

Butterworth Yüksek Geçiren Fitre Devresinin Kontrol Edilebilir Kanonik Formda Tasarlanması ve Gerçeklenmesi

Design and Realization of Butterworth High-Pass Filter Circuit in Controllable Canonical Form

Ezgi ÜNVERDİ¹

Ali Bekir YILDIZ²

Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Elektrik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli

¹ ezgi.unverdi@kocaeli.edu.tr

² abvildiz@kocaeli.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, 4. mertebeden Butterworth yüksek geçiren fitre devresine ait transfer fonksiyonu, doğrudan ayrıştırma yöntemlerinden biri olan kontrol edilebilir kanonik biçimde ayrıştırılmıştır. Doğrudan ayrıştırma yöntemi sonucunda elde edilen işaret akış diyagramından devreye ait durum uzay modeli çıkarılmıştır. Bu modele ilişkin devre, aktif elemanlardan Op-Amp, pasif elemanlardan direnç ve kondansatör kullanılarak pratik olarak gerçekleştirilmiştir. Devrenin simülasyon sonuçları ile kurulan pratik devre sonuçları karşılaştırılmış ve devrenin doğruluğu ispat edilmiştir. Ayrıca, devreye ait Bode diyagramı, Birim basamak cevabı ve kutup-sıfır diyagramları da çalışmaya eklenmiştir.

Abstract

In this paper, the transfer function of 4th order Butterworth high-pass filter circuit is decomposed in controllable canonical form which is one of the directly decomposition methods. From the signal flow diagram obtained by directly decomposition method, the state-space model of the circuit is extracted. The circuit related to this model is realized practically by Op-Amp, active element, resistor and capacitor, passive elements. The simulation results and the practically realized circuit results are compared. The correctness of the realized circuit is proved. Moreover, Bode diagram, unit step response and pole-zero diagram are included into the study.

Giriş

Bir sistemin dinamik denklemleri verildiğinde, giriş-çıkış ilişkisini veren transfer fonksiyonu tektir. Ancak verilen bir transfer fonksiyonunun gerçekleşmesine ilişkin durum modeli, kontrol edilebilir kanonik biçim, gözlenebilir kanonik biçim ve diğer pek çok ayrıştırma olanağı nedeniyle tek değildir [1,2]. Analog aktif fitre devrelerinin tasarım işlemleri genellikle önceden denenmiş bir devre modelinden hareket edilerek gerçekleştirilmektedir. İlk olarak istenen fitre özelliklerini sağlayacak olan devrenin kaçınıcı mertebeden olduğu belirlenir. Daha sonra bunu sağlayacak devre, hazır olan temel devrelerin birleşiminden oluşturulur. Filtreler, kazanç eğrilerinin

karakteristik özelliklerine göre Butterworth fitre, Chebyshev fitre, Eliptik fitre (Cauer fitre) olarak sınıflandırılır [3,4]. Bu fitre devrelerinin, geçirme bandı, durdurma bandı ve geçiş bölgelerindeki davranışları farklıdır. Bu çalışmada, Butterworth fitre devre yapısı kullanılmıştır. Bu fitre yapısının geçirme ve durdurma bandında dalgalanması yoktur. Fonksiyonları tek düze olarak azalır. Diğer fitre tiplerinden farklı olarak, derecesi arttığında durdurma bandındaki sert düşüş dışında frekans genlik eğrisinde şeklini korur. Butterworth fitre, Chebyshev ve Eliptik filtrelere göre daha geniş geçiş bölgesine sahip olduğundan, durdurma bandı özelliklerinin doğru olarak uygulanabilmesi için yüksek derecelere ihtiyaç duyar.

Konvansiyonel Butterworth alçak geçiren fitre yapılarına bir iyileştirme [5]'te verilmiştir. Bu çalışmada, aynı mertebeden konvansiyonel Butterworth alçak geçiren filtreye göre daha hızlı cevap ve daha küçük aşım özelliklerine sahip olan bir devre yapısı geliştirilmiştir. Butterworth filtrelerin geçiş bölgesinin kontrolü amacıyla zamanla-değişen katsayılar kullanarak bir tasarım çalışması [6]'da yapılmıştır. Genelleştirilmiş Chebyshev bant geçiren fitre devresinin tasarımı için sistematik ve analitik bir yöntem [7]'de verilmiştir. Tek Op-Amp ile gerçekleştirilen 4. ve 5. mertebeden Butterworth fitre devreleri [8,9]'da irdelenmiştir. Kesirli mertebeden Butterworth fitre devrelerinin analizi [10]'da verilmiştir.

