75.116	75.000
3	49.936	50.003	50.002	50.000
4	28.922	24.796	24.887	25.000
5	28.922	24.796	24.887	25.000

Tablo-2. Manyetik Alan Şiddetleri

İç Nokta	Sınır Elemanı Sayısı			Analitik Çözüm
	4	8	16	
1	1928.7	1895.0	2008.1	2000.0
2	1928.7	1895.0	2008.1	2000.0
3	1800.8	2024.5	2005.7	2000.0
4	2041.8	1912.6	2008.1	2000.0
5	2041.8	1912.6	2008.1	2000.0



Şekil-3. Manyetik Skaler Potansiyelin y Eksenine Göre Değişimi

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada Sınır Elemanları Yöntemi kullanılarak, demir nüveli basit bir manyetik devrenin hava aralığındaki manyetik skaler potansiyelin analizi yapılmıştır.

Bu amaçla, hava aralığının sınırı sadece 4 sınır elemanı ile bölünerek etki katsayıları hesaplanmıştır. Daha sonra verilen sınır şartları yerine yazılarak oluşturulan lineer denklem sisteminin çözülmesiyle, sınırdaki potansiyel ve potansiyelin normale göre türev değerleri elde edilmiştir.

Son olarak, sınır düğümlerindeki değerler kullanılarak, istenen iç noktadaki manyetik skaler potansiyel ve manyetik alan şiddetleri hesaplanmıştır. Tablo 1.ve Tablo 2.'den görüldüğü gibi, basit bir veri girişiyle çok hassas değerler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Yıldır, Y., B., 1988, Computer-Aided Magnetic Field Analysis Using The Boundary Element Method, Integrated Engineering Software Inc., Canada.
- [2] Yıldır, Y., B., Klimpke, B., W., Prasad, K., M., Magnetic Analysis Of Brushless Dc Motors Using The Boundary Element Method, Integrated Engineering Software Inc., Canada.
- [3] Brebbia, C.A., Magureanu, R., The Boundary Element Method for Electromagnetic Problems.
- [4] Kirkup, S., 2001, The BEM for Helmholtz Problems, Integrated Sound Software.
- [5] Kükner, A., Tapkan, K. K., 1999, Başlangıçta Serbest Yüzeyinde Sinüzoidal Dalga Formuna Sahip Bir Tankta Çalkantı Probleminin Sınır Eleman Yöntemiyle Çözümü, Gemi İnşaatı ve Deniz Teknolojisi Teknik Kongresi'99, Bildiri Kitabı.
- [6] Yıldırım, S., 1999, Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [7] Kythe, K., P., An Introduction Boundary Element Methods, CRC Pres, Boca Raton, London, Tokyo, 1995.