Düzlemsel Dalgaların Soğuk Plazmada Yarım Düzlemden Saçılması

Scattering of Plane Waves by a Half Plane in Cold Plasma

Arş. Gör Nezahat GÜNENÇ TUNCEL[1], Prof.Dr. Hamit SERBEST[2]

[1]Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi
ngunenc@gmail.com

[2]Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Çukurova Üniversitesi
hamitserbest@gmail.com

Özet

Bu çalışmada soğukplazma içerisindeki bir yarım düzlemden düzlemsel dalgaların saçılımına ilişkin sınır değer problemi incelenmiştir. Yarım düzlem geometrisi, daha karmaşık nesneleri modellemek için kullanılan kanonik bir yapıdır. Alan ifadelerini elde edebilmek için ters Foruier tekniği kullanılarak, Wiener-Hopf denklemlerine ulaşılmıştır. Wiener-Hopf denklemleri en genel halde yarım düzlemin her bir yüzü farklı empedansa(Z_1 ve Z_2) sahip olduğu durumda çıkarılmıştır. Daha sonra denklemler bu iki farklı empedansın değeri birbirine eşit olduğu hale indirgenmiştir(Z_1=Z_2=Z). Bir sonraki aşamada Z_1 ve Z_2 empedansa sıfıra götürülerek soğuk plazmaiçersindeki mükemmel iletken yarım düzlem problemi incelenmiştir. Elde edilen alan integralleri semer noktası tekniği kullanılarak asimptotik olarak hesaplanmıştır.

Abstract

In this present work, the problem of th eplane wave diffraction by an half plane is investigated. First step of the work, the each surface of half plane have two different impedance is assumed, and the boundary value problem corresponding to the canonical structure is formulated by Fourier Transform technique. General Wiener-Hopf equation. In second step of the work, each surface of the half plane have same impedance, then Wiener-Hopf equations are obtained. In third step,surface impedance of the half plane are assumed zero, then half plane transforms to perfectly conducting half plane. Asymtotic evaluation of the field integrals yield the high frequency diffraction coefficient where the field expressions are obtained by the Standard saddle point techniue.

I. GİRİŞ

İyonesferde dalga yayılımı önemli bir araştırma konusudur. Gerek karasal haberleşmede gerekse uydu ve dünya arasındaki haberleşme sistemleri oluşturabilmek için elektromanyetik dalganın iyonesferin içindeki davranışlarını bilmeliyiz. Ayrıca radar sistemleri için nesne tanıma ya da radarlara yakalanmamak için radara görünmez araçların/nesnelerin tasarlanması, içinde böyle ortamlarda elektromanyetik dalgalarının davranışlarını saptamamamız gerekir.Ayrıca, bu çalışmada kullanılan yarım düzlem geometrisi de birçok karmaşık nesne için kullanılabilen kanonik bir yapıdır. Soğuk plazma içersindeki çeşitli geometrilerden saçılma daha önce de incelenmiştir, ama bu çalışmada Wiener-Hopf denklemleri yarım düzlemin en genel halinde(her iki yüzey de farklı empedans değerine sahipken) elde edilmiş daha sonra mükemmel yarım düzleme indirgenmiştir.

Genel anlamada "soğuk plasma" terimi manyetize olmuş plazmalar için kullanıllır. Buradaki "soğuk" kelimesi dalganın karakterisdtik hızının plasmanın ısıl hızından($\sqrt{2k_BT/m}$) daha hızlı olduğu anlamaına gelir. Bu yüzden ısıl hız ihmal edilebilir. Bu özelliklerinden dolayı iyonesfer de "soğuk plazma" olarak modellenebilir.

