

ÇİFT SARKAÇ SİSTEMİNİN KAYAN KIPLİ KONTROLÜ

Yusuf ALTUN¹

Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü

Mühendislik Mimarlık Fakültesi

Balıkesir Üniversitesi, 10145, Çağış, Balıkesir

Metin DEMİRTAŞ²

1e-posta: altuny@balikesir.edu.tr

2 e-posta: mdtas@balikesir.edu.tr

Anahtar sözcükler: Çift sarkaç, kayan kip kontrol.

ÖZET

Bu çalışmada kontrol teorisinin klasik problemlerinden olan hareketli araba üzerindeki ters sarkacın dengelenmesi problemi incelenmiştir. İkinci dereceden doğrusal olmayan denklemler şeklinde modellenen ters sarkaç sistemi, doğrusallaştırılarak kayan kip kontrol uygulanmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları analiz edilmiştir.

1. GİRİŞ

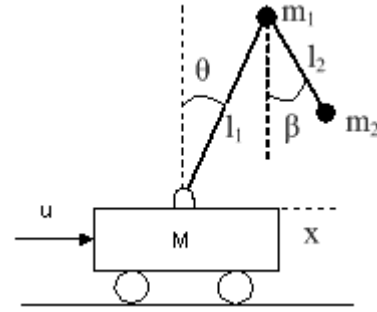
Günümüzde doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerde birçok kontrol teknikleri bulunmaktadır. Kontrol tekniklerinin uygulanması bakımından ters sarkaç sisteminin kontrolü önemli bir yere sahiptir. Özellikle araba üzerindeki ters sarkaç problemleri kararsız oluşları ve doğrusal olmaması nedeniyle kontrol yaklaşımlarının uygulanması için iyi bir deneme sistemidir. Bu yüzden ters sarkaç sistemlerinin kontrolü literatürde yaygın bir şekilde tartışılmaktadır[1-8].

Kayan kip kontrol, doğrusal ve doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol sistemlerinde iyi bir performans sağlayan kontrol tekniğidir. Bu kontrol tekniği son 30 yılda gelişmiş ve günümüzde geri beslemeli kontrol sistemlerine uygulanmaktadır[9]. Kayan kip kontrol yaklaşımındaki ana amaç, hatayı anahtarlıma yüzeyi veya kayma yüzeyine itmek ve bu yüzeyde tutmaktır. Bundan sonra sistem kayma kipindedir ve modelleme hataları ile dış bozuculardan etkilenmez.

Bu çalışmadaki ters sarkaç sistemi, araba üzerinde mesnetlenmiş birinci çubuk (ters sarkaç) ve bu çubuğun diğer ucuna mesnetlenmiş ikinci bir çubuktan (basit sarkaç) oluşmaktadır. İkinci çubuğun bozucu etkisi altında, birinci çubuğun arabaya uygulanan kontrol işareti ile hareketlenerek dikey konumda durması sağlanmaktadır. θ açısının başlangıç değeri değiştirilerek ters sarkacın kayan kipli kontrolü için simülasyon yapılmıştır. Yapılan simülasyonda ters sarkacın denge durumunda ($\theta=0$) olması sağlanmıştır. Bu çalışmada önce ters sarkacın modellenmesi, daha sonra kayan kip uygulaması yapılmış ve simülasyon sonuçları analiz edilmiştir.

2. TERS SARKACIN MODELLENMESİ

Ters sarkaç sistemi, ucuna bozucu etki eden ikinci bir sarkacın etkisiyle hareket eden bir arabanın üzerinde bulunmaktadır. Bu sistemin şeması şekil 1'de gösterilmiştir. Burada m_1 birinci sarkacın ucundaki kütle, m_2 ikinci sarkacın ucundaki kütle, l_1 birinci sarkacın uzunluğu, l_2 ikinci sarkacın uzunluğu, θ birinci sarkacın y eksenine yaptığı açı, β ikinci sarkacın y eksenine yaptığı açı, x arabanın aldığı mesafe ve u kontrol girişi olarak ifade edilmiştir.



Şekil 1. Ters sarkaç sistemi

Şekil 1'de gösterilen ters sarkaç sisteminin matematiksel ifadesi aşağıda verilmiştir.

