MİNİMAL SİSTEMLERDE DURUM GERİBESLEMESİ İLE KUTUP ATAMA PROBLEMİNİN NÜMERİK ANALİZİ

Erkam Murat BOZKURT **Mehmet Turan SÖYLEMEZ**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü**,** Elektrik-Elektronik Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak, İstanbul

e-posta: bozkurte@itu.edu.tr e-posta: soylemez@elk.itu.edu.tr

ABSTRACT

It is well known that pole assignment for linear time invariant, single input/single output (SISO) systems always involves numerical errors when a numerical algorithm is performed with finite precision floating-point arithmetic. This paper is mainly concerned with numerical performance of pole placement process and some important parameters affecting it.

Anahtar sözcükler: *Kutup atama, kutup renklendirme, nümerik hatalar*

1. GİRİŞ

Durum geri beslemesi ile kutup atama problemi ve ilgili çalışmalar kontrol teorisinde uzun bir geçmişe ve önemli bir yere sahiptir. Kutup atama işleminin başarısı kararlılık ve sistem performansı üzerinde kritik rol oynar. Doğrusal, zamanla değişmeyen, tek giriş ve tek çıkışlı sistemlerde kutup yerleştirme probleminin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiş olup tüm bu yöntemlerin farklı performans ölçütlerine göre başarıları, avantaj ve dezavantajları daha önceki çalışmalarda ayrıntılı olarak incelenmiştir [1]. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için gerek ve yeter şart ise uygulanacak sistemin tümüyle kontrol edilebilir durumda olmasıdır. Bütünüyle kontrol edilebilir bir sistem için kutup atama işlemi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır. Doğrusal, zamanla değişmeyen, tek giriş tek çıkışlı bir sistemin durum uzayı modeli aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$y = Cx \tag{2}$$

Burada, *A, B* ve *C* matrislerinin boyutları sırası ile $n \times n$, $n \times 1$ ve $1 \times n$ dir. Eğer sistem tümüyle kontrol edilebilir durumda ise durum geri beslemesi üzerinden uygulanacak olan kontrol kuralı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$u = r - Kx \tag{3}$$

Burada *r* referans girişi, *K* ise $1 \times n$ boyutlu durum geri besleme matrisini temsil etmektedir. Denklem (3) ile verilen kontrol kuralı denklem (1) ile verilen sisteme giriş olarak uygulandığı takdirde elde edilen kapalı çevrim sistem ve bu sistemin karakteristik denklemi durum geri beslemesine bağlı ifadeler olarak

karşımıza çıkar:

$$\dot{x} = \left(A - BK \right) x + Bu \tag{4}$$

$$\left| sI - A + BK \right| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + s^n = 0 \tag{5}$$

Sonuç olarak elde edilen kapalı çevrim sistemin durum matrisinin özdeğerleri (kutupları), sistemin karakteristik denkleminin kökleridir ve durum geri besleme matrisi kullanılarak açık çevrim sistemin kutupları hedeflenen kapalı çevrim kutuplarına taşınabilir ve bu işlem kutup atama olarak adlandırılır. Yukarıda tanımlanan kutup atama işlemi, bilgisayar ortamında nümerik olarak gerçekleştirilmek istendiği takdirde birtakım hesaplama hatalarının meydana gelmesi kaçınılmazdır ve hesaplanan durum geri beslemesinin sisteme uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim sistemin kutupları hedeflenen kutup bölgelerinden uzaklaşacaktır. Bu nedenle bir nümerik kutup atama işleminin başarısının ve üzerinde etkin olabilecek olası bir takım parametrelerin analiz edilebilmesi için öncelikle bir hata tanımlaması yapılmalıdır. Bu çalışmada hata tanımlaması, kutup renklendirme işlemi kullanılarak yapılmıştır [2]. En genel durumda bir polinomun kökleri ile katsayıları arasında cebrik bir ilişki bulunmadığından nümerik kutup atama işleminde meydana gelen hatanın fonksiyonel olarak analiz edilmesi mümkün değildir. Bu nedenle bu bildiri süresince kutup atama probleminin nümerik olarak analizi için istatistiksel bir yaklaşım benimsenmiştir [3]. Yapılan istatistiksel analizler sonucunda kutup atama işleminin nümerik performansını etkileyen iki adet parametrenin varlığı tespit edilmiştir. Bunlardan ilki ve en etkili olanı sistem mertebesidir (SM). Diğeri ise verilen bir sistemin reel değerli kutup sayısının sistemin tüm kutuplarının sayısına oranı veya başka bir değişle sistem mertebesine oranı olarak tanımlayabileceğimiz reel kutup oranı (RKO) dur.

