

Küresel Elektromanyetik Saçılma: Mie Teorisi

Electromagnetic Scattering from Sphere: Mie Theory

Ahmet Sefer

İTÜ Bilişim Enstitüsü
Piri Reis Üniversitesi, İstanbul, Türkiye
asefer@pirireis.edu.tr

Öz

Mie teorisi, küreden saçılan elektromanyetik alanlar için analitik bir çözüm getirerek, daha karmaşık saçılım problemlerin çözümü için bir esas oluşturur. Bu çalışmada, Mie teorisi hakkında detaylı bir analiz sunulmaktadır. Teori uygulamaları için MATLAB kodları geliştirilmiş ve örnekler sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Elektromanyetik Saçılma, vektörel harmonik fonksiyonlar, küresel fonksiyonlar, radar kesit alanı.

Abstract

Mie Theory sets basis for more advanced applications in scattering by presenting an analytical solution for electromagnetic waves that scatters from arbitrarily selected spheres. This study presents the theoretical analysis in detail. MATLAB scripts are developed according to the theory and examples are given for validations.

Keywords: Electromagnetic scattering, vectorial harmonical functions, spherical functions, radar cross section

1. Giriş

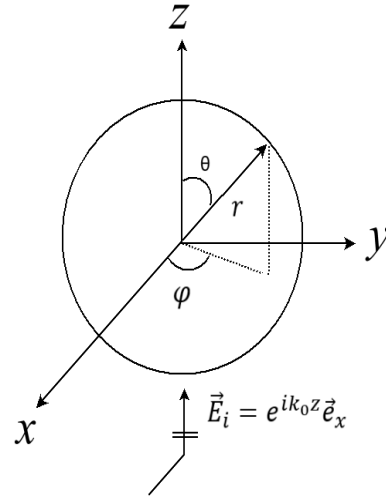
Gustav Mie, 20. Yüzyılın başlarında yayımladığı makalesinde [1], yarıçapı keyfi seçilmiş metal bir küreden saçılan elektromanyetik (EM) dalgalar için analitik bir çözüm sunmuş; bu yayına istinaden, küreden ışın-saçılma problemleri, sonraki dönemde Mie teorisi olarak literatürde yer edinmiştir [2-3]. Teorinin, içeriğinde EM ışın ve saçılma olan, hesaplamalı elektromanyetikten, plazma fiziğine, atmosferik ışımadan, biyomedikal alanına dek [4-6] geniş uygulama alanına sahip olması nedeniyle, daha karmaşık ışın ve saçılma problemleri için bir esas olarak kabul edildiğini söylemek yanlış olmayacaktır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, Mie teorisinin matematiksel esası üzerinde durulup, MATLAB tabanlı kodlar ile geliştirilen uygulama ve örnekler son bölümün konusu olacaktır.

2. Teori – Analitik Çözüm

Genel olarak bir EM dalga iletken bir cisim ile karşılaştığında, akım indüklenir ve buna bağlı olarak tekrar ışımaya ve saçılan dalgaları üretmeye başlar. Mie teorisi, Şekil 1 de gösterildiği üzere, yayılımı z yönünde olan düzlemsel bir elektrik alanın,

iletken bir küreye çarpması sonucu ortaya çıkacak sonuçların matematiksel analizini kapsar. Daha genel anlamda, gelen ve saçılan EM alanın küresel vektör harmonikler cinsinden seri açılımına dayanır. Teori, dalganın dielektrik bir malzeme seçimine bağlı olarak, küre tarafından absorbe edilecek EM alanı da kapsayarak genişletilebilir. Bütün senaryolar için, bu alanların teğetsel bileşenleri, sınır koşulları gereği, küre yüzeyinde devamlı olup; buna bağlı olarak elde edilmiş olan serilerin katsayıları hesaplanır. Bu çalışmada, serilerin içeriği olan küresel vektör harmoniklerin elde edilebilmesi için öncelikle küresel koordinatlarda skaler Helmholtz denklemi çözülecek; bu çözüm kullanılarak vektörel dalga denkleminde geçiş yapılacaktır ve seri açılımına ulaşılabilecektir. Çalışmanın bütününde zaman bağımlılığı $e^{-i\omega t}$ olarak seçilmiştir.



Şekil 1: Gelen düzlem dalga yayılımı ve küresel geometri

2.1 Skaler Helmholtz Denklemi

Keyfi seçilmiş bir $f(r, \theta, \phi)$ fonksiyonunun küresel koordinatlarda skaler Helmholtz denklemini sağladığı varsayımına bağlı olarak:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k^2 f = 0.$$

(1)

Burada, $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ dalga numarasıdır. Denklemin çözümü için ikinci varsayım, fonksiyonun değişkenler üzerinde dağılıbilir olduğudur. Başka bir deyişle:

$$f(r, \theta, \varphi) = f_r(r) f_\theta(\theta) f_\varphi(\varphi). \quad (2)$$

