

TERS KAYNAK PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE YAPAY SİNİR AĞLARI İLE BİR YAKLAŞIM

Melek YILMAZ¹

Metin ŞENGÜL²

Melih GEÇKİNLİ³

^{1,2}Mühendislik Fakültesi , Kadir Has Üniversitesi, Cibali-Fatih 34230 İstanbul, Türkiye

³Enerji Enstitüsü, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak 34469 İstanbul, Türkiye

¹e-posta: : myilmaz@khas.edu.tr

²e-posta: msengul@khas.edu.tr

³e-posta: geckinli@itu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Ters ısı geçişi problemi, Poisson denklemi, Yapay sinir ağları, Kendinden organize olan haritalama yöntemi

ABSTRACT

In this work a basic inverse heat conduction problem of a simple 2-D model with steady state heat source is taken into view. The physical problem is for a square region with uniform thermophysical properties and a point heat source of unit magnitude. To obtain boundary data , temperature probes are placed at the midpoints of the sides of the square domain. The objective of the inverse problem is to estimate the coordinates of the point source with the least amount of data. Initially, the inverse problem is analyzed to determine the main causes that render the problem ill conditioned. As for the solution, among the methods that has been tried so far, the best results are obtained from a backpropagating ANN with four-probe data. When white Gaussian noise is added to the measurements, no catastrophic failure has been observed.

1. GİRİŞ

Isı denklemi, kolay anlaşılabilir basit bir fiziksel modele dayalı olması ve çözümleri için genel yöntemler geliştirilmiş olması nedeniyle, matematiksel fizik ders kitaplarının temel konularından birisini oluşturur. Ancak, ters sıfatıyla nitelendirilen ısı problemlerinin çözümü, doğrudan problemlerin çözümünün tam tersine, oldukça karmaşık ve beklenmeyen kötü sürprizlerle doludur. Doğrudan ısı geçişi probleminde, nedenler verilerek sonuç saptanmakta; ancak ters ısı geçişi probleminde sonuç verilerek, neden veya nedenlere ulaşılmaya çalışılmaktadır. Son yıllarda, ters ısı geçişi problemlerinin teorisine ve uygulamasına bilim ve mühendisliğin her dalından ilgi artmıştır. Makine, uzay, kimya ve nükleer enerji alanında çalışanlar,

matematikçiler, astrofizikçiler ve istatistikçiler , kendi uygulama alanları açısından bu tür problemi ele alarak, yakından ilgilenmektedirler

Bir problemin çözümü yakınsamayan bir seri ile ifade ediliyorsa veya birden fazla çözümü varsa, kötü kurulmuş veya ifade edilmiş problem olarak kabul edilir. Matematiksel olarak; standart ısı iletim problemleri iyi ifade edilmiş iken, ters ısı geçişi problemleri kötü ifade edilmiş olarak isimlendirilebilirler. İyi ifade edilmiş problemlerin Hadamard tarafından belirtilen şu üç özeliği sağlaması gerekmektedir. En az bir çözüm olmalıdır, çözüm tek olmalıdır, giriş verilerindeki küçük değişimler karşısında çözüm kararlı olmalıdır [1, 2].

Birçok fiziksel sistemin davranışı matematiksel olarak iyi kurulmuş problemler olarak modellenebilir. Çünkü, bu tür fiziksel sistemlerin belirli ortak karakteristikleri vardır; uzaysal-yerel alçak geçiren filtreleme özelliği listenin en üstünde yer alır [3]. Bu gözlemin sonucu olarak hemen söylenebilir ki, ilgili ters problemler yüksek geçiren filtreler içerir. Bunlar temel olarak, ölçülen giriş verilerinin yüksek frekanslı gürültü bileşenlerini güçlendirme eğilimindedirler, bu da, alışık olunan duruma tamamiyle zıttır. Bu durumu şöyle özetleyebiliriz; en önemli zorluk, ters problemlerin ölçüm hatalarına oldukça fazla duyarlı olmasından kaynaklanmaktadır, bu da doğal olarak çözümü kararsızlığa götürmektedir. Ters problemlerin bir diğer sorunu da şudur, doğrudan problemin çözümünün karşılığında oluşan durumda, giriş uzayındaki birçok farklı nokta çıkış uzayındaki aynı noktaya karşılık gelebilir, bu da iyi kurulmuş problem olmanın tek çözüme sahip olması ilkesini en azından yerel olarak bozar [4].

