

AYRIK DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ İLE GÜRÜLTÜ SÜZME

Fahri VATANSEVER¹

Ferudun UYSAL²

Abdullah UZUN³

¹Sakarya Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Bölümü, 54187

Esentepe Kampüsü/SAKARYA

²Sakarya Üniversitesi, Sakarya M. Y. O., Elektrik Programı, 54100 Adapazarı/SAKARYA

³Sakarya Üniversitesi, Sakarya M. Y. O., Bilgisayar Programcılığı, 54100

Adapazarı/SAKARYA

¹e-posta: fahriv@sakarya.edu.tr

²e-posta: fuysal@sakarya.edu.tr

³e-posta: auzun@sakarya.edu.tr

ABSTRACT

In practically, one of the most important problems is noise in applications. The noise is affect in negative direction for working of systems. Therefore, various methods developed for denoising. In this methods, making denoising with wavelet transform is most popular and recent method.

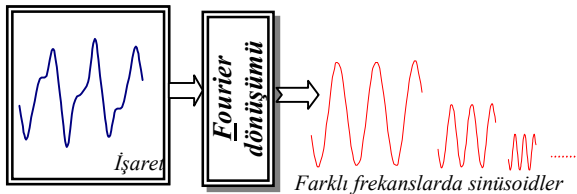
Anahtar kelimeler: Dalgacık(wavelet), Gürültü süzme

1. GİRİŞ

Fourier dönüşümü, işaret işleme alanında ilk ortaya atılan dönüşümdür. Bu dönüşüm sayesinde sinyallerin spektrumları analiz edilebilmekte ve frekans domeninde sistemlerin ve özelliklerinin betimlenmesi sağlanabilmektedir. Fourier dönüşüm çifti (Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü), aşağıdaki denklemlerle verilmektedir.

$$\left. \begin{aligned} X(w) &= F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= F^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{j\omega t} dw \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fourier dönüşümü denkleminde $x(t)$ işareti, tüm zaman aralığında kompleks çarpan ile çarpılıp toplanmaktadır. Sonuç olarak dönüşüm, $X(w)$ Fourier katsayılarını vermektedir. Grafikselsel olarak durum Şekil 1'deki gibidir.



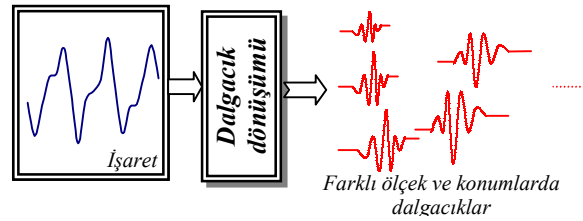
Şekil 1 Fourier dönüşümünün grafikselsel gösterimi

Benzer şekilde “sürekli dalgacık dönüşümü – SDD” (Continuous Wavelet Transform – CWT) veya “integral dalgacık dönüşümü – İDD” (Integral Wavelet Transform – IWT) de işaretin tüm zaman

aralığında ψ dalgacık fonksiyonunun ölçekli ve değişken versiyonlarının çarpımının toplamı olarak tanımlanır.

$$C(\text{ölçek}, \text{konum}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi(\text{ölçek}, \text{konum}, t) dt \quad (2)$$

SDD sonucu olarak, fonksiyonun ölçek ve konumuna uygun birçok C dalgacık katsayıları elde edilmektedir. Uygun ölçeklenmiş ve ötelenmiş dalgacıkla çarpılan herbir katsayı, orijinal işaretin dalgacık bileşenlerini oluşturur. Fourier dönüşümü için çizilen grafikselsel gösterim, dalgacık dönüşümü için de Şekil 2'deki gibi olur.