Her bir kütle için Newton metodu kullanılarak

$$U = M \cdot \ddot{x} + m_1 \cdot (\ddot{x} + l_1 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta) + m_2 \cdot (\ddot{x} + l_1 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \ddot{\beta} \cdot \cos \beta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta - l_2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin \beta) \quad (1)$$

$$m_2 \cdot \cos \theta \cdot (\ddot{x} + l_1 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \ddot{\beta} \cdot \cos \beta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta - l_2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin \beta) - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \sin \theta - m_2 \cdot \sin \theta \cdot (-l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + l_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos \beta) = -m_1 (\cos \theta (\ddot{x} + l_1 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta) + \sin \theta (l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta)) \quad (2)$$

$$-m_2 \cdot g \cdot \sin \beta = m_2 \cdot \cos \beta \cdot (\ddot{x} + l_1 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \ddot{\beta} \cdot \cos \beta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta - l_2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin \beta) + m_2 \cdot \sin \beta \cdot (-l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + l_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - l_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos \beta - l_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \beta) \quad (3)$$

denklemleri elde edilmiştir.

Denklem (1), (2), (3) ifadelerinde $\theta \approx 0$ ve $\beta \approx 0$ olarak doğrusallaştırıldığında

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_1+m_2).(m_1+M).g.\theta + M.m_2.g.\beta - m_1.U}{M.m_1.l_1} \quad (4)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{-(m_1+m_2).g.\theta - (m_1+m_2).g.\beta}{m_1.l_2} \quad (5)$$

$$\ddot{x} = \frac{U - (m_1+m_2).g.\theta}{M} \quad (6)$$

şeklinde bulunur. Durum uzay gösterimi

$$\begin{aligned} \theta &= x_1 \\ \dot{\theta} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{\theta} &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta &= x_3 \\ \dot{\beta} &= \dot{x}_3 = x_4 \\ \ddot{\beta} &= \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x &= x_5 \\ \dot{x} &= \dot{x}_5 = x_6 \\ \ddot{x} &= \dot{x}_6 \end{aligned} \quad (9)$$

ifadeleri ve

$$\dot{x}_2 = \frac{(m_1+m_2).(m_1+M).g.\theta + M.m_2.g.\beta - m_1.U}{M.m_1.l_1} \quad (10)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-(m_1+m_2).g.\theta - (m_1+m_2).g.\beta}{m_1.l_2} \quad (11)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{U - (m_1+m_2).g.\theta}{M} \quad (12)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(m_1+m_2).(m_1+M).g}{M.m_1.l_1} & 0 & \frac{-(m_2).g}{m_1.l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(m_1+m_2).g}{m_1.l_2} & 0 & \frac{-(m_1+m_2).g}{m_1.l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m_1+m_2).g}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ M.l_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\dot{x} = A.x + B.u$ şeklinde elde edilir.

3. KAYAN KİP KONTROL

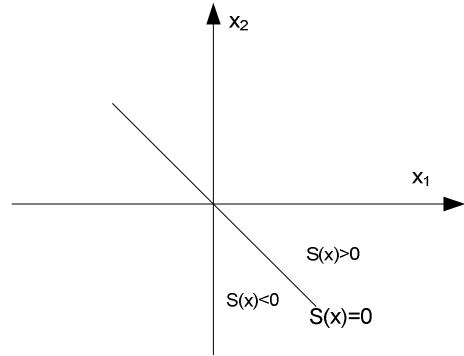
Kayan kipli kontrolde yaygın olarak kullanılan kural röle tipi kontrol kuralıdır.

Bu kontrol kuralı

$$U(x, t) = \begin{cases} U_i^+(x, t); & s_i(x) > 0 \\ U_i^-(x, t); & s_i(x) < 0 \end{cases} \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Burada U^+ ve U^- sırasıyla pozitif ve negatif röle kazancıdır. Yani sisteme uygulanan süreksiz kontrol genliğidir. s_i ise kayma yüzeyini tanımlar.