Böylelikle, (2) ve (1) bağıntıları kullanılarak üç farklı dağıtılmış denklem elde edilir:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial f_r}{\partial r} \right) + (k^2 r^2 - n(n+1)) f_r = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] f_\theta = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 f_\varphi}{d\varphi^2} + m^2 f_\varphi = 0. \quad (5)$$

Bu durumda, (3) bağıntısının çözümü küresel Bessel fonksiyonları olup, bu fonksiyonlar sıradan Bessel fonksiyonları ile ortak özelliklere sahiptir. [7] Buna ilaveten, doğrusal kombinasyonları birinci ve ikinci dereceden küresel Hankel fonksiyonlarını verecektir:

$$h_n^{(1)} = j_n(kr) + iy_n(kr), \quad (6)$$

$$h_n^{(2)} = j_n(kr) - iy_n(kr). \quad (7)$$

Küresel Bessel fonksiyonlarının $(b_n(kr))$ sıradan Bessel fonksiyonları $(B_n(kr))$ cinsinden tanımlamak gerekirse:

$$b_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} B_{n+\frac{1}{2}}(kr). \quad (8)$$

EM alanın, küre içerisinde ve/veya dışında Bessel ve Hankel fonksiyonları cinsinden tanımlamak için, bu fonksiyonların asimptotik davranışlarını incelemek gerekir [8]. Kabaca, küre içerisinde ki EM alan temsili için $j_n(kr)$ kullanılmalıdır çünkü $r=0$ için $j_n(kr)$ sonlu olup; $r \rightarrow \infty$ için sinüzoidal yapıdadır. Dolayısıyla bu fonksiyon, durağan tipi bir dalga tanımı için uygundur. Diğer taraftan, $r \rightarrow \infty$ için birinci dereceden Hankel fonksiyonları $(h_n^{(1)}(kr))$ ışınım koşullarını sağladığından; dışarı doğru uzak alandaki dalgaların temsili için kullanılırlar.

Öte yandan, (4) bağıntısının çözümü ile bütünleşik Legendre fonksiyonları $(P_n^m(\cos \theta), Q_n^m(\cos \theta))$ elde edilecektir [8]. Bu fonksiyonlar $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ için tekil olduklarından, $[0, \pi]$ aralığı için sonlu bir dalga fonksiyonu tanımlayabilmek adına:

$$f_\theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta). \quad (9)$$

Olarak seçilir. Son olarak, (5) bağıntısının çözümü, tek ve çift olmak üzere doğrusal olarak bağımsız harmonik sinüzoidal denklemler içerir:

$$f_{\varphi, \text{çift}}(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad (10.a)$$

$$f_{\varphi, \text{tek}}(\varphi) = \sin(m\varphi). \quad (10.b)$$

(6)- (10) bağıntıları içerisinde bulunan sonuçlar bir araya getirilirse, (2)'de tanımlı skaler fonksiyon için:

$$f(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} f_{\varphi^{mm}} = \cos(m\theta) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \\ f_{\varphi^{mn}} = \sin(m\theta) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \end{cases}. \quad (11)$$

(11) bağıntısında gösterilen $z_n(kr)$ EM dalganın konumuna göre küresel Bessel ya da birinci dereceden küresel Hankel fonksiyonunu temsil eder. İlaveten, (11) bağıntısında verilmiş olan m ve n birer tam sayıdır ve her bir terim karşılıklı olarak birbirlerine diktir [8]. Böylelikle, (1) bağıntısında verilmiş Helmholtz denklemini sağlayabilen herhangi bir fonksiyon, (11) bağıntısında tanımlı fonksiyonlarca seri açılımı yapılarak tanımlanabilir [8-9].

2.2 Vektörel Dalga Denklemi ve Küresel Harmonikler

Helmholtz'un ortaya koyduğu teoriye göre, bir vektörü tanımlayabilmek için, o vektörün diverjansını ve rotasyonelini biliyor olmak yeterlidir [4]. Bu başlık altında yapılacak çalışmada, EM alanları tanımlayabilmek için kullanılacak vektörler elde edilecektir. Tanımlanacak vektörler, (11) bağıntısında tanımlanan skaler fonksiyonlara bağlı olacak ve böylelikle EM alanlar için bir seri açılımı yapılabilecektir.

Başlangıç olarak, sabit ve birim uzunluğa sahip bir \vec{c} vektörüne bağlı olarak, üç adet vektör tanımlamak mümkündür:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \nabla f(r, \theta, \varphi), \\ \vec{M} &= \nabla \times (\vec{c} f(r, \theta, \varphi)), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}.$$

(12) bağıntısına bakarak her üç vektörün birbirlerine dik olduğu aşikardır. \vec{L} vektörünün rotasyoneli ve diverjansı için:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{L} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{L} &= \nabla^2 f = -k^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Buna ilaveten, \vec{M} ve \vec{N} vektörlerinin alan çizgileri daireseldir; diğer bir deyişle, diverjansları sıfırdır.

