

Yönbağımsız ve Yönbağımlı Gauss Süzgeçleme

Isotropic and Anisotropic Gaussian Filtering

Deniz Yıldırım¹, Bekir Dizdaroglu²

¹Harita Mühendisliği Bölümü, ²Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Karadeniz Teknik Üniversitesi
dyildirir@gmail.com, bekir@ktu.edu.tr

Özet

Girdi imgesindeki gürültü azaltma işlemi sayısal imge işlemeyle ilgili hemen hemen bütün çalışmalarda kullanılan en yaygın ön işlem adımlarından bir tanesidir. Gürültü azaltma işlemiyle ilgili literatürde birçok çalışma yapılmaktadır. Gürültü imgeden yok edilirken imge yapı ve doku bilgisinin de korunması gerekmektedir. Klasik yaklaşımlarda imgedeki gürültüyü azaltmak için alçak geçiren bir süzgeç özelliği gösteren Gauss süzgeci kullanılmaktadır. Bu çalışmada, kısmi diferansiyel denklem yaklaşımı olan ısı denkleminin Gauss süzgeci davranışı gösterdiği ve ayrıca başka bir kısmi diferansiyel denklem yaklaşımı olan iz tabanlı yöntemin hem Gauss süzgeci ve hem de imgenin homojen bölgelerinde ısı denkleminin davranışı gösterdiği ispatlanmıştır. Sonlu farklar yaklaşımlarından ve süzgeçleme yaklaşımlarından elde edilen sonuçlar da bu teoriyi doğrular niteliktedir.

Abstract

Noise reduction process in the input image is one of the most common preprocessing steps used in almost all the studies in digital image processing. Many studies based on noise reduction process have been presented in the literature. While noise is removed from the image, the structure and texture information in the image need to be preserved. In the classical approaches, a Gaussian filter which behaves as a low-pass filter to reduce noise in the image is used. In this study, it is proved that the heat equation, which is a partial differential equation approach, behaves as a Gaussian filter and also, the trace-based method, another partial differential equation approach, not only behaves as a Gaussian filter and but also behaves as a heat equation in homogenous regions of the image. Results obtained by approaches based on finite differences and based on filtering appear to confirm this theory.

1. Giriş

Sayısal imge işleme alanında kısmi diferansiyel denklem yaklaşımlarına bağlı olarak gürültü azaltma, bölütleme, içboyama, düzenleme, optik akış ve renklendirme üzerine son zamanlarda birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar, gri düzeyli imgelerin işlenmesinin yanında renkli imgelerin de işlenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Renkli imgelerin işlenmesinde renk kanallarının birbirleriyle etkileşimleri dikkate alınmaktadır.

Kısmi diferansiyel yaklaşımlarına bağlı olarak girdi imgesindeki gürültüyü azaltmak için literatürde birçok yaklaşım geliştirilmiştir. Tikhonov [1] tarafından geliştirilen ve en temel bir gürültü azaltma yaklaşımı olan ısı denkleminin, gri düzeyli imgeler üzerinde doğrusal ve yönbağımsız bir yumuşatma işlemi gerçekleştirmektedir. Bu yaklaşım bir alçak geçiren süzgeç (AGS) davranışı gösterdiğinden [2] imgedeki kenar bilgilerini de bulanıklaştırmaktadır. Bu yüzden, Perona ve Malik [3], gürültü azaltma işleminde imgedeki kenar bilgilerinin daha iyi bir şekilde korunması için ısı denkleminin uyarlanabilir bir ağırlıklandırma fonksiyonu eklememişler ve doğrusal olmayan ve yönbağımlı bu yaklaşımla kenar bölgelerindeki yayını önlemeye çalışmışlardır. Ama yöntem bazen ters yayınıma neden olduğundan gürültüyü azaltmak yerine daha da belirgin hale getirebilmektedir. Weickert [4], tensör yaklaşımına bağlı olarak her bir piksel için özdeğerler ve özvektörler gibi yerel öznitelik çıkarımı yapmış ve bu öznitelik bilgilerini kullanarak yönbağımlı bir yayını yöntemini geliştirmiştir. Tschumperle ve Deriche [5], renkli görüntüler için tensör yaklaşımına bağlı olarak iz tabanlı yönbağımlı bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem, imgenin keskin köşelerinde yuvarlatma etkisi ortaya çıkardığından, Tschumperle [5]'deki yöntemle çizgi entegrali evrişimi yaklaşımını da ekleyerek daha iyi bir sonuç imgesinin üretilmesini sağlamıştır [6].