2. KUTUP RENKLENDİRME

Bilgisayar ortamında nümerik olarak gerçekleştirilen bir kutup atama işleminin sonucunda elde edilen durum geri besleme matrisi hatalı olarak hesaplanmış olacağından; elde edilen kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi, istenen kapalı çevrim karakteristik denkleminden farkı olacaktır. Eğer nümerik olarak hesaplanan bir durum geri besleme matrisini aşağıdaki denklem (6) ile verilen şekilde gösterilecek olursak, bu matrisin sisteme geri besleme olarak uygulanması ile elde edilecek olan kapalı çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki denklem (7) ile gösterildiği gibi olacaktır.

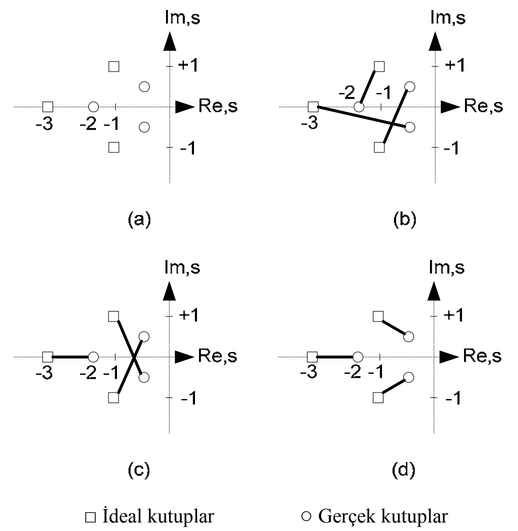
$$\tilde{K} = K + \Delta K \tag{6}$$

$$\left| sI - A + B\left(K + \Delta K\right) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i + \Delta a_i\right) s^i + s^n \tag{7}$$

Burada "ΔK" durum geri besleme matrisinin nümerik hesaplanmasında meydana gelebilecek olası hataları içeren matrisi, "Δa" katsayıları ise hesaplanan durum geri besleme matrisinin sisteme uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim karakteristik denkleminin katsayılarında meydana gelen bozulmaları temsil etmektedir. Bu nedenle hatasız gerçekleştirilmiş bir kutup atama işleminde "Δa" katsayılarının değeri (Nominal değeri) sıfırdır ve yapılan hataya göre farklı değerler alacaktır. Karakteristik denkleminin katsayılarında meydana gelen bozulmalar kapalı çevrim sistemin kutuplarının istenen konumlardan uzaklaşmasına neden olur. Aşağıdaki denklem (8), k. katsayıda meydana gelen bozulmanın i. kutup üzerindeki etkisini vermektedir.

$$\Delta\lambda_i = \frac{\lambda_i^{n-k}}{\prod_{\ell \neq j}\left(\lambda_j - \lambda_\ell\right)} \Delta a_k \tag{8}$$

Bu noktadan hareketle, sistemin hedeflenen kapalı çevrim kutuplarına "ideal kutuplar", durum geri besleme matrisinin sisteme uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim kutuplarına ise "gerçek kutuplar" diyelim. Bu tanımlamalardan yola çıkarak diyebiliriz ki, ideal kutuplar ile bu kutuplara karşılık gelen gerçek kutuplar arasındaki mesafe yapılan bir nümerik kutup atama işleminin performansını belirleyecektir. Bu bakımdan ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasındaki olası en büyük uzaklık kutup atama işleminin hatası olarak tanımlanabilir. Fakat aradaki mesafe ölçülmeden önce sistemin hangi ideal kutbuna hangi gerçek kutbun karşılık geldiği bilinmelidir. Bu nedenle, ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasında karşılıklı mantıksal bir eşleşme yapılması gereklidir. Bu işlem literatürde kutup renklendirme olarak adlandırılır [2]. Bu işlemi bir örnek ile daha açık hale getirmek mümkündür. Üçüncü mertebeden bir sistem için gerçekleştirilen bir nümerik kutup atama işleminin sonucunda, hedeflenen kutuplar ile gerçek kutupların aşağıdaki Şekil.1.(a) ile verilen şekilde olduğunu kabul edelim. Şekil incelendiğinde kutuplar arasında yapılacak olası eşleşmeler için 6 adet farklı permutasyonun olduğu görülecektir. Şekil.1.(b), Şekil.1.(c) ve Şekil.1.(d),'de ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasındaki bazı eşleşmeler verilmiştir. Verilen eşleşmelerde, her bir ideal kutup ile bu kutba