Böyle bir ortam içinde y= 0, and □(-∞, 0)'da yerleştirilmiş bir yarım düzlemin

$$H^i = e_z\,exp[-ik(xcos\varphi_0 + ysin\varphi_0)] \tag{1}$$

Gelen alanı ile aydınlatıldığını varsayalım. Plazmanın dilektrik özelliği bir tensorle belirtilir ve aşağıdaki gibidir[1]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)\right]^{-1} \tag{3}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)\right]^{-1} \tag{4}$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \tag{5}$$

Bu şartlar altında elektrik alan bileşenleri Maxwelldenklemlerinden

$$E_x = \frac{i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)}\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)}\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (6)$$

$$E_y = \frac{-i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)}\frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (7)$$

olarak hesaplanır. Aşağıdaki eşitlik Maxwell denklemlerinden kolayca elde edilebilir.

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z \quad (8)$$

E_x ve E_y yerine eşitlik (6) ve (7) ifadelerini koyarsak, manyetik alan bileşeneninHelmholtzdenlemini sağladığını kolayca görürüz.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 y} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right)H_z = 0 \quad (9)$$

$$k^2 = k_0^2 k_p,\ k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0,\ k_0 = \frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \quad (10)$$

Toplam alan

$$\boldsymbol{E^t}(\boldsymbol{H^t}) = \boldsymbol{E^i}(\boldsymbol{H^i}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}) \quad (11)$$

Olduğuna göre empedans sınır koşullu

$$\boldsymbol{nxnxE}^T(x,+0) = -Z_1 nx\boldsymbol{H}^T(x,+0), x<0 \quad (12)$$

$$\boldsymbol{nxnxE}^T(x,+0) = -Z_2\boldsymbol{nxH}^T(x,+0), x<0 \quad (13)$$

Saçılan alan aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \int_L A(\alpha)e^{-i\alpha x + i\Gamma(\alpha)y}d\alpha, & y>0 \\ \int_L B(\alpha)e^{-i\alpha x - i\Gamma(\alpha)y}d\alpha, & y<0 \end{cases} \quad (14)$$

Burada, $\Gamma(\alpha) = \sqrt{k^2-\alpha^2}$şeklinde tanımlanmıştır ve $\Gamma(0)=+k$ ve $\alpha \to \pm\infty$ için $\Gamma(\alpha) = i|\alpha|$ ile uygun olarak tanımlanmış karmaşık α düzleminde tek değerlidir. L integrasyon çizgisi ise Im(-k)<Im(α)<Im(k). Regülerlik bandında x reel eksenine parall bir çizgidir.

Bilinmeyen spektral fonksiyonlar A(α) ve B(α) sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla bulunacaklardır. Alan ifadeleri için yazılan integrallere sınır koşulları uygulandıktan sonra ters Fouriertransformu alınır. Daha sonraortaya çıkan denklemlerin toplanıp çıkartılması ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[Z_1 + \frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha) + \left(i\Gamma(\alpha)+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right] = F_1(\alpha)+U_1(\alpha) \quad (15)$$

$$\frac{-1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[Z_2 + \frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha) - \left(i\Gamma(\alpha)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right] = F_2(\alpha)+U_2(\alpha) \quad (16)$$

F1,2 fonksiyonları kaynak fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki gibidir:

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i(\alpha - k\cos\varphi_0)}\left[\frac{k\left[i\sin\varphi_0 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right]}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2} - Z_1\right] \quad (17)$$

$$F_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi i(\alpha - k\,cos\,\varphi_0)}\left[\frac{k\left[i\,sin\,\varphi_0 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}cos\,\varphi_0\right]}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2} + Z_2\right] \quad (18)$$

$$L_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} J_s^{(e)} e^{i\alpha x}dx \quad (19)$$

$$L_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} J_s^{(m)} e^{i\alpha x}dx \quad (20)$$

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}\right]H_z^T e^{i\alpha x}dx \qquad y=+0 \quad (21)$$

$$U_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}\right]H_z^T e^{i\alpha x}dx \qquad y=-0 \quad (22)$$