Kayan kip kontrolün yapısı anahtarlama fonksiyonu olarak tanımlanan $s(x)$ 'in işareti ile belirlenir. Her bir $s(x)$ anahtarlama fonksiyonu, sistemin bir durumu ile durumun türevinin doğrusal bağımlı hale getirildiği ve faz düzleminde orijinden geçen m adet doğru denklemini ifade eder. Bu da $s_i(x)=0$ olarak tanımlanır.



Şekil 2. Anahtarlama doğrusu

Şekil 2'de görüldüğü gibi faz düzlemini iki bölgeye ayıran bu doğrulara anahtarlama doğrusu denir. Bu kayma yüzeyi $s(x)=0$ olduğu noktaları tanımlar. Sistemin durumlarının bu kayma yüzeyine sürülmesi ve bu yüzeyde tutulması sağlanır. Durumlar kayma yüzeyine geldiğinde sistemin hataları c eğim matrisinin belirlediği dinamiklerle bu yüzey üzerinde hareket ederek sıfıra gider.

$s(x) = c.x + \dot{x}$ ifadesi ile kayma yüzeyi tanımlanır ve bu ifade sıfıra eşit olmalıdır. Bu şekilde kayma yüzeyinin değerine göre üretilen röle tipi kontrol işareti sistem modelinin girişine uygulanır.

4. TERS SARKACIN KAYAN KİPLİ KONTROLÜ

Ters sarkaç modelinde θ 'nın kayan kipli kontrolü yapılmıştır. Bunun için bir adet kayma yüzeyi kontrol için yeterlidir. Kayma yüzeyi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$s = c.x_1 + x_2 = 0 \quad (15)$$

Burada c pozitif gerçekte sayıdır.

$$x_1 = \theta - \theta_i \quad (16)$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \quad (17)$$

denklem (15), (16) ve (17) birleştirildiğinde

$$s = c.(\theta - \theta_r) + \frac{d(\theta - \theta_r)}{dt} \quad (18)$$

olarak elde edilir.

Kontrol ara yüzünün türevi alındığında ise

$$\dot{s} = c. \left(\dot{\theta} - \frac{d\theta_r}{dt} \right) + \frac{d^2(\theta - \theta_r)}{dt^2} \quad (19)$$

olarak elde edilir.

Kayan kip kontrolünün gerçekleşmesi için aşağıdaki iki şartın sağlanması gerekmektedir

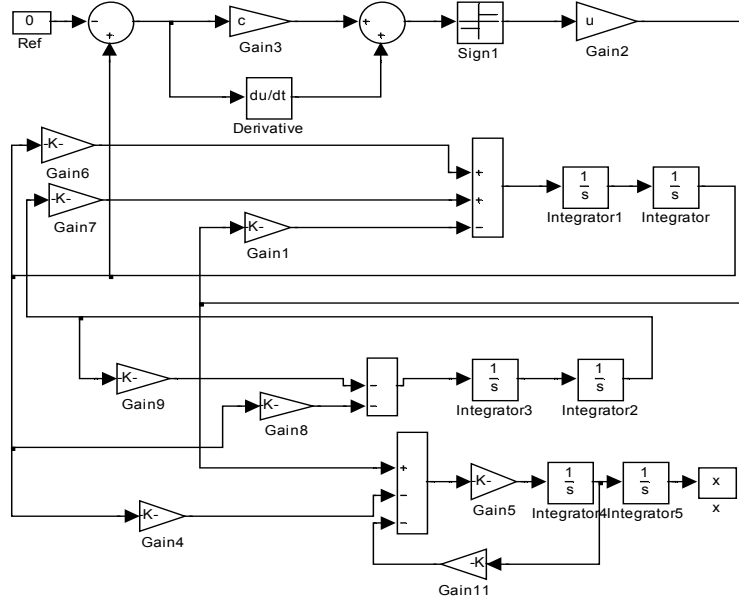
$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (\dot{s} < 0) \text{ ve } \lim_{s \rightarrow 0^-} (\dot{s} < 0) \quad (20)$$

veya

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (s. \dot{s} < 0)$$

şeklinde olmalıdır. Denklem (18)'in sağlanması durumunda, yörünge üstel olarak, kararlı bir şekilde kayma yüzeyine yönelir. Denklem (20)' in sağlanması durumunda ise kayan kip kontrollü kapalı çevrim sistemi asimptotik olarak kararlı olmaktadır[10].

