

Farklı Yapıdaki Silindirik Dalga Kılavuzlarının Dispersiyon Eğrilerinin İletim Hattı Eşdeğerlikleri Yöntemi ile Elde Edilmesi

Ersoy Kelebekler¹

Namık Yener²

^{1,2}Kocaeli Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Bölümü, Kocaeli

¹e-posta: ersoy@kocaeli.edu.tr

²e-posta: nyener@kocaeli.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi kullanılarak dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için var olan tüm modların elde edilebildiği tam çözümlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir. Ek olarak, iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi kullanılarak plazma sütunü yüklü silindirik dalga kılavuzunda var olan plazma modları elde edilmiştir. Sonuçlar tam çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak yöntemin geçerliliği gösterilmiştir.

1. Giriş

Silindirik dalga kılavuzları mikrodalga uygulamalarında çok geniş bir kullanım alanına sahiptirler. Mikrodalga uygulamalarında en sık rastlanan bos silindirik dalga kılavuzları ve dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzları haricinde, anizotropik ortamla pertürbe edilmiş silindirik dalga kılavuzları da kullanılmaktadır. Kılavuzlanmış dalganın boş silindirik yapı içerisindeki davranışı teorik olarak pek çok elektromanyetik ve mikrodalga kitaplarında temel konulardan bir tanesi olarak yer alır[1,2]. Ayrıca koaksiyel hat[1] ve anizotropik ortamla yüklü silindirik dalga kılavuzları[2] bu kitaplarda yer alan özel konulardır. Ayrıca, özel olarak dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için dispersiyon eşitliği Clarricoats tarafından ve plazma sütunü yüklü silindirik dalga kılavuzları için dispersiyon eşitliği Yip ve Le-Ngoc tarafından ayrıntılı olarak sunulmuştur[3,4]. Bu çalışmada belirtilen yapılar için dispersiyon eğrileri iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi veya diğer adıyla Moment Metodu(MoM) kullanılarak elde edilmiştir ve tam dispersiyon eğrileri ile karşılaştırılarak yöntemin geçerliliği sınanmıştır.

İncelenen yapıların geometrisi gereği silindirik koordinat sistemi kullanılmıştır. Ortamlar kayıpsız ve kayıpsız ortam olarak kabul edilerek çözümler elde edilmiştir. Yapılara ait tam çözümler için alanların değişimi 1. denklemi şeklinde verilmektedir.

$$F(r, \varphi, z) = F(r)e^{j(kz + n\varphi - \omega t)} \quad (1)$$

Bölüm 2'de yapılara ait tam çözümler ile ilgili bilgi verilmiştir. Bölüm 3, Moment metodunun genel yapısından bahsetmektedir. Bölüm 4 nümerik karşılaştırmaları ve Bölüm 5 ise sonuçları içermektedir.

2. Farklı Yapılardaki Düzgün Silindirik Dalga Kılavuzları için Tam Çözümler

Boş silindirik dalga kılavuzu, dielektrik çubuk ile pertürbe edilmiş silindirik dalga kılavuzu, anizotropik sütun ile pertürbe edilmiş silindirik dalga kılavuzu gibi farklı yapılardaki düzgün silindirik dalga kılavuzlarına ait tam

çözümleri bulabilmek için elektrik ve manyetik alanın boyuna birleşenlerinin hesaplanması yeterlidir. Bu tür yapılarda enine alan birleşenlerini boyuna alan birleşenleri cinsinden yazmak mümkündür.

Farklı yapıdaki düzgün silindirik dalga kılavuzlarına ait tam çözümler aşağıda verilen sıra takip edilerek elde edilmiştir:

- Maxwell denklemleri kullanılarak enine alan birleşenlerinin boyuna alan birleşenleri cinsinden elde edilmesi
- Boyuna alan birleşenleri için dalga denklemlerinin elde edilmesi
- Boyuna alan birleşenlerinin çözüm fonksiyonlarının elde edilmesi
- Tüm alan birleşenlerinin, boyuna alan birleşenlerinin çözümleri cinsinden elde edilmesi
- Mevcut yapı için sınır koşullarının ve süreklilik koşullarının kurulması
- Mevcut yapı için tam çözümlerin elde edilmesi

2.1. Boş Silindirik Dalga Kılavuzu için Tam Çözüm

Silindirik koordinat sisteminde dalga denklemi, Bessel diferansiyel eşitliğine karşılık gelir ve çözümü birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarının toplamıdır. İkinci tip Bessel fonksiyonu $r=0$ noktasında sonsuza gittiğinden çözüm olarak alınmaz ve dalga denkleminin çözümü yalnızca birinci tip Bessel fonksiyonundan oluşur.