$$\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{N} = 0. \quad (14)$$

(12), (13) ve (14) bağıntılarının sonuçlarına bakarak, herhangi bir dalga fonksiyonu yukarıda tanımlanan vektörel fonksiyonların doğrusal kombinasyonları olarak sunulabilir. Ayrıca, boş uzayda ki düzlem EM alanlar, diverjansları sıfır ve birbirlerinin rotasyoneli olarak tanımlanabileceğinden, \vec{M} ve \vec{N} vektörleri, elektrik alan $\vec{E}(\vec{r})$ ve manyetik alan $\vec{H}(\vec{r})$ tanımları için yeterli ve uygundur. Eğer en başta tanımlanan sabit ve birim uzunlukta ki \vec{c} vektörü, kürenin radyal birim vektörü olan \vec{e}_r olarak kabul edilirse, bu durumda, \vec{M} ve \vec{N} vektörleri, seçilecek o küre için teğet olacaklardır. (11) bağıntısında gösterilen skaler fonksiyonun tek ve çift bileşenlerine bağlı kalarak, (12) bağıntısında tanımlanan vektörlerinin tek ve çift bileşenleri için,

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\left\{ \begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} \right\} mn} &= \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \bar{e}_\varphi \frac{m}{\sin \varphi} \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \\ -\bar{e}_\varphi \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} &\left\{ (m\varphi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(kr), \right. \\ \vec{N}_{\left\{ \begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} \right\} mn} &= \bar{e}_r \frac{z_n(kr)}{(kr)} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left\{ (m\varphi) n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \right. \\ +\bar{e}_\theta &\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left\{ (m\varphi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} (kr z_n(kr)) \right. \\ &\left. \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \bar{e}_\varphi m \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left\{ (m\varphi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin(\varphi)} \frac{d}{d(kr)} (kr z_n(kr)). \right. \end{aligned} \quad (15)$$

Buna göre, \bar{e}_x yönünde polarize olmuş ve \bar{e}_z yönünde yayılım gösteren normalize düzlemsel elektrik alan için (16) bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$\vec{E}^i = \bar{e}_x e^{ikz} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{emn} \vec{M}_{emn} + B_{omn} \vec{M}_{omn} + A_{emn} \vec{N}_{emn} + A_{omn} \vec{N}_{omn}. \quad (16)$$

(16) bağıntısında gösterilen seri katsayıları (17) bağıntısında ki integraller ile hesaplanacaktır.

$$B_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{E}^i \cdot \vec{M}_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \vec{M}_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi}, \quad (17a)$$

$$A_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{E}^i \cdot \vec{N}_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \vec{N}_{\left\{ \begin{smallmatrix} emn \\ omn \end{smallmatrix} \right\}} \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi}. \quad (17b)$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının ortogonal ilişkilerine bağlı olarak, $m=1$ dışındaki bütün katsayılar sıfırdır. Buna bağlı olarak, (16) bağıntısında tanımlanan düzlemsel elektrik alan denklemi sadeleşmiş haliyle, (18) bağıntısında tanımlanmıştır.

$$\vec{E}^i = \sum_{n=0}^{\infty} B_{01n} \vec{M}_{01n} + A_{e1n} \vec{N}_{e1n}. \quad (18)$$

Bu bağıntıda tanımlı katsayılar için, (17a) ve (17b) bağıntılarında gösterilen integrallerin hesaplanması gereklidir. Bu integralleri fonksiyonların ortogonal ilişkilerini kullanarak hesaplamak mümkündür [4]. Elde edilecek katsayılar göre gelen düzlemsel elektrik alan için yazılacak seri ifadesi, (19) bağıntısında gösterildiği gibidir.

$$\vec{E}^i = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{M}_{01n}^{(1)} - i \vec{N}_{e1n}^{(1)} \right) \quad (19)$$

(19) bağıntısında \vec{M} ve \vec{N} vektörleri için kullanılan (1) üst indisi, elektrik alanın radyal bileşeninin $j_n(kr)$ olduğunu vurgulamak içindir. Gelen manyetik alan, (19) bağıntısında tanımlı elektrik alanın rotasyonu ile ilintili olduğundan:

$$\vec{H}^i = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{M}_{e1n}^{(1)} - i \vec{N}_{o1n}^{(1)} \right). \quad (20)$$

Bağıntılar ile tanımlanan vektör harmoniklerin ortogonal olmalarına ve bir sonra ki aşamada başvurulacak sınır koşullarının sürekliliğine bağlı olarak, dielektrik küre

içerisinde absorbe edecek ve küre dışına saçılım yapacak EM alanlar için de vektörel harmonikleri kullanmak mümkündür. (21) ve (22) bağıntıları, sırasıyla, içeriye absorbe edecek ve saçılacak EM alanları verecektir.