Bu çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde düzenlenmiştir. Butterworth yüksek geçiren fitre devresine ait normalize transfer fonksiyonunun kontrol edilebilir kanonik biçimde doğrudan ayrıştırılmasına dayalı olarak durum denklemlerinin elde edilmesi Bölüm 2'de irdelenmiştir. Elde edilen denklem sistemine kontrol edilebilirlik kriterleri uygulanmıştır. Ayrıca normalize transfer fonksiyonuna ait Bode diyagramı, Birim basamak cevabı ve kutup-sıfır diyagramları elde edilmiştir. Devrenin pratik olarak

gerçeklenebilmesine imkan sağlamak için, Bölüm 3'te genlik ve frekans denormalizasyonu yapılmıştır. Denormalize devreye ait Bode diyagramı, Birim basamak cevabı ve kutup-sıfır diyagramları verilerek, devrenin simülasyon sonuçları ve gerçekleştirilmesi Bölüm 4'de gösterilmiştir.

1. Butterworth Yüksek Geçiren Filtre Devresine ait Normalize Transfer Fonksiyonunun Kontrol edilebilir Kanonik Biçimde Doğrudan Ayrıştırılması

Bu çalışmada, kontrol edilebilir kanonik biçimde ayrıştırma yöntemi kullanılarak yüksek geçiren filtre devresinin işaret akış diyagramı elde edilecektir. Daha sonra, akış diyagramına ait durum denklemleri çıkarılarak devre gerçekleştirilecektir.

4. mertebeden Butterworth yüksek geçiren filtre devresine ait transfer fonksiyonu denk.(1)'de verilmiştir.

$$H(s) = \frac{s^4}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1} \quad (1)$$

2.1. Kontrol edilebilir Kanonik Biçimde Ayrıştırma

Bu ayrıştırma yöntemi, pay ve payda polinomları çarpanlara ayrılmamış bir transfer fonksiyonunda uygulanabilir. Giriş ve çıkışı sırasıyla U(s) ve Y(s) olarak adlandırılabilir ve kontrol edilebilir kanonik ayrıştırmaya ait işlem adımlarını transfer fonksiyonumuza uygulayalım.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^4}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1} \quad (2)$$

Transfer fonksiyonu s'in negatif üstlerine göre düzenlenir. Bunun için pay ve payda s⁻ⁿ (s⁻⁴) ile çarpılır.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + 2.613s^{-1} + 3.414s^{-2} + 2.613s^{-3} + s^{-4}} \quad (3)$$

Transfer fonksiyonunun pay ve paydası X_(s) ara değişkeniyle çarpılır.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + 2.613s^{-1} + 3.414s^{-2} + 2.613s^{-3} + s^{-4}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)} \quad (4)$$

Denk(4)'de elde edilen eşitliğin pay ve paydası her iki tarafından eşitlenerek aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$Y(s) = X(s) \quad (5)$$

$$U(s) = (1 + 2.613s^{-1} + 3.414s^{-2} + 2.613s^{-3} + s^{-4}) X(s) \quad (6)$$

İşaret akış diyagramını elde etmek için denk.(5) ve denk.(6)'daki ifadelerin neden-sonuç ilişkisi haline getirilmesi gerekir.

$$Y(s) = X(s) \quad (7)$$

$$X(s) = U(s) - 2.613s^{-1}X(s) - 3.414s^{-2}X(s) - 2.613s^{-3}X(s) - s^{-4}X(s) \quad (8)$$

Neden-sonuç ilişkisi haline getirilen denklemlerde değişken dönüşümü yapılarak, işaret akış diyagramı çizmeye hazır hale getirilir.

$$s^{-1}X(s) = X_4 \quad (9)$$

$$s^{-2}X(s) = s^{-1}X_4(s) = X_3 \quad (10)$$

$$s^{-3}X(s) = s^{-1}X_3(s) = X_2 \quad (11)$$

$$s^{-4}X(s) = s^{-1}X_2(s) = X_1 \quad (12)$$

$$X(s) = sX_4(s) = U(s) - 2.613X_4(s) - 3.414X_3(s) - 2.613X_2(s) - X_1(s) \quad (13)$$

Sistemin işaret akış diyagramını oluşturmadan önce, sistemin kontrol edilebilirliğinin incelenmesi gerekir. İnceleme için, öncelikle devreye ait durum denklemi sisteminin oluşturulmalıdır.