Şekil.1: (a) Üçüncü mertebeden bir sistem için yapılan bir nümerik kutup atama işlemin için ideal kutuplar ile elde edilen gerçek kutuplar için olası bir dağılım. (b), (c), (d) İdeal kutuplar ile gerçek kutuplar arasında yapılabilecek olası eşleşmelerden bazıları.

karşılık gelen gerçek kutup arasındaki uzaklıkların sayısal değerlerinin oluşturduğu kümeleri sırası ile $\{db_1, db_2, db_3\}$, $\{dc_1, dc_2, dc_3\}$, ve $\{dd_1, dd_2, dd_3\}$ olarak gösterelim. Daha sonra bu uzaklıkların en yüksek değerlerini ise sırası ile q_b, q_c ve q_d ile gösterelim.

$$\begin{aligned} q_b &= \max\left(db_i\right), \quad i = 1, \dots n \\ q_c &= \max\left(dc_i\right), \quad i = 1, \dots n \\ q_d &= \max\left(dd_i\right), \quad i = 1, \dots n \end{aligned} \tag{9}$$

Şekiller incelendiğinde takdirde bu değerlerin sırası ile 2.69, 2.55 ve 1.00 olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu noktadan hareketle her bir şekil için yapılan eşleşmelerde karşılıklı kutuplar arasındaki en yüksek uzaklığın en az olduğu, başka bir değişle karşılıklı eşlenmiş olan kutupların birbirine en yakın olduğu Şekil.1.(d), ile verilen eşleşmenin verilen eşleşmeler arasında en mantıklı eşleşme olacağı açıktır.

$$q_d = \min\left\{q_b, q_c, q_d\right\}, \tag{10}$$

Tüm bu işlemler sonucunda elde edilen q_d değeri aynı zamanda ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasındaki mesafe olarak da tanımlanabilir. Bu işlem aşağıdaki denklem ile n. mertebeden bir sisteme uygulanmak üzere genelleştirilebilir.

$$J_q = \min\left(q_p\right) \tag{11}$$

$$= \min_p\left(\max_{1 \le i \le n}\left(d_i\right)\right) \tag{12}$$

Burada, $\boldsymbol{p}$ olası eşleşmelerin p. permutasyonunu, $\boldsymbol{d_i}$ ise p. permutasyon için ölçülen kutuplar arasındaki i. mesafeyi, $\boldsymbol{J_q}$ ise kutup renklendirme işleminin sonucunda elde edilen kutuplar arasındaki mesafeyi temsil etmektedir.

3. HATA TANIMLAMASI VE TESPİTİ

Bir önceki bölümde belirtilen kutup renklendirme işlemi, yapılan bir nümerik kutup atama işlemi sonucunda elde edilen ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasında uygulanırsa, ideal kutuplar ile gerçek kutuplar arasındaki en büyük mesafe nümerik kutup atama işleminin hatası olarak tanımlanabilir. Fakat 10. mertebeden bir sistem için yapılacak bir kutup renklendirme işleminde 10! adet farklı permutasyon test edilmelidir ve eğer standart bir algoritma kullanılırsa işlem çok yavaşlayacaktır. Bu nedenle işlemin çözümü için hızlı ve iyi sonuç verecek bir eşleşme algoritmasına ihtiyaç duyulacaktır. Bilgisayar bilimleri terminolojisinde bu problem “linear bottleneck assignment problem” (BAP) olarak adlandırılır [4]. Bu bildiride yapılan istatistiksel analizlerde nümerik kutup atama işleminin sonucunda ortaya çıkan hatanın tespiti için [4]’da verilen BAP algoritması kullanılmıştır.

4. REEL KUTUP ORANI

Bu parametrenin ifade ettiği kavramın aşağıda yapılacak olan açıklamalarla daha açık hale getirilmesi mümkündür. Bu parametre üzerinde yapılacak olan analizlerin çıkış noktası, yapılan nümerik hatalar sonucunda kapalı çevrim sistemin reel kutuplarında karmaşık kutuplarına nazaran daha büyük oranlarda bozulma ve hedeflenen bölgelerden uzaklaşmaların meydana geldiği düşüncesidir. Bu nedenle reel kutup oranı üzerine yapılan analizlerin amacı verilen sistemin spektral dağılımının kutup atama işleminin başarısına etkisini gösterebilmektir. Reel kutup oranı olarak adlandırılan bu parametre verilen bir sistem için, reel değerli kutuplarının sayısının sistemin tüm kutuplarının sayısına oranı olarak tanımlanabilir.

