

“BOOLE CEBİRİ VE ANAHTARLI DEVRELERE TATBİKİ”

Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu, EMM, S.63, Aralık 1962

SAHA

Bir sayı sistemini kullanmadan yani onunla işlemler yapmadan önce o sayı sisteminde hangi çoklukların (quantities) kullanılacağını, hangilerinin sahanın dışında bırakılacağını karşılaştırmak lazımdır.

Mesela reel sayılar sistemini ele alalım. Bu sisteme sadece “reel” dediğimiz sayılar dahildir ki bunların da özellikleri birtakım tariflerle belirtilir. Bunun yanında kompleks sayılar sistemi reel sayıları içine aldığı gibi, bunun yanında, reel sayılar sahasında bulunmayan bir takım başka sayıları da ihtiva eder (3 -f j5 gibi).

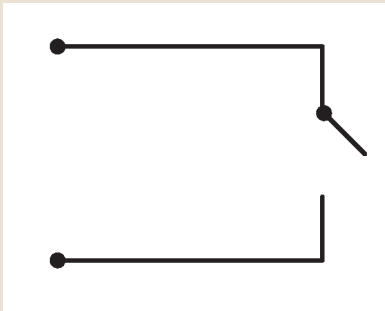
İşte biz de Boole Cebiri’ne başlamadan, onun sahasını belirteceğiz.

Boole Cebiri ile sadece iki sayı üzerinde işlem yapacağız (0 ve 1). Yani nasıl reel sayılar ile işlem yaparken j2 gibi sayıları nazar-ı itibara almıyorsak burada da 0 ve 1’den gayrisi ile âlâkadar olmayacağız.

Şu hâlde bu bizim pratik problemleri çözerken değer atfettiğimiz kemiyetlerin 0 ve 1’den gayri değer almayacaklarına delalet eder. (Mesela bir keyfiyetin var olmasına 1, yok olmasına 0 değeri verilebilir.)

Burada bir misal verelim:

Şekil 1



Şekil 1’deki A anahtarı ya açıktır ya da kapalıdır. Şu hâlde bu anahtarın “kapalı olma değeri” 1 ise “açık olma değeri” 0’dır. Yahut anahtar kapalı iken $A=1$ bir açıkken $A=0$ ’dır.

İŞLEMLER

Boole Cebiri’nde sadece toplama ve çarpma işlemleri yapacağız.

AKSİYOMLAR

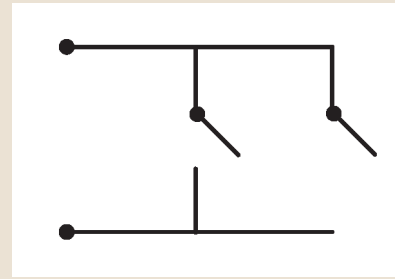
Toplama işlemi (“veya işlemi”, “paralel işlem”)

$$0+0=0$$

$$1+1=1 \text{ (2 sayısı sahamıza dahil değildir)}$$

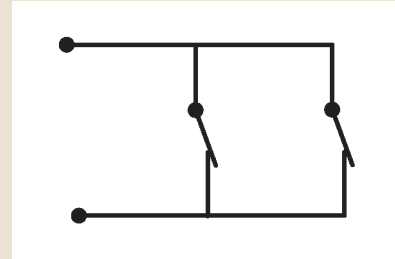
Şimdi bu aksiyonlara misaller verelim:

Devrenin kapalı olması keyfiyetini 1 ile gösterirsek:



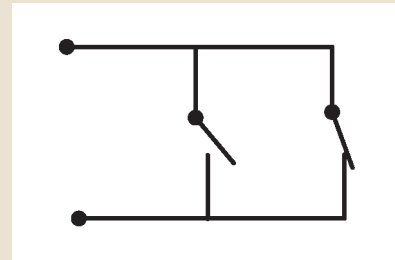
Şekil 2a

Şekil 2a’da iki anahtar da 0 değerini taşıyor. Kolayca görüleceği gibi bu bir açık devredir. Yani $0+0=0$ (0 veya 0 eşit sıfır)



Şekil 2b

Şekil 2b’de iki anahtar da birdirler ve devre kapalıdır. Yani $1+1=1$ (1 veya 1 eşit bir)



Şekil 2c

tarihimizden...