İncelenen yüksek geçiren filtre devresi 4.mertebeden olduğu için dört adet durum değişkeni vardır. Denklem (10), (11), (12), (13) sisteme karşı düşen durum denklemleridir. Durum denklemleri sistemi denk(15)'de verilmiştir.

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX + BU \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2.613 & -3.414 & -2.613 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (15)$$

Burada, A ve B matrisleri denk.(16)'da verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2.613 & -3.414 & -2.613 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

n durum değişkeni içeren dinamik bir devrenin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul, nx(np) boyutlu Q_k kontrol edilebilirlik matrisinin rankının n olmasıdır.

$$[Q_k] = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (17)$$

$$\text{rank}(Q_k) = n \quad (18)$$

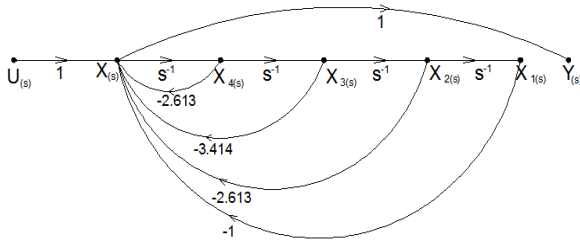
O halde elimizde mevcut olan sistemimiz için Q_k matrisi;

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2.6130 \\ 0 & 1 & -2.613 & 3.41381 \\ 1 & -2.613 & 3.4138 & -2.6124 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{rank}(Q_k) = 4 \quad (20)$$

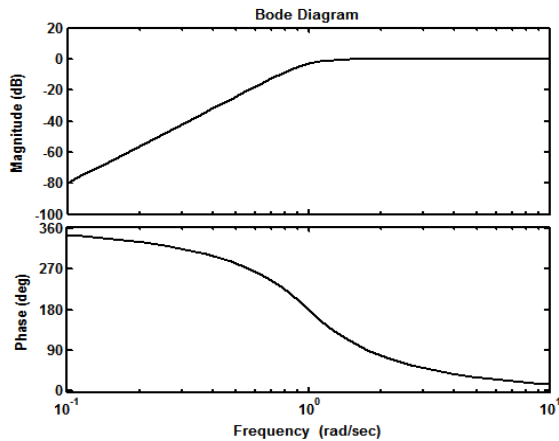
Denk.(20)'den görüldüğü gibi, Q_k matrisinin rankı sistemin derecesine eşittir. Bu nedenle, yüksek geçiren filtre devresi kontroledilebilirdir.

Denk.(7), (9), (10), (11), (12), (13)'e karşı düşen işaret akış diyagramı Şekil 1'de verilmiştir.

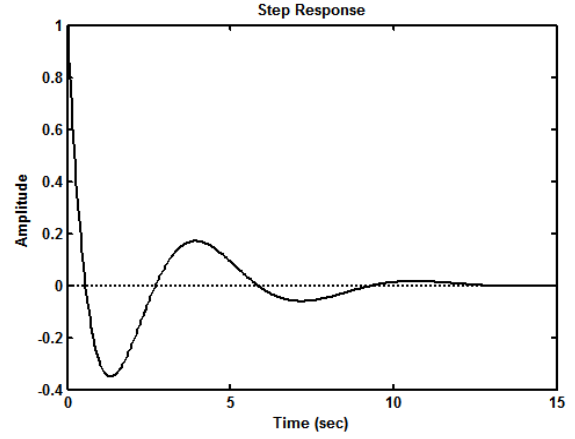


Şekil 1: Kontroledilebilir doğrudan ayrıştırma yöntemiyle elde edilen yüksek geçiren filtreye ait işaret akış diyagramı