Şekil 2 Dalgacık dönüşümünün grafikselsel gösterimi

Dalgacık dönüşümü matematiksel olarak;

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (3)$$

veya $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ olmak üzere

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (4)$$

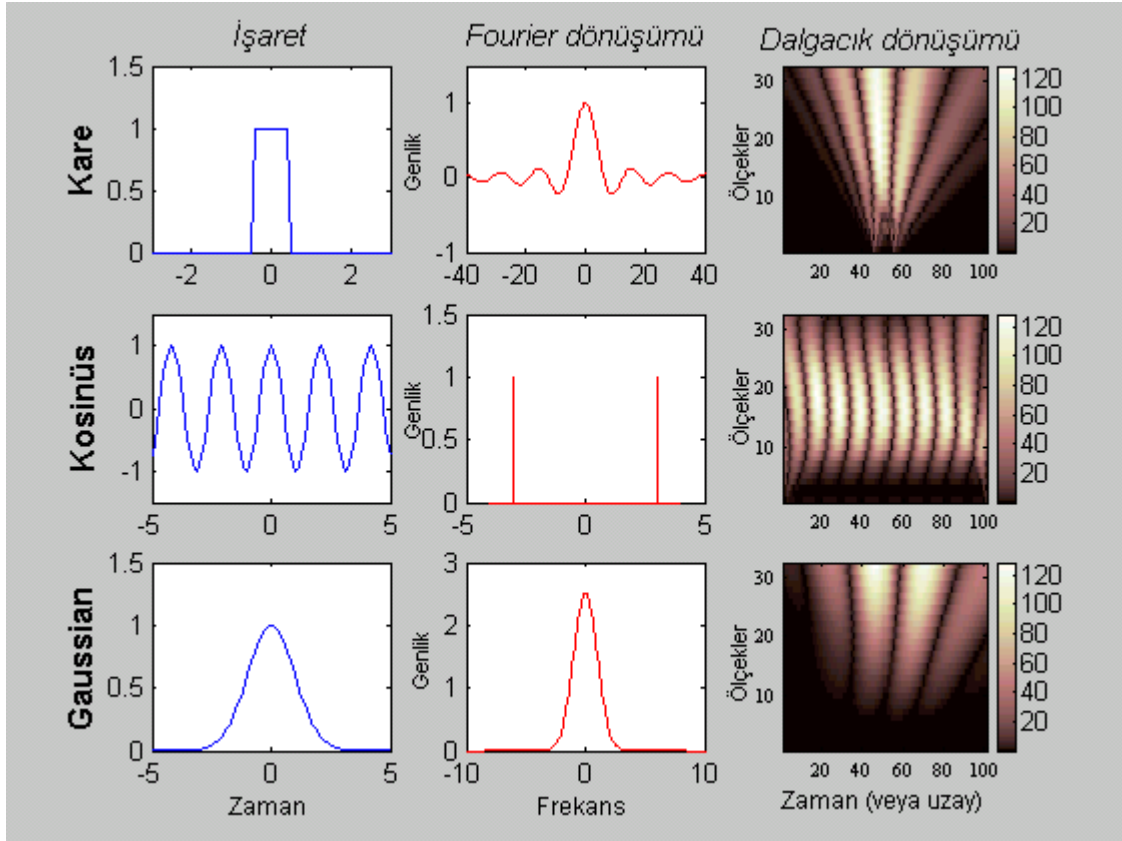
denklemleriyle verilir. Bu denklemlerde $a > 0, b \in \Re$ olmak üzere a , ölçekleme parametresini; b dönüşüm parametresini; $x(t)$, işareti; ψ , dalgacık fonksiyonunu(ana dalgacığı); $W(a, b)$ da işaretin sürekli dalgacık dönüşümünü belirtir. Ters dalgacık dönüşümü de

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (5)$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (6)$$

denklemlerle verilmektedir. Bu denklemlerde C_ψ , bir dalgacık sabitini olup seçilen dalgacık türüne bağlıdır ve

“uygunluk şartını” sağlamalıdır[1]. Şekil 3’te sistemlerde sık kullanılan bazı işaretlerin Fourier ve dalgacık dönüşümleri görülmektedir.



Şekil 3 Tipik bazı işaretlerin Fourier ve sürekli dalgacık dönüşümleri

2. AYRIK DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ

Sürekli işaretin ayırık analizinin gerçekleştirilmesi durumunda (Ayrık dalgacık dönüşümü – ADD) ise

ölçek ve dönüşüm parametrelerinin de ayırık kılınması gerekmektedir (Tablo 1).

