

YÜKSEK DERECELİ EVRİMSEL İZGE ANALİZİ

Mahmut YALÇIN

Aydın AKAN

İstanbul Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Avcılar, 34850 İstanbul
e-posta: {myalcin,akan}@istanbul.edu.tr

Anahtar Kelimeler: Zaman-frekans analizi, Evrimsel izge, En küçük kareler yöntemi, Gabor açılımı.

ABSTRACT

Bu çalışmada, durağan olmayan işaretlerin zaman-frekans izgelerinin bulunması için, yüksek dereceli bir yöntem sunulmaktadır. Bu yöntem, çok pencereli Gabor açılımı kullanılarak hesaplanan evrimsel izgelerin optimal birleşimi üzerine dayanmaktadır. Optimal ağırlık katsayıları, en küçük kareler kestirim yöntemi kullanılarak bulunmaktadır. Bu katsayılar, referans olarak alınan yüksek dereceli polinomsal zaman-frekans dağılımı ile evrimsel izgelerin birleşimi arasındaki hatanın en küçük yapılması sonucu bulunmaktadır. Önerilen yöntemin etkinliği örneklerle gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

Durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen frekans içeriği, zaman-frekans (ZF) analizi için yardımcı bir araçtır [1]. Durağan olmayan rasgele süreçlerin zamana bağlı izgesel analizi için Wigner-Ville İzgesi (WVİ) [2]

$$S(t, \omega) = E \{W(t, \omega)\} \\ = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}$$

şeklinde verilmektedir, burada $W(t, \omega)$, Wigner dağılımını gösterir ve yukarıdaki sürecin gerçekleştirilmesi, Wigner Dağılımının istatistiksel ortalamasıdır. Durağan olmayan $x(t)$ sürecinin birkaç gözlemine sahip olduğumuzda WVİ'ni kestirmek için, bu gözlemlerin birbirinden bağımsız Wigner dağılımlarının topluluk ortalaması kullanılabilir. Bununla birlikte, bu genel bir durum değildir; sürecin yalnız bir tek gerçekleşmesi verilirse, WVİ'ni kestirmek için yumuşatılmış çekirdek fonksiyonları ile zaman-frekans dağılımı kullanılır [1]. Yansız ve düşük değişintili WVİ kestirim özelliklerine sahip çekirdek dizayn etmek için bir çok araştırma yapılmıştır [4, 2]. En küçük kareler anlamında sürecin çok pencereli spektrogramlarının optimal ortalaması kullanılarak WVİ kestirimi için yeni bir kestirim sunulmaktadır [5, 6]. Bu çalışmada, ayrık evrimsel dönüşüm ile çok pencereli

evrimsel izgenin ağırlıklı ortalamaları birleşimi için WVİ kestirimi genişletilmektedir [9]. Birleştirilmiş ağırlıklar, ortalama evrimsel izge ve yüksek dereceli zaman-frekans gösterimi arasındaki toplam karesel farkın en küçük yapılması ile elde edilir.

Yüksek dereceli zaman-frekans yöntemlerine gösterilen ilgi artmaktadır. Zamanla değişen yüksek dereceli izge (ZD-YDİ) sınıflarından biri de PWVD'ye dayanır [13, 14, 16]. Yüksek dereceli zaman-frekans yöntemleri doğrusal ve Gauss olmayan işaretlerin analizinde kullanışlıdır. Yüksek dereceli istatistikler kullanılarak zamanla değişen izge kestirimi için bir çok yöntem sunulmuştur. Polinomsal FM işaretleri için, PWVD'nin delta fonksiyonlarını yoğunlaştırabildiği gösterilmiştir (ikiden daha yüksek olabilecek polinomlar ile anlık fazı modellenmiş işaretlerdir)[14]. Durağan olmayan rasgele işaretlerin yüksek dereceli izgesel analizini gerçekleştiren bir araç olan ZD-YDİ son zamanlarda geliştirilmiştir. Durağan olmayan, doğrusal olmayan, Gauss olmayan işaretlerin analizinde genel bir araç olarak ZD-YDİ zaman-frekans analizi, yüksek dereceli izgeyi sağlayan melez tekniklerin kümesi olarak büyümüştür. Durağan olmayan rasgele $x(t)$ işareti için PWVD'nin beklenen değeri