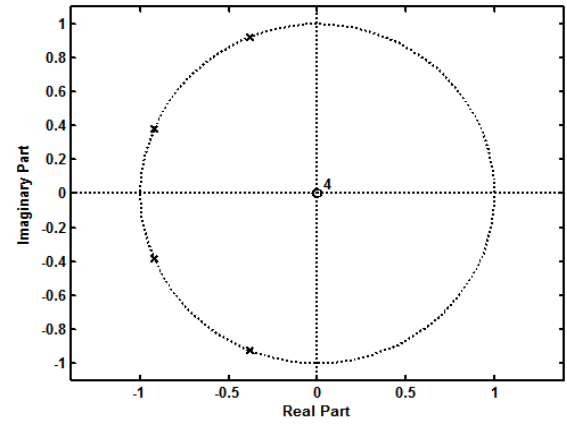
Denk.(1)'de normalize transfer fonksiyonu verilen yüksek geçiren filtre devresine ait Bode diyagramı, Birim basamak fonksiyon yanıtı ve Kutup sıfır diyagramı, sırasıyla Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'de verilmiştir.



Şekil 2: Butterworth normalize transfer fonksiyonuna ait Bode diyagramı



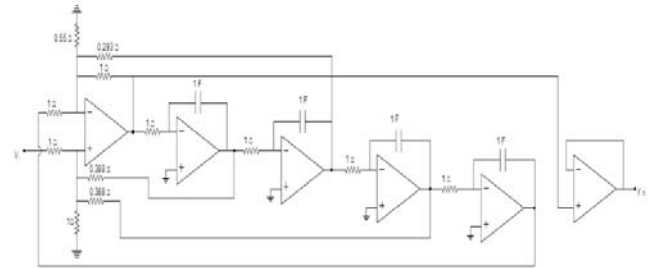
Şekil 3: Butterworth normalize transfer fonksiyonuna ait Birim basamak yanıtı



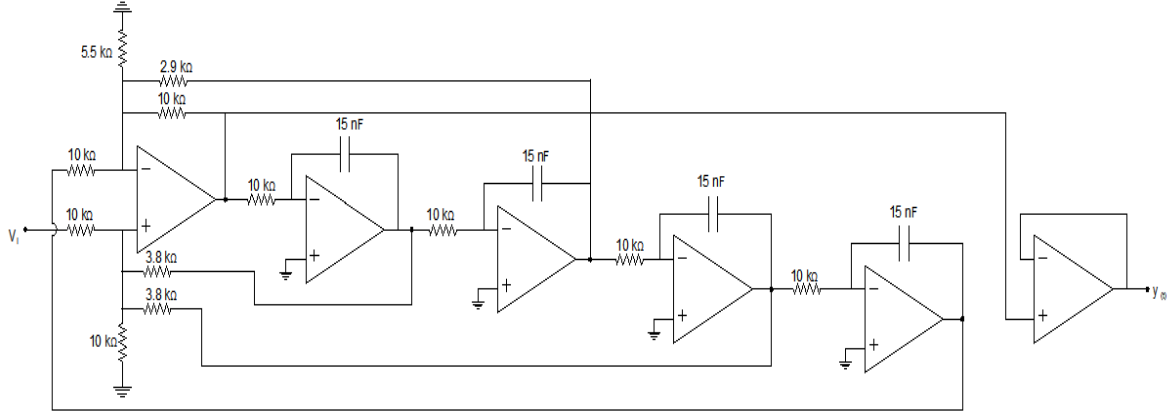
Şekil 4: Butterworth normalize transfer fonksiyonuna ait kutup sıfır diyagramı

2. Butterworth Yüksek Geçiren Filtre Devresine ait Normalize Transfer Fonksiyonunun Denormalizasyonu ve Devre Topolojisi

Şekil 1'de elde edilen işaret akış diyagramının gerçekleştirilmesinde; bir adet toplayıcı-çıkarıcı Op-Amplı devre, dört adet İntegral alıcı Op-Amplı devre ve bir adet Gerilim izleyici Op-Amplı devre kullanılarak Şekil 5'deki normalize eleman değerlerine sahip devre elde edilmiştir.



