DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİNDE DAYANIKLI KARARLILIK ANALİZİ

Yasin KARATAŞ[1] ve Nusret TAN[2]

[1]Yüksek Lisans Öğrencisi

[2]İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 44280, Malatya. *e-posta:* ntan@inonu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Parametre belirsizliği, Kararlılık, Kharitonov teoremi, Kenar teorem, Dijital interval polinomlar, Değer kümesi

ABSTRACT

This paper deals with the robust stability analysis of digital control systems with uncertainties. It is well known that the uncertainties in the physical systems is an unavoidable fact. Therefore, taking uncertainties into account while analysing control systems gives advantages. In this work, the methods related to the stability of digital control systems with parametric uncertainty are studied.

1. GİRİŞ

Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı yapılırken belirsizliğin hesaba katılması sistemin dayanıklığı açısından önem arzetmektedir. Genellikle kontrol sistemlerinde parametre belirsizliği ve model belirsizliği olmak üzere iki çeşit belirsizlik yapısından bahsedilir [1]. Parametre belirsizliği konusu özellikle Kharitonov teoremi [2] ile beraber önem kazanmış ve bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır [3-15]. Kharitonov teoremi aralık(interval) belirsizlik yapısı içeren bir interval polinomun kararlılığının kümedeki dört Kharitonov polinomun kararlılığının test edilmesiyle elde edilebileceğini ifade etmektedir. Dolayısıyla kararlılık problemi sonsuz bir kümeden sonlu ve sadece dört tane polinom içeren bir kümeye indirgenmiştir. Fakat bu önemli teorem interval dijital kontrol sistemlerine uygulanamamaktadır. Çünkü Kharitonov teoremi kararlılık bölgesi sol yarı düzlem olan sürekli zamanlı kontrol sistemleri için geçerlidir. Bu tip sistemlerin kararlılığına Hurwitz kararlılık denir. Bir dijital kontrol sisteminde ise kararlılık bölgesi birim çemberdir ve bu çeşit sistemlerin kararlılığına da Schur kararlılık denir [13]. Dolayısıyla Kharitonov teoremini kullanarak interval bir ayrık zamanlı polinom kümesinin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olum olmadığını test edemeyiz. Belirsiz bir ayrık zamanlı polinom kümesinin kararlılığı için kullanılabilecek bir metot kenar(edge) teoremidir [15]. Bu teoremden yararlanarak parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi yapılabilir.

Bu çalışmada ayrık zamanlı interval polinomların kararlılığı incelendi. Değer kümelerinin hesaplanabilmesi için bir yöntem önerildi. İnterval dijital kontrol sistemlerinin dayanıklılık analizi ile ilgili çalışmalar yapıldı. Parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin dayanıklı analizi için kullanılabilecek gerekli programlar Matlab ortamında yazıldı.

2. KHARİTONOV TEOREMİ VE DİJİTAL İNTERVAL POLİNOMLAR

Bir sürekli zamanlı interval polinom kümesi şu formda yazılabilir

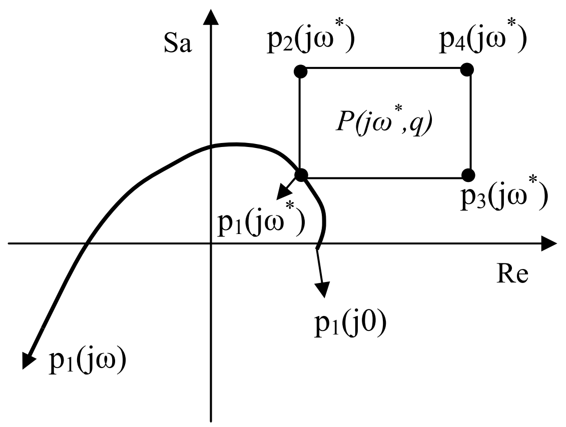
$$P(s,q) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \cdots + a_n s^n \quad (1)$$