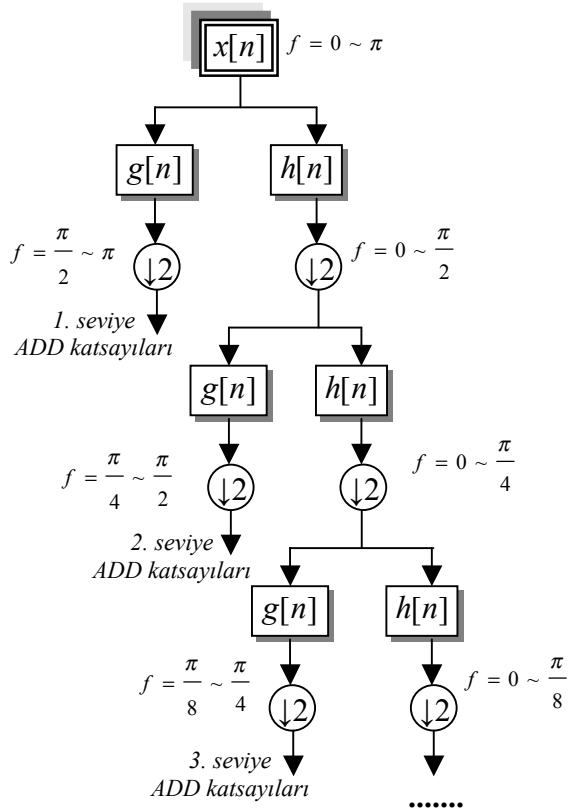
Tablo 1 Sürekli zaman işareti için sürekli ve ayırık analiz formülleri

Sürekli zaman işareti	
Sürekli analiz	Ayrık analiz
$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$	$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$
$a \in R^+ - \{0\}, \quad b \in R$	$a = 2^j, \quad b = k.2^j = k.a, \quad j, k \in Z^2$

ADD elde etmek için kullanılacak olan çoklu çözünürlük analizinde (ÇÇA); ayırık işarete ardışıl (iterasyon yoluyla) olarak alçak geçiren ile yüksek geçiren filtreler uygulanmakta ve ortaya çıkan işaretler 2 ile veri azaltmaya tabi tutulmaktadır. Şekil-4’de bu prosedür verilmekte olup $g[n]$ ve $h[n]$ sırayla yüksek geçiren ve alçak geçiren filtreleri belirtmektedir. Ayrıca Şekil 4’te; her bir seviye için frekans bantları da gösterilmektedir. Her bir seviyede bu prosedür;

$$\left. \begin{aligned} y_{yüksek}[k] &= \sum_n x[n].g[2k-n] \\ y_{alçak}[k] &= \sum_n x[n].h[2k-n] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

değerlerini hesaplamakta ve denklemlerde $h[N-1-n] = (-1)^n g[n]$ olup N , $x[n]$ in mevcut tüm örneklerinin sayısıdır.

