

Ters Sarkaç Sisteminin Kontrol Eğitiminde Test Aracı Olarak Kullanılması

Ahmet Yazıcı¹, Abdurrahman Karamancıoğlu²

¹Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
ayazici@ogu.edu.tr

²Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
akaraman@ogu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, kontrol teorisinde klasik problemlerinden biri olan ters sarkaç sisteminin eğitim ve araştırma amaçlı kullanım gerekçeleri ve bazı örnek uygulamalar verilmektedir. Ters sarkaç sisteminin bir çok gerçek sisteme alt model oluşturması, araştırma amaçlı tercih edilmesinin önemli nedenlerinden biridir

1. Giriş

Ters sarkaç sistemi, kontrol teorisinde denetim sistemlerinin üzerinde sınırdığı, özellikle eğitim amaçlı kullanılan popüler dinamiklerden bir tanesidir. Araştırma literatüründe sarkaç tabanlı özellikle ters sarkaç sistemleri konusunda oldukça yoğun çalışmalar vardır. Doğrusal olmayan modeli, kararlı ve kararsız denge noktaları, ve yetersiz uyarımlı yapısı yeni yöntemlerin testi sırasında önemli bir dinamik zenginlik sağlamaktadır.

Ters sarkaç sistemlerinin roket, uçak, tek-link robot kolu [1], yürüyen robot [2] gibi başka sistemlerde alt model oluşturması araştırma amaçlı tercih edilmesinin önemli nedenlerinden biridir. Bu uygulamalarda, fiziksel sistemin modellenmesi, modelin test edilmesi, belli çalışma noktaları etrafında doğrusal yaklaşımının bulunması, sistemin yapısal kısıtları ve denetim girdileri ile ilgili kısıtların belirlenmesi gibi konularının görsel yorumlanabilirliği yüksek olan ters sarkaç sistemi üzerinde daha kolay anlaşılabilir olması sarkaç sistemleri deneylerini kontrol mühendisliğinde üst düzey popüleriteye ulaştırmıştır. Ters sarkaç'ın eğitim laboratuvarlarındaki farklı kullanım amaçları için [3] ve buradaki kaynaklara bakılabilir.

Farklı yapılarıdaki ters sarkaç sistemlerinde lisans öğretimine yönelik olarak klasik kontrol yöntemleri ve lisansüstü araştırmacı eğitime yönelik olarak da yeni gelişen denetim algoritmaları kullanılabilir. Ters sarkaç deneyleri arasında akademik olarak en anlamlı denetim amacı, kararsız tepe noktasında kararlılaştırma ve sarkacı havaya kaldırma deneyleridir. Kontrol amacına uygun denetim algoritmalarının belirlenmesi performans açısından önem arz etmektedir. Literatürde Doğrusal kuadratik kontrol, PID tabanlı algoritmalar, kayma kipli denetim tabanlı algoritmalar ve kural tabanlı

algoritmalar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu algoritmaların gürbüzlük performansları karşılaştırmaları, ve algoritmaların zaman tepkilerinin amaca uygunluğu karşılaştırmaları da yoğun ilgi çeken araştırma çalışmalarındandır.

Literatürde farklı yapılarda ters sarkaç sistemleri bulunmaktadır. Hareketli arabaya bağlı tek çubuklu sistemler [4], [5], hareketli arabaya bağlı çift çubuklu sistemler [6], dönel tek kollu sistemler [7], üçlü ters sarkaç sistemleri [8] literatürde araştırma konusu olan sarkaç tabanlı sistemlerden bazılarıdır. Bunlardan en yaygın olanı araç ve çubuktan oluşan türdür. Bu çalışmanın takip eden kısımlarında araç ve çubuktan oluşan ters sarkaç sistemi ve kontrol teorisinden uygulanan bazı yöntemler detaylandırılacaktır.

Takip eden kısımda, daha sonraki incelemelerimize taban oluşturmak üzere araç ve çubuktan oluşan sarkaç modeli tanıtılmaktadır.