Boş silindirik dalga kılavuzu için dalga ilerleme yönünde elektrik alan birleşenine ($E_z=0$) sahip olmayan; enine elektrik çözümleri (TE modları) veya dalga ilerleme yönünde manyetik alan birleşenine ($H_z=0$) sahip olmayan; enine manyetik çözümleri (TM modları) mevcuttur. Boş silindirik dalga kılavuzunun çözümleri, farklı yapılardaki silindirik dalga kılavuzlarının yarı analitik çözümlerinin elde edilmesinde açının özfonksiyonları olarak kullanılacağı için çalışmamız açısından oldukça önemlidir.

2.2. Dielektrik Çubuk Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu için Tam Çözüm

Literatürde dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Bu yapı için geriye doğru dalgaların varlığı teorik olarak gösterilmiştir ve farklı modlar için incelenmiştir[3]. Bu yapı için kompleks modların varlığı ilk olarak Clarricoats ve Taylor tarafından öngörülmüştür ve bu modlar farklı çalışmalarda incelenmiştir[5].

Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu içerisinde dielektrik geçirgenlik (ϵ) ifadesi aşağıda verilmektedir:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0 \epsilon_d & 0 \leq r \leq b \\ \epsilon_0 & b < r < a \end{cases} \quad (2)$$

Burada, ϵ_0 serbest uzayın dielektrik geçirgenliği ve ϵ_d ise dielektrik çubuğun bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısıdır. Yapının manyetik geçirgenliği (μ) ise enine kesit içinde her noktada serbest uzayın geçirgenlik katsayısına (μ_0) eşittir. Yapı için tam dispersiyon eşitliği [3]'de sunulmuştur.

2.3. Plazma Sütun Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu için Tam Çözüm

Anizotropik ortamla dolu silindirik dalga kılavuzları için alan bileşenlerinin genel yapısı Ramo ve arkadaşları tarafından verilmiştir [2]. Özel olarak, plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu ve boşluk ortamdaki plazma kolon çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır [4, 6, 7, 8, 9]. Çeşitli çalışmalarda; plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu için sınır koşulları kullanılarak Maxwell denklemlerinin çözümünden elde edilen tam çözüm dispersiyon bağıntısı, farklı formlarda sunulmuştur [4, 6, 7]. Çalışmalarda yayılım karakteristiği genellikle, Brillouin diyagramı olarak da adlandırılan frekans – yayılma sabiti (ω -k) düzlemi üzerinde araştırılmıştır. Brillouin diyagramının yorumlaması kolay olduğu için mühendisler ve fizikçiler için yararlı ve kullanışlıdır. Açısal değişimin $n = \pm 1$ olduğu durumlar için, farklı frekans bölgelerinde var olan modlar dispersiyon bağıntısı kullanılarak elde edilmiştir ve Brillouin diyagramları üzerinde sunulmuştur [6]. Bu yapı için elektromanyetik dalganın boyuna birleşenleri kuple denklemlerdir. Kuple denklemlerin çözüm eşitliklerinden elde edilen kökler ayrıca ayrıştırma sabitleri olarak da adlandırılır. Plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu için ayrıştırma sabitlerinin davranışları ve Brillouin diyagramını ayırdığı bölgeler Bevc tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir ve daha sonraki çalışmalarda kullanılmışlardır [4, 8, 9]. Tam çözüm ve/veya yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak farklı frekans bölgelerinde var olan modlar araştırılmıştır [4, 6, 9]. Ayrıca bu çalışmalardan bir kısmında, sayısal değerler tablo şeklinde sunulmuştur [4, 7].

Plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu içerisinde dielektrik geçirgenlik(ϵ) ifadesi denklem 3.'de verilmektedir.