burada $q = [a_0, a_1, ..., a_n]$, $a_i \in [\underline{a_i}, \overline{a_i}]$, $i = 1,2,.....,n$, $\underline{a_i}$ ve $\overline{a_i}$ *i*. belirsizlik a_i'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Bu polinom kümesinin kararlı olabilmesi için Kharitonov teoremine göre dört Kharitonov polinomunun kararlı olması yeterlidir. Dört Kharitonov polinomu şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
p_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1} s + \overline{a_2} s^2 + \overline{a_3} s^3 + \cdots\cdots \\
p_2(s) &= \underline{a_0} + \overline{a_1} s + \overline{a_2} s^2 + \underline{a_3} s^3 + \cdots\cdots \\
p_3(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1} s + \underline{a_2} s^2 + \overline{a_3} s^3 + \cdots\cdots \\
p_4(s) &= \overline{a_0} + \overline{a_1} s + \underline{a_2} s^2 + \underline{a_3} s^3 + \cdots\cdots
\end{aligned} \quad (2)$$

Bu sonuç aslında Mikhailov kriterini kullanarak kolayca ispatlanabilir. Mikhailov kriterine göre *n*.

dereceden bir $p(s)$ polinomunun kararlı olabilmesi için $p(j\omega)$'nın pozitif reel eksenden başlayarak saat yönünün tersinde n ekseni kesmesi gerekir. Yani sıfırın dışlanması kuralına (zero exclusion principle) [1] göre $p(j\omega)$'nın orijinden geçmemesi gerekir. Dolayısıyla, bir interval polinomun herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesinin şekil 1 de görüldüğü gibi kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgen olduğu kolayca gösterilebilir. Bu dikdörtgenin köşelerini Kharitonov polinomları oluşturur ve bu dikdörtgene Kharitonov dikdörtgeni denir. Bu dikdörtgenin kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olduğu için orijinin dikdörtgensel değer kümesinin içinde veya dışında kalması köşe noktalarını kullanarak kolayca test edilebilir. Şekil 1 de de görüldüğü gibi köşe noktaları Kharitonov polinomlarına karşılık gelmektedir.



Şekil 1: Kharitonov dikdörtgeni ve $p_1(s)$'in Mikhailov eğrisi

Örneğin ikinci dereceden bir interval polinom

$$P(s,q) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 \tag{3}$$

verilmiş olsun burada $a_0 \in [3,6]$, $a_1 \in [8,10]$, $a_2 \in [4,8]$ ve $a_3 \in [1,2]$. $s = j\omega$ yerine konursa,

$$P(j\omega,q) = a_0 - a_2\omega^2 + j(-a_3\omega^3 + a_1\omega) \tag{4}$$

elde edilir. Burada reel ve sanal kısımda görülen belirsiz parametrelerin birbirinden bağımsız olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, her bir frekans değerinde $P(j\omega,q)$'nın değer kümesi kenarları reel ve sanal eksene paralel olan bir dikdörtgendir. Bu polinom kümesinin değer kümeleri $0 \le \omega \le 4$ aralığında 50 frekans değerinde Şekil 2 de görülmektedir. Sıfır değer kümesinin içinde olmadığı için bu belirsiz polinom kümesi kararlıdır. Bu kümenin dört Kharitonov polinomu

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 3 + 8s + 8s^2 + 2s^3 \\ p_2(s) &= 3 + 10s + 8s^2 + 1s^3 \\ p_3(s) &= 6 + 8s + 4s^2 + 2s^3 \\ p_4(s) &= 6 + 10s + 4s^2 + 1s^3 \end{aligned} \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu dört polinomun da kararlı olduğu test edilebilir. Dolayısıyla sürekli zamanlı bir interval polinomun kararlılığı dört Kharitonov polinomun kararlılığı test edilerek bulunabilir.