$$S^{(k)}(t, \omega) = E\{W^{(k)}(t, \omega)\} \quad (1)$$

denklemleri ile tanımlanmıştır. Eğer beklenen değer operatörü ile integral yer değiştirirse ZD-YDİ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$S^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E \prod_{l=1}^{k/2} x(t + h_l \tau) x^*(t + h_{-l} \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

ZD-YDİ'nin dördüncü derece üyesine Wigner-Ville Üçüz izgesi [16] denir ve

$$m_x^{(4)}(t, \tau) = E \left\{ \left[x\left(t + \frac{\tau}{4}\right) \right]^2 \left[x^*\left(t - \frac{\tau}{4}\right) \right]^2 \right\} \quad (2)$$

dördüncü derece moment olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$MWVT^{(4)} = \int m_x^{(4)}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

¹Bu çalışma, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No. : B-1080/27062001.

[5, 6]'da yazarlar, sürecin çok pencereli spektrogramlarının optimal ortalaması olarak yeni bir WVİ kestirimi önerdiler. Bu çalışmada, WVİ kestirimi Ayrık Evrimsel Dönüşüm kullanılarak elde edilen evrimsel izgelerin optimal birleşimi olarak genişletilecektir [9]. Burada en küçük kareler, evrimsel izge kestirim yöntemi sunulacaktır. Optimal birleşim katsayıları, referans bir zaman-frekans dağılımı ile çok pencereli izge kestirimi arasındaki karesel hatanın en küçük yapılmasıyla bulunmaktadır.

2. ÇOK PENCERELİ EVRİMSEL İZGE ANALİZİ

Bir zaman-frekans (ZF) analiz yöntemi olan Evrimsel İzge (Eİ) yaklaşımı rasgele durağan sinyallerin izgesel gösterimine benzeyen, ancak zamanla değişen bir sinyal gösterimine dayanır [10, 11]. Bu Wold-Cramer gösterimine göre durağan olmayan sinyaller, rasgele ve zamanla değişen genlik ve faza sahip sinüsoidallerin birleşimi olarak gösterilebilirler [10]. Buna paralel olarak, ayrık zamanlı, sonlu uzunlukta bir $x(n)$ işareti, zamanla değişen genlikli sinüsoidallerin birleşimi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir [3]:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K-1} X(n, k) e^{jn\omega_k} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4)$$

burada $\omega_k = 2\pi k/K$. Ayrıca $x(n)$ işaretinin evrimsel izgesi $S_{EI}(n, k) = \frac{1}{K} |X(n, k)|^2$ şeklinde verilir ve kestirimi için çeşitli yöntemler önerilmiştir [3]. Eİ kestirimi veya $x(n)$ sinyalinin modellenmesi için gerekli olan $X(n, k)$ çekirdek işlevi [3]'de çok pencereli Gabor katsayıları kullanılarak elde edilmiştir.

Bir ZF açılım veya gösterim yöntemi olan Gabor açılımı, sinyalleri ZF atomu denen ve zamanda ve sıklıkta öteleme ile elde edilen taban işlevlerinin birleşimi olarak ifade eder [3]. Gabor açılımı sinyal analizi alanında çok çeşitli uygulamalarda başarıyla kullanılmaktadır. Taban işlevleri $h_{m,k}(n)$ sabit bir $h(n)$ pencere işlevinin zamanda eşit aralıklarla ötelenmesi ve düzgün aralıklarla sinüsoidal modüle edilmesiyle elde edilir. Bunun sonucunda ZF düzleminde düzgün ve dikdörtgen bir örnekleme kafesi kullanılmış olur. Ancak çözümlenmek istenen sinyal, böyle sabit genişliği ile modellenemiyor ise (sinüsoidal bileşenlerin toplamından oluşmuyor ise) bu sinyalin Gabor gösterimi yetersiz bir ZF yerleşmesi sergileyecektir. Çünkü, sinyalin gösteriminde gereğinden fazla Gabor katsayısı kullanılacaktır. Pratikte karşılaşılan birçok sinyal (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen sıklık özellikleri gösterir ve bu sinyaller klasik Gabor analizi için uygun değildir.