Eğer $Z_1=Z_2=Z$ olursa yukarıdaki denklemler aşağıdaki şekledönüşür:

$$\frac{1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[Z + \frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha) + \left(i\Gamma(\alpha)+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right] = F_1(\alpha)+U_1(\alpha) \quad (23)$$

$$\frac{-1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[Z+\frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha)-\left(i\Gamma(\alpha)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right]=F_2(\alpha)+U_2(\alpha) \quad (24)$$

$$F_1(\alpha)=\frac{1}{2\pi i(\alpha-k\cos\varphi_0)}\left[\frac{k\left[i\sin\varphi_0-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right]}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}-Z\right] \quad (25)$$

$$F_2(\alpha)=\frac{1}{2\pi i(\alpha-k\cos\varphi_0)}\left[\frac{k\left[i\sin\varphi_0-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right]}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}+Z\right] \quad (26)$$

$U_{1,2}$ ve $L_{1,2}$ fonksiyonları denklem(19-20-21-22)'deki gibi kalır. Eğer Z_1=Z_2=0 yaparsak yarım düzlem mükemmel yarım düzlem olur ve denklem aşağıdaki hale dönüşür:

$$\frac{1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha)+\left(i\Gamma(\alpha)+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right]=F_1(\alpha)+U_1(\alpha) \quad (27)$$

$$\frac{-1}{2i\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\varepsilon_1\Gamma(\alpha)+i\alpha\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right]\left[L_2(\alpha)-\left(i\Gamma(\alpha)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L_1(\alpha)\right]=F_2(\alpha)+U_2(\alpha) \quad (28)$$

$$F_{1,2}(\alpha)=F(\alpha)=\frac{1}{2\pi i(\alpha-k\cos\varphi_0)}\left[\frac{k\left[i\sin\varphi_0-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right]}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\right] \quad (29)$$

$$L_2(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}J_s^{(m)}e^{i\alpha x}dx=0 \quad (30)$$

$$G(\alpha)L_1(\alpha)=U_1(\alpha)+F(\alpha) \quad (31)$$

$$G(\alpha)L_1(\alpha)=U_2(\alpha)+F(\alpha)) \quad (32)$$

$$G(\alpha)=\frac{[i\Gamma(\alpha)]^2-\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha\right]^2}{2i\Gamma(\alpha)} \quad (33)$$

II. Solution of theWiener-Hopf Equation

Wiener-Hopf tekniğine göre bundan sonraki aşamada G(α) Kernel fonsiyonunu alt ve üst yarım düzlemde regüler olan iki fonksiyonun çarpımı şeklinde yazacağız.

$$G(\alpha)=G_u(\alpha)G_L(\alpha) \quad (34)$$

G(α)'yı denklem (31)'de yerine yazarsak;

$$G_u(\alpha)G_L(\alpha)L(\alpha)=U_1(\alpha)+F(\alpha) \quad (35)$$

$$G_L(\alpha)L(\alpha)=\frac{U_1(\alpha)}{G_u(\alpha)}+\frac{F(\alpha)}{G_u(\alpha)} \quad (36)$$

Yukarıdaki denklemleri elde ederiz.

İkinci adımda ise (36)'daki denklemin sağ tarafındaki ikinci fonsiyonsiyonun toplam dekompozisyonu yapacağız.

$$\frac{F(\alpha)}{G_u(\alpha)}=H(\alpha)=H_u(\alpha)+H_L(\alpha) \quad (37)$$

$$H_u(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_U}\frac{F(\nu)}{\nu-\alpha}d\nu \quad (38)$$

$$H_L(\alpha)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_L}\frac{F(\nu)}{\nu-\alpha}d\nu \quad (39)$$

C_U ve $C_L$integrasyon çizgileri reel eksene paraleldir.

$$G_L(\alpha)L(\alpha)-H_L(\alpha)=\frac{U_1(\alpha)}{G_u(\alpha)}+H_u(\alpha) \quad (40)$$

Analitik devam ilkesine göre, P(α) tam fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$P(\alpha)=\begin{cases}\frac{U_1(\alpha)}{G_u(\alpha)}+H_u(\alpha), & \alpha\epsilon R_u\\ G_L(\alpha)L(\alpha)-H_L(\alpha), & \alpha\epsilon R_L\end{cases} \quad (41)$$