2. Ters Sarkaç Sistemi Modeli

Ters sarkaç sistemi Şekil 1 deki gibi uzunluğu l , m kütlesi uç noktasında yoğunlaştırılmış kabul edilen çubuğun, M kütleli bir aracın üzerine P noktasından monte edilmesinden oluşmaktadır. Çubuğun P noktasından geçen dikey doğrultu ile yaptığı açı θ ve yatay ekseninde belirli bir referans noktasına olan uzaklığı x değişkenleri ile temsil edilmektedir. Çubuk hareketi xy düzlemine kısıtlanmış olup monte edildiği araç sadece x eksenini boyunca hareket edebilmektedir. Bu harekete b katsayısıyla ifade edilen sürtünme kuvveti karşı koymaktadır. Bu kısımda, ters sarkacın doğrusal olmayan modeli Newton yasaları kullanılarak [9] bulunmakta ve tanımlanan çalışma noktası etrafında doğrusallaştırılmaktadır. Newton'un ikinci kuralı x yönündeki harekete uygulandığında

$$(M + m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} + b\dot{x} = u \quad (1)$$

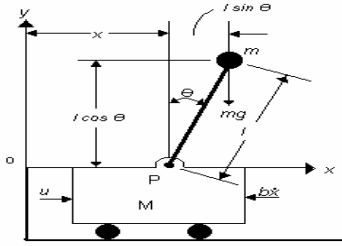
olarak yazılabilir. İkinci olarak m kütlelerinin P noktası etrafındaki hareketine Newton'un ikinci kuralını uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$m\ddot{x} \cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin\theta \quad (2)$$

ifadesi elde edilir. İfade (1) ve (2) ile verilen doğrusal olmayan sistem modeli durum uzayı formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-bx_2 + ml \sin(x_3)x_4^2 - mg \sin(x_3) \cos(x_3) + u}{M + m - m \cos(x_3)^2} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{bx_2 \cos(x_3) - ml \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2 + (M + m)g \sin(x_3) - u \cos(x_3)}{l(M + m - m \cos(x_3)^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

Burada, $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $x_3 := \theta$, $x_4 := \dot{\theta}$ olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 1 Ters sarkaç sistemi

Doğrusal sistemlerin analizi ve bunlar için denetleyici tasarımı belirli bir olgunluğa erişmiş ve iyi anlaşılabilir bir konu olduğundan, sarkacı dikey konumunda dengeleme tasarımında sistem (3) in doğrusal yaklaşımından faydalanılmaktadır. Ters sarkaç sisteminde kontrol amacı sarkacı dikey tutmak olarak belirlendiği durumu ele alalım. Bu durumda ters sarkaç sisteminin kontrol amacına uygun yörüngelerinin $(x_3, x_4) = (0, 0)$ çalışma noktası komşuluğuna ulaşması beklenmektedir. Bu çalışma noktası için doğrusal model

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_3, x_4) = (0, 0)} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_3, x_4) = (0, 0)} u \quad \text{işlemi}$$

sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{M}x_3 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(M + m)g}{Ml}x_3 + \frac{b}{Ml}x_2 - \frac{1}{Ml}u \end{aligned} \quad (4)$$

Bu ifadeler matris notasyonunda

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M + m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (5)$$

olarak ifade edilebilir. Tablo 1 de tipik bir ters sarkaç sistemi parametre değerleri vardır.

Tablo 1 Ters sarkaç için kullanılan nümerik değerler

Parametreler	Sembol	Değeri	Birimi
Aracın kütlesi	M	3	kg
Ters Sarkacın kütlesi	m	0.5	kg
Ters Sarkacın uzunluğu	l	0.5	m
Aracın sürtünme katsayısı	b	2	kg/sn
Yerçekimi ivmesi	g	9.8	m/sn ²