2. FİZİKSEL PROBLEM

Ele aldığımız problem, çalıştığımız birim kare bölgesinde homojen termofiziksel özelliklere sahiptir. Bölgemizin çevresine üçüncü tür homojen sınır koşulları uygulanmıştır. Nokta kaynağımız karenin içinde herhangi bir yerde bulunmaktadır. Sıcaklık ölçerler, karenin çevresinin dört kenarının tam orta noktalarına Şekil 1’de görüldüğü gibi yerleştirilmiştir. Bu problemin çözümü için Poisson denklemi yazılır:

$$k\nabla^2 T = -\rho(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (2.1)$$

Nokta kaynak:

$$\rho(x, y) / k = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.2)$$

Sınır koşulları

$$\beta_W \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = T(0, y), \quad 0 < y < 1 \quad (2.3.a)$$

$$\beta_E \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = -T(1, y), \quad 0 < y < 1 \quad (2.3.b)$$

$$\beta_S \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = T(x, 0), \quad 0 < x < 1 \quad (2.3.c)$$

$$\beta_N \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = -T(x, 1), \quad 0 < x < 1 \quad (2.3.d)$$

$$\beta_i = \frac{hL}{k}, \quad i = E, W, N, S \quad (2.4)$$

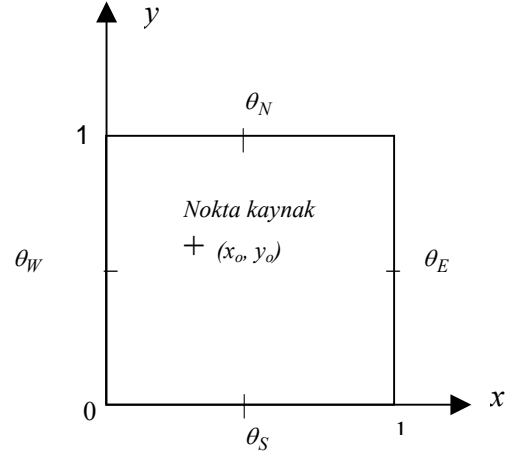
Burada, $T(x, y)$, yerel sıcaklık, k , ortamın ısı iletim katsayısı, h , ısı taşınım katsayısı, $L(=1)$, kare bölgenin bir kenarının uzunluğudur.

Düz problemin çözümü şu şekilde verilmektedir.

$$T(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 G(x, y; u, v) \rho(u, v) du dv \quad (2.5)$$

Diğer taraftan bir boyutlu problemde olduğu gibi, Green Fonksiyonu iki boyutlu özfonksiyonlar ile bir seriye açılabilir[2].

$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_j \sum_i \frac{\varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_i(x_0) \varphi_j(y_0)}{-(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)} \quad (2.6)$$



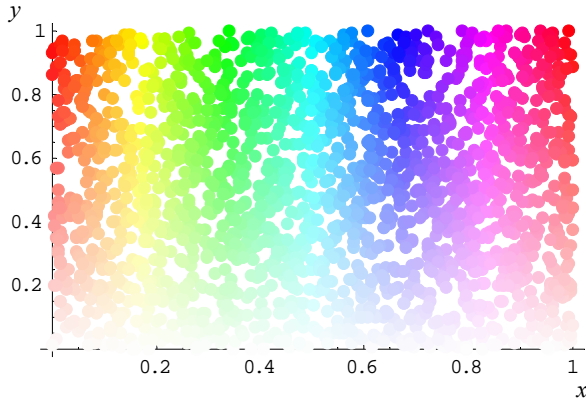
Şekil 1: Isı geçişi probleminin uygulandığı bölge ve sınırı; T_i sınırdaki sıcaklık ölçümlerini temsil etmektedir.