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \hat{\epsilon} & 0 \leq r \leq b \\ \epsilon_0 & b < r < a \end{cases} \quad (3)$$

Burada, plazma çubuk tensör dielektrik geçirgenliği denklem 4.'de verilmektedir.

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Denklem 4. ifadesinde,

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{1}{R^2 - \Omega^2} \quad \epsilon_2 = \frac{-R}{\Omega(R^2 - \Omega^2)} \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{1}{\Omega^2} \quad (5)$$

Burada, R normalize hızlandırıcı (cyclotron) frekansı (ω_c/ω_p), Ω normalize frekans (ω/ω_p) ve ω çalışma frekansı, ω_p plazma frekansı, ω_c hızlandırıcı frekansıdır. Yapının manyetik geçirgenliği (μ) ise enine kesit içinde her noktada serbest uzayın geçirgenlik katsayısı (μ_0) olarak tanımlanmıştır.

Yip ve Le-Ngoc, plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu içerisinde elektromanyetik dalga yayılımını statik gibi çözümler (quasistatic) ve tam çözümleri kullanarak incelemişlerdir [4]. Bu yazarlar, kesim ve rezonans frekanslarını olası tüm modları elde edebilmek için analitik olarak araştırmışlardır. Lip ve Le-Ngoc çalışmalarında, kesim ve rezonans bölgelerini araştırarak ve çeşitli parametrik bölgelerde var olan modların farklı fiziksel karakteristiklerini göz önüne alarak modları şu şekilde sınıflamışlardır;

- Jirrezonans bölgesinde var olan, $0 \leq \Omega \leq \min(1, R)$, Plazma modları $\rightarrow \delta^R P_{n,m}^{s_0}$
- Plazma rezonans bölgesinde var olan, $\max(1, R) \leq \Omega \leq \Omega_u$, Hızlandırıcı modları $\rightarrow \delta^R C_{n,m}^{s_0}$
- Plazma-boşluk ara yüzünde alan enerji yoğunlaşması olarak karakterize edilen, Yüzey dalga modları $\rightarrow \delta^R S_n^{s_0}$

Burada, n azimutal değişime, m mod derecesine, s_0 yarıçap oranına(b/a), δ normalize dalga kılavuzu yarıçapına($\omega_p a/c$) ve c ışık hızına eşittir. Yapı için tam dispersiyon eşitliği [4]'de sunulmuştur.

3. Farklı Yapılardaki Düzgün Silindirik Dalga Kılavuzları için İletim Hattı Eşdeğerlikleri Yöntemi

Maxwell denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir. Yöne bağlı üç ve zamana bağlı bir türev olmak üzere dört değişkene bağlı türev içerirler. Alan değişimi denklem 1.'de verildiği şekilde alınarak; iletim yönüne, azimutal değişime ve zamana bağlı türevler sadeleştirilerek tam çözümler elde edilmiştir.

Ancak bilindiği gibi Maxwell denklemleri en genel fiziksel yapılar için kapalı formda çözümlere izin vermez. Böyle durumlarda alan ifadeleri serilere açılarak yarı analitik çözümler araştırılır. Bu tür yarı analitik çözümlerden biri Schelkunoff'un klasik makalesinde yer almaktadır[10].

Schelkunoff çalışmasında, dalga kılavuzunu sonsuz sayıda iletim hattı olarak modelleyerek kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan Maxwell denklemlerini sadece iletim yönüne bağlı türevlerden oluşan adi diferansiyel denklemlere dönüştürmüştür[10]. Bu yöntemde boş dalga kılavuzunun bilinen çözümleri kullanılarak farklı yapılardaki dalga kılavuzları için yarı analitik çözümler elde edilir. Dalga kılavuzunun, sonsuz sayıdaki kuple iletim hattı olarak modellenmesiyle; bilinmeyen alan birleşenlerinin yerini bilinmeyen akım ve gerilim büyüklükleri almaktadır. İletim yönüne göre değişim denklem 1. şeklinde olduğu kabul edilirse, adi diferansiyel denklem sistemi dalga kılavuzunu

dolduran ortam bir dielektrik veya jirootropik (jiroelektrik veya jiromanyetik) ise denklem 6.'da verilen lineer cebirsel denklem sistemine dönüşür.