Yapılan testlerle, (3) ve (5) deki matematiksel modellerin fiziksel beklentilere uyumlu tepkiler verdiği gözlenmiştir [10]. Ayrıca, tepe denge noktası etrafında denetleyici metotları ile sistemin kontrol edilebilmesi için sistem (5) in tamamen durum kontrol edilebilir (completely state controllable) olması gerekir. Bunun için kontrol edilebilirlik matrisi olarak bilinen $C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ matrisinin rankının 4 olması gerekir [11]. Ters sarkacı temsil eden durum uzayı modeli (5) de Tablo 1 deki değerler kullanılarak kontrol edilebilirlik matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.3333 & -0.2222 & 1.2370 \\ 0.3333 & -0.2222 & 1.2370 & -1.5506 \\ 0 & -0.6667 & 0.4444 & -15.5407 \\ -0.6667 & 0.4444 & 15.5407 & 11.8123 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin rankı 4 olduğundan (5) ile verilen sistem tamamen durum kontrol edilebilirdir. Takip eden kısımda bu sisteme uygulanan bazı denetleyici yöntemleri verilmektedir.

3. Ters Sarkaç Sistemim Kullanıldığı bazı kontrol problemleri

Ters sarkaç sisteminin tepe noktasında kararlaştırılması ve sarkacı havaya kaldırma için literatürde farklı denetleyiciler tasarlanmış ve performans karşılaştırılmaları yapılmıştır. Bu alt kısımda ters sarkaç sistemi için geliştirilen bazı denetleyici tasarımları ve verilen bir geri besleme sistemi için gürbüzlük analiz yöntemi verilmektedir.

3.1 Doğrusal-kuadratik kontrol yöntemi

Bu kısımda doğrusal-kuadratik kontrol (LQC) yöntemi kullanılarak ters sarkacın tepe noktasında belli bir referans yörüngeyi takip etme problemi ele alınmakta ve sarkacın gösterdiği bazı fiziksel tepkiler incelenmektedir. Denetleyici tasarlanma aşamasında sistemin doğrusal modeli kullanılıp, (3) ile verilen doğrusal olmayan modele uygulanmaktadır. Durum uzayı denklemleri ifade (5) ile verilen sistem için

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6)$$

kompakt gösterimi kullanılsın. C matrisi problem akışı içinde tanıtılacaktır. Bu sistemin durumlarının $x_d = [r \ 0 \ 0 \ 0]^T$ şeklindeki bir yörüngeyi takip etmesi

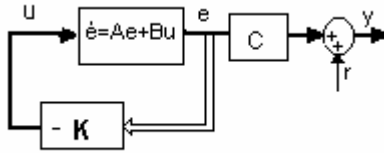
istensin. Bu takipteki hata sistem (6) nın durumları ve takip edilmesi istenilen yörünge cinsinden

$$e := [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T := [x_1 - r \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \quad (7)$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan sistem durumları $x=e+x_d$ şeklinde yazılıp sistem (6) da yerine yerleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + Bu \\ y &= Ce + r \end{aligned} \quad (8)$$

olur. Hatanın sıfır olması sistemin istenilen yörüngeyi takip etmesi anlamına geldiği için, denetleyici ifade (8) ile verilen sistemi sıfıra götüreceği şekilde dizayn edilecektir. Burada kontrol yöntemi Şekil 2 de görüldüğü gibi tüm sistem hata durumlarının bir geri besleme matrisi üzerinden alınması yoluyla uygulanmaktadır. Dolayısıyla kutup yerleştirme mantığı kullanılmaktadır.



Şekil 2 Doğrusal-kuadratik kontrolün (8) ile verilen sisteme uygulanması

Bir sistemin hızlı cevap vermesi büyük değerli sistem girdilerinin uygulanması, diğer bir deyişle yüksek maliyet gerektirir. Sistem girdisinde yapılan kısıtlama ise sistemin daha yavaş cevaplar vermesine neden olur, yani sistem performansında düşmelere neden olur. Doğrusal-kuadratik kontrol yöntemi uygularken durum takip hatası ve sistem girdi

maliyeti kullanarak $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt$ şeklinde bir ilişki tanımlanır ve J performans indeksi olarak bilinir. Burada amaç J nin minimize edilmesidir. Bu ifade $e^T Q e$ ve $u^T R u$ kuadratik formda olan ifadeler olup, Q pozitif belirli (veya yarı definit) ve R pozitif belirli köşegen ağırlık matrisleridir:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad R = r_1$$

