ÇOK YÜZEYLİ POTANSİYEL PROBLEMLERİNE SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Selçuk YILDIRIM[1] **Hüseyin ERİŞTİ**[2]

[1]Fırat Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü, Elazığ
[2]Fırat Üniversitesi, Tunceli M.Y.O., Tunceli

[1]e-posta: syildirim@firat.edu.tr [2]e-posta: heristi@firat.edu.tr

ABSTRACT

In this study, solution of multi-surface potential problems has been performed with the Boundary Element Method (BEM). Section of multi-surface of two cables have been divided into constant and linear elements. The nodes of these elements have been numbered counter clockwise in the internal surface and clockwise in the external surface. Potential distribution has been obtained by a developed computer software. Calculated results have been compared with the analytical one and a package program which is based on BEM.

Keywords: *Potential distribution, Laplace equation, Boundary Element Method.*

1. GİRİŞ

Sınır elemanları yöntemi, sınır değer problemlerinin integral denklem formülasyonuna dayalı bir yöntemdir. Bu yöntemde, problem bölgesini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler, sınırların bölmelenmesiyle elde edilen sınır elemanlarının birbirine etkisinden oluşan etki integralleri yardımıyla çözülür.

Sınır elemanları yöntemiyle, elektrik alan ve manyetik alan problemlerinin analizinde doğru ve hızlı bir şekilde sayısal çözüm elde edilmesi sağlanır. Yöntem aynı zamanda elastisite, ısı iletimi, ısı transferi, akışkanlar mekaniği ve gerilme analizi gibi birçok mühendislik probleminin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sınır elemanları yöntemi ile analiz edilen problemde, bölge sınırları keyfi olarak ayrıştırılır. Sınırlardaki her bir bölmeye sınır elemanı adı verilir. Sınırda elde edilen bu elemanlar üzerinde, etki integrallerinin hesaplanmasında referans alınan, aynı zamanda eleman üzerinde var olan ve hesaplanması gereken değerlerin bulunduğu noktalar mevcuttur. Sınırda bulunan bu noktalara genel olarak düğüm adı verilir. Bir eleman şekli için kullanılan şekil fonksiyonu ile eleman içindeki fiziksel değerlerin tanımı için kullanılan interpolasyon fonksiyonları göz önünde bulundurularak çeşitli sınır elemanları geliştirilmiştir. Bu elemanlar genel olarak; sabit, lineer ve parabolik elemanlardır. Buna göre, sabit elemanda bir düğüm bulunur ve bu düğüm de elemanın merkezindedir. Lineer elemanda ise iki düğüm bulunur ve bu düğümler elemanın uç noktalarındadır. Parabolik elemanda ise üç düğüm bulunur ve bu düğümlerin birisi elemanın merkezinde, diğer ikisi ise uç noktalarındadır [1].

Laplace denklemi ile modellenen bir potansiyel probleminin sınır elemanları yöntemi ile analizinde bölmeleme sadece sınırda yapıldığı için, sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi gibi bölge tipi yöntemlere göre problemin boyutsallığı bir derece indirgenir. Bundan dolayı, yöntemin en önemli özelliklerinden birisi, denklem sisteminin küçük olması ve bir problemin çözümü için gerekli veri sayısında sağladığı önemli ölçüdeki azalmadır.

Sınır elemanları yönteminde ilk önce problem bölgesini temsil eden Laplace veya Poisson denkleminden sınır integral denklemi elde edilir. Sınırlar, üzerinde bilinmeyenlerin gösterildiği sınır elemanlarına ayrıştırıldıktan sonra bir lineer denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi, sadece sınır düğümlerindeki bilinmeyenlerden meydana gelmektedir. Buna karşılık, sistem matrisi doludur ve simetrik değildir. Ayrıca iç noktalardaki sonuçların sadece istenen noktalarda hesaplanabilmesi, yöntemin diğer önemli bir özelliğidir [2].

2. TEORİ

İki boyutlu problem bölgesinde Poisson denklemi potansiyel dağılımı hesaplamalarında,

$$\nabla^2 u = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır (ρ: yük yoğunluğu, ε: ortamın dielektrik katsayısı).