Çözümü istenen ters problem şu şekilde tanımlanmıştır. Verilen nokta kaynak koordinatları $X = \{x_0, y_0\} \in \mathbb{R}^2, [0,1]^2$ için sınır sıcaklık ölçümleri $T = \{T_E, T_N\} \in \mathbb{T}^2$ hesaplanabilir. Doğrudan ısı geçişi problemi (DIGP) eşleme olarak tanımlanabilir: (DIGP): $(X \rightarrow T \mid x_0, y_0 \in [0,1])$ şeklindedir ve bire-bir değildir. Şekil 2-a’ da daha sonra YSA eğitiminde kullanılmak üzere gelişigüzel seçilen kaynak koordinatları görülmektedir. Şekil 2-b bu koordinatlara karşılık gelen (T_E, T_N) sıcaklık değerlerini göstermektedir. Kare şeklindeki alan aşırı derecede deforme olmaktadır. Bu doğrusal olmayan eşleşme esnasında bir miktar bilgi de kaybolmaktadır. Bu problemin üstesinden gelmek için, ölçülen sıcaklık verileri sayısının ikiden dörde çıkarılması uygun olmaktadır.

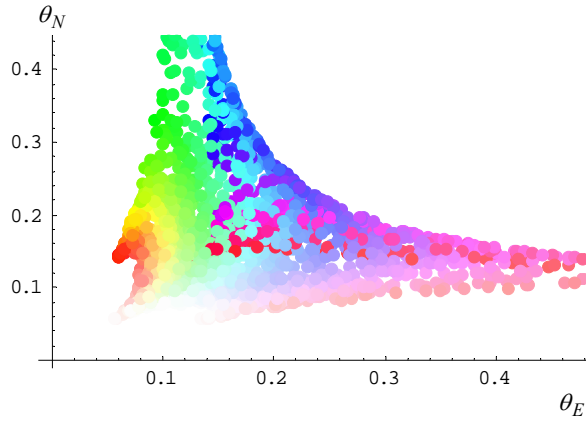
3. ÇÖZÜM

Problemi yapay sinir ağları yöntemi ile çözerken, gizli katmanda hiperbolik tanjant ve çıkış katmanında tek kutuplu sigmoid (lojistik) fonksiyonları, aktivasyon fonksiyonları olarak kullanılmıştır. Eğitim ve test amaçlı rastgele üretilen 2000’lik veri seti kullanılmıştır. Bu set, Şekil 2.a’da gösterildiği gibi, rastgele seçilen koordinatlarla üretilen verilerdir. Bu setin birinci yarısı eğitim için, diğer yarısı ise anında değerlendirme testi için kullanılmıştır. Eğitim, öğrenmenin bittiği ve ezberlemenin başladığı anda kesilmiştir. Yapay sinir ağları, $\mathbb{R}^2 [0,1] \leftarrow \mathbb{T}^2$ şeklindeki ters eşlemeyi öğrenmede başarısız olduğu için, $\mathbb{R}^2 [0,1] \leftarrow \mathbb{T}^4$ şeklindeki eşleme üzerinde durulmuştur. Bu iş için konfigürasyonu $4 \times 10 \times 2$ olan bir YSA, geriye yayma yöntemiyle eğitilmiştir. Doyuma ulaşan düğümler hata sinyalinin geriye yayılmasını önledikleri için öğrenme durur (paraliz olayı). Bu durumu önlemek için, türevin sifıra yakın olduğu düğümlerde, türeve küçük pozitif değer ilave

edilir. Eğitim süresince yakınsamada olabilecek salınımları söndürmek için momentum yöntemi kullanılmıştır.