Çok pencereli Gabor açılımı, sonlu uzunlukta bir $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ işareti için [3]

$$x(n) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k} \tilde{h}_{i,m,k}(n) \quad (5)$$

olarak verilmiştir. Burada kullanılan taban fonksiyonları

$$\tilde{h}_{i,m,k}(n) = \tilde{h}_i(n - mL) e^{j\omega_k n} \quad (6)$$

$\tilde{h}_i(n)$ ölçeklenmiş ve periyodik hale getirilmiş ($\tilde{h}_i(n) = h_i(n + rN)$, r tamsayı) sentez penceresi olup birim enerjiye sahip bir ana Gabor penceresinden

$$h_i(n) = 2^{i/2} h(2^i n), \quad i = 0, 1, \dots, I-1$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada I kullanılan pencere sayısını göstermekte, M , K , L , L' pozitif tamsayıları $ML = KL' = N$ şartını sağlamaktadır. M ve K sırasıyla zaman ve frekanstaki örnek sayılarını, L ve L' ise zaman ve frekans adımlarını göstermektedir. Çok pencereli Gabor katsayıları

$$a_{i,m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tilde{\gamma}_{i,m,k}^*(n) \quad (7)$$

ile elde edilir ki burada $\tilde{\gamma}_{i,m,k}(n) = \tilde{\gamma}_i(n - mL) e^{j\omega_k n}$ ve $\tilde{\gamma}_i(n)$ analiz penceresi $\tilde{h}_i(n)$ 'e ikili dik olacak şekilde hesaplanır [3]. Eİ kestirimi (4) ve (5) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} X(n, k) &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k} \tilde{h}_i(n - mL) \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} X_i(n, k) \end{aligned} \quad (8)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (7)'deki Gabor katsayıları yukarıda yerine konarak,

$$X(n, k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) w(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \quad (9)$$

elde edilir ki burada $w(n, \ell)$ zamanla değişen pencere fonksiyonu

$$\begin{aligned} w(n, \ell) &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} w_i(n, \ell) \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{\gamma}_i^*(\ell - mL) \tilde{h}_i(n - mL) \right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra Eİ hesabı (9) eşitliği kullanılarak veya (8)'deki $X_i(n, k)$ farklı ortalama yöntemleri ile birleştirilerek elde edilir. Ancak analiz edilen sinyal zamanla değişen sıklık özellikleri gösteriyor ise, çok pencere ile yapılan bu sinüsoidal analizlerin ortalamasıyla elde edilen Eİ de yeterli bir ZF çözünürlüğü veremeyecektir.

3. YÜKSEK DERECELİ EN KÜÇÜK KARELER EVRİMSEL İZGE

Toplamsal gürültü ile bozulmuş ayrık zamanlı durağan olmayan sürecin gerçekleştirilmesinde $x(n) = s(n) + \eta(n)$; $s(n)$ ve $\eta(n)$ sırasıyla işaret ve gürültü

işlevlerini göstermektedir. Düşük işaret/gürültü oranında bile, iyi bir performansla yüksek çözünürlüklü evrimsel izge kestirimi elde etmek istenmektedir. En küçük kareler anlamında referans zaman-frekans dağılımına yakın olan evrimsel izgenin, $S_i(n, \omega_k)$, ağırlıklandırılmış ortalama birleşimi hesaplanır. Verilen $x(n)$ işaretinin $i = 0, 1, \dots, I-1$ için evrimsel izgeleri, $S_i(n, \omega_k)$, hesaplanır:

$$S_i(n, \omega_k) = \frac{1}{K} \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) W_i(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \right|^2 \quad (10)$$