Bu sonucun ayrık zamanlı interval polinomlar için geçerli olmadığını aşağıdaki inerval polinomun karalılığında görebiliriz.

$$P(z,k) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \tag{6}$$

burada $a_0 = 0.0096$, $a_1 \in [-0.16,-0.1]$, $a_2 \in [0.42,0.5]$, $a_3 \in [-1.3,-1]$ ve $a_4 = 1$. Dört Kharitonov polinomunun yani

$$\begin{aligned} p_1(z) &= z^4 - z^3 + 0.5z^2 - 0.16z + 0.0096 \\ p_2(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.5z^2 - 0.1z + 0.0096 \\ p_3(z) &= z^4 - z^3 + 0.42z^2 - 0.16z + 0.0096 \\ p_4(z) &= z^4 - 1.3z^3 + 0.42z^2 - 0.1z + 0.0096 \end{aligned} \tag{7}$$

Schur kararlı olduğu test edilebilir. Fakat kümeye ait olan

$$p(z) = z^4 - 1.28z^3 + 0.42z^2 - 0.155z + 0.0096$$

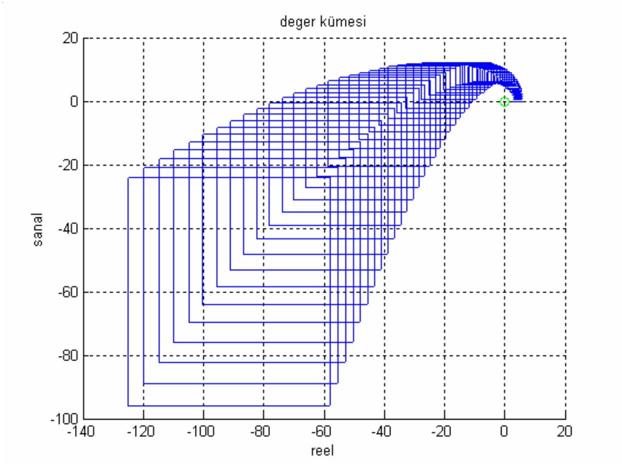
polinomu Schur kararlı değildir. Dolayısıyla dijital interval polinomlar için Kharitonov polynomlarının kararlı olması yeterli değildir. Bunun nedeni polinomda $z = e^{j\omega T}$, burada T örnekleme perytodudur, yazıldığında belirsiz parametreler reel ve sanal kısımda birbirlerine lineer bağımlı olarak görüleceklerdir. Dolayısıyla değer kümesi kenarları reel ve sanal eksenlere paralel olan dikdörtgen değildir. Öyleyse dijital bir inteval polinomun kararlılığının test edilebilmesi için polinomun değer kümesinin hesaplanabilmesi gerekir. Bunun için kenar(edge) teoremi kullanılabilir.