Doğrusal-kuadratik kontrolde kullanıcının tanımladığı q_i ve r_1 katsayılarına bağımlı olarak performans indeksi minimize edecek

$$u = -Ke \quad (9)$$

sistem girdisi bulunur. Burada $K = R^{-1} B^T P$ olup, P ise aşağıdaki Ricatti eşitliğinin çözümünden bulunabilen simetrik matristir. Ricatti eşitliği $PA + A^T P + Q - PBR^{-1} B^T P = 0$ şeklindedir. Bu eşitliği nümerik olarak çözen programlardan biri de MATLAB tır. Ağırlık matrisleri Q, R ve sistem

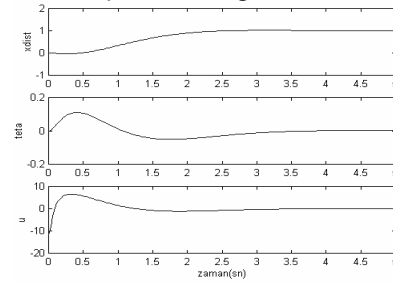
matrisleri A, B verildiğinde eşitlik (9) deki K geri besleme matrisi lqr komutu ile bulunmaktadır.

Verilen J performans indeksinde sistem girdisinin ağırlığını belirleyen R=1 ve

$$Q = \begin{bmatrix} 190 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 155 \end{bmatrix}$$

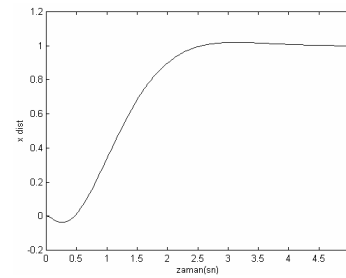
matrisi kullanıldığında geri besleme matrisi MATLAB ta lqr komutu kullanılarak A, B, Q, R matrisleri için

$K = [-13.7840 \ -19.7013 \ -137.1542 \ -32.3408]$ olarak bulunur. Yukarıdaki değerler kullanılarak doğrusal olmayan sistem (3) ün birim basamak girdi takip benzetimi Şekil 3 deki gibidir.



Şekil 3 Eşitlik (3) ile verilen sistemin birim basamak girdi takibi.

Burada sistemin maksimum aşma hatası 1.97, yükselme zamanı 2.01 sn ve durulma zamanı 2.37 sn dir. Şekil 3 te, ters sarkacın x eksenı yönündeki hareketinde ilk önce gideceği yönün tersi yönde bir hareket izleyip sonra gideceği yöne doğru hareket ettiği gözükmiştir. Bu durum şeklin ilk satırının daha büyük boyutta Şekil 4 de yeniden çizilmesiyle daha net şekilde görülmüştür.



Şekil 4 Konum-zaman grafiğinin büyük ölçek çizimi

Bu hareketin nedeni sistem referansı r, ve sistem çıkışı y (x konumu) arasındaki

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-4.59s^2 + 90.05}{s^4 + 15.66s^3 + 63.97s^2 + 115.64s + 90.05}$$

transfer fonksiyonu incelenerek açıklanacaktır. Bu sisteme birim basamak uygulandığında x eksenı yönündeki ilk ve son ivme değerleri; ivme değerine bağlı

$$s^2 Y(s) = \left(\frac{(-4.59s^2 + 90.05)s^2}{s^4 + 15.66s^3 + 63.97s^2 + 115.64s + 90.05} \right) \left(\frac{1}{s} \right)$$

fonksiyonu ile verilen ilk değer ve son değer teoremleri kullanılarak $\dot{y}(t=0^+) = -4.59$ ve $\dot{y}(t=+\infty) = 1$ olarak çıkmaktadır. Burada ilk ivme değerinin negatif olması sistemin başlangıçta ters yönde hareket ettiğini gösterir. Konvansiyonel kargo uçaklarının sabit hız ve irtifadaki uçuşlarında da yükselmek için önce dalış yapmak şeklinde görülen bu davranış, ilgilenilen sistemin minimum fazlı olmamasının bir sonucudur[12].