Bu çalışmada, ısı denkleminin aslında bir AGS süzgeç davranışı gösterdiği farklı bir yoldan ispat edilecek ve ayrıca Tschumperle ve Deriche'nin geliştirmiş olduğu iz tabanlı yönbağımlı yaklaşımla [5] yönbağımsız bir yaklaşım olan ısı denkleminin [1] arasındaki ilişkiyi bahsedilecektir.

2. Gürültü Azaltma

Bir işaretteki gürültüyü yok etmek demek, işaretteki değişimleri en aza indirmek veya başka bir ifadeyle işaretteki maksimum ve minimum değerleri orta bir değere çekmek olarak tanımlanabilir. Gürültü azaltma işleminde genelde Gauss süzgecinden yararlanılmaktadır. Bu durumda, 1-boyutlu Gauss süzgeci aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Burada x , değişkeni ve σ , zaman bölgesinde standart sapmayı göstermektedir. Denklem (1)'in Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}\{g_{\sigma}(x)\} = \hat{g}_{\sigma}(f) = e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

olarak elde edilir. Burada f , frekansı ve σ_f , frekans bölgesinde standart sapmayı temsil etmektedir. Ayrıca, denklemlerde $\sigma \times \sigma_f = (2\pi)^{-1}$ eşitliği sağlanmaktadır. Dikkat edilirse Gauss süzgecinin Fourier dönüşümü yine Gauss süzgeci şeklindedir. Başka bir ifadeyle, süzgeç, işaretteki alçak frekansları geçirirken yüksek frekansları da bastırmaktadır.

İmgedeki gürültülerin yok edilmesinde ise 2-boyutlu Gauss süzgeci kullanılmaktadır:

$$g_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

2-boyutlu süzgeçle imgedeki gürültü azaltılırken, yüksek frekans bileşeni içeren kenarlar da yok edilmektedir. Bu da Gauss süzgecin bir dezavantajıdır.

Aşağıdaki alt başlıklarda, yönbağımsız ve yönbağımlı yayılım yaklaşımlarıyla gri düzeyli ve renkli imgelerde gürültü azaltma işleminin aslında bir Gauss süzgeci davranışı gösterdiği ispat edilecektir.

2.1. Isı Denklemi Yaklaşımı

Ω kapalı bölgesinde tanımlı gürültü içeren gri düzeyli bir girdi imgesi $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ile ve gürültüsü azaltılmış sonuç imgesi ise $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ile temsil edilsin. Yönbağımsız yumuşatma işlemi gerçekleştiren ısı denkleminde imgedeki değişimleri minimize etmek için aşağıdaki enerji fonksiyoneli kullanılmaktadır:

$$\min_{\Omega} E_{\text{Doğrusal}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \quad (4)$$

Denklem (4)'ü çözmek için, Euler-Lagrange yaklaşımı kullanılarak ve iteratif bayır inişi yöntemine bağlı olarak aşağıdaki ifade verilebilir:

$$\begin{cases} u(x, y; t = 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \end{cases} \quad (5)$$

Burada Δ Laplace işlecidir ve x ve y bağımsız değişkenlerine göre ikinci mertebeden kısmi türevlerin toplamını ifade etmektedir. Yöntemde, her iterasyon sonunda üretilen çıkış imgesi aşağıda verilen denkleme bağlı olarak optimize edilir:

$$u^{n+1} = u^n + dt \times \Delta u^n \quad (6)$$

Burada, n iterasyon sayısını göstermektedir. dt zaman adımı sabittir ve basitçe 0.25 olarak alınabilir.