$\theta_r = \text{sabit}$ olduğunda



Şekil 3. Ters sarkacın simulink modeli

5. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Yapılan bu çalışmada seçilen ters sarkaç parametreleri tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1. Ters sarkaç parametreleri

M	0.5 kg
m_1	0.1 kg
m_2	0.05 kg
l_1	0.1 m
l_2	0.1 m
g	9,81 m/sn ²

$$s = c.(\theta - \theta_r) + \frac{d\theta}{dt} \quad (21)$$

ve

$$\dot{s} = c. \dot{\theta} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (22)$$

şeklinde olur.

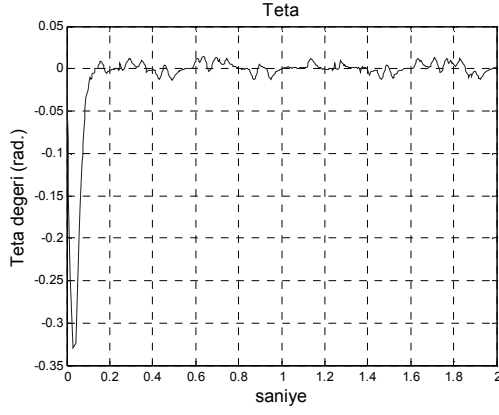
Kontrol işareti $u = U_0 \cdot \text{sign}(s)$ şeklindedir ve

$$u = \begin{cases} U_0^+; & s(x) > 0 \\ U_0^-; & s(x) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

şeklinde değişecektir. Burada sisteme uygulanan süreksiz kontrol işaretinin genliği 30 ve eğim matrisinin değeri 50 olarak seçilmiştir.

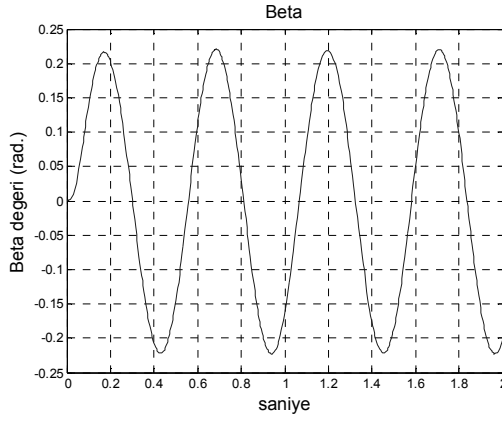
Ters sarkaç devre modelinde θ değerini referansta tutabilmek için diğer bir ifadeyle birinci sarkacın dikey konumda dengede kalabilmesi için kayan kipli kontrol tasarımı MATLAB simulink'te gerçekleştirilmiştir. Ters sarkacın kontrollü simulink modeli şekil 3'te gösterilmiştir.

Ters sarkaç modelinde θ açısının başlangıç değeri 0 radyan iken θ , β , x , u ve s değişimleri şekil 4, 5, 6, 7 ve 8'de görülmektedir.



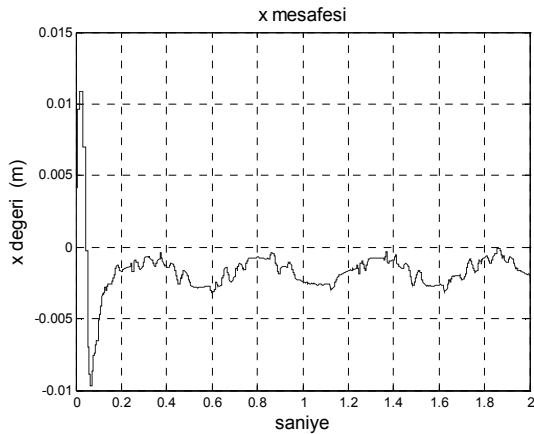
Şekil 4. θ değerinin değişimi

Şekil 4'te görüldüğü gibi θ , sisteme ani darbe uygulanarak yaklaşık -0.33 radyan değerine gitmiş ve kısa sürede referans değerine oturtulmuştur.