3.2 Kayma Kipli Kontrol

Bu altkısımda denetim amacı olarak sistemin kayma kipli kontrol teknikleri kullanarak $x_r = [r \ 0 \ 0 \ 0]^T$ şeklindeki sabit bir yörüngeyi takip etmesi istensin. Bu yörünge takibi için oluşturulan eşitlik (8) ile verilen zamanla değişmeyen doğrusal bir sistem için kayma yüzeyi

$$S := \{x : Ge = 0\} \quad (10)$$

formunda ifade edilebilir. Kayma yüzeyine ulaşan bir yörünge için bu yüzey üzerinde kalması için kayma yüzeyini ifade eden anahtarlama fonksiyonunun zamana göre türevinin sıfıra eşit olması yaklaşımı kullanılır. Anahtarlama fonksiyonu

$$s(e) = Ge$$

zamana göre türevlenerek

$$\dot{s}(e) = G\dot{e}$$

$$= G(Ae + Bu)$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olmasını sağlayan sistem girişi eşdeğer giriş olarak adlandırılır, u_{eq} ile gösterilir ve

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}GAe \quad (11)$$

olarak elde edilebilir. Bu ifadede bir alt isimlendirme daha yapılarak $-(GB)^{-1}GA$ eşdeğer geri besleme matrisi olarak adlandırılabilir ve F_{eq} ile gösterilir. Eşdeğer giriş, (8) de yerine yazılırsa, kayma yüzeyi üzerindeki sistem dinamiği

$$\dot{e} = (A + BF_{eq})e \quad (12)$$

elde edilir. Kayma çizgisini temsil eden G , eşitlik (12) negatif özdeğerler verecek şekilde $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ seçilir. Bu şekilde seçilen kayma çizgisi kararlı olur. Sistemin herhangi bir ilk değerden kayma çizgisine ulaştıracak ulaşım girdisinin (u_r) bulunmasında ise Lyapunov yaklaşımı kullanılabilir. Bu yaklaşımda

$$V(e) = \frac{1}{2} s(e)^2 \quad (13)$$

ifadesi sistem yörüngesinin kayma çizgisinden uzaklığının monoton artan bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun değerinin zamanla azalması yörünge için kayma çizgisine yaklaştığı anlamına gelir. Fonksiyonun zamana göre türevinin eksi işaretli

olması fonksiyonun zamanla azaldığını, yani yörünge için kayma yüzeyine yaklaştığını, gösterecektir. Eşitlik (13) in türevi alındığında

$$\dot{V} = s \dot{s} \quad (14)$$

elde edilir. Burada eşitlik (10) ve sistem denklemleri kullanılarak \dot{s} terimi yerine yazıldığında

$$\dot{V} = sG(Ae + Bu) \quad (15)$$

olur. Burada sistem girdisini $u = u_{eq} + u_r$ olarak seçelim (u_r birazdan tanımlanacaktır). Eşdeğer girdi (u_{eq}) yerine eşitlik (11) daki değeri ve ulaşım girdisi için $u_r = F_r e$ yazıldığında

$$\dot{V} = sGBF_r e \quad (16)$$

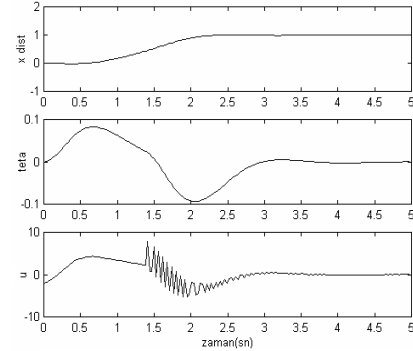
elde edilir. Burada $F_r = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ olup eşitlik (16) de yerine yazıldığında