Zaman-frekans düzleminde, pencerelerin optimal yoğunlaşması için $h_i(n)$, Gauss pencereleri olarak kullanılır [12]. Böylece, evrimsel izgelerin ağırlıklı ortalaması olarak $x(n)$ sürecinin WVİ'si şu şekilde kestirebilir:

$$\hat{P}(n, \omega_k) = \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \quad (11)$$

burada $\{c_i\}$ ağırlık katsayıları, hata fonksiyonunu en küçük yapacak şekilde hesaplanacaktır:

$$\varepsilon_i = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left| P_R(n, \omega_k) - \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \right|^2 \quad (12)$$

Referans olarak alınan zaman-frekans dağılımı, $P_R(n, \omega_k)$, işaretin yüksek dereceli zaman-frekans gösterimidir [13].

Matris gösterimi kullanarak en küçük yapma problemi (9)'ten tekrar şu şekilde yazılabilir:

$$\min_{c_i} \|\mathbf{P}_R - \mathbf{S} \mathbf{c}\|^2 \quad (13)$$

Bu en küçük kareler, en küçültme sorunu

$$\mathbf{c}^o = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_R$$

olarak çözülür, burada ' ' üst simgesi en iyi temsil etmektedir. WVİ kestirimi ile elde edilen uygun ağırlık katsayıları, $\{c_i^o\}$, şu şekilde bulunur:

$$\hat{P}_{ES}(n, \omega_k) = \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \quad (14)$$

Sonuçta, önerdiğimiz Wigner-Ville İzge kestirimi $\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)$ 'te, negatif c_i^o katsayılarının sebep olduğu muhtemel negatif terimleri maskeleyerek veya belli bir eşik referansla karşılaştırarak negatif olmayan zamanla değişen izge elde edilmektedir:

$$\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)^+ = \begin{cases} \hat{P}(n, \omega_k), & \hat{P}(n, \omega_k) \geq 0; \\ 0, & \hat{P}(n, \omega_k) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

burada $\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)^+$ evrimsel izgenin yalnız pozitif kısımlarını gösterir.

4. BENZETİM SONUÇLARI

Önerilen yöntemin performansını göstermek için farklı hızlarda iki çırp işareti üretildi. Şekil 1'de 4. dereceden zamanla değişen yüksek dereceli izge veya Moment Wigner-Ville Üçüz İzgesi gösterilmiştir [13]. Bu yüksek dereceli dağılım yüksek çözünürlüğe sahiptir, fakat iki oto bileşen arasında negatif terimlere ve girişim terimlerine sahiptir. Yönetimimizde referans zaman-frekans dağılımı olarak, yukarıdaki zamanla değişen yüksek dereceli izgeyi kullanılarak en küçük kareler evrimsel izge kestirimi, $\hat{P}(n, \omega_k)^+$, Şekil 2'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, her zaman pozitif ve çok pencereli evrimsel izge ile referans zaman-frekans dağılımının avantajlarını taşımaktadır.