Bir sistemin tüm kutuplarının sayısı reel kutuplarının sayısına ancak eşit veya fazla olabileceği için bu parametre 0 ile 1 arasında bir değer alacaktır ve bir oran belirttiği için yüzdelik dilim türünden de ifade edilmesi mümkündür. Fakat bu kavram tek başına bir anlam taşımamaktadır. Çünkü verilen bir sistemin kutuplarının %50 oranında reel olması şeklindeki bir ifade pratikte her zaman mümkün olmayabilir. Buna örnek olarak 10. mertebeden bir sistemin reel kutuplarının sayısının 5 dolayısıyla da reel kutup oranının 0.5 olması olanaksızdır. Fakat aynı mertebeden ve rasgele türetilmiş olan çok sayıda sistem için bu oran hesaplanıp ortalama değeri alınırsa, türetilen herhangi bir sistemin reel kutuplarının tüm kutuplarının sayısına oranının beklenen değeri (RKOB) istatistiksel olarak hesaplanmış olacaktır ve yüzdelik dilim açısından da anlamlı bir ifade elde edilmiş olunacaktır. Yukarıda verilen örneğe dönecek olursak, değişik değerlerdeki reel kutup oranlarına sahip birçok sistem türetilip, hesaplanan reel kutup oranlarının ortalama değerleri hesaplanacak olursa %50 civarında bir değerin elde edilmesi beklenir. Elde edilen bu değer reel kutup oranının beklenen değerinin yüzdelik olarak gösterimidir. Reel kutup oranının beklenen değeri olarak tanımladığımız bu terim için aşağıdaki gibi bir matematiksel gösterim yapılabilir.

$$E\left\{\text{reel kutup oranı}\right\} = \frac{E\left\{\text{reel kutup sayısı}\right\}}{\text{Tüm kutupların sayısı}} \quad (13)$$

Bu noktadan hareketle, bu parametrenin kutup yerleştirme işlemi üzerindeki etkisini analiz edebilmek için ilk olarak durum uzayı formunda ve elemanları rasgele olarak atanmış çok sayıda sistemin türetildiğini ve bu sistemlerin reel kutuplarının oranının beklenen değerinin ise programcı tarafından önceden belirlenebildiğini düşünelim. Daha sonra, bu şekilde türetmiş olduğumuz her bir sisteme kutup yerleştirme işlemini uygulayarak sistemlerin açık çevrim kutuplarını yine rasgele seçilmiş olan kutup bölgelerine taşıdığımızı kabul edelim. Daha sonra her işlem sonucunda yapılabilecek olası hatayı bir önceki bölümde açıklamış olduğumuz kutup renklendirme yöntemini de kullanarak tespit ettiğimizi ve son olarak da tespit edilen bu hataların ortalama değerlerini hesapladığımızı düşünelim. Bu durumda, reel kutup oranının beklenen değeri ile kutup atama işleminde yapılan hataların beklenen değeri arasında istatistiksel bir ilişki kurmak mümkün olacaktır. Fakat bu noktada akla gelecek ilk soru, yukarıda belirtildiği gibi hedeflenen reel kutup oranlarına sahip rasgele sistemleri türetmek veya başka bir değişle rasgele türetilen sistemlerin reel kutup oranının ve bunun bir sonucu olarak da sistemlerin bütünü için reel kutup oranının beklenen değerini önceden belirleyebilmek mümkün müdür? Bu bildiri boyunca ilk olarak [5] no’lu referansta kullanılmış olan bir yöntem problemin çözümü için önerilecektir. Bu yöntemi şu şekilde açıklamak mümkündür; öncelikle verilen uzunlukta bir karmaşık sayı dizisi türetmek istediğimizi düşünelim. Fakat bu dizi türetilmeden önce dizinin reel değerli elemanlarının beklenen değerini önceden belirleyebildiğimizi düşünelim. Bu durumda, bu dizinin elemanları rasgele türetilecek olan bir kare matrisin öz değerleri olarak rahatlıkla yerleştirilebilir ve bu şekilde RKOB daha önceden belirlenebilen rasgele sistemler türetmek mümkün olacaktır. Bu özelliğe sahip bir karmaşık sayı dizisini türetmek için kullanılabilecek yöntemlerden biri de sayı dizisini hücrelere bölmek ve her bir hücre için bir olasılık deneyi yapmaktır. Bu deneyi gerçekleştirmek için izlenecek prosedür ise şöyle olacaktır. Eğer deney başarılı ise hücre karmaşık sayı ve bir sonraki hücre ise bu sayının eşleniği olsun ve bu olasılığı “p” olarak tanımlayalım. Buna karşılık eğer başarısız ise hücre reel sayı olsun. Bu şekilde son hücreye kadar dizi elemanlarının atandığını düşünelim. Bir karmaşık sayının diziye eşleniği ile birlikte yerleştirilmesi gerektiğinden dizinin son elemanının karmaşık sayı çiftinin ilk elemanı olma ihtimali sıfır olarak alınmalıdır. Fakat bu noktada hedeflenen bir reel kutup oranının beklenen değeri için seçilen hücrenin reel olma olasılığını veren bir olasılık fonksiyonuna ihtiyaç duyulacaktır. Bu işlem için aşağıdaki denklem (14)'de verilen olasılık fonksiyonu kullanılabilir.