Eğer incelenen problem bölgesinde yük yoğunluğu etkisi yok ise (ρ=0) eşitliğin ikinci tarafı sıfır olur ve bu denklem Laplace denklemi olarak bilinir:

$$\nabla^2 u = 0 \tag{2}$$

Laplace denklemine ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral ifadeleri elde edilir.

Bu yolla elde edilen sınır integral denklemi şu şekildedir:

$$c_i\, u_i + \int_S u\, q^*\, dS = \int_S q\, u^*\, dS \tag{3}$$

Bu denklemdeki, potansiyel (u) ve potansiyelin normale göre türevi (q), Dirichlet ve Neumann sınır şartları olarak verilir. u^* ise, iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümüdür [3].

$$u^* = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) \tag{4}$$

Sınır N sayıda sabit elemana ayrıştırıldıktan sonra, sınır şartları uygulanmadan önce verilen bir 'i' noktası için sınır integral denklemi,

$$c_i\, u_i + \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} u\, q^*\, dS = \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} q\, u^*\, dS \tag{5}$$

şeklinde yazılır. Burada c_i katsayısı sabit eleman durumunda ½'dir. İç noktalardaki hesaplamalarda ise, c_i=1 alınarak potansiyel hesaplanır:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} q\, u^*\, dS - \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} u\, q^*\, dS \tag{6}$$

Lineer eleman kullanılması durumunda ise sınır integral denklemi,

$$c_i\, u_i + \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} q^*\, dS = \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} u^* dS \tag{7}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemdeki c_i katsayısı ise, sınırdaki düğümden önceki ve sonraki elemanların yaptığı açıya bağlı olarak hesaplanır.

Herhangi bir sınır noktası için c_i değerleri,

$$c_i = \frac{\theta}{2\pi} \tag{8}$$

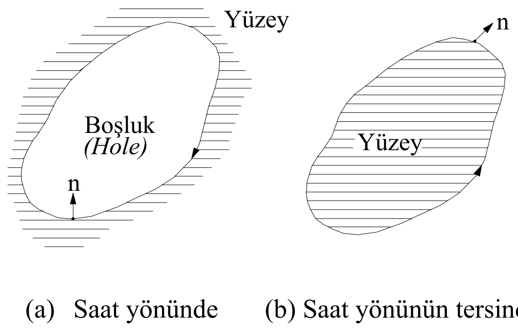
olarak gösterilebilir. Burada, θ radyan olarak 'i' noktasındaki iç açıdır.

3. NUMARALANDIRMA KURALLARI

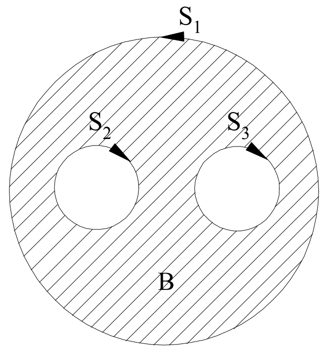
Sınır elemanları yöntemiyle incelenen bir problem bölgesinde sınır elemanları belirli bir kurala göre numaralandırılır. İç yüzeylerin sınırı saat ibresinin tersi yönünde, dış yüzeylerin sınırı saat ibresi yönünde numaralandırılır [4].

Buna göre, iki boyutlu problemler için, sınır düğümlerinin numaralandırılması işleminde aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. Dış yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünde tanımlanır (Şekil-1.a).
2. İç yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünün tersinde tanımlanır (Şekil-1.b).



Şekil-1. (a) Dış yüzey ve (b) İç yüzey için, numaralandırma kuralı



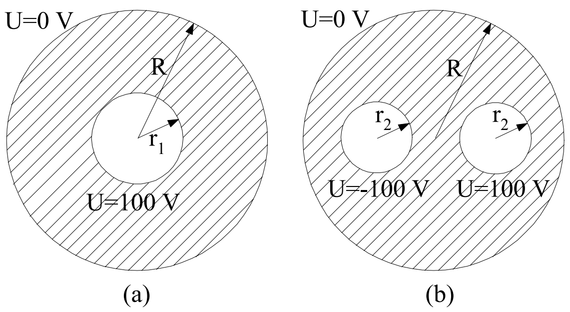
Şekil-2. Çok yüzeyli durum için sınır elemanlarını numaralandırma yönleri

Uygulama örneklerinde de incelenen Şekil 2'deki gibi üç yüzeyli bir kablo sisteminde B bölgesindeki potansiyel dağılımı hesaplamaları için sınır elemanları, S_1 sınırında saat ibresinin tersi yönünde, S_2 ve S_3 sınırlarında ise saat ibresi yönünde numaralandırılır.