Burada Ru ve R_L sırasıyla üst($Im(\alpha)>Im(-k)$) ve alt($Im(\alpha)<Im(k\cos\varphi_0)$.) yarı düzlemi gösterir.

$$G_U(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\frac{\left[\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}+k\right]}{\sqrt{k+\alpha}} \quad (42)$$

$$G_L(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\frac{\left[\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}-k\right]}{\sqrt{k-\alpha}} \quad (43)$$

$$H_L(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{i\pi/4}}\frac{\left(i\sin\varphi_0+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right)}{(\alpha-k\cos\varphi_0)}\frac{\sqrt{k(1+\cos\varphi_0}}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}\cos\varphi_0\right.} \quad (44)$$

$$H_U(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}} \frac{\left(i\,sin\,\varphi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} cos\,\varphi_0\right)}{(\alpha - k\,cos\,\varphi_0)} \left[\frac{k\,\sqrt{k+\alpha}}{\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} + \right.} - \frac{\sqrt{k(1+cos\,\varphi_0)}}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} cos\,\varphi_0 + 1\right)} \right] \quad (45)$$

$\alpha \rightarrow \infty$ durumunda ayrıt koşulları uyarınca $P(\alpha) \rightarrow 0$olur ve buLiouville teoremine göre $P(\alpha) \equiv 0$ olması demektir. Böylece,

$$\frac{1}{\sqrt{2i}} \frac{\left[\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} - k\right]}{\sqrt{k-\alpha}} L(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}} \frac{\left(i \sin\varphi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right)}{(\alpha - k\cos\varphi_0)} \frac{\sqrt{k(1+\cos\varphi_0}}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}\cos\varphi_0\right.}$$
$$= \frac{U_1(\alpha)}{\frac{1}{\sqrt{2i}} \frac{\left[\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} + k\right]}{\sqrt{k+\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}} \frac{\left(i \sin\varphi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right)}{(\alpha - k\cos\varphi_0)} \left[\frac{k\sqrt{k+\alpha}}{\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} + k\right.} - \frac{\sqrt{k(1+\cos\varphi_0)}}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}\cos\varphi_0 + 1\right)} \right] \quad (46)$$

Olur. Buradan L(α) ve A(α)

$$L(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{k-\alpha}\left(i \sin\varphi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right)\sqrt{k(1+\cos\varphi}}{\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} + k\right)(\alpha - k\cos\varphi_0)\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}\,\mathrm{cc}\right.} \quad (47)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\left(i\sqrt{k^2-\alpha^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha\right)\left(i \sin\varphi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_0\right)\sqrt{k(1}}{\left(\sqrt{k+\alpha}\right)(\alpha - k\cos\varphi_0)\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}\cos\varphi_0\right.} \quad (48)$$

Olarak bulunur.

III. Sonuç

Bu çalışmada soğuk plazma içersindeki yarım düzlemden saçılan alanı önce ters Foruiertransformu kullanarak Wiener-Hopf tekniğini kullanarak çözdük. Problemin başında yarım düzlemin iki yüzeyinin farklı empedans özelliği gösterdiğini varsayarak en genel halde Wiener-Hopf denklemlerini elde ettik. Daha sonra da problemi mükemmel iletken yarım düzleme indirgedik. Bu halde semer noktası tekniğini kullanarak alan bileşenlerini elde ettik. Bu çalışmadaki ifadeler kullanılarak yarım düzlem ister mükemmel iletken olsun ister empedansa sahip olsun kernel matrisi faktörize edilerek alan ifadeleri elde edilinebilir.

IV. Kaynaklar

[1] Radiation and Scattering of Waves, Leoppold B. Felsen and Nathan Marcuvitz, 1994.

[2] Kırınım Teorisi, Alinur Büyükaksoy ve Gökhan Uzgören.

[3] Complex Variables and Applications, Ruel V. Churchill and James Ward Brown, Fourth Edition, 1984.

[4] Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations, B. Noble, 1958.