Şekil 2c'de ise bir anahtar 0'dır, öbürü 1'dir ve gene kolayca da görüleceği gibi devre kapalıdır. Dolayısıyla $0+1=1 < 0$ veya $1=1$

Çarpma ("ve işlemi", "seri işlem")

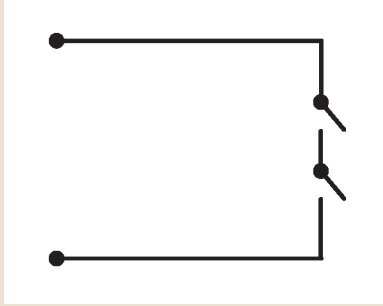
$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 1$$

$$1 \times 1 = 1$$

Misal:

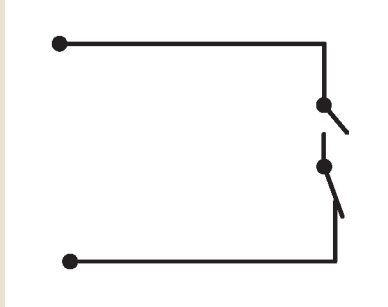
Şekil 3a



Şekil 3a'da iki anahtar da sıfırdır. Dolayısıyla devre 0'dır.

$$0 \times 0 = 0 \text{ (0 ve 0 eşit 0)}$$

Şekil 3b



Şekil 3b'de anahtarlardan biri 1'dir. Ve devre de 0'dır.

$$0 \times 1 = 0 \text{ (0 ve 1 eşit 0)}$$

Nasıl ki cebir işlemlerinde kullandığımız çoklukların yanında, bazı değişken çoklukları göstermek üzere harfler kullanıyorsak, burada da birtakım değişkenler kullanacağız. Mesela aynı şartlar altında kapanması ve açılması lazım gelen anahtarlara "A" anahtarı başka şartlar altında aynı hareketi yapması lazım gelenlere "B" anahtarı diyeceğiz. Ve yukarıda da bahsettiğimiz gibi eğer A, bir anahtarı gösteriyorsa $\bar{A}$ (A değil) de A anahtarı ile tamamiyle zıt hareketleri yapan anahtarı gösterecektir.

Bir değişkende aşağıdaki aksiyonları yazabiliriz

$$A + 0 = A \quad A \times A = A$$

$$A \times 0 = 0 \quad (\bar{A} \sim) = A$$

$$A + 1 = 1 \quad A + A = A'$$

$$A \times 1 = A \quad A \times A = A$$

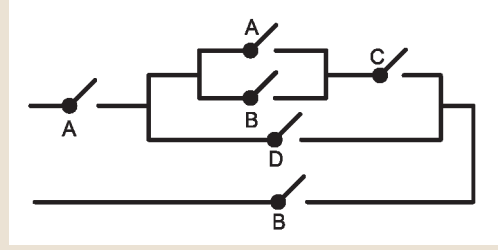
$$A + \bar{A} = 1$$

Eğer birden fazla değişkenimiz varsa aşağıdaki bağıntıları da ilave edebiliriz:

$$(A+B+C) = (\bar{A}) (I) (\bar{C})$$

$$(A \ B \ C) = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Şimdi yukarıda söylediklerimizi bazı anahtar devreleriyle pratikleştirmeye çalışalım.



Şekil 4

Şekil 4'teki devre Boole Cebiri ile şöyle ifade edilebilir.