3. DİJİTAL İNTERVAL POLİNOMLARIN DEĞER KÜMESİ VE KARARLILIĞI

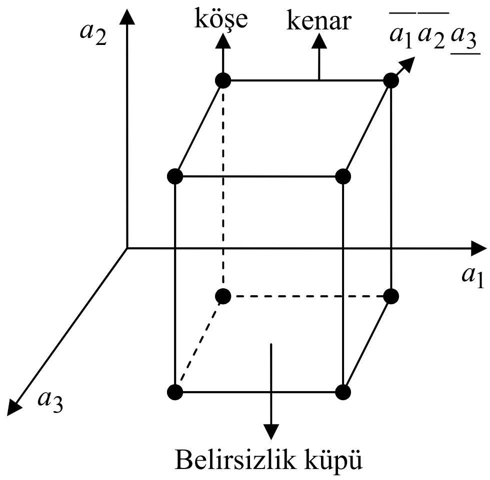
Bir dijital interval polinom kümesi

$$P(z,k) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{9}$$

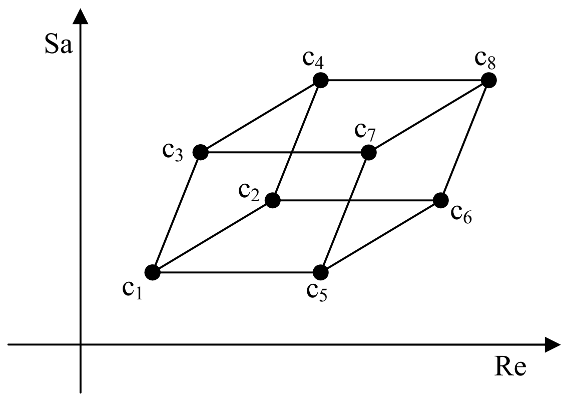
formunda gösterilebilir. Burada $k = [a_0, a_1, ..., a_n]$, $a_i \in [\underline{a_i}, \overline{a_i}]$, $i = 1,2,.....,n$, $\underline{a_i}$ ve $\overline{a_i}$ *i.* belirsizlik a_i'nin alt ve üst limitlerini göstermektedir. Kenar teoremine göre n tane belirsiz parametre içeren bir polinom ailesinin herhangi bir sabit frekanstaki değer kümesi bir poligondur ve bu poligonun 2^n tane



Şekil 2: Denklem (3)'teki interval polinomun $0 \leq \omega \leq 4$ için değer kümesi



a)



b)

Şekil 3: Üç tane belirsiz parametre içeren bir polinomun a) parametre düzlemindeki belirsizlik küpü ve b) kompleks düzlemdeki yansıması

köşesi ve $n2^{n-1}$ tane de etkin(exposed) kenarı vardır. Böyle bir polinom kümesinin Schur kararlı olabilmesi için bütün etkin kenarların Schur kararlı olması gerekir veya değer kümesinin sıfırı içine almaması gerekir. Örneğin üç tane belirsiz parametre içeren bir polinomun parametre düzlemindeki belirsizlik küpü ve kompleks düzlemdeki yansıması Şekil 3(a) ve (b) de görülmektedir.

Denklem (9) daki polinomun 2^n tane köşe polinomu aşağıdaki düzende yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
c_1(z) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}z + \underline{a_2}z^2 + \ldots + \underline{a_n}z^n \\
c_2(z) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}z + \underline{a_2}z^2 + \ldots + \underline{a_n}z^n \\
c_3(z) &= \underline{a_0} + \overline{a_1}z + \underline{a_2}z^2 + \ldots + \underline{a_n}z^n \qquad (10) \\
&\vdots \\
c_n(z) &= \overline{a_0} + \overline{a_1}z + \overline{a_2}z^2 + \ldots + \overline{a_n}z^n
\end{aligned}
$$

Etkin kenarlar elde edilirken köşe polinomlarından yararlanılır. Örneğin denklem (10)'a baktığımızda $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ polinomlarında sadece a_0 parametresi alt ve üst limitlerdeki değerleri almaktadır ve diğer parametreler belirsizliğin alt limitindeki değerlerinde sabitlenmişlerdir. Öyleyse uç noktaları $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ olan bir etkin kenar mevcuttur. Bu etkin kenar şu şekilde gösterilebilir

$$e(c_1, c_2) = \lambda c_1(z) + (1-\lambda)c_2(z), \qquad \lambda \in [0,1] \quad (11)$$

Böyle bir etkin kenar bir ayırt(segment) diye de adlandırılır. Benzer şekilde diğer etkin kenarlar da oluşturulabilir. Bu etkin kenarlar kullanılarak dijital interval polinomun değer kümesi elde edilir.

4. ÖRNEKLER

Örnek 1: Bir dijital inerval polinom şu şekilde verilsin

$$P(z,k) = [1.5,2]z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \quad (12)$$