$$\vec{E}^t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \vec{M}_{o1n}^{(1)} - i d_n \vec{N}_{e1n}^{(1)}, \quad (21)$$

$$\vec{H}^t = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \vec{M}_{e1n}^{(1)} - i c_n \vec{N}_{o1n}^{(1)}.$$

$$\vec{E}^s = \sum_{n=0}^{\infty} -b_n \vec{M}_{o1n}^{(3)} + i a_n \vec{N}_{e1n}^{(3)} \quad (22)$$

$$\vec{H}^s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \vec{M}_{e1n}^{(3)} + i b_n \vec{N}_{o1n}^{(3)}$$

2.3 Sınır Koşulları – Katsayıların Elde Edilmesi

Yarıçapı a olan kayıplı bir küre için, EM teğetsel alanların sürekliliğine bağlı olarak, (21) ve (22) bağıntılarında verilen dört bilinmeyen için dört denklem elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned} E_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^i + E_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^s &= E_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^t, \\ H_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^i + H_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^s &= H_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta, \varphi \\ \theta, \varphi \end{smallmatrix} \right\}}^t. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) bağıntısı ile elde edilen denklemlerin çözümü ile (21) ve (22) bağıntılarında verilen katsayıları bulmak mümkündür. Bu çalışmada sadece saçılan alan formülleri verilmiş olup; diğer iki katsayı için okuyucu [3-4] inceleyebilir.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{j_n(Na) \left[(k_0 a) j_n(k_0 a) \right]' - j_n(k_0 a) \left[(Nk_0 a) j_n(Nk_0 a) \right]'}{j_n(Nk_0 a) \left[(k_0 a) h_n^{(1)}(k_0 a) \right]' - h_n^{(1)}(k_0 a) \left[(Nk_0 a) j_n(Nk_0 a) \right]'} \\ b_n &= \frac{j_n(a) \left[(Nk_0 a) j_n(Nk_0 a) \right]' - N^2 j_n(Nk_0 a) \left[(k_0 a) j_n(k_0 a) \right]'}{h_n^{(1)}(k_0 a) \left[(Nk_0 a) j_n(Nk_0 a) \right]' - N^2 j_n(Nk_0 a) \left[(k_0 a) h_n^{(1)}(k_0 a) \right]'} \end{aligned} \quad (24)$$

Burada k_0 boş uzayda ki dalga numarasıdır. Kürenin iletkenliğine bağlı olarak, karmaşık olma ihtimali bulunan dalga numarası k_1 ise, $N = k_1 / k_0$, kürenin refraktif indisidir. (24) bağıntısında verilen a_n ve b_n saçılan dalgaların katsayıları c_n ve d_n küre içerisinde absorbe edilen alanların katsayılarıdır. Ricatti-Bessel fonksiyonları tanımlanarak a_n ve b_n katsayılarının bu fonksiyonlar üzerinden tanımları sırasıyla (25) ve (26) bağıntılarında verilmiştir.

$$\psi(r) = r j_n(r), \quad (25a)$$

$$\xi(r) = r h_n^{(1)}(r). \quad (25b)$$

$$a_n = \frac{N \psi_n(Nk_0 a) \psi_n'(k_0 a) - \psi_n(k_0 a) \psi_n'(Nk_0 a)}{N \psi_n(Nk_0 a) \xi_n'(k_0 a) - \xi_n(k_0 a) \psi_n'(Nk_0 a)}, \quad (26a)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(Nk_0 a) \psi_n'(k_0 a) - N \psi_n(k_0 a) \psi_n'(Nk_0 a)}{\psi_n(Nk_0 a) \xi_n'(k_0 a) - N \xi_n(k_0 a) \psi_n'(Nk_0 a)} \quad (26b)$$

Kürenin iletkenliğine bağlı olarak, $\psi(Nk_0 a)$ genelde karmaşık olur. Buna bağlı olarak, fonksiyon ve onun türevi kayıplı ortamlar için birkaç terimden sonra iraksamaya başlar. Özellikle mükemmel iletken (PEC) kürelerde, numerik hesaplamalar son derece kısıtlıdır. Bu sorun, $\psi(Nk_0 a)$

fonksiyonunun logaritmik türevi olan fonksiyon kullanılarak çözümlenebilir [9]:

$$D_n(Nk_0a) = \frac{\psi'_n(Nk_0a)}{\psi_n(Nk_0a)} = \frac{[(Nk_0a)j_n(Nk_0a)]'}{(Nk_0a)j_n(Nk_0a)}. \quad (27)$$

(27) bağıntısında tanımlanan $D_n(Nk_0a)$ fonksiyonu $Nk_0a=0$ olmadığı sürece sonludur. İlaveten, $D_n(k_0a)$ fonksiyonu aşağı doğru yineleme koşulunu sağlar. Buna göre,

$$D_{n-1}(Nk_0a) = \frac{n}{Nk_0a D_n(Nk_0a) + n/Nk_0a}. \quad (28)$$

(27) ve (28) bağıntıları kullanılarak, a_n ve b_n katsayıları (29) bağıntısında yeniden tanımlanmıştır.