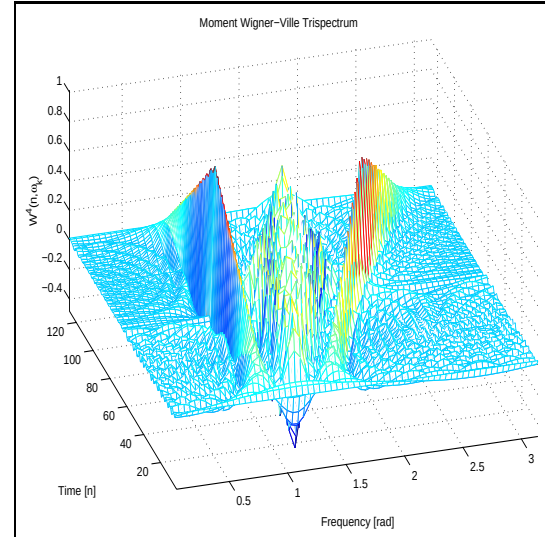
5. SONUÇ VE YORUMLAR

Bu çalışmada, durağan olmayan işaretlerin evrimsel izgesini kestirmek için, en küçük kareler yaklaşımını kullanan yeni bir yöntem önerildi. Önerilen yöntem, ayrık evrimsel dönüşümünü kullanarak hesaplanan evrimsel izgelerin optimal birleşimine dayanmaktadır. Burada optimal ağırlıklar, evrimsel izgelerin birleşimi ile referans olarak alınan bir zaman-frekans dağılımı arasındaki (burada yüksek dereceli bir zaman-frekans dağılımı alınmaktadır) hatanın kareleri toplamının en küçük yapılması ile bulunmaktadır. Örnekler, yeni yöntemin çok pencereli evrimsel izge analizinin negatif olmama gibi, yüksek dereceli zaman-frekans dağılımının da yüksek çözünürlük gibi avantajlarını birleştirdiğini göstermektedir.

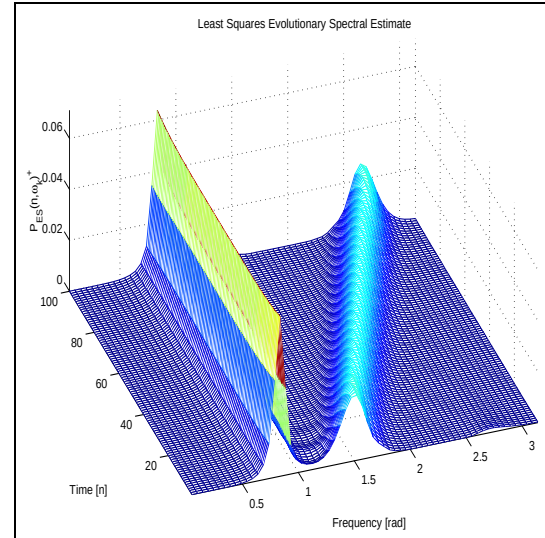
KAYNAKLAR

- [1] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [2] Martin, W., and Flandrin, P., "Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes," *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 33, No. 6, pp. 1461-1470, Dec. 1985.
- [3] Akan, A., and Chaparro, L.F., "Multi-window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis," *Signal Processing*, Vol. 63, pp. 249-262, Dec. 1997.
- [4] Jones, D.L. and Baraniuk, R.G., "An Adaptive Optimal-Kernel Time-Frequency Representation," *IEEE Trans. on Signal Process.*, Vol. 43, No. 10, pp. 2361-2371, May 1995.
- [5] Bayram, M., and Baraniuk, R.G., "Multiple Window Time-Frequency Analysis," *IEEE SP Intl. Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, TFTS'96*, Paris, France, pp. 173-176, Jun. 1996.
- [6] Cakrak, F., and Loughlin, P., "Multiwindow Time-Varying Spectrum with Instantaneous Bandwidth and Frequency Constraints," *IEEE Trans. on Signal Process.*, Vol. 49, pp. 1656-1666, Aug. 2001.