Şekil 5: Normalize Butterworth yüksek geçiren filtre devresi

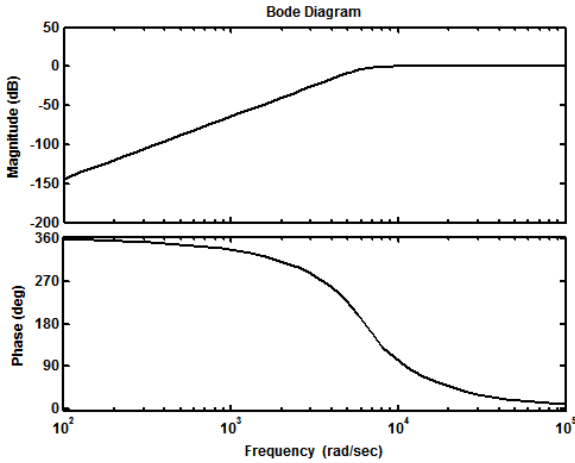


Şekil 6: Pratik olarak gerçekleştirilen denormalize Butterworth yüksek geçiren filtre devresi

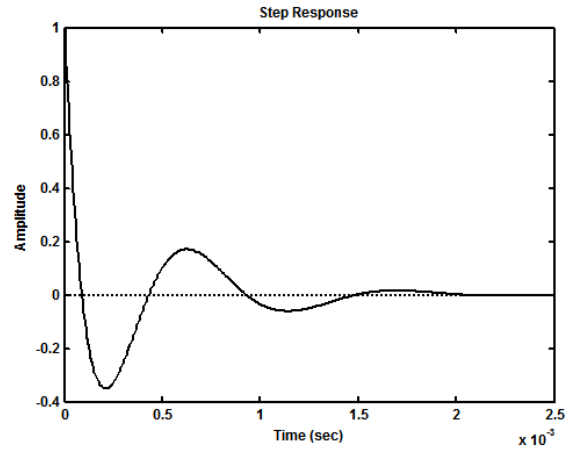
Şekil 5’de mevcut olan transfer fonksiyonunun pratik olarak gerçekleştirilebilmesi için devrenin denormalize edilmesi gerekir. Denormalizasyon için devremizde frekans ölçekleme katsayısı $2\pi \cdot 10^3$, genlik ölçekleme katsayısı ise $1 \cdot 10^4$ alınarak işlemler gerçekleştirilmiş, denk.(21)’deki denormalize transfer fonksiyonu ve Şekil 6’daki denormalize devre elde edilmiştir.

$$H(s) = \frac{6.41610^{-16} \cdot s^4}{6.416 \cdot 10^{-16} s^4 + 1.053 \cdot 10^{-11} s^3 + 8.64810^{-8} s^2 + 0.4159 \cdot 10^{-3} s + 1} \quad (21)$$

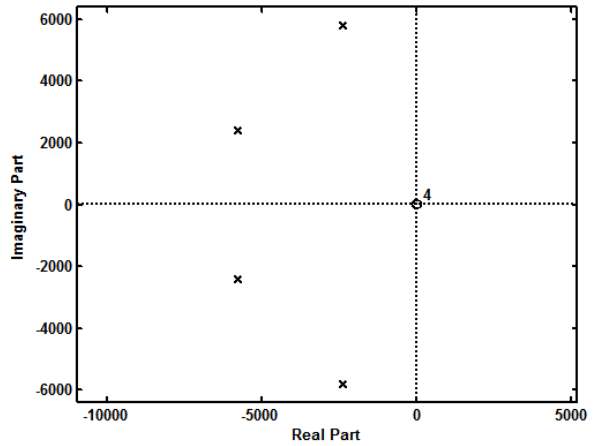
Denk.(21) ile denormalize transfer fonksiyonu verilen yüksek geçiren filtre devresine ait Bode diyagramı, Birim basamak fonksiyon yanıtı ve Kutup sıfır diyagramı, sırasıyla Şekil 7, Şekil 8 ve Şekil 9’da verilmiştir.



Şekil 7: Butterworth denormalize transfer fonksiyonuna ait Bode diyagramı



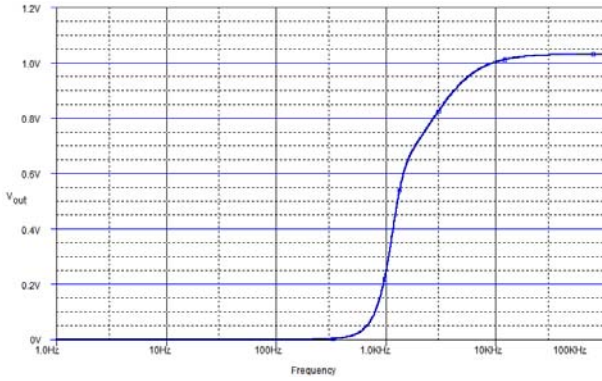
Şekil 8: Butterworth denormalize transfer fonksiyonuna ait Birim basamak yanıtı