$$a_n = \frac{\left(\frac{D_n(Nk_0a)}{N} + \frac{n}{k_0a}\right) \psi_n(k_0a) - \psi_{n-1}(k_0a)}{\left(\frac{D_n(Nk_0a)}{N} + \frac{n}{k_0a}\right) \xi_n(k_0a) - \xi_{n-1}(k_0a)} \quad (29a)$$

$$b_n = \frac{\left(ND_n(Nk_0a) + \frac{n}{k_0a}\right) \psi_n(k_0a) - \psi_{n-1}(k_0a)}{\left(ND_n(Nk_0a) + \frac{n}{k_0a}\right) \xi_n(k_0a) - \xi_{n-1}(k_0a)} \quad (29b)$$

Son olarak katsayıların hesaplanması için n belirlenecek yineleme numarası $n \approx 2 + k_0a + 16k_0a^{1/3}$ [10] olarak seçilebilir. (29) bağıntısında tanımlanan katsayıların hesabı için oluşturulan MATLAB kodu Ek-1 de verilmiştir.

2.4 Uzak Alan Genlik Fonksiyonları

Küresel Hankel ve Bessel fonksiyonlarının asimptotik hareketlerine bağlı olarak, uzak bölgede saçılan elektrik alanlar (30) bağıntısında verilmiştir.

$$E_{s\theta} = \eta H_{s\theta} \cong i \frac{e^{ik_1r}}{k_1r} \cos(\varphi) S_2(\theta), \quad (30a)$$

$$E_{s\varphi} = \eta H_{s\varphi} \cong i \frac{e^{ik_1r}}{k_1r} \sin(\varphi) S_2(\theta). \quad (30b)$$

(30) bağıntısında verilen $S_1(\theta)$ ve $S_2(\theta)$ uzak alanlar için genlik fonksiyonlarıdır. (31) bağıntısında bu fonksiyonlar tanımlanmıştır.

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta)],$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos\theta) + b_n \pi_n(\cos\theta)]. \quad (31)$$

(31) bağıntısında tanımlanan π_n ve τ_n fonksiyonları açığa bağlı fonksiyonlar olarak adlandırılıp; tanımları (32a) ve (32b) bağıntılarında yapılmıştır.

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (32a)$$

$$\tau_n(\cos\theta) = \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\sin\theta} \quad (32b)$$

(31) ve (32) bağıntılarında tanımlanan fonksiyonlar için oluşturulan MATLAB kodu Ek-1 de verilmiştir.

2.5 İleri ve Geri Yönde Saçılma – Radar Kesit Alanı

(31) bağıntısında tanımlanan uzak alan genlik fonksiyonları, θ değişkenine bağlı fonksiyonlardır. $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ değerleri için:

$$\pi_n(\cos 0) = \tau_n(\cos 0) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (33)$$

$$\pi_n(\cos \pi) = -\tau_n(\cos \pi) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}. \quad (34)$$

(33) ve (34) bağıntılarında elde edilen sonuçlara göre:

$$S_1(0) = S_2(0). \quad (35.a)$$

$$S_1(\pi) = -S_2(\pi). \quad (35.b)$$

Dolayısıyla, uzak bölgede saçılan EM alanlar, gelen EM alanlar ile doğrusal polarizasyonludur. Diğer açılarda ise bu alanlar eliptik polarizasyona sahiptirler. Bu açı değerlerinde genlik fonksiyonlarını özel kılan bir diğer durum ise, ileri kesit alanı ($\theta=0$) ve geri kesit alanı (Radar Kesit Alanı) ($\theta=\pi$) hesaplamaları için gereklilikleridir. Radar kesit alanı (RKA) [11-12] kabaca, küreden saçılan EM enerjinin gelen EM dalganın güç yoğunluğuna oranıdır. Bu doğrultuda, a yarıçaplı kürenin geometrik kesit alanı ile normalize edilmiş RKA (36) bağıntısında verilmiştir.

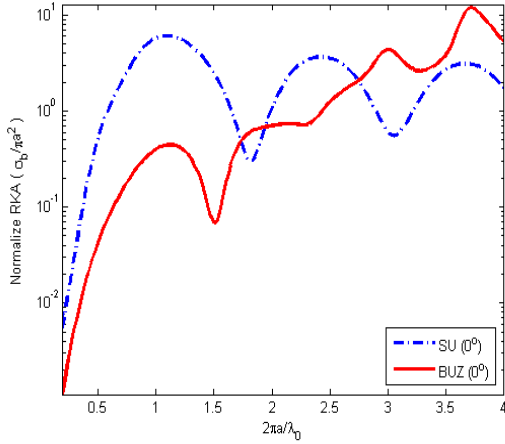
$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{2}{(k_0a)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (36)$$

İleri yönde saçılma teorisine göre [13] ileri yönde saçılma kesit alanı, $\theta=0$ bölgesinde uzak alan genlik fonksiyonlarının reel kısmı ile ilişkilidir. a yarıçaplı kürenin geometrik kesit alanı ile normalize edilmiş ileri yönde saçılma kesit alanı (37) bağıntısında verilmiştir.