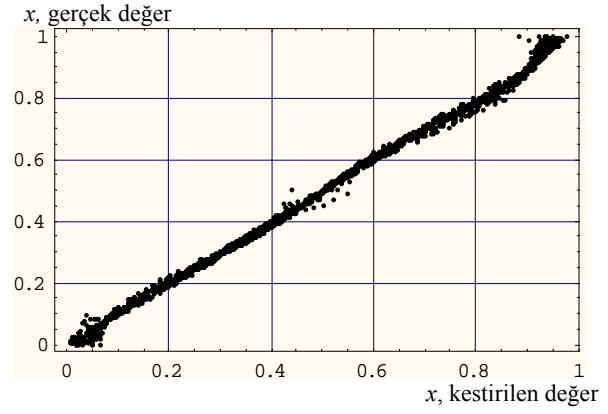
Şekil 2.a) Kare bölge üzerinde nokta kaynağın koordinatlarının gelişigüzel seçimi.



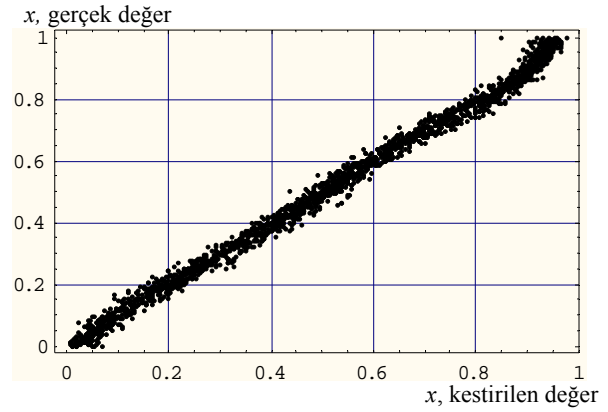
Şekil 2.b) T^2 uzayında Şekil 2-a'daki nokta kaynaklara karşılık ölçülen sıcaklık değerleri.

YSA'na giriş olarak dört adet sıcaklık ölçüm değerleri ve çıkışta hedef değer olarak nokta kaynağa ait koordinat değerleri uygulanmıştır. Eğitim için 75000 devir (1 devir=1000 iterasyon) gerekmiştir. Sonuçların gürültüye karşı dayanıklılığını görmek için giriş verilerine %5, %10 ve %20 oranında beyaz gürültü katılmıştır [5].

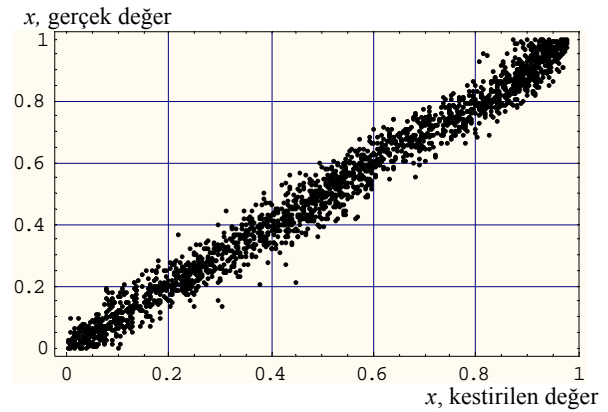
Şekil 3'teki grafiklerden görülebileceği gibi, sonuçlar gürültü seviyesi ile orantılı olarak bozulmaktadır.



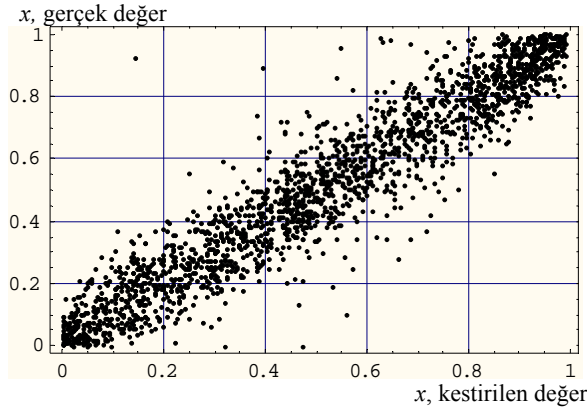
Şekil 3-a) Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, aynı tip verilerle değerlendirilmesi.