Şekil 9: Butterworth denormalize transfer fonksiyonuna ait kutup sıfır diyagramı

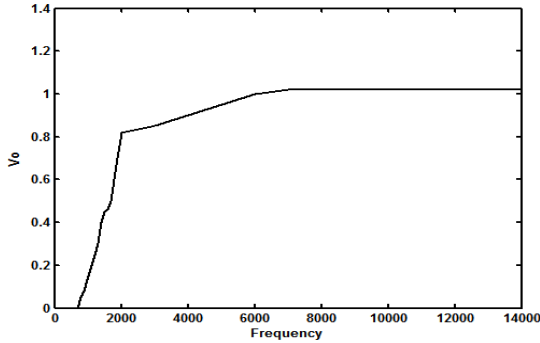
3. Devre Simülasyonu ve Gerçekleme

ORCAD PSPICE programı kullanılarak simüle edilen denormalize devrenin AC analiz sonucu ile pratik olarak gerçekleştirilen devreden elde edilen ölçme sonuçları karşılaştırılarak yapılan tasarımın doğruluğu kanıtlanmıştır. Şekil 6'daki denormalize devrenin frekans karakteristiği Şekil 10'da verilmiştir. Beklenildiği gibi, köşe frekansı değerinden sonra devrenin çıkış cevabı geçirme bandına girmiştir.



Şekil 10: Butterworth yüksek geçiren filtre frekans karakteristiği

Pratik olarak kurulan devrenin belli frekans aralıklarında ölçülen çıkış geriliminin grafiksel gösterimi Şekil 11'de verilmiştir.



Şekil 11: Butterworth yüksek geçiren filtre deneysel sonucu

Sonuçlar

Bu çalışmada, 4. mertebeden Butterworth yüksek geçiren filtre devresinin simülasyonu, tasarımı ve pratik olarak gerçekleştirilmesi yapılmıştır.

Bu amaçla, devrenin transfer fonksiyonuna kontroledilebilir kanonik biçimde doğrudan ayrıştırma yapılarak, devrenin durum-uzay modeli ve işaret akış diyagramı çıkarılmıştır. Elde edilen işaret akış diyagramından, Op-Amp ve R-C elemanları kullanılarak devre gerçekleştirilmiştir. ORCAD PSPICE programı kullanılarak, simüle edilen devrenin AC analiz sonucu ile pratik olarak gerçekleştirilen devreden elde edilen ölçme sonuçları karşılaştırılarak yapılan tasarımın doğruluğu kanıtlanmıştır.

Kaynaklar

- [1] Kuo, B. C., *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Literatür Yayınları, İstanbul, 2002.
- [2] Brogan, W.L., *Modern Control Theory*, 2nd Ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [3] Thomas, E.R. and A.J. Rosa, *The Analysis and Design of Linear Circuits*, 5th Ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [4] Alexander, C.H. and Sadiku, M.N., *Fundamentals of Electric Circuits*, 3rd Ed. McGraw-Hill, 2007
- [5] Zhongshon, L., "Design and Analysis of Improved Butterworth Low Pass filter", *8th Int. Conf. on Electronic Measurement and Instrument*, pp.729-732, 2007.
- [6] Kaszynski, R. and Piskorowski, J., "Synthesis of Delay Equalized Time-Varying Butterworth Filters", *APCCAS 2006. IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems*, pp.908-911, 2006.
- [7] Li, J.Y., Chi, C.H. and Chang, C.Y., "Synthesis and Design of Generalized Chebyshev Wideband Hybrid Ring Based Bandpass Filters With a Controllable Transmission Zero Pair", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol.58, pp.3720-3731, 2010.
- [8] Gaunholt, H., "A numerical design approach for single amplifier, Active-RC Butterworth filter of order 5", *ISCAS 2007, IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 1927-1930, 2007.
- [9] Gaunholt, H., "The design of a 4th order bandpass Butterworth filter with one operational amplifier", *ICSES 2008, International Conference on Signals and Electronic Systems*, pp. 327-330, 2008.
- [10] Soltan, A., Radwan, A.G. and Soliman, A.M., "Butterworth passive filter in the fractional-order", *Int. Conf. on Microelectronics (ICM)*, pp.1-5, 2011.