$$\frac{\sigma_{ext}}{\pi a^2} = \frac{2}{(k_1a)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}\{a_n + b_n\} \quad (37)$$

3. Sayısal Sonuçlar

Elde edilen sonuçlara göre yazılan kodları test etmek amacıyla sayısal örnekler bu kısımda verilmiştir. İlk olarak, yarıçapı a olan ve küresel bir geometriye sahip olduğundan, Mie teorisi ile modellenen su damlacığının RKA değerlerine dair bir çalışma sonucu verilecektir [14]. Çalışmada, boş uzay için dalga boyu $\lambda_0=3.2$ cm seçilmiş; su damlacığının sıfır derecedeki karmaşık refraktif indisi $N_{su}=7.1-2.89i$ olarak kabul edilmiştir. Diğer taraftan, yine aynı parametreler için buzun karmaşık refraktif indisi $N_{buz}=1.78-2.4 \times 10^{-3}i$ olarak kabul edilmiştir. Su ve buz parçacıklarının, $k_0a=2\pi a/\lambda_0$ 'nın fonksiyonu olarak normalize edilmiş RKA değerlerinin grafiği Şekil 2 de verilmiştir. Şekil 2 de gösterilen grafikte, sabit tutulan dalga boyu için, yarıçap a , dalga numarası parametresinin ($k_0=2\pi/\lambda_0$) bir fonksiyonu olarak, dalga boyu λ_0 cinsinden değişmektedir. Buna göre, maksimum yarıçap değeri yaklaşık olarak $a=2.03$ cm'dir. Şekil 2 de elde edilen değerler ile [14]'te referans alınan değerler arasında, yüzdesel bir hata fonksiyonu tanımlarsa:

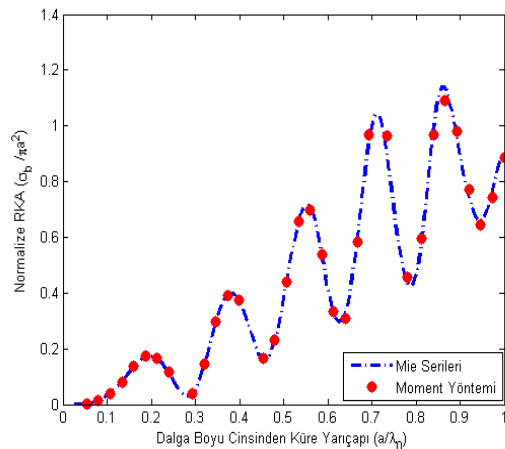


Şekil 2: Su ve Buz için $\lambda_0 = 3.2$ cm dalga boyunda, k_0a boyut parametresinin bir fonksiyonu olarak normalize edilmiş radar kesit alanları.

$$hata_{Su-Buz} = \frac{\|\sigma_{ref} - \sigma_{Mie}\|}{\|\sigma_{ref}\|} \times 100 \quad (38)$$

Elde edilen $hata_{Su-Buz}$ değeri %1'in altındadır.

RKA uygulamalarında, küreden saçılan alanlar, kürenin geometrik simetrisi ve analitik çözümünün varlığı dolayısıyla, yapılacak daha karmaşık bir geometri analizi için referans kabul edilirler. Diğer taraftan, RKA hesaplamalarında sıklıkla başvurulan, elektrik alan integral denklemlerinin çözümü için doğrusal bir çözüm sunan Moment Yöntemi (MoM) [15] ile elde edilen sonuçlar [16], Mie teorisi ile elde edilen RKA değerleri için referans teşkil ederler. Bu bağlamda, Şekil 3'de boyut parametresinin (k_0a) bir fonksiyonu olarak, yarıçapı a olan dielektrik bir küreden, Mie serileri kullanılarak elde edilen sonuçlar ve MoM değerleri ile kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçlar için dielektrik kürenin refraktif indisi $N_{dielectric} = 2 + 0i$ olarak alınmıştır.



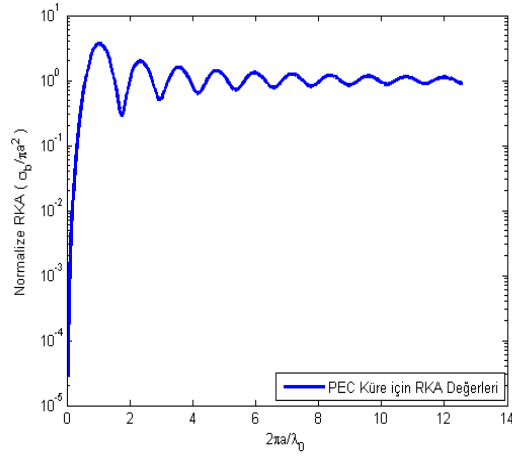
Şekil 3: Moment Yöntemi ve Mie serileri ile dielektrik küre için Normalize RKA sonuçları.