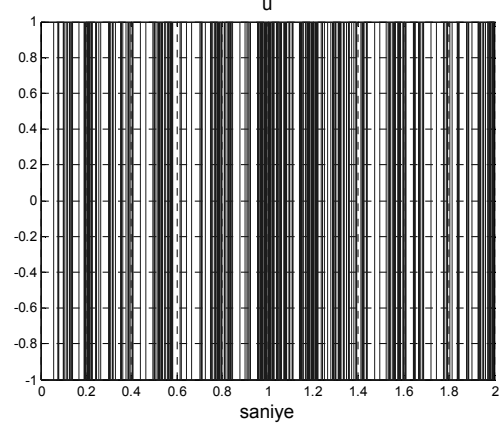
Şekil 5. β değerinin değişimi

İkinci çubuk, birinci çubuğa bozucu etki olarak düşünüldüğünden β değeri kontrol edilmemiştir. Şekil 5'te görüldüğü gibi β değeri arabaya uygulanan kontrol işaretinin etkisiyle 0.21 rad. ile -0.21 rad. arasında sağa sola hareket etmektedir. Sarkacın sürtünme kuvveti ihmal edildiğinden, β değeri sürekli olarak 0.21 rad. ile -0.21 rad. arasında değişmektedir. Bu yüzden sinüs dalga şekline benzemektedir.



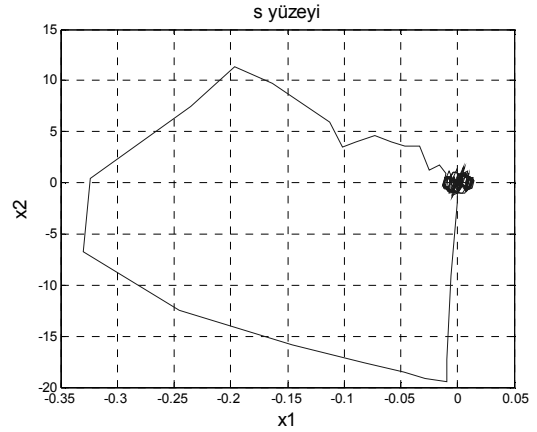
Şekil 6. x değerinin değişimi

Şekil 6'da görüldüğü gibi ani darbe ile hareketlenen araba, θ 'daki ani darbe etkisini düzeltmek için sağa ve sola yaklaşık 1 cm yol almış ve daha sonra ikinci sarkacın bozucu etkisini düzeltmek için çok küçük yer değiştirmelerle sağa sola hareket ederek denge konuma gelmektedir.



Şekil 7. Kontrol işaretinin değişimi

Şekil 7'de görüldüğü gibi kayan kip kontrolünün ürettiği kontrol işareti s yüzeyinin değişimine göre çok hızlı bir şekilde röle tipi anahtarlama yapmaktadır. Böylece kontrolör, arabanın sağına ve soluna kontrol işareti uygulayarak θ açısının 0 radyan değerinde, yani birinci sarkacın dengede durmasını sağlamaktadır.