$$\gamma(p) \begin{bmatrix} v(p) \\ i(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z(p) \\ Y(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(p) \\ i(p) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Böylelikle problem özdeğer problemine dönüşmüş olur. Denklem 6.'da Z ve Y kuple iletim hatlarının kesit içinde çift katlı integralle hesaplanan kuplaj katsayılarından oluşan matrisleri, v(p) ve i(p) sırasıyla gerilim ve akım vektörleridir. Ayrıca, p ise kompleks frekansı temsil etmektedir. Denklem 6. sisteminin özdeğerleri hesaplanarak çözüme ulaşırlar. Bu yöntemde alan ifadeleri, katsayıları akım ve gerilim büyüklükleri olan sonsuz Fourier serilerinden oluşmaktadır. Yöntem boş dalga kılavuzunun bilinen analitik çözümleri kullanmakla beraber sonsuz seri toplamının bir noktada kesilmesi zorunluluğundan yarı analitik bir yöntemdir. Bu yöntem moment metodunun Galerkin verisiyonu olarak adlandırılır.

Moment metodunda kullanılan boş borunun bilinen çözümlerinin şu özellikleri önemlidir:

- Analitik çözümlerin biliniyor olması
- Tam küme olmaları
- Cidarda sınır koşullarını sağlamaları

4. Nümerik Karşılaştırmalar

4.1. Dielektrik Çubuk Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu için Yöntem Geçerliliği

Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi daha önce Noble tarafından çalışılmıştır ve çözüm eşitlikleri ayrıntılı olarak sunulmuştur [11]. Bu yapı için iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi Yener tarafından da çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır [12, 13].

Noble çalışmasında, dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için aşağıda isimleri sıralanan olası tüm modların iletim hattı eşdeğerlikleri denklemleri kullanılarak elde edilebileceğini göstermiştir.

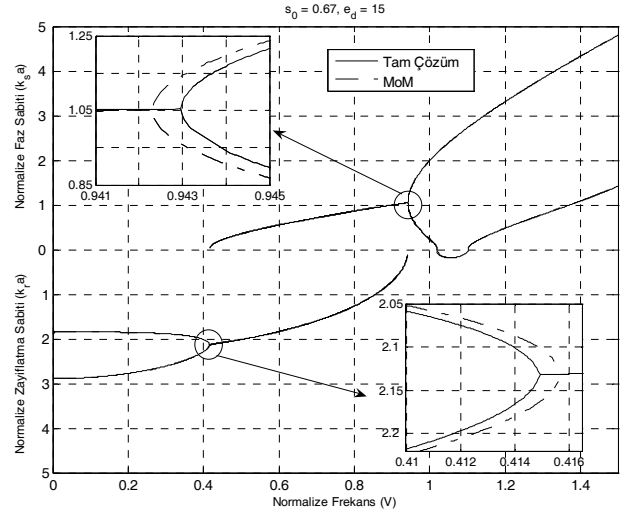
- İletilen modlar (Yayılmı sabiti saf sanal)
- Geriye doğru dalga modları (Faz sabiti ve grup hızı zit işaretli)
- Kompleks modlar (Yayılmı sabiti kompleks)
- Sönümlü modlar (Yayılmı sabiti reel)

Yöntemin olası tüm modlar için geçerliliğini göstermek amacıyla, yapıya ait tam çözüm yayılma sabiti denklem 7.'deki gibi kompleks alınarak nümerik olarak araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sayısal hesaplamalarda, iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminde boş dalga kılavuzunun 150 TE ve 150 TM modu, açınım öz fonksiyonları olarak kullanılmıştır.

$$k = \pm(k_r \pm jk_s) \quad (7)$$

Burada, k_r (zayıflatma sabiti) yayılma sabitinin reel kısmını, k_s (faz sabiti) ise sanal kısmını göstermektedir.

Şekil 1'de, yarı çapı (a) 0.25 inch, yarıçap oranı (s_0) 0.67 ve dielektrik geçirgenliği (ϵ_d) 15 olan bir dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için tam çözümden ve iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden elde edilen normalize frekans (V) – normalize kompleks yayılım (k_a) sabiti eğrisi verilmiştir. Şekil 1'de normalize yayılım sabitinin, reel kısmı (zayıflatma sabiti) y ekseninde sıfırdan aşağıya doğru, sanal kısmı (faz sabiti) y ekseninde sıfırdan yukarıya doğru mutlak değerler olarak çizdirilmiştir.