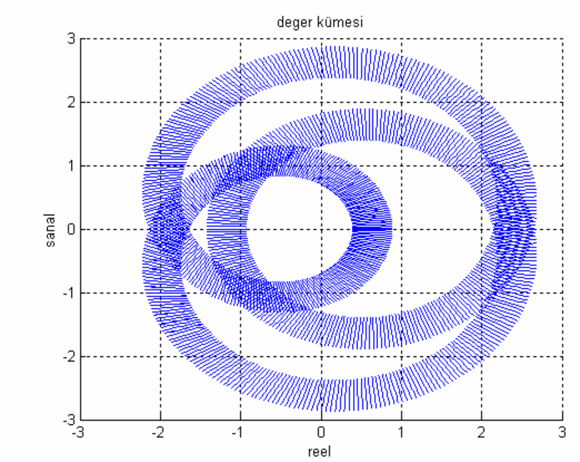
görüldüğü gibi bu inerval polinom kümesi sadece bir tane parametre belirsizliği içermektedir. Dolayısıyla bu polinom kümesi için 2 tane köşe polinomu ve bir tane kenar elde edilebilir. Köşe polinomları

$$
\begin{aligned}
c_1(z) &= 1.5z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \\
c_2(z) &= 2z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

$c_1(z)$ ve $c_2(z)$'in Schur kararlı olduğu Jury testini uygulayarak veya $c_1(z)$ ve $c_2(z)$'in köklerini bularak test edilebilir. Bütün polinom kümesinin kararlı olup olmadığını test edebilmek için önceki bölümde verilen yöntem kullanılabilir. Köşe veya uç polinomlarını kullanarak

$$e(c_1,c_2) = \lambda c_1(z) + (1-\lambda)c_2(z)$$
$$= (2-0.5\lambda)z^3 - 0.35z^2 - 0.85z + 0.08 \quad (14)$$

etkin kenarı elde edilebilir, burada $\lambda \in [0,1]$. Bu kenarın $0 \le \omega \le 40$ için değer kümesi Şekil 4 de görülmektedir. Şekilde de gözlendiği gibi sıfır değer kümesinin dışında kalmaktadır. Dolayısıyla verilen polinom kümesi Schur kararlıdır.



Şekil 4: Denlem (12)'de verilen polinomun $0 \le \omega \le 40$ için değer kümesi

Örnek 2: Birim geribeslemeli bir dijital interval kontrol sisteminde

$$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2(z+a_2)} \quad (15)$$

$a_0 \in [-0.06, 0.053]$, $a_1 \in [-0.05, 0.05]$ ve $a_2 \in [0.045, 0.15]$ ise kontrol sisteminin kararlılığını inceleyelim. Sistemin karakteristik denklemi

$$P(z,k) = 1 + G(z) = 0 \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

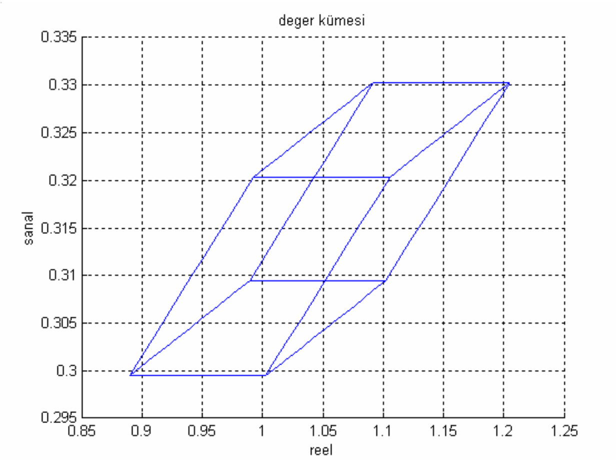
$$P(z,k) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (17)$$

elde edilir. Dolayısıyla dijital interval kontrol sisteminin kararlılık problemi dijital interval polinomların kararlılık problemine dönüştürülmüş oldu. Denklem (17) deki belirsiz polinom kümesinin kararlılığını test edebilmek için değer kümesi yaklaşımı kullanılabilir. Bu polinomda 3 tane belirsiz parametre olduğu için 2^3=8 tane köşe polinomu ve $3\text{x}2^2$=12 tane de etkin kenar elde edilebilir. Köşe polinomları