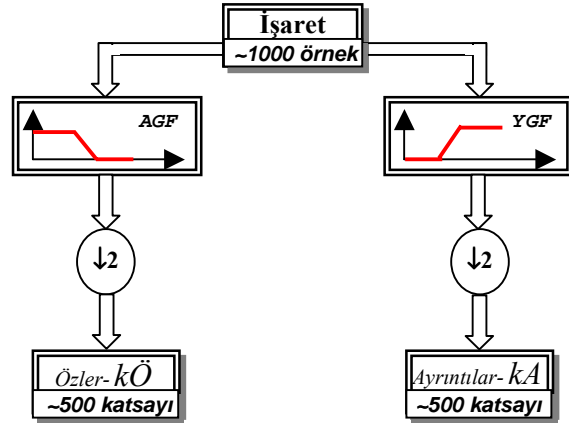


Şekil 4 ÇÇA ile ADD hesaplama

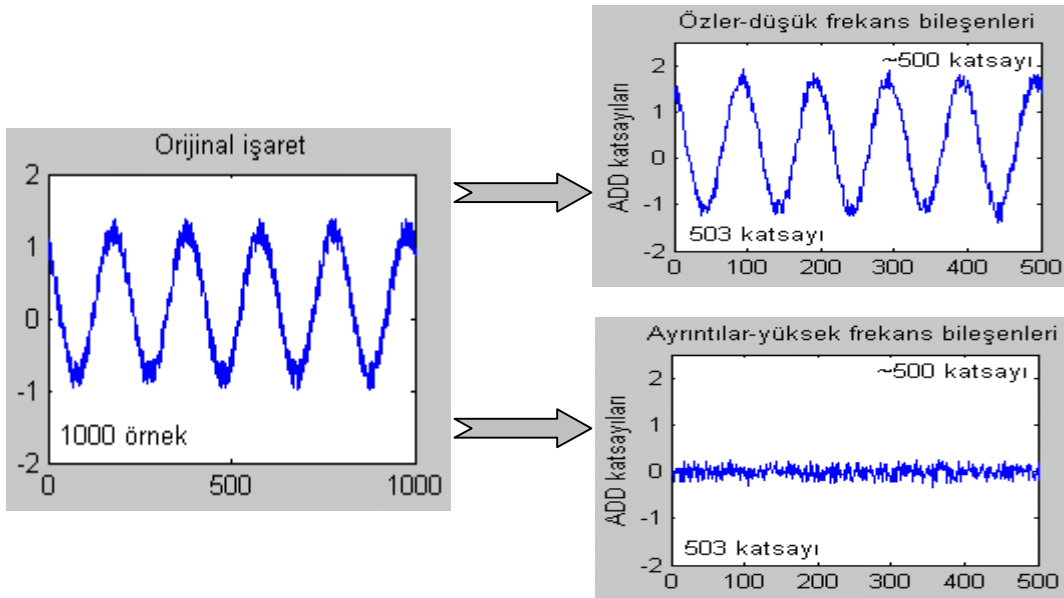
Elde edilen katsayılardan orijinal işaret ise anlatılan adımları ters yönde kurmakla veya

$$x[n] = \sum_k \left\{ \begin{array}{l} (y_{yüksek}[k].g[2k-n]) + \\ (y_{alçak}[k].h[2k-n]) \end{array} \right\} \quad (8)$$

denklemini hesaplamakla elde edilmektedir[2].



Şekil 5 Bir seviyeli, veri azaltmalı filtreleme işlemi blok diyagramı



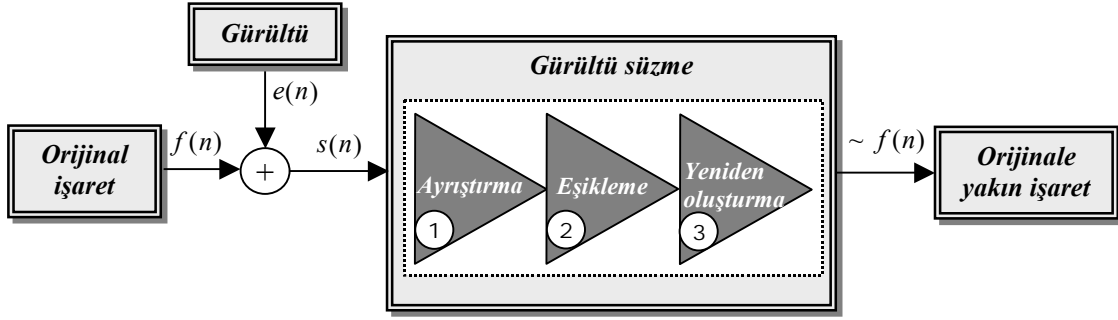
Şekil 6 Örnek işaretin 1. seviye ADD katsayıları

3. GÜRÜLTÜ SÜZME

Gürültülü işaret için düşünülen model aşağıdaki formdadır. Burada n zamanı, eşit aralıklara ayrılmıştır.

$$s(n) = f(n) + \sigma.e(n) \quad (9)$$

En basit modelde; $e(n)$ nin $N(0,1)$ de Gaussian beyaz bir gürültü olduğu, gürültü seviyesinin de $\sigma = 1$ olduğu varsayılacaktır. Gürültü süzmenin amacı, s işaretinin gürültülü kısmını bastırmak ve f 'i elde etmektir (Şekil 7).