$$\dot{V} = sGBk_1 e_1 + sGBk_2 e_2 + sGBk_3 e_3 + sGBk_4 e_4 \quad (17)$$

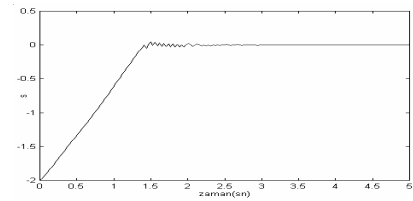
olur. İfade (17) in negatif olması için ulaşım girdi katsayıları

$$k_i = \begin{cases} 2 & sGB e_i < 0 \\ -2 & sGB e_i > 0 \end{cases} \quad i = 1,2,3,4 \quad (18)$$

olarak seçilebilir. Doğrusal olmayan sistem (3) ün Tablo 1 deki parametre değerleriyle birim basamak girdi takibi Şekil 5 ve 6 daki gibi elde edilir.



Şekil 5 Araç konumu (x), sarkaç açısı (θ) ve u denetim girdisinin zamana bağlı grafiği



Şekil 6 Kayma yüzeyinin zamana bağlı grafiği

Şekil 5 in uygun ölçekli incelenmesi sonucunda sistem maksimum yüzde aşma hatası 0.07, yükselme zamanı 2.04 sn, durulma zamanı ise 2.25 sn olarak görülür. Şekil 5 daki sistem girdisinin zamana bağlı grafiği incelendiğinde fiziksel bir sistem için istenmeyen zikzaklar gözükmemektedir. Bunun sebebi, ulaşım girdi katsayılarının ifade (18) deki $sGB e_i$ teriminin sıfırdan büyük veya küçük olması

durumuna göre farklı değerlere anahtarlanmasıdır. Bu anahtarlardan dolayı kayma yüzeyinde de Şekil 6 de görüldüğü gibi zikzaklar oluşmaktadır. Bu olay literatürde *chattering* olarak bilinmektedir. Bunu elimine etmek için kayma kipli kontrolde kullanılan değişik yöntemlerden bant kullanılması yaklaşımı kullanılabilir [10].

3.3 Gürbüzlük Analizi

Bu albtölümde, ters sarkaç sistemine uygulanan Doğrusal-kuadratik kontrol yöntemi için numerik ve analitik olarak iki tip gürbüzlük incelemesi yapılmaktadır. Diğer yöntemlerin gürbüzlük incelemeleri için [10] a bakılabilir.

Nümerik analiz

Bu yöntemde gürbüzlük incelenmesi, sistem parametreleri olan aracın kütlesi M , ters sarkacın kütlesi m , ters sarkacın uzunluğu l , ve sürtünme katsayısı olan b nin bir anda sadece birinin değişimi sırasında kararlılık korunması üzerine yapılmaktadır. Burada da denetleyici tasarımı hata sisteminin kararlılığı üzerine yapılmaktadır. Dolayısıyla gürbüzlük incelenmesinde geri beslemeli hata sisteminin kararlılığı göz önünde bulundurulmaktadır.

İfade (8) ile verilen hata sistemine ifade (9) ile verilen sistem girdisi uygulandığında, elde edilen geri besleme sistemi $\dot{e} = (\hat{A} - BK)e$,

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{b+k_2}{M} & -\frac{mg+k_3}{M} & -\frac{k_4}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{Ml} & \frac{b+k_2}{Ml} & \frac{(M+m)g+k_3}{Ml} & \frac{k_4}{Ml} \end{bmatrix} e$$

olur. Bu sistemin özdeğerleri, $\det(sI - (A - BK)) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri Routh kararlılık kriteri kullanılarak sol yarı düzlemde olup olmadığı incelenebilir. Bu karakteristik denklem için, sistem parametrelerinden M , m , l ve b den üçü Tablo 1 deki nominal değerinde tutulup kalan bir parametre nümerik olarak değiştirilmiştir. Bu işlem, albtölüm 3.1 de optimal kontrol yöntemi için bulunan tüm denetleyici katsayıları, (k_1, k_2, \dots, k_4) ve her bir sistem parametresi için tekrarlanıp, her bir sistem parametresinin tek başına değişimi sırasında kararlılığın bozulduğu en büyük üst sınır (EBÜS), en küçük üst sınır (EKÜS) ve karşılık gelen denetleyici katsayı matrisi Tablo 2 deki gibi bulunmuştur.