Şekil 3 için her iki yöntem ile elde edilen sonuçlar arasında (38) de olduğu gibi bir hata tanımı yapılırsa:

$$hata_{MoM-Mie} = \frac{\|\sigma_{MoM} - \sigma_{Mie}\|}{\|\sigma_{MoM}\|} \times 100 \quad (39)$$

Elde edilen $hata_{MoM-Mie}$ değeri yaklaşık olarak %2 mertebesinde ($hata_{MoM-Mie} = 0.0214 \times 100$) .

Son olarak mükemmel iletken (PEC) küre için elde edilen mono-statik RKA sonuçları Şekil 3'te gösterilmektedir. Şekil 3 için $a = 40$ cm seçilmiş PEC için refraktif indis $N_{PEC} = 1000 + 1000i$ olarak belirlenmiştir. Bu kadar büyük bir refraktif indis tanımı için Şekil 4'te verilen örnek, (29a) ve (29b) arası bağıntılarla hesaplanacak Mie katsayıları için test niteliğindedir.



Şekil 4: PEC küre için RKA Değerleri.

4. Sonuç

Küreden saçılma dair, Mie Serileri sayesinde, analitik olarak elektromanyetik (EM) alanlar ile ilgili bir sonuç elde etmek mevcut her zaman. Elbette, EM, analiz yapmak isteyen kişi için, geometrisinde ki mükemmel simetriye de bağlı olarak, küre, anlamlı bir ölçümleme elemanıdır. Öyle ki, analitik olarak çözümü olmayan ve buna istinaden numerik bir analiz yapılması gereken düzensiz geometriler için, Mie Serileri çözümü [1] her zaman ilk bakılması gereken referans olmuştur.

Teoriye dair geniş bir literatüre ulaşmak mümkün; bu çalışmanın, hâlihazırda bulunan literatüre ilaveten, özellikle yurtiçi araştırmaları için, giriş seviyesinde bir kaynakça olabilmesi umulmaktadır. Ekte sunulan MATLAB tabanlı yazılmış kod ile frekans, refraktif indis ve küre yarıçapı parametreleri kullanılarak, mono-statik RKA sonuçlarına ulaşmak mümkündür. Seçilecek refraktif indise bağlı olarak, Sayısal örneklerde gösterildiği üzere, dielektrik ve/veya mükemmel iletken yüzeyler katsayıları hesaplamak mümkün kılınmıştır. Örneklerde gösterildiği üzere, MATLAB tabanlı

kod ile elde edilen sonuçlar, literatürdeki sonuçlar ile birebir örtüşmektedir.

Kaynaklar

- [1] Mie, G., "Beigrade zur optik truber medien, speziell kolloidaler metallosungen", *Ann. Phys.*, 25, 377-455, 1908.
- [2] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, New York, McGraw-Hill, 1941.
- [3] Bohren C. F. and Huffinan D. R., *Absorption and scattering of light by small particles*, Wiley,. 1983.
- [4] Sefer A., Sevgi L., "Method of Moment Modelling of Wave Scattering from Arbitrary Geometries in 3D in Free Space", M.S. Thesis, Dept. Electron. And Commn. Eng., Dogus Uni. Istanbul, 2014.
- [5] Liou K. N., *An Introductwn to Atmospheric Radiation*, Oxford, Elsevier Books/Academic Press, 2002
- [6] Born M., Wolf E., *Principles of Optics*, NY, Pergamon Press, 2003.
- [7] Watson G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, Cambrige Press, 1995.
- [8] Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, NY, Dover Books, 1972
- [9] Hong Du, "Mie-Scattering Calculation", *Appl. Opt.*, vol. 43 no. 9, pp. 1951-1956, 2004
- [10] Wiscombe W. J., (1980), "Improved Mie Scattering Algorithms", *Appl. Opt.*, vol. 19 no. 9, pp. 1505-1509, May 1980
- [11] Sevgi L. Ulm tk (:., yaktr G. and (:aktr M., "RCS Modelling and Simulation, Part 1: A Tutorial Review of Definitions, Strategies and Canonical Examples", *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 50 no. 1, 115-126, Feb 2008.
- [12] Sefer A., Sevgi L., Uslu M. A., "MATLAB Based 3D MoM FDTD codes for the RCS analysis of Realistic Objects", *IEEE Antennas Propagat. Magazine*, vol. 57 no.4, 122-148, August 2015.
- [13] Ishimaru A, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Wiley-IEEE Press, NY, 1999.
- [14] Stephen J. J., "Radar Cross Section for Water And Ice Spheres", *J. Meteo.*, 18, 348-359, June 1961.
- [15] Harrington R. F., *Field Computation by Moment Method*, 1st Ed. NY, IEEE Press, 1993.
- [16] Sefer A., Sevgi L., "LU Decomposition Based 3D Method of Moment Modelling of Wave Scattering From Arbitrary Geometries", 3^d EMC Turkiye Conference, Istanbul, 2016.
- [17] Skolnik M. I. *Introduction to Radar Systems*, McGraw Hill, NY, 1985.