Şekil 7 Gürültü süzme işlemi blok diyagramı

Gürültü süzme işlemi, üç aşamadan oluşur.

- i. **Ayrıştırma** : N . seviyeden bir dalgacık seçilir ve N seviyesinde s işaretinin dalgacık ayrışımı hesaplanır.
- ii. **Ayrıntı katsayıları için eşik değerini belirleme (eşikleme)** : 1'den N 'e kadar olan herbir seviye için bir eşik değeri seçilir ve ayrıntı katsayılarına uygulanır.

- iii. **Yeniden oluşturma** : N seviyesinin orijinal öz katsayıları ve 1'den N 'e kadar hesaplanan değiştirilmiş ayrıntı katsayıları kullanılarak işaret tekrar oluşturulur[3-4].

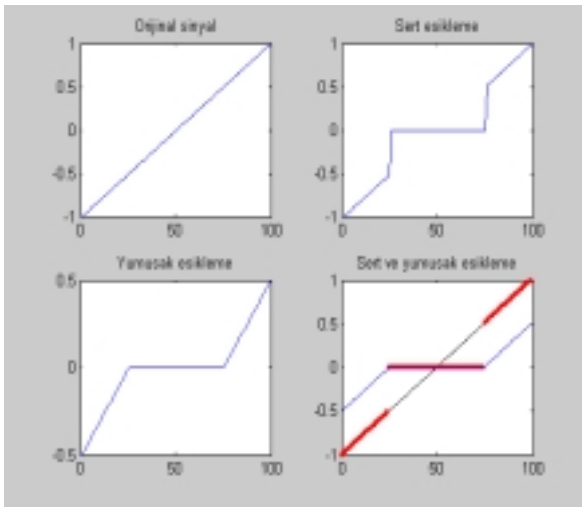
Gürültü süzmesini gerçekleştirecek olan yazılımın akış diyagramı Şekil 9'da, örnek gürültü süzme sonuçları da Şekil 10'da verilmektedir.

Burada eşik değerinin nasıl seçileceğinin ve bu değer performansının nasıl olacağını belirlemek önemli bir noktadır. Sert eşik değeri belirleme, en basit yöntemdir. Yumuşak eşik değeri belirleme ise bir sürü matematiksel özelliklere sahiptir ve bununla teoriye uygun sonuçlar elde etmek mümkündür. t eşikleme noktasını olmak üzere, $f(x)$ işareti için eğer

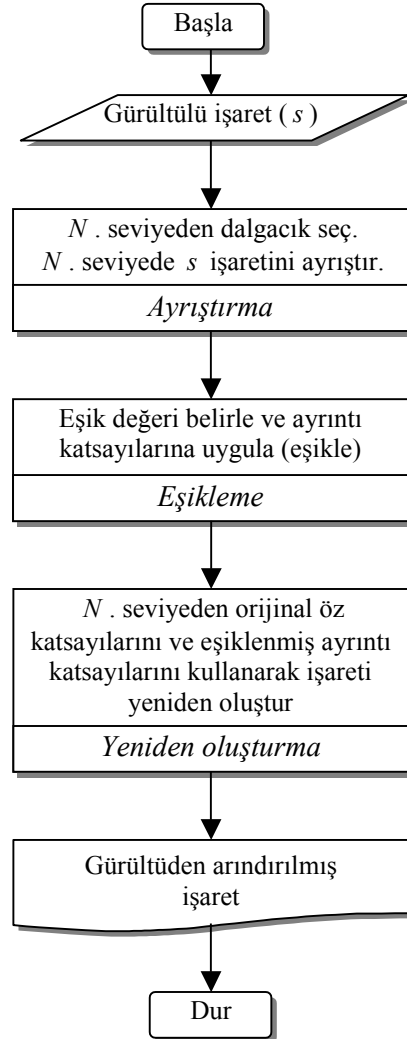
$$\text{eşikleme sert ise } \begin{cases} |x| > t \Rightarrow f(x) = x \\ |x| \leq t \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{yumuşak ise } \begin{cases} |x| > t \Rightarrow f(x) = \text{Sgn}(x)(|x| - t) \\ |x| \leq t \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases} \text{ dir.}$$