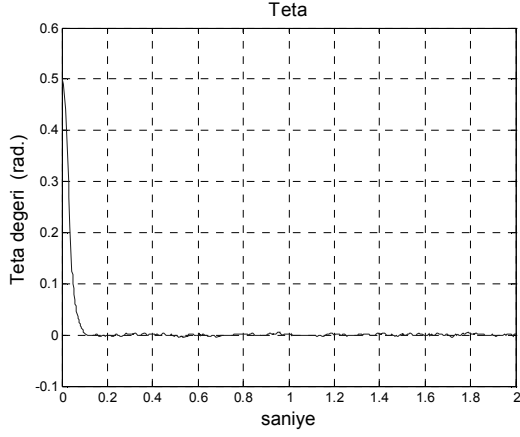


Şekil 8. Kayma yüzeyi değişimi

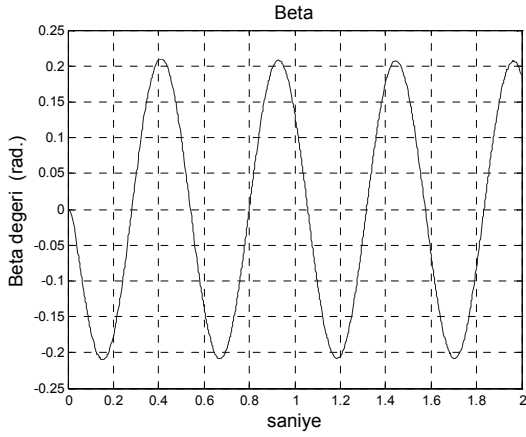
Şekil 8'de x eksenini x_1 değişimini ve y eksenini x_2 değişimini göstermektedir. Grafikte görüldüğü gibi hata ve hatanın türevi orijine çekilmektedir. Buda sistemin asimptotik kararlı hale geldiğini göstermektedir.

Simülasyonda θ açısının başlangıç değeri 0.5 rad. olarak değiştirilmiştir. Buna göre elde edilen θ , β , x , u ve s sonuçları şekil 9, 10, 11, 12 ve 13'te verilmiştir.

Şekil 9'da görüldüğü θ değeri 0.5 radyan iken, kısa sürede 0 rad. değerine oturtulmuştur. Sarkaç kontrol işareti etkisiyle dikey konumda durmuştur.

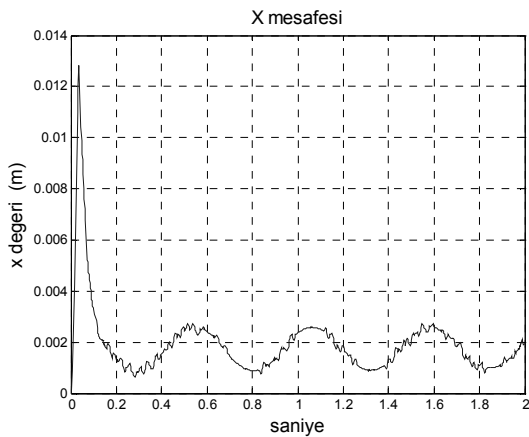


Şekil 9. θ değerinin değişimi



Şekil 10. β değerinin değişimi

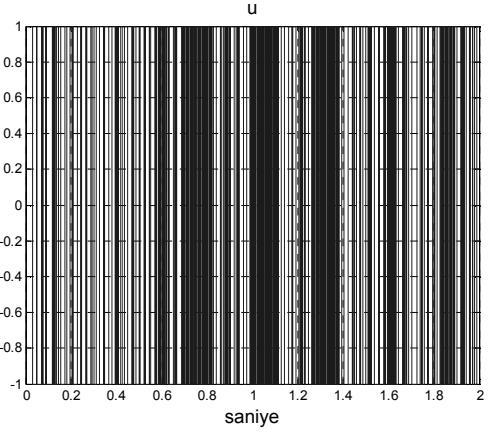
Şekil 10'da görüldüğü gibi ikinci sarkacın konumu kontrol işaretinin etkisiyle 0.21 rad. ile -0.21 rad. arasında değişerek sarkaç sağa sola hareket etmektedir. Bu yüzden burada da ikinci sarkacın hareketi sinüs dalga şekline benzemektedir.



Şekil 11. x değerinin değişimi

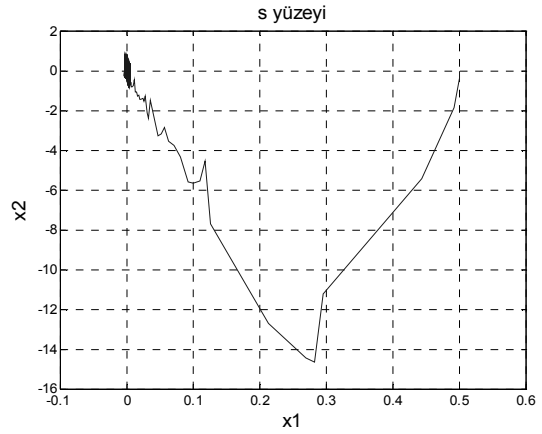
Şekil 11'de görüldüğü gibi araba, θ açısını referans değerine indirmek için önce hızlanarak yaklaşık 1.28 cm yol almış ve denge konumuna gelerek ikinci sarkacın bozucu etkisini düzeltmek için yaklaşık

0.05cm ile 0.25 cm arasında sağa sola hareket etmektedir.