Şekil 1: $s_0 = 0.67$, $\epsilon_d = 15$ değerleri için, tam çözümden ve Moment metodundan elde edilen kompleks dispersiyon eğrileri.

Şekil 1'de gösterilen normalize frekans ve normalize yayılım sabiti ifadeleri sırasıyla aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir. Sonuçlar, yöntemin bu yapı için geçerli bir yöntem olduğunu göstermektedir.

$$V = \frac{\omega a}{c} \quad (8)$$

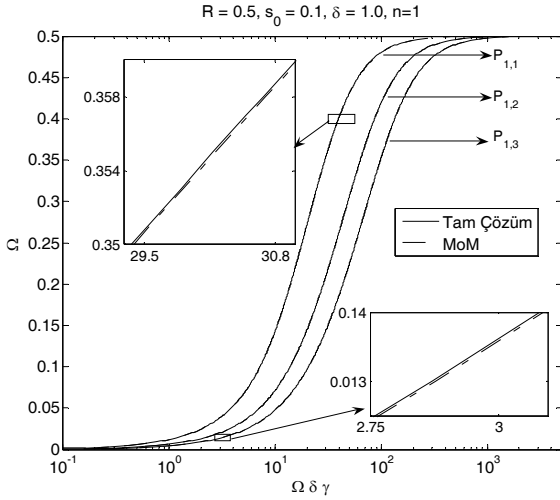
$$k_a = \pm(k_r \pm jk_s a) \quad (9)$$

4.2. Plazma Sütun Yüklü Silindirik Dalga Kılavuzu için Yöntem Geçerliliği

İletim hattı eşdeğerlikleri yönteminin, plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu için geçerliliğini sınamak amacıyla tam çözümlerden ve yöntemden elde edilen dispersiyon eğrileri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

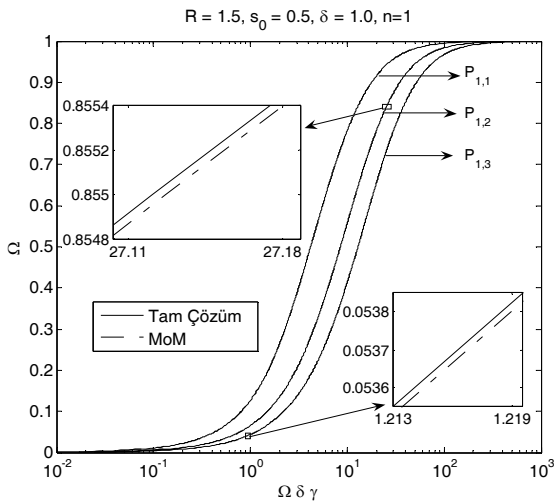
Nümerik çözümlerde dalga kılavuzu yarıçapı $a=3\text{cm}$, plazma frekansı $\omega_p=10^{10}$ rad/s alınmıştır. Azimutal değişim ($n=1$) ve Normalize dalga kılavuzu yarıçapı ise tüm çözümler için sabit ($\delta=1.0$) seçilmiştir. Herhangi bir frekans değeri için dispersiyon bağıntısını sağlayan sonsuz sayıda çözüm (mod) vardır. Çalışmada, jirorezonans bölgesinde var olan plazma modlarından ($\delta^R P_{n,m}^{s_0}$) en küçük dereceli üç ($m = 1, 2, 3$) mod karşılaştırılmıştır. Tam dispersiyon çözümleri, yarıya bölme yöntemi kullanılarak Tam dispersiyon eşitliğinden elde

edilmiştir. Yarı-analitik hesaplamalarda, iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminde boş dalga kılavuzunun 150 TE ve 150 TM modu, açınım öz fonksiyonları olarak kullanılmıştır.