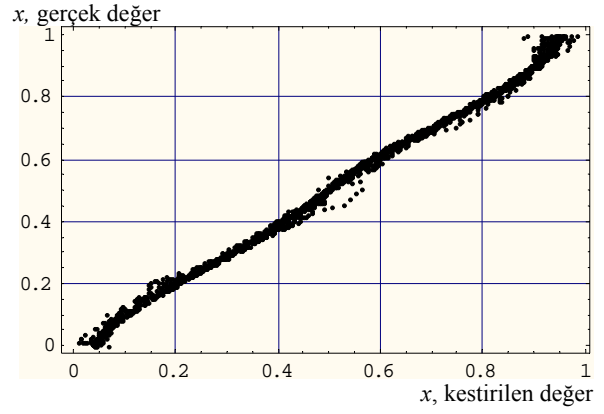
Şekil 3-b) Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi.



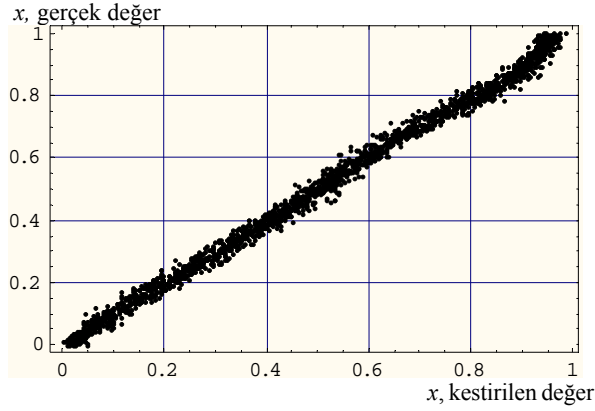
Şekil 3-c) Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi.



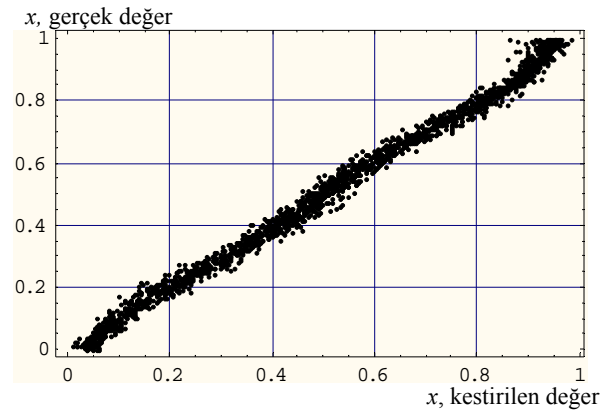
Şekil 3-d) Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, ($\sigma = \%20$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi.



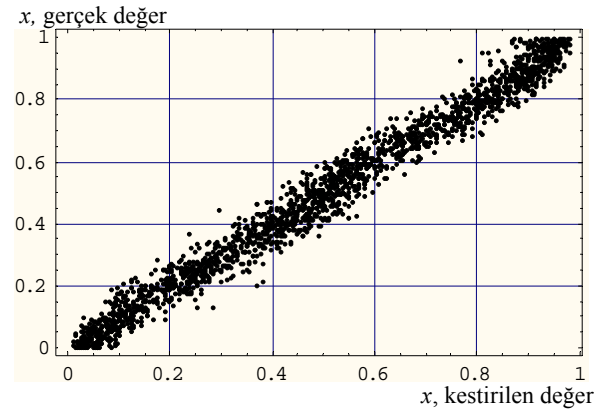
Şekil 3-g) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, hata içermeyen verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.



Şekil 3-e) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, aynı tip verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.



Şekil 3-h) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.



Şekil 3-f) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, aynı tip verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.

Tablo 1'de , eğitilmiş YSA' larının ölçüm gürültüsüne karşı hesaplanan σ (varyans) değerleri görülmektedir. Tablo 2'de de, %10 hata sınırları içinde kabul edilebilir başarı yüzdeleri görülmektedir.