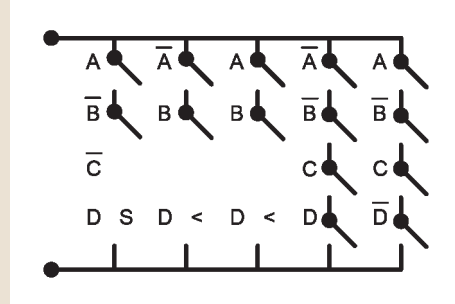
$$A \ D + C \ (A+B) \ B = \bar{C}$$

Aşağıda da belirteceğimiz gibi Boole cebirinin anahtar devrelerine tatbikinin gayesi, mümkün olduğu kadar az anahtar kullanmaktır.

Mesela aşağıdaki misali göz önüne alalım:

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

Bu anahtar sistemi kısaltılmadan şekil 5 a'da gösterilmiştir. Fakat birinci ve sonuncu terimleri ABD, ikinci ve üçüncüleri BCD parantezine alırsak:



Şekil 5a

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$$

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$$

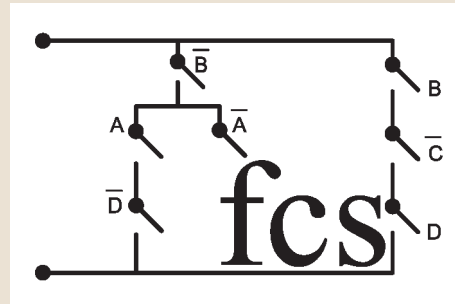
$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B}(\bar{C}D + C\bar{D}) + \bar{A}B(\bar{C}\bar{D} + C\bar{D})$$

Bu devre Şekil 5b'de gösterilmiştir. Bu suretle yukarıda 20 anahtar kullanırken şimdi 9 anahtar kullanıyoruz.

Boole cebirinde, bütün çarpanlara ayırma kaideleri doğru olduğu gibi aşağıda verdiğimiz iki işlemde faydalıdır.

$$f(A,B,D) = A f(1,B,C,D) + A f(0,B,C,D)$$

$$f(A,B,C,D) = A + f(0,B,C,D) \bar{A} + f(1,B,C,D)$$



Şekil 5b

Bu bantlardan birincisi standart toplam ikincisi ise standart çarpım olarak bilinir ki burada f (A3,C,D) A,B,C ve D'nin bir fonksiyonudur.

Mesela $f(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B}$ olsun bu ifadeye standart çarpım tatbik edersek

$$\overline{A}B + \overline{A}B = A + \overline{O}B + \overline{I}B) \overline{A} + (\overline{I}B + OB) = (A+B) (A \sim + B) \sim \text{bulunur.}$$

$$\text{Gerçekten de } (A+B) (\overline{A} - f \overline{B}) = A\overline{A} + B\overline{B} + B\overline{A} + B\overline{B} \\ = A\overline{B} + B\overline{A}$$

Şimdi Boole cebirini kullanacağımız basit bir misali göz önüne alalım.

Elimizde 4 tane olay olsun A,B,C ve D olayları. Mesela bunlar dört demiryolu peronu olan bir istasyondaki raylarda trenlerin olup olmadığını gösterebilir. Yani mesela birinci peronda tren varsa A=1 yoksa A=0 olsun. İkinci peronda varsa B=1 yoksa B=0 olsun.

Aynı zamanda bir bazı işletme zaruretleri dolayısıyla birinci ikinci peronlar boş, üçüncü dördüncü peronlar dolu iken önümüzdeki kontrol tablosunda bir ışığın yanmasını isteyelim ve bunun gibi aşağıda belirteceğimiz 5 halde de aynı ışık yansın.