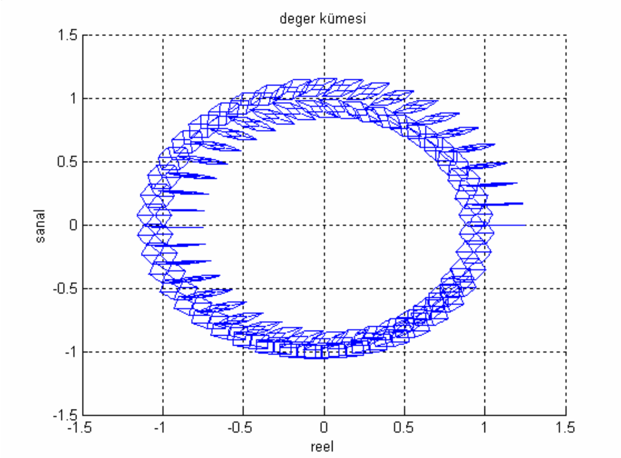
$$\begin{aligned}
c_1(z) &= -0.06 - 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\
c_2(z) &= 0.053 - 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\
c_3(z) &= -0.06 + 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\
c_4(z) &= 0.053 + 0.05z + 0.045z^2 + z^3 \\
c_5(z) &= -0.06 - 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\
c_6(z) &= 0.053 - 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\
c_7(z) &= -0.06 + 0.05z + 0.15z^2 + z^3 \\
c_8(z) &= 0.053 + 0.05z + 0.15z^2 + z^3
\end{aligned} \quad (18)$$

ve denklem (11) den yararlanarak $e(c_1,c_2)$, $e(c_1,c_3)$, $e(c_1,c_5)$, $e(c_2,c_4)$, $e(c_2,c_6)$, $e(c_3,c_4)$, $e(c_3,c_7)$, $e(c_4,c_8)$, $e(c_5,c_6)$, $e(c_5,c_7)$, $e(c_6,c_8)$ ve $e(c_7,c_8)$ etkin kenarları elde edilir.

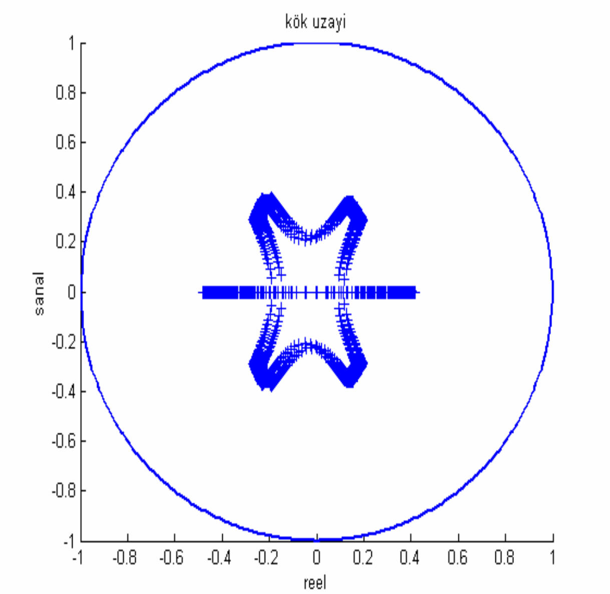
Bu etkin kenarları kullanarak denklem (17) deki interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Örneğin $\omega = 2$ rad/sn için değer kümesi Şekil 5 te görülmektedir. $0 \le \omega \le 80$ için değer kümeleri Şekil 6 da görülmektedir. Şekil 6 bize dijital kontrol sisteminin kararlı olduğunu yani kararkteristik denklemin bütün köklerinin birim çemberin içerisinde olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca, kenar teoremine göre etkin kenarların kök uzayı interval polinomun kök uzayını içine alır. Denklem (17) deki interval polinomun etkin kenarlarının kök uzayı Şekil 7 de verilmiştir. Şekilde de görüleceği gibi kök uzayı birim çemberin içinde kalmaktadır. Dolayısıyla sistem kararlıdır.