Isı denklemi aslında aşağıdaki ifade de verildiği gibi bir AGS davranışı göstermektedir:

$$\begin{aligned} u &= f * g_\sigma \\ u(j, k; t) &= \int_x \int_y f(j-x, k-y) g_\sigma(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

Burada kullanılan Gauss süzgeci aşağıda gibi alınmaktadır:

$$g_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \sigma = \sqrt{2t}$$

Lemma.

g_σ fonksiyonu, $\sigma = \sqrt{2t}$ için ısı denklemini sağlar.

İspat.

x bağımsız değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türev,

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi\sigma^4} x e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

olarak elde edilir.

y bağımsız değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türev,

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi\sigma^4} y e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

olarak elde edilir. x ve y bağımsız değişkenlerine göre sırasıyla ikinci mertebeden kısmi türevler,

$$\frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} = \frac{x^2 - \sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2} = \frac{y^2 - \sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

olarak bulunur. İkinci mertebeden türevlerin toplamı,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (g_\sigma) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

eşitliği ile verilir. Sol taraftaki ifade de Laplace işleci kullanılarak denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\Delta g_\sigma = \frac{x^2 + y^2 - 4t}{16\pi t^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

σ 'ya göre birinci mertebeden kısmi türev,

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^5} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} = \sqrt{2t} \frac{x^2 + y^2 - 4t}{16\pi t^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

ve t 'ye göre birinci mertebeden kısmi türev,

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial t} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial t} = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^5} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

olarak elde edilir. Denklem (8) ve Denklem (9)'dan görülebileceği gibi, aşağıdaki denklem geçerlidir:

$$\Delta g_\sigma = \frac{\partial g_\sigma}{\partial t} \quad (10)$$

Dolayısıyla g_σ , $\sigma = \sqrt{2t}$ için ısı denklemini sağlar. ■

Denklem (5), yer değiştirme özelliğine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (f * g_\sigma)}{\partial t} = f * \frac{\partial (g_\sigma)}{\partial t}$$

Ayrıca evrişim doğrusal bir işleçtir. Dolayısıyla,

$$\Delta u = \Delta(f * g_\sigma) = f * \Delta g_\sigma$$

olur.

$\mathbf{x} = (x, y)^T$ alınır ve g_σ fonksiyonu, t 'ye göre yeniden düzenlenirse,

$$g_t = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{4t}} \quad (11)$$

elde edilir.

2.2. İz Tabanlı Yaklaşım

Ω kapalı bölgesinde tanımlı gürültü içeren renkli bir girdi imgesi $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile ve gürültüsü azaltılmış sonuç imgesi ise $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile gösterilsin. İz tabanlı yaklaşımda ilk önce her bir piksel için yapı tensörü elde edilir:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \nabla u_i^T \quad (12)$$

Burada i , imgenin renk kanallarını temsil etmektedir ve $\nabla u_i = [\partial u_i / \partial x, \partial u_i / \partial y]^T$ ise her bir renk kanalı için gradyan vektörünü göstermektedir. Bu bağlamda, (K)ırmızı, (Y)eşil ve (M)avi renk uzayında yapı tensörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x^2 + Y_x^2 + M_x^2 & K_x K_y + Y_x Y_y + M_x M_y \\ K_y K_x + Y_y Y_x + M_y M_x & K_y^2 + Y_y^2 + M_y^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Burada,

$$K_x = \partial u_1 / \partial x, Y_x = \partial u_2 / \partial x \text{ ve } M_x = \partial u_3 / \partial x \\ K_y = \partial u_1 / \partial y, Y_y = \partial u_2 / \partial y \text{ ve } M_y = \partial u_3 / \partial y$$

Yapı tensörü matrisinden λ^\pm pozitif özdeğerler ve φ^\pm birbirine dik özvektörler aşağıdaki ifadelerle hesaplanır:

$$\lambda^\pm = \left(k_{11} + k_{22} \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2} \right) / 2 \text{ ve}$$

$$\varphi^\pm = \left[2k_{12}, k_{22} - k_{11} \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2} \right]^T$$