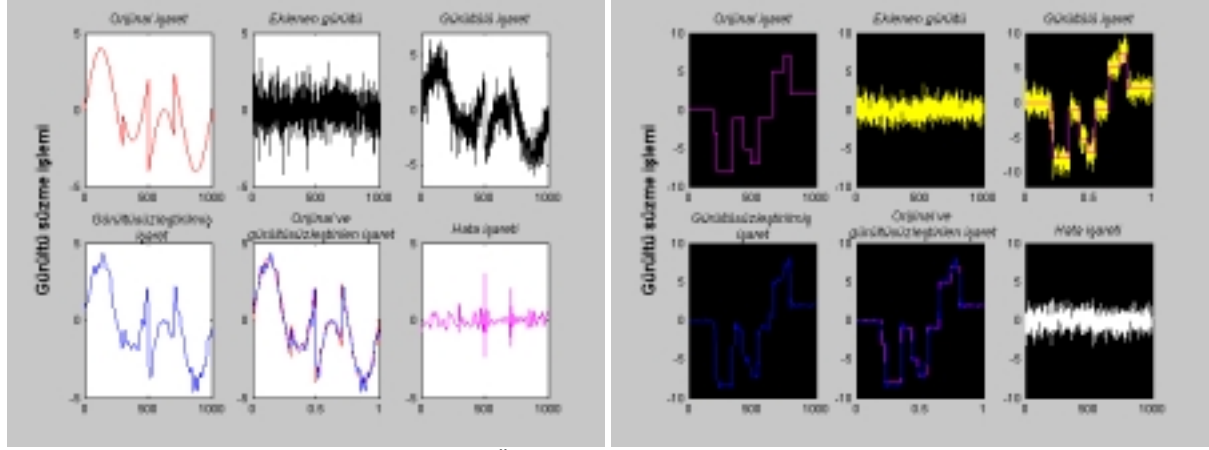
Sert ve yumuşak eşikleme; Şekil 8'de örnek bir işaret üzerinde karşılaştırılmalı olarak görülmektedir.



Şekil 8 Sert ve yumuşak eşikleme



Şekil 9 Gürültü süzme işleminin akış diyagramı



Şekil 10 Örnek gürültü süzme sonuçları

4. SONUÇ

Dalgacık dönüşümü, farklı pencereleme fonksiyonları ve asimetrik dalgacıklar kullandığından işareti tam olarak betimleyebilmektedir. Böylece işaret hakkında ayrıntılı bilgiye sahip olunmaktadır. Bundan dolayı dalgacık dönüşümü; işaret işleme(gürültü süzme, işaret gösterimi vs.), görüntü işleme(sıkıştırma, gürültü süzme vs.), haberleşme, biyomedikal, matematik, istatistik vb. alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada; ayrık dalgacık dönüşümü ile gürültü süzme işlemi örnek işaretler

üzerinde gerçekleştirilmektedir ve bu işlemin oldukça kolay ve verimli olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Jaideva C. Goswami, Andrew K. Chan, "Fundamentals of Wavelets", John Wiley&Sons, Inc.
- [2] R. Polikar, "The Story of Wavelets", IMACS / IEEE CSCC'99 Proceedings, 1999, pp. 5481-5486
- [3] www.mathworks.com
- [4] D. Donoho, "Denoising via Soft Thresholding", IEEE Tran. on Information Theory, Vol. 41, No:5, 1995, pp.613-627.