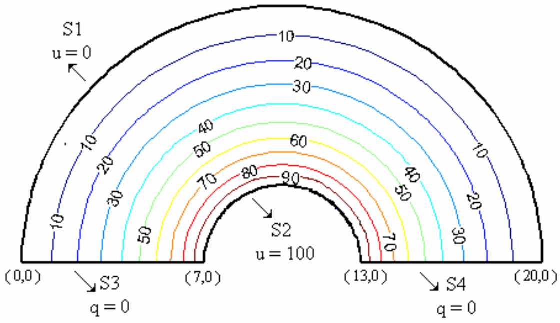
4. UYGULAMALAR

Çok yüzeyli potansiyel problemlerinin sınır elemanları yöntemiyle çözümü için sabit ve lineer elemanların kullanıldığı bilgisayar programları yazılmıştır. MATLAB'da yazılan bu programlardan elde edilen sonuçlar, analitik çözüm sonuçları ve ELECTRO paket programı [5] sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

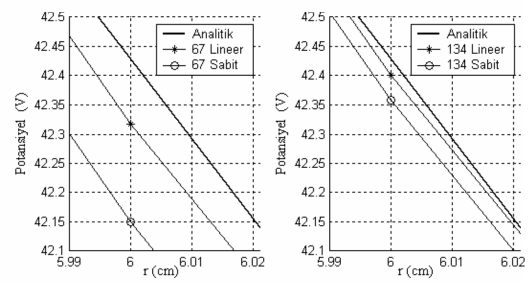
İlk uygulamada, sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen iki yüzeyli bir koaksiyel kablonun (r_1=3 cm, R=10 cm) yarım kesiti incelenmiştir (Şekil-3.a). İkinci uygulamada ise, üç yüzeyli bir kablo kesiti (r_2=2 cm, R=10 cm) incelenmiştir (Şekil-3.b). İç ve dış sınırlarda Dirichlet sınır şartı, kesitin alındığı sınırlarda ise Neumann sınır şartı tanımlanmıştır.



Şekil-3. Çok yüzeyli potansiyel problemleri



Şekil-4. Eşpotansiyel çizgiler



Şekil-5. Farklı eleman sayıları için radyal yöndeki potansiyellerin karşılaştırılması

İki yüzeyli problemde, iç yüzeyin ve dış yüzeyin sınırları ilk önce 67 sınır elemanı ile, daha sonra 134 sınır elemanı ile bölmelenerek çözüm yapılmıştır. Her iki durumda da sabit ve lineer sınır elemanları kullanılmıştır.

Sınırlar bölmelendikten sonra, iç yüzeyin sınırlarındaki eleman düğümleri saat yönünde, dış yüzeyin sınırlarındaki eleman düğümleri ise saat yönünün tersinde numaralandırılmıştır. Bu düğümlerin koordinatları ve sınır şartları, hazırlanan programa veri olarak girildikten sonra sınır bilinmeyenleri hesaplanmıştır. Bütün sınır değerleri bulunduktan sonra iç noktalardaki potansiyeller hesaplanmıştır. Sonuçlar, Tablo-1 ve Şekil-5'de analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil-4'de ise, lineer eleman çözümleri ile elde edilen eşpotansiyel çizgiler gösterilmiştir.

İki yüzeyli problemin analitik çözümü ise şu şekildedir:

$$V = V_0 \frac{\ln(r/R)}{\ln(r_1/R)} \tag{9}$$

Tablo-1. İki yüzeyli problem için potansiyel değerleri

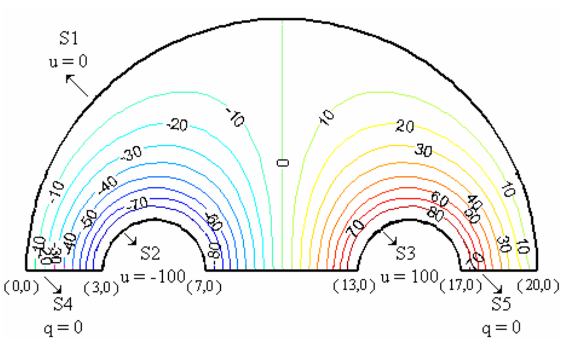
x	y	Sabit (V)	Hata (%)	Lineer (V)	Hata (%)	Analitik (V)
67 Eleman						
10	4	75,655	0,59	75,926	0,23	76,105
10	5	57,217	0,61	57,430	0,24	57,571
10	6	42,150	0,65	42,317	0,26	42,428
10	7	29,410	0,72	29,539	0,28	29,624
10	8	18,374	0,85	18,470	0,34	18,533
10	9	8,6380	1,29	8,7060	0,51	8,7510
134 Eleman						
x	y	Sabit (V)	Hata (%)	Lineer (V)	Hata (%)	Analitik (V)
10	4	75,992	0,14	76,060	0,05	76,105
10	5	57,482	0,15	57,535	0,06	57,571
10	6	42,358	0,16	42,400	0,06	42,428
10	7	29,571	0,17	29,603	0,07	29,624
10	8	18,494	0,21	18,518	0,08	18,533
10	9	8,7230	0,31	8,7390	0,13	8,7510

Üç yüzeyli problemde ise, toplam 160 sınır elemanı ile bölmeleme yapılmıştır. Yine iç yüzeyin sınırlarındaki eleman düğümleri saat yönünde ve dış yüzeyin sınırlarındaki eleman düğümleri saat yönünün tersinde numaralandırılarak bu sınırlar arasında kalan bölgedeki potansiyeller hesaplanmıştır.

Bulunan sonuçlar, iki boyutlu elektrostatik alan analizi yapan ELECTRO paket programı sonuçları ile Tablo-2'de karşılaştırılmıştır. MATLAB'da yazılan programdan elde edilen eşpotansiyel çizgiler ise Şekil-6'da gösterilmiştir.

Tablo-2. Üç yüzeyli problem sonuçları

x	y	Sabit (V)	Lineer (V)	ELECTRO (V)
5	3	-66,858	-67,013	-67,119
5	5	-29,295	-29,369	-29,419
10	5	0	0	0
15	4	44,885	44,994	45,065
15	5	29,295	29,369	29,419



Şekil-6. Eşpotansiyel çizgiler

5. SONUÇLAR

Yapılan uygulamalarda ilk önce, analitik olarak potansiyel dağılımı hesaplanabilen iki yüzeyli bir koaksiyel kablonun yarım kesiti 67 ve 134 sınır elemanıyla ayrı ayrı bölmelendikten sonra analizi yapılmıştır. Radyal yönde incelenen iç noktalarda elde edilen potansiyel değerleri, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Buna göre, lineer eleman sonuçlarında hata oranının daha az olduğu görülmektedir. Bu durum, lineer interpolasyon fonksiyonlarının problemdeki fiziksel değişkenleri (u ve q) daha doğru tanımlamasının bir sonucudur. Yine yapılan bu analizde, sınır elemanlarının sayısı arttırılarak daha hassas sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir.

İkinci uygulamada, üç yüzeyli kablo sisteminin yarım kesiti 160 sınır elemanıyla (sabit ve lineer) bölmelenerek potansiyel dağılımı hesaplanmış ve aynı eleman sayısı kullanılarak ELECTRO paket programında çözülmüştür. Bu sonuçlara göre, sabit ve lineer eleman sonuçlarının ELECTRO sonuçları ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, sınır elemanları yönteminde kullanılan numaralandırma kurallarına göre bir sınır bölmelemesi yapıldıktan sonra, ilave bir işleme gerek kalmadan çok yüzeyli potansiyel problemlerinin de kolaylıkla analiz edilebildiği görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Erişti B., Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrostatik Alan Problemlerinin Analizinde Parabolik İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 78s, Elazığ, 2003.

[2] Yıldırım S., Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 113s, Elazığ, 1999.

[3] Yıldırım, S., Erişti, B. and Erişti, H., Solution of Electrostatic Field Problem with Parabolic Boundary Element, Third International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO'03), Bursa, 2003.

[4] Uyar M., Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrik Alan Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 77s, Elazığ, 2004.

[5] Integrated Engineering Software Inc., ELECTRO: Two-Dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, Users and Technical Manual, Winnipeg, Manitoba, Canada, 1997.