λ^\pm özdeğerler, aşağıda belirtildiği gibi işlenen piksel için bazı bilgiler verirler:

- Eğer $\lambda^+ \cong \lambda^- \cong 0$ ise, ilgili piksel homojen bir bölge içersinde olabilir,
- Eğer $\lambda^+ \gg \lambda^-$ ise, ilgili piksel kenarda olabilir,
- Eğer $\lambda^+ \cong \lambda^- \gg 0$ ise, ilgili piksel köşede olabilir.

Ayrıca daha doğruluklu sonuçlar elde edilebilmek için yapı tensörü bir Gauss süzgecinden de geçirilebilir: $\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K} * g_\sigma$.

Bu bağlamda renkli bir imgedeki gürültüyü azaltmak için Tschumperle ve Deriche [5] yayınımsız yapı tensörü yaklaşımını kullanmışlardır:

$$\mathbf{T} = s^-(\lambda^+, \lambda^-) \varphi^- \varphi^{-T} + s^+(\lambda^+, \lambda^-) \varphi^+ \varphi^{+T} \quad (14)$$

Burada, $s^\pm: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur ve φ^\pm özvektörlerin yönüne bağlı olarak imge üzerinde gürültü azaltma işleminde kullanılmaktadır:

$$s^-(\lambda^+, \lambda^-) = (1 + \lambda^+ + \lambda^-)^{-a_1} \text{ ve}$$

$$s^+(\lambda^+, \lambda^-) = (1 + \lambda^+ + \lambda^-)^{-a_2}, \text{ burada } a_1 < a_2.$$

Gürültü azaltma:

- φ^- özvektörü yönünde olursa, yönbağımlı bir yumuşatma gerçekleştirilmiş olur.
- Homojen bir bölgede yapılırsa yönbağımsız bir yumuşatma gerçekleştirilir. Bu durumda $\mathbf{T} \cong \mathbb{I}$ birim matris olarak elde edilir ve iz tabanlı yöntem ısı denklemi davranışı gösterir.

Euler-Lagrange yaklaşımı bağlı iteratif bayır inişi yöntemine göre iz tabanlı yöntem için aşağıdaki ifade verilebilir:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y; t = 0) = \mathbf{f}(x, y) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \text{trace}(\mathbf{T}\mathbf{H}_i) \end{cases} \quad (15)$$

Burada $\text{trace}(\cdot)$, matrisin izini temsil etmektedir ve \mathbf{H}_i Hessian matrisidir:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \partial^2 u_i / \partial x^2 & \partial^2 u_i / \partial x \partial y \\ \partial^2 u_i / \partial y \partial x & \partial^2 u_i / \partial y^2 \end{bmatrix}$$

Tschumperle ve Deriche [5] iz tabanlı yaklaşımı Gauss süzgecine bağlı olarak aşağıdaki denklemle temsil etmişlerdir:

$$g_{\mathbf{T},t} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}}{4t}} \quad (16)$$

Bu durumda iz tabanlı yaklaşım Gauss süzgeci dikkate alındığında evrişim işlecine bağlı olarak aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} * g_{\mathbf{T},t} \quad (17)$$

2.2.1. Isı Denklemi Yaklaşımıyla İz Tabanlı Yaklaşım Arasındaki İlişki

Yapı tensörü dikkate alındığında, homojen bölgede özdeğerler sıfır olarak elde edileceğinden, $s^-(\cdot) = 1$ ve $s^+(\cdot) = 1$ değerlerini alır ve $\mathbf{T} = \mathbb{I}$ birim matris olarak elde edilir. Buna durumda iz tabanlı yaklaşım homojen bölgelerde ısı denklemi davranışı göstermektedir:

$$g_{\mathbb{I},t} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbb{I}^{-1} \mathbf{x}}{4t}}$$

Yukarıdaki denklem dikkate alındığında Denklem (11) ve Denklem (16)'nın birbirine eşit olduğu görülür.