Şekil 12. Kontrol işaretinin değişimi

Şekil 12'de görüldüğü gibi burada da kontrol işareti çok hızlı bir şekilde değişmektedir. Böylece kontrolör, arabanın sağına ve soluna kontrol işareti uygulayarak θ açısının 0 rad. değerinde durmasını sağlamaktadır.



Şekil 13. Kayma yüzeyi değişimi

Şekil 13'te x eksenini x_1 değişimini ve y eksenini x_2 değişimini göstermektedir. Grafikte görüldüğü gibi hata ve hatanın türevi, sıfır değerine gitmektedir. Buda sistemin asimptotik kararlı hale geldiğini göstermektedir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada ters sarkacın kayan kipli kontrolü yapılmıştır. Birinci sarkaca mesnetlenmiş ikinci çubuğun bozucu etkisi altında, birinci sarkacın konumu kontrol edilmiştir. Yapılan simülasyon sonucunda sarkacın dengede durması sağlanmış ve kontrol esnasında θ , β , x , u ve s değişimleri grafiksel olarak gözlemlenmiştir. Değişik başlangıç değerlerine karşılık elde edilen her iki simülasyon sonuçlarında istenilen referans değerlerine ulaşılmıştır. Bozucu etki altında bulunan ters sarkacın kontrolü için kullanılan kayan kip kontrolün istenilen referans değerine ulaşılmasını sağladığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Magana, M.E.; Holzapfel, F, "Fuzzy-logic control of an inverted pendulum with vision feedback", Education, IEEE Transactions on Volume 41, Issue 2, Page(s):165-170, May 1998.
- [2] Jun Xiao; Shi Zhang; Jizhong Xiao; Ning Xi; "Motion mode control in double inverted pendulum system", Advanced Intelligent Mechatronics, IEEE/ASME International Conference, Page(s):831-836, 2005.
- [3] Lin Yue-song; Qian Ji-xin; Xue An-ke; Wang Jun-Hong; "Simple multi-PD control algorithm of double inverted pendulum", IEEE Region 10 Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering, Volume 3, Page(s):1428-1431, 28-31 October 2002.
- [4] Tay Sam Leng; Nah Swee Leng; Ng We Teck; "Control of an inverted pendulum using a neuro-fuzzy controller Motion Control", Asia-Pacific Workshop on Advances, Page(s):212-217, 15-16 July 1993.
- [5] Rekdalsbakken, W, "Feedback Control of an Inverted Pendulum with the use of Artificial Intelligence Computational Cybernetics, 2006 IEEE International Conference, Page(s):1-6, August 2006.
- [6] Dianwei Qian; Jianqiang Yi; Dongbin Zhao; Yinxing Hao; "Hierarchical Sliding Mode Control for Series Double Inverted Pendulums System", Intelligent Robots and Systems, IEEE/RSJ International Conference, Page(s):4977-4982, October 2006.
- [7] Henmi, T.; Mingcong Deng; Inoue, A.; "Swing-up control of a serial double inverted pendulum", American Control Conference, Volume 5, Page(s):3992-3997, 30 June-2 July 2004.
- [8] Shuliang Lei; Langari, R, "Hierarchical fuzzy logic control of a double inverted pendulum", Fuzzy Systems, 2000. FUZZ IEEE 2000. The Ninth IEEE International Conference, Volume 2, Page(s):1074-1077, 7-10 May 2000.
- [9] O.Kaynak, K. Erbatur and M. Ertugrul, "The fusion of computationally intelligent methodologies and sliding-mode control-A survey," IEEE Transaction on Industrial Electronics. Volume 48, Paper(s): 4-12, February 2001.
- [10] İbrahim Şenol, Metin Demirtaş, Sabir Rustemov "Alan Yönlendirmeli Asenkron Motorun Bulanık Kayan Kip Konum Kontrolü", Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Volume 4, sayfa:1-2, Afyon, 2004.