Şimdi aşağıdaki doğruluk tablosunu inceleyelim. (Şekil 6)

No	A	B	C	D	Çıkış
1	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	1
6	1	1	0	0	0
7	1	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0
9	0	1	1	0	0
10	0	1	0	1	1
11	0	0	1	1	1
12	1	1	1	0	0
13	1	0	1	1	0
14	1	1	0	1	0
15	0	1	1	1	0
16	1	1	1	1	0

Rayların boş veya dolu olmasının 16 muhtemel kombinasyonu sol tarafta gösterilmiştir. Mesela üçüncü sıra sadece B rayının treni olduğuna 16ncı sıra ise bütün rayların dolu olduğuna delalet etmektedir. Çıkış kısmında hizada (1) olanlar bizim lambanın yanmasını istediğimiz haller, (0) olanlar ise yanmamasını istediğimiz hallerdir. Yani şu halde birinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, onuncu ve onbirinci hallerden herhangi birisinde işaret tablomuzdaki lambamızın yanmasını istiyoruz.

O halde esas problem en az anahtar kullanarak bu performans yapacak devreyi hazırlamaktır.

Şu halde doğruluk tablomuzdan aşağıdaki ifadeyi yazacağız.

$$\begin{aligned} \text{Ç} = & \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D \\ & + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D \end{aligned}$$

(Bu devre kısaltılması şekil 7a'da gösterilmiştir.)

Burada Ç, (çıkış istediğimiz haller) eşittir: (A değil) ve (B değil) ve (C değil), (D değil) olduğu zaman veya (A değil) ve (B) ve (C değil) ve (D değil) olduğu zaman veya ilh...dır.

(Çarpmanın “ve işlemi”, toplamının “veya işlemi” olduğu hatırlatılır.)

Bundan sonra Ç'yi kısaltacağız:

$$\text{Ç} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} (\overline{D} + D) + \overline{A}\overline{B}\overline{C} (\overline{D} + D) + \overline{A}B\overline{C} (D + D)$$

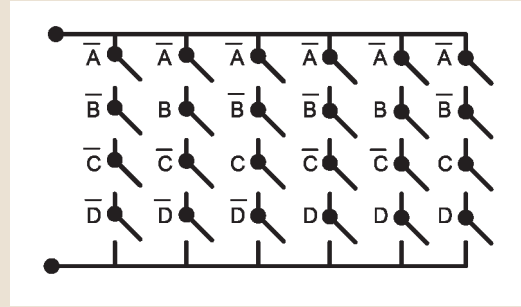
$$\text{Ç} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$\text{Ç} = \overline{A}\overline{C}(B + B) + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

$$\text{Ç} = \overline{A}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

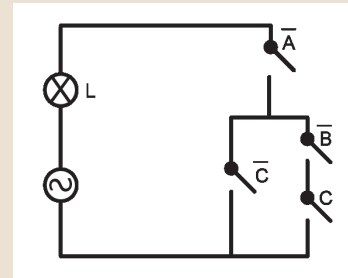
$$\text{Ç} = \overline{A}^1(\overline{A} + BC)$$

Dolayısıyla $\text{Ç} = \overline{A}^1(\overline{C} + B\overline{C})$ bulunur. (Şekil 7b)



Şekil 7a

A anahtarının A rayında tren yokken kapanan, varken açılan, C anahtarının C rayı için, B'nin B rayı için aynı şekilde hareket eden, C anahtarının ise C rayında tren varken kapanıp, yokken açılan bir role olduğu düşünülürse şekil 7b'deki devrenin istediğimiz bütün hallerde (L) lambasını yakacağı kolayca görülebilir.



Şekil 7b

Boole cebirini kullanmasaydık, bu devre 24 anahtardan mürekkep olacaktı (Şekil 7a). Ve A, B, D, D anahtarlarına hiç ihtiyacımız olmadığını görmek pek kolay olmayacaktı, kaldı ki yaptığımız misal çok basit bir misaldir. Bu usulün “computer” gibi binlerce röleye ve “multivibratör”lere ihtiyaç gösteren bazı “logic” (mantık) devrelerinde kullanıldığı düşünülürse, sağladığı ekonominin ve kolaylığın değeri çok daha iyi anlaşılır.