3. Deneysel Çalışmalar

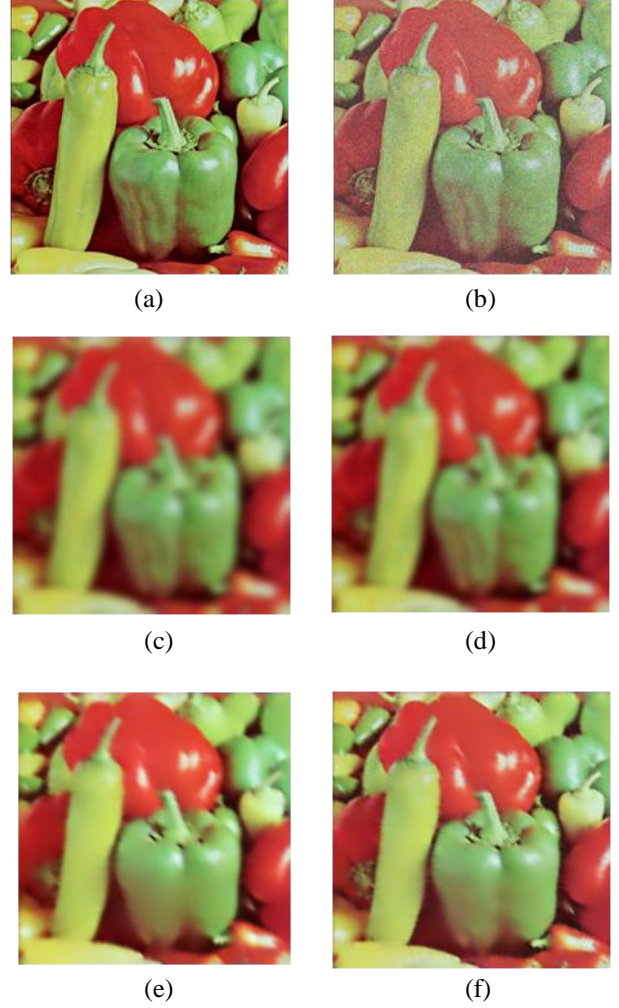
Sonuçların geçerliliğini göstermek için bu çalışmada test işlemlerinde 256×256 boyutlarındaki 'Lenna' ve 'Pepper' renkli imgeleri kullanılmıştır. Test imgelerine standart sapması $\sigma = 20$ olan yapay Gauss gürültüsü eklenmiştir. Yöntemlerdeki süzgeç yaklaşımlarında süzgecin maske boyutu 5×5 olarak alınmıştır. Döngü sayısı 150 olarak sabitlenmiştir. İz tabanlı yaklaşımlarda, yayınımsız yapı tensörünü yumuşatmak için kullanılan Gauss süzgecinin standart sapması $\sigma = 1.5$ ve yayınımsız katsayıları ise $a_1 = 0.7$ ve

$a_2 = 1$ olarak alınmıştır. Yöntemlerde, dt zaman adımı, her döngü sonunda elde edilen sonuçlara bağlı olarak optimize edilmiştir. Ayrıca ısı denklemi yaklaşımı gri düzeyli imgelerdeki gürültü azaltma işlemi için geliştirildiğinden, bu çalışmada yaklaşım renkli imgelerin her bir kanalına ayrı ayrı uygulanmıştır.

Şekil 1. ve Şekil 2.'de, test imgeleri için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Isı denklemine bağlı hem sonlu farklar yaklaşımıyla hem de evrişim işlemine bağlı olarak elden sonuçların, iz tabanlı yaklaşımla karşılaştırma yapıldığında, sonuç imgesini daha fazla bulanıklaştırdığı görülmektedir. İz tabanlı yaklaşımlarla üretilen sonuç imgeleri görsel olarak hemen hemen birbirine yakın elde edilmesine rağmen, Çizelge 1.'de verildiği gibi, iz tabanlı sonlu farklar yönteminin işlem süresi iz tabanlı süzgeçleme yönteminin işlem süresinin yaklaşık olarak üçte biri kadardır. Ayrıca Çizelge 1.'den görülebileceği gibi, Denklem (18) göre hesaplanan tepe işaret gürültü oranı (PSNR) ölçütüne bağlı olarak en iyi sonuçlar yine iz tabanlı sonlu farklar yaklaşımıyla elde edilmiştir.