Tablo 1. Eğitilmiş YSA'nın ölçüm gürültüsüne karşı toleransı

		Test verilerine katılan gürültü, σ			
		0%	5%	10%	20%
Eğitim verilerine katılan gürültü	0%	0.0223	0.0333	0.0627	0.1300
	5%		0.0302		
	10%	0.0250	0.0345	0.0611	
	20%				

Tablo 2. $|\Delta x|, |\Delta y| = 0.1$ kabul edilebilir hata sınırları içinde başarı yüzdeleri

		Test verilerine katılan gürültü, σ			
		0%	5%	10%	20%
Eğitim verilerine katılan gürültü	0%	99	99	89	55
	5%		99		
	10%	99	99	89	
	20%				

4. YORUM VE TARTIŞMA

Yapılan çalışmanın sonuçları için şunlar söylenebilir. Ters eşleme tek değilse YSA öğrenemez. Sınır verilerinin sayısı artırıldığında, YSA' larından ters problemi öğrenmesi beklenebilir. Başlangıçta, YSA hatasız verilerle eğitildi ve test edildi. Bunun amacı YSA' larının neler yapabileceğini görmektir. Green fonksiyonları yardımı ile bir seri şeklinde ifade edilen çözüm, kenarlarda iyi yakınsamaktadır. Bu nedenle, grafiklerin köşelerine gidildikçe, doğrusallıktan sapma gözlenmektedir. Giriş verilerine eklenen gürültü miktarıyla orantılı olarak saçılmalarda artış görülmektedir. Eğitimin gürültülü verilerle yapılmasının, gürültüsüz verilerle yapılmasına kıyasla biraz daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Eğitim gürültülü verilerle yapılırken, YSA lokal minimuma takılmaz, ve global minimumu daha kolay yakalar ve hata yüzeyi daha düzgün olur [6]. Ayrıca eğitim sırasında giriş verileriyle beraber çıkışta uygulanan talep verilerine de gürültü ilavesinin ezberlemeyi veya aşırı öğrenmeyi önlediği bilinmektedir.

5. SONUÇ

Oldukça basit ve doğrusal bir ters ısı geçişi problemi ele alındı ve problemin çeşitli çözümleri incelendi. Örnek olarak seçilen iki boyutlu sürekli rejim ısı geçişi problemi, içinde noktasal ısı kaynağı bulunan üniform bir kareden oluşmaktadır. Karenin kenarlarına III. tip sınır koşulları uygulanmıştır. Doğrudan ısı geçişi problemimiz Poisson denklemi ile ifade edilir. Ters ısı geçişi probleminde ise amacımız, karenin dört kenarında bulunan sıcaklık ölçerler yardımıyla elde edilen sıcaklık değerlerini kullanarak, karenin içinde bulunan ısı kaynağının konumunun tespit edilmesidir. Eğer ölçüm değerlerimiz mükemmel olsaydı, ters problemin çözümü ilginç olmayacaktı. Rastgele ölçüm hatalarının daima var olduğu kabul edilerek, ölçüm verilerine bir miktar gürültü ekleyerek ulaşılan sonuçların ne şekilde bir değişime uğradığı gözlemlenmeye çalışıldı. Çözüm için denenen metodlar içinde en iyi sonuç yapay sinir ağları ile elde edildi; kendinden organize olan haritalama yönteminde ise, topoloji korunmadığı için istenilen sonuçlara ulaşılamadı.

KAYNAKLAR

- [1] Özişik, M.Necati, Helcio, R.B., 2000. Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications, New York: Taylor & Francis.
- [2] Haberman, R., 1987. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Department of Mathematics, Southern Methodist University. Englewood Cliffs; N.J.: Prentice-Hall.
- [3] Shenefelt, J.R., Luck, R., Taylor, R.P., Berry, J.T., 2002. Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction, International Journal of Heat and Mass Transfer, 45, 67-74.
- [4] Hensel, E., 1991. Inverse Theory, Applications for Engineers, Prentice-Hall.
- [5] Yılmaz, M., Şengül, M., Geçkinli, M., 2003. On the Inverse Source Problem of the Poisson Equation, International Conference on Signal Processing, ÇOMÜ, Çanakkale, September 24-26.
- [6] Reed, R.D., Marks, R.J., 1999. Neural Smoothing: Supervised Learning in Feedforward Artificial Neural Networks, The MIT Press.