Sistem Parametresi	Değeri	K				
M	EBÜS	8.8	-15.82	-22.46	-150.45	-36.09
3kg	EKÜS	7	-10.00	-15.53	-117.19	-25.34
m	EBÜS	8.6	-15.81	-22.85	-152.29	-36.44
0.5kg	EKÜS	5.9	-10.00	-15.49	-116.63	-25.28
l	EBÜS	1.6	-14.32	-21.00	-142.75	-33.43
0.5m	EKÜS	1.2	-1e.15	-18.64	-127.92	-28.06
b	EBÜS	18	-15.81	-22.80	-151.71	-36.38
2kg/sn	EKÜS	12.4	-10.00	-15.57	-117.62	-25.79

Tablo 2. Sistem parametreleri için edilen EBÜS ve EKÜS değerleri ve karşılık gelen denetleyici katsayıları

μ (Mu) çözümlemesi:

Sistem parametrelerinin aynı anda değişiminin gürbüzlük çözümlemesi için μ analiz yöntemi kullanılabilir [13]. Yapılmakta olan belirsizlik modellenmesinde, parametrik belirsizlik olarak araç kütlesi M , sarkaç kütlesi m ve sarkaç uzunluğu olan l deki belirsizlikler ele alınmaktadır. Bu parametrelerdeki belirsizlikler, nominal değerleri etrafında

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\bar{M}(1 + M_v \delta_M)} \quad m = \bar{m}(1 + m_v \delta_m),$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\bar{l}(1 + l_v \delta_l)} \quad (19)$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada normalleştirme değerleri $M_v = 1$, $m_v = 1$, $l_v = 1$ ve nominal değerler $\bar{M} = 3$, $\bar{m} = 0.5$, $\bar{l} = 0.5$ olarak alınmaktadır. İfade (19) daki parametrik belirsizlikler kısmi doğrusal kesirli dönüşümler (*Linear Fractional Transformations -LFT*) kullanılarak

$$\frac{1}{M} = F_U(P_M, \delta_M), \quad m = F_L(P_m, \delta_m),$$

$$\frac{1}{l} = F_U(P_l, \delta_l) \quad (20)$$

şeklinde yazılabilirler. Bütün sistemin, bilinen kısım transfer fonksiyonu M ve belirsizlikler Δ cinsinden, ifadesi $y = F_U(M, \Delta)r$ olarak yazılabilir. Bu ifadedeki transfer fonksiyonu matrisi

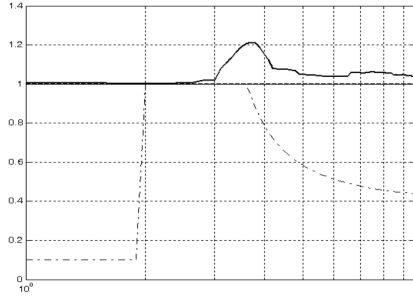
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ şeklinde ayrıştırılabilir. Bu}$$

sistemde belirsizlik matrisi $\Delta = \text{diag}(\delta_M I_2, \delta_m, \delta_l)$ olur. Burada, Tablo 1 deki nominal sistem parametreleri ve ifade (9) daki geri besleme matrisi $K = [-15.81 \quad -22.85 \quad -152.29 \quad -36.44]$

için analizler yapılmıştır.

Bu sistem için gerçek yapısal tekil değerlerin frekansa bağlı değişimini göstermektedir. Bu şekilde,

MATLAB μ kullanılarak önerilen alt-üst sınır değerleri kalın çizgiler ile, kesikli çizgi ile verilen GAMS (MINOS çözümlenici) eniyileme çözümlenicileri ile edilen frekansa bağlı sonuçlarıdır.