Şekil 1: Lenna test imgesindeki gürültü azaltma sonuçları: (a) Girdi imgesi, (b) gürültülü imge, (c) ısı denklemi yaklaşımı (süzgeçleme) (d) ısı denklemi yaklaşımı (sonlu farklar) (e) iz tabanlı yaklaşım (süzgeçleme) ve (f) iz tabanlı yaklaşım (sonlu farklar).



Şekil 2: Pepper test imgesindeki gürültü azaltma sonuçları: (a) Girdi imgesi, (b) gürültülü imge, (c) ısı denklemi yaklaşımı (süzgeçleme) (d) ısı denklemi yaklaşımı (sonlu farklar) (e) iz tabanlı yaklaşım (süzgeçleme) ve (f) iz tabanlı yaklaşım (sonlu farklar).

$$OKH = \frac{1}{3 \times M \times N} \sum_{i=1}^3 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (u_i(x, y) - f_i(x, y))^2 \quad (18)$$

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{255}{OKH} \right)$$

burada, $M \times N$ renkli imgenin boyutunu göstermektedir ve OKH ise ortalama kare hatadır.

Çalışmaya ait bir uygulama, Microsoft Visual C++ platformu kullanılarak yazılmış ve Pentium 2.20 GHz işlemcili ve 2 GB RAM belleğe sahip bir dizüstü bilgisayarda koşulmuştur.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada ısı denklemi ile iz tabanlı yaklaşım arasındaki benzerlik irdelenmiştir. Hem ısı denkleminin hem de iz tabanlı

yaklaşımının aslında AGS bir süzgeç davranışı gösterdiği kısmi türev yaklaşımı ile farklı bir yoldan ispat edilmiştir. İleriki çalışmalarda karmaşık sayı düzleminde türev alma yaklaşımı ile hem gri düzeyli hem de renkli imgelerdeki gürültülerin giderilmesi için bir yaklaşım geliştirilecektir.

Çizelge 1: Yöntemlerin PSNR değerleri ve işlem süreleri.

Test İmgesi	Lenna			
Yöntem	İsı denklemleri (Süzgeç)	İsı denklemleri (Sonlu)	İz tabanlı (Süzgeç)	İz tabanlı (Sonlu)
PSNR (dB)	23.09	21.93	24.96	26.90
Süre (sn)	143	21	337	121
Test İmgesi	Pepper			
Yöntem	İsı denklemleri (Süzgeç)	İsı denklemleri (Sonlu)	İz tabanlı (Süzgeç)	İz tabanlı (Sonlu)
PSNR (dB)	21.51	22.27	23.96	26.97
Süre (sn)	144	22	291	121

5. Kaynaklar

- [1] Tikhonov, A. N., "Regularization of Incorrectly Posed Problems", *Soviet Mathematics*, vol. 4, pp. 1624-1627, 1963.
- [2] Koenderink, J. J., "The Structure of Images", *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 363-370, 1984.
- [3] Perona, P. and Malik, J., "Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, July 1990.
- [4] Weickert, J., "Coherence-Enhancing Diffusion Filtering", *International Journal of Computer Vision*, vol. 31, no.2-3, pp. 111-127, 1999.
- [5] Tschumperle, D. and Deriche, R., "Vector-Valued Image Regularization with PDE's : A Common Framework for Different Applications", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 27, no. 4, April 2005.
- [6] Tschumperle, D., "Fast Anisotropic Smoothing of Multi-Valued Images Using Curvature-Preserving PDE's", *International Journal of Computer Vision*, vol. 68, no. 1, pp. 65-82, 2006.
- [7] Bracewell, R., *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.