Şekil 5: Denklem (17)'deki polinomun $\omega = 2$ rad/sn deki değer kümesi



Şekil 6: Denklem (17)'deki polinomun $0 \le \omega \le 80$ için değer kümesi



Şekil 7: Denklem (15)'deki dijital kontrol sistemin karakteristik denkleminin kök uzayı

5. SONUÇLAR

Bu bildiride parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi incelendi. Kharitonov teoremi dijital interval polinomların kararlılık analizi için geçerli değildir. Kenar teoremini kullanarak bir dijital interval polinomun değer kümesi elde edilebilir. Değer kümesiyle beraber sıfırın dışlanması kuralını kullanarak bir dijital inerval polinomun Schur kararlılığının test edilebileceği gösterildi. Matlab ortamında gerekli yazılımlar geliştirilmiş olup bu yazılımlar parametre belirsizliği içeren dijital kontrol sistemlerinin analizi için kullanılabilecektir. İleriye yönelik olarak belirsizlik içeren dijital kontrol sistemlerinin frekans cevabı analizi yani Bode, Nyquist ve Nichols diyagramlar incelenecektir.

KAYNAKLAR

[1] Bahattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H., *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.

[2] Kharitonov, V. L., "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Differential Equations, Vol. 14, 1979, 1483-1485.*

[3] Bartlett, A. C., Tesi, A., Vicino, A.: "Frequency Response of Uncertain Systems with Interval Plants", *IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 38, 1993, 929-933.*

[4] Hollot, C. V., Bartlett, A. C.,. "On the Nyquist Envelope of an Interval Plant Family", *IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 39, 1994, 391-396.*

[5] Tan, N., Atherton, D. P., "Frequency Response of Uncertain Systems: A 2q-Convex Parpolygonal Approach", *IEE Proc., Control Theory and Application, Vol. 147, 2000, 547-555.*

[6] Tan, N., "Computation of the Frequency Response of Multilinear Affine Systems", *IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 47, 2002, 1691-1696.*

[7] Tan, N., Atherton, D. P., "Stability and Performance Analysis in an Uncertain World", Computing and Control Engineering Journal, Vol. 11, 2000, 91-101.

[8] Fu, M.: 'Computing the Frequency response of Linear Systems with Parametric Perturbations,' *Syst. Contr. Lett., Vol. 15, 1990, 45-52.*

[9] Barmish, B. R., *New Tools for Robustness of Linear Systems,* MacMillan, NY, 1994.

[10] Djaferis, T. E., *Robust Control Design: A Polynomial Approach,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.

[11] Ackermann, J., *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, 1993.

[12] Hollot, C. V., Bartlett, A. C.,. "On the Nyquist Envelope of an Interval plant family", *IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 31, 1986, 355-356.*

[13] Katbab, A., Jury, E. I.,. "Robust Schur-Stability of Control Systems with Interval Plants", *Int. J. of Control, Vol. 51, 1990, 1343-1352.*

[14] Katbab, A., Jury, E. I., "Generalization and Comparsion of Two Recent Frequency Domain Stability Robustness Results", *Int. J. of Control, Vol. 53, 1991, 463-475.*

[15] Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Lin, H., "Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges", *Mathematics of Controls, Signals and Systems., Vol. 1, 1988, 61-71.*

Yasin KARATAŞ: 1979 Sivas Gürün doğumludur. Yüksek öğrenimini 2003 yılında tamamladı. İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde 2005 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda yüksek lisans tez aşamasında çalışmalarını sürdürmektedir. Kontrol sistemleri ve uygulanmaları ile ilgilenmektedir.

Nusret TAN: 1971 yılında Malatya Doğanşehir doğumludur. 1994 yılında Hacettepe Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 1995 yılında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl doktora eğitimi için İngiltere de Sussex Üniversitesine gitti. Doktora eğitimini 2000 yılında tamamlayarak tekrar İnönü Üniversitesine döndü. 2004 yılında doçentlik ünvanını aldı. Genel olarak kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımıyla ilgilenmektedir.