Şekil 7. Ters sarkaç sistemi için bulunan μ değerlerinin frekansa bağlı değişimi

Bu sistem için $\mu_L(M_{11}(s)) = 1$ olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla, geri besleme altında,

$$\max_w \bar{\sigma}(\Delta) < \frac{1}{\mu(M_{11})} = 1 \quad \text{sağlayan} \quad \text{bütün}$$

belirsizlikler için ters sarkaç sistemi kararlıdır. Bu sistem parametreleri M , m ve l de geribesleme matrisi $K = [-15.81 \quad -22.85 \quad -152.29 \quad -36.44]$ için yaklaşık %100 değerlerine kadar eşzamanlı belirsizlik için kapalı çevrim sisteminin kararlı olacağını göstermektedir. Sistem parametrelerinin tek başına değişimlerinin incelendiği Tablo 2 ye bakıldığında, tek başına sarkaç çubuk kütlesi m nin değişimi sırasında aynı geribesleme matrisi K için sarkaç çubuk kütlesi 8.6 kg a kadar çıkabilmektedir.

4. Sonuçlar

Görsel olarak yorumlanabilir denge noktaları, doğrusal olmayan model ve zengin dinamikleri ters sarkaç sistemini kontrol mühendisliği eğitimi için önemli bir araç kılmaktadır. Bu sistemin ilgili olduğu mühendislik alanlarından bir kısım örneklenerek bu çalışmada tanıtılmıştır.

5. Kaynaklar

- [1] Yeung K. S. and Chen Y. P., "Sliding-mode controller design of a single link flexible manipulator under gravity," *Int. J. Contr.*, v. 52, no. 1, s.101-117, 1990.
- [2] Seven U., Taskiran E., Koca Ö., Erbatır K., Ters Sarkaç Modeli ve Salınan Bacak Telifi ile Oluşturulan Yürüyen Robot Referans Yörüngeleri, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı TOK'08, İstanbul: İstanbul Teknik Üniversitesi, 2008
- [3] Hovland, G., "Evaluation of an Online Inverted Pendulum Control Experiment", *IEEE Transactions on Education*, v. 51, Issue 1, s.114 -122, 2008.
- [4] Yazıcı A., Karamancıoğlu A., "A Nonlinear Programming Approach For The Swing-Up Control Problem", *Journal of Engineering and Architectural*

Faculty of Eskişehir Osmangazi University, v. .XXI, no. 2, s.107-122, 2008

- [5] Chatterjee D., Patra A., Joglekar H.K., "Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length", *Systems & Control Letters*, v. 47, s. 355 – 364, 2002.
- [6] Yazıcı A., Karamancıoğlu A., "A Linear Programming Based Sliding Mode Control design for Stabilization of a Double Inverted Pendulum", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I, Journal of Systems and Control Engineering*, v. 220, no.4, s.315-321, 2006.
- [7] Awtar S., King N., Allen T., Bang I., Hagan M., Skidmore D., Craig K., "Inverted pendulum systems: rotary and arm-driven- a mechatronic system design case study", *Mechatronics*, s. 357-370, 2002.
- [8] Su H., Woodham C.A., "On the uncontrollable damped triple inverted pendulum", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.151, s. 425-443, 2003.
- [9] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall Inc, 1990,.
- [10] Yazıcı, A., *Kayma Kipli Kontrol Yaklaşımlarının Ters Sarkaç Sistemine Uygulanması*, Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, 2000.
- [11] Kuo B.C., *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall Inc, 1987.
- [12] Slotine JJE, Li W, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [13] Yazıcı A., Karamancıoğlu A., "Structured Robust Stability Analysis of an Inverted Pendulum System with a Fixed Feedback", *Journal of Engineering and Architectural Faculty of Eskişehir Osmangazi University*, v.XVIII, no. 2, s. 55-70, 2005.