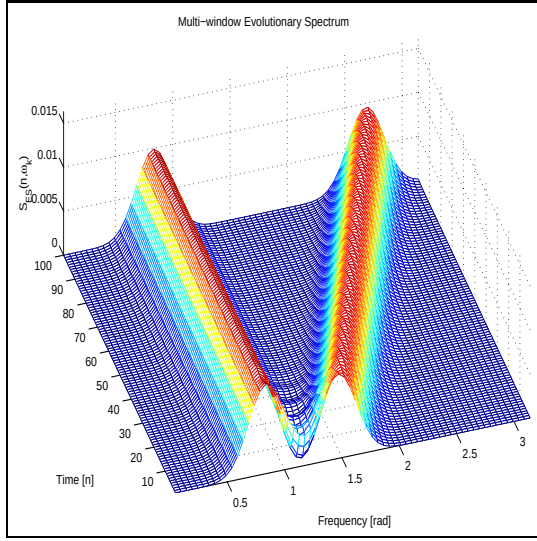
- [7] Akan, A., and Chaparro, L.F., "Evolutionary Chirp Representation of Non-stationary Signals via Gabor Transform," *Signal Processing*, Vol. 81, No. 11, pp. 2429-2436, Nov. 2001.
- [8] Priestley, M.B., *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*. Academic Press, London, 1988.
- [9] Suleesathira, R., Akan, A. and Chaparro, L. F., "Discrete Evolutionary Transform for Time-Frequency Signal Analysis," *J. Franklin Institute, Special Issue on Time-Frequency Signal Analysis and its Applications*, pp. 347-364, Vol. 337, No. 4, Jul. 2000.
- [10] Priestley, M.B., "Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes," *J. of Royal Statistical Society, B*, Vol. 27, No. 2, pp. 204-237, 1965.
- [11] Melard, G., and Schutter, A.H., "Contributions to Evolutionary Spectral Theory," *J. Time Series Analysis*, Vol. 10, pp. 41-63, Jan. 1989.
- [12] Balian, R., "Un principe d'incertitude fort en theorie du signal on en mecanique quantique," *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, Vol. 292, Serie II, pp. 1357-1362, Jun. 1981.
- [13] Boashash, B., and Ristic, B., "Polynomial Time-Frequency Distributions and Time-Varying Higher Order Spectra," *Signal Processing*, Vol. 67, pp. 1-23, 1998.
- [14] Boashash, B., and O'Shea, P.J., "Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra," *IEEE Trans. Signal Processing* Vol. 42 No. 1, pp. 216-220, January 1994.
- [15] Boashash, B., and Ristic, B., "A time-frequency perspective of higher order spectra as a tool for non-stationary signal analysis," *B. Boashash, E. J. Powers, A. M. Zoubir (Eds.), Higher Order Statistical Signal Processing*, Chapter 4, Longman, New York, 1996.
- [16] Boashash, B., and Ristic, B., "Analysis of FM signals affected by Gaussian AM using the reduced Wigner-Ville trispectrum," *Proc. Int. Conf. Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. IV-408-411, Mineapolis, Minnesota, April 1993.



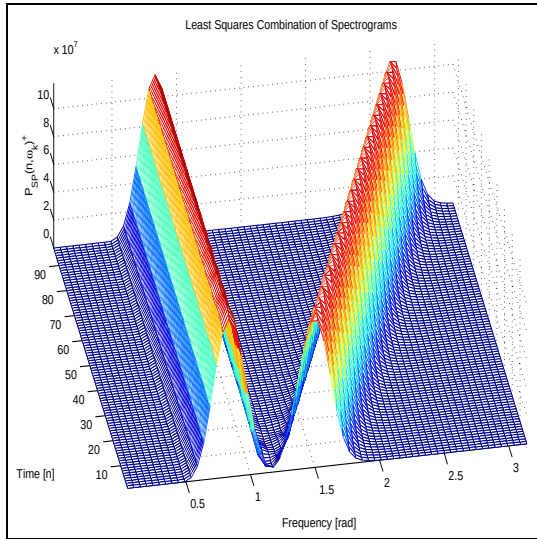
Şekil 1. İki çırpıtan oluşan işaretin Moment Wigner Ville Üçüz İzgesi.



Şekil 2. Çok Pencerele En Küçük Kareler Evrimsel İzge Kestirimi .



Şekil 3. Çok Pencereli Evrimsel İzge.



Şekil 4. Çakrak ve Loughlin'in Spektrogramların En Küçük Kareler Birleşimi .