EK-1: Küre için RKA Hesaplama – MATLAB Tabanlı Kod

```

% Author : Ahmet SEFER
% Purpose : To calculate Radar Cross Section of Sphere with Mie Theory
% a : radius of sphere [meter]
% f : frequency [Hz]
% N : complex refractive index; N=N'+iN"
function results=RCS_Mie(a,f,N)
u=pi;
c=300e6; %speed of light in free space
k=2*pi*f/c; %wave number in free space
kr=k*a;
nmax=round(2+kr+4.*kr.^(1/3)); %Iteration number
Nkr=N.*kr; %refractive index times size parameter
nmx=round(max(nmax,abs(Nkr))+16);
n=(1:nmax); nu = (n+0.5);
spherical_const=sqrt(0.5*pi*kr);%constant for spherical bessel functions
%=====RICATTI BESSEL FUNCTIONS According to (25a)&(25b) =====
%nth term of Ricatti Bessel "psi" function
Ricatti_Psi_n =spherical_const.*besselj((nu),kr);
%(n-1)th term of Ricatti Bessel "psi" function
Ricatti_Psi_n_1=ones(1,nmax);
Ricatti_Psi_n_1(2:nmax)=spherical_const.*besselj(nu(1:end-1),kr);
Ricatti_Psi_n_1(1) =sin(kr);
%nth term of Ricatti Bessel "chi" function
Ricatti_Chi_n =-spherical_const.*bessely((nu),kr);
%(n-1)th term of Ricatti Bessel "psi" function
Ricatti_Chi_n_1 =ones(1,nmax);
Ricatti_Chi_n_1(2:nmax)=-spherical_const.*bessely(nu(1:end-1),kr);
Ricatti_Chi_n_1(1) =cos(kr);
%nth term of Ricatti Bessel "xi" function
Ricatti_xi_n=Ricatti_Psi_n-li.*Ricatti_Chi_n;
%(n-1)th term of Ricatti Bessel "xi" function
Ricatti_xi_n_1=Ricatti_Psi_n_1-li.*Ricatti_Chi_n_1;
%===== Computation of Dn(z) Acc. to (28)=====
dn(nmx)=0+0i;
for j=nmx:-1:2
    dn(j-1)=j./Nkr-1/(dn(j)+j./Nkr);
end;
Dn=dn(n); % Dn(z), n=1 to nmax
da=Dn./N+n./kr;
db=N.*Dn+n./kr;
%===== SCATTERING COEFFICINETS Acc. to (29a)-(29b)=====
an=(da.*Ricatti_Psi_n-Ricatti_Psi_n_1)./(da.*Ricatti_xi_n-Ricatti_xi_n_1);
bn=(db.*Ricatti_Psi_n-Ricatti_Psi_n_1)./(db.*Ricatti_xi_n-Ricatti_xi_n_1);
p(1)=1;
t(1)=cos(u);
p(2)=3*cos(u);
t(2)=3*cos(2*u);
%recurrence relations of the functions defined in (32)-(34)
for ii=3:nmax,
    p1=(2*ii-1)./(ii-1).*p(ii-1).*cos(u);
    p2=ii./(ii-1).*p(ii-2);
    p(ii)=p1-p2;
    t1=ii*cos(u).*p(ii);
    t2=(ii+1).*p(ii-1);
    t(ii)=t1-t2;
end
pin=p;
taun=t;
n=(1:nmax);
n2=(2*n+1)./(n.*(n+1));
pin=n2.*pin;
taun=n2.*taun;
%The functions defined in (31)
S1=(an*pin'+bn*taun');
S2=(an*taun'+bn*pin');
phi=0;
z=(-50);
%=====Propagation of Field=====
propagation=1j./(k.*z).*exp(1j.*k.*z);
%=====Ex & Ey Fields in terms of Scattering Matrix elements=====
Ex=-S2.*cos(phi).*cos(phi).*propagation-S1.*sin(phi).*sin(phi).*propagation;
Ey=-S2.*sin(phi).*cos(phi).*propagation+S1.*cos(phi).*sin(phi).*propagation;
Etheta=propagation.*S2.*cos(phi); % (30a)
Ephi =propagation.*S1.*sin(phi); % (30b)
%=====RADAR CROSS SECTION=====
backscatteringS12 = (abs(S1)^2+abs(S2)^2)*(2*pi/k^2); % (36)

```

**Ahmet Sefer**

2010 yılında Bilkent Üniversitesi Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden lisans derecesini, 2014 yılında Doğu Üniversitesi Elektronik Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden yüksek lisans derecesini almıştır. Doktorasını İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü'nde, Uydu Haberleşmesi ve Uzaktan Algılama konusunda 2015 yılında tamamlamıştır. Halen Piri Reis Üniversitesi Denizcilik Meslek Yüksek Okulu'nda Öğretim Görevlisi olarak yer almaktadır. Çalışma alanları; hesaplamalı elektromanyetik, radar kesit alanı, ters ve düz elektromanyetik saçılma problemleridir.