Şekil 2: $R=0.5$, $s_0=0.1$, $\delta=1.0$, $n=1$ değerleri için tam çözümlerden ve iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden elde edilen dispersiyon eğrileri

Şekil 2'de γ normalize yayılım sabitine (k/k_0) ve k_0 ise serbest uzaydaki dalga sayısına (ω/c) eşittir. Şekil 2'de görüldüğü gibi, plazma sütun yarıçapının küçük ($s_0=0.1$) ve normalize hızlandırıcı frekansının küçük ($R=0.5$, Yip ve Le-Ngoc tarafından bağıl zayıf dc manyetik alan olarak tanımlanır) olduğu bir yapı için yöntem gerçek sonuçlarla uyumludur.



Şekil3: $R=1.5$, $s_0=0.5$, $\delta=1.0$, $n=1$ değerleri için tam çözümlerden ve iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden elde edilen dispersiyon eğrileri

Şekil 2'de olduğu gibi, Şekil 3'de de plazma sütun yarıçapının $s_0=0.5$ ve normalize hızlandırıcı frekansının büyük ($R = 1.5$, Yip ve Le-Ngoc tarafından bağıl kuvvetli manyetik alan olarak tanımlanır) olduğu yapı için de yöntem gerçek sonuçlarla uyumludur. Elde edilen sonuçlar, yöntemin geçerliliğini doğrulamaktadır.

5. Sonuçlar

Dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu ve plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu için iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden, diğer adıyla Moment metodundan elde edilen nümerik sonuçlar, tam çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında yöntemin her iki yapı içinde geçerliliği yüksek bir yöntem olduğu gösterilmiştir. Daha önce Noble [11] tarafında gösterilen ve bu çalışmada tekrar ele alınan dielektrik çubuk yüklü silindirik dalga kılavuzu için var olan tüm modlar iletim hattı eşdeğerlikleri yöntemi ile de elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç, plazma sütun yüklü silindirik dalga kılavuzu için olası diğer modların, özellikle literatürde var olmayan kompleks olası modların, saptanmasında iletim hattı eşdeğerlikleri yönteminden yararlanılabileceği sonucunu ortaya çıkarmıştır. İleriki çalışmalarda olası bu modlar araştırılabilir.

6. Kaynakça

- [1] Pozar, D. M., *Microwave Engineering*, John Wiley and Sons Inc., 2005.
- [2] Ramo, S., Whinnery, J. R., Duzer, T., V., *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley and Sons Inc., 1965.
- [3] Clarricoats, P., J., B., "Circular-waveguide backward-wave structures", *Pro. I.E.E.*, 110,2, 1963,p 261-270.
- [4] Yip, G., L., and Le-Ngoc, S., "Dispersion characteristics of the dipolar modes in a waveguide partially filled with a magnetoplasma column", *Canadian Journal of Physics*, 53, 1975,p 1163-1178.
- [5] Clarricoats P., J., B., ve Taylor, B., C., "Evanescent and Propagating Modes of Dielectric Loaded Circular", *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 111,1964,p 1951-1956.
- [6] Bevc, V., ve Everhart, T., E., "Fast-wave propagation in plasma-filled waveguides", *Journ. of Electron. Control*, 13, 1962,p 185-212.
- [7] Bevc, V., "A new multipolar mode in bounded gyrotropic plasma", *J.App.Phys.*,39, 3, 1968, p1492-1502.
- [8] Bevc, V., "Behavior of separation constants for finite gyromagnetic plasmas", *IEEE Tran. on Antennas and Propagation*, 13, 6,1965,p 918-926.
- [9] Ivanov, S., T., ve Alexov, E., G., "Electromagnetic waves in a plasma waveguide", *Journal of Plasma Physics*, 43, 1,1990,p 51-67.
- [10] Schelkunoff, S., A., "Generalized telegraphist's equation for waveguide", *Bell System Tech. J.*,1952,p 785-801.
- [11] Noble, D., F., "Circuit Properties of Dispersive Coupled Transmission Lines and Waveguides", *Doktora Tezi, Cornell University, NY, 1971.*
- [12] Yener, N., "Necessary and sufficient conditions for the existence of backward waves in metallic waveguides", *Jour. of Electromag. Waves and Appl.*, 17, 12,2003, p 1713-1722.
- [13] Yener, N., "Algebraic function approximation in eigenvalue problems of lossless metallic waveguides: examples", *Jour. of Electromag. Waves and Appl.*, 20, 6, 2005,p 731-745.