$$\psi = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{i+1}\left(n-i\right)p^{i} \qquad (14)$$

Fonksiyonun türetilmesi ile ilgili daha detaylı bilgi Bozkurt tarafından verilmiştir [6]. Bu denklemde "ψ" dizinin karmaşık değerli elemanlarının oranının beklenen değerini temsil etmektedir. Bu noktada dizinin reel değerli elemanlarının oranının beklenen değeri ise "ψ" nin tümleyeni yani "1-ψ" olacaktır. Verilen bir "ψ" değeri için bu denklem çözüldüğü takdirde elde edilen "*p*" değeri herhangi bir hücrenin karmaşık sayı olma olasılığını verecektir. Bu değer elde edildikten sonra basit bir prosedür uygulanarak hedeflenen karmaşık sayı dizisini türetmek mümkün olacaktır. Bu denklem kullanılarak, karmaşık değerli eleman oranı hedeflenen bir değerde sabitlenmiş bir karmaşık sayı dizisi türetmek için izlenmesi gereken adımlar ise aşağıdaki gibi olacaktır.

- Verilen bir ψ değeri için p değerini denklem 2.49 ile verilen olasılık fonksiyonunu çözerek hesapla.
- Değeri sıfırla bir arasında değişen rasgele bir reel sayı türet
- Türetilen reel sayı elde edilen "*p*" değerinden küçük ise hücreye bir karmaşık sayı, bir sonraki hücreye ise bu karmaşık sayının eşleniğini yerleştir. Eğer türetilen sayı elde edilen "*p*" değerinden büyükse hücreye bir reel sayı yerleştir.
- Aynı prosedürü son hücreye kadar uygula. Eğer son hücreden bir önceki hücrede yeni bir karmaşık sayı çiftine başlanmış ise doğal olarak son hücreye de bir önceki hücrenin eşleniği yerleştirilecektir. Aksi halde son hücreye de yine bir reel sayı yerleştir ve işlemi sonlandır.

Yukarıda verilen prosedür takip edilerek reel değerli elemanlarının sayının beklenen değeri programcı tarafından belirlenen karmaşık sayı dizileri türetilebilecektir. Bu özelliğe sahip karmaşık sayı dizileri türetildikten sonra, reel kutup oranının beklenen değeri sabit olacak şekilde rasgele sistemler türetmek mümkün olacaktır. Bu işlemi gerçekleştiren algoritma için [6] no'lu referansa bakınız.

5. RKOB DEĞERİ BELİRLENEBİLEN SİSTEMLER TÜRETME

Bir önceki bölümde açıklanan yöntem kullanılarak reel değerli eleman sayısının beklenen değeri önceden belirlenebilen sabit bir değerde olacak şekilde karmaşık sayı dizileri türetilebilir. Bu noktadan hareketle, bu dizilerin elemanları kullanılarak reel öz değerlerinin sayısının beklenen değerleri daha önceden belirlenebilen rasgele matrisler türetmek mümkündür. Bu dizilerin elamanları, diyagonal elementlerini oluşturacak şekilde rasgele diyagonal matrisler türetmek mümkündür. Eğer türetilen bu diyagonal matrisleri koordinat dönüşümü yaparak rasgele seçilmiş koordinat düzlemlerine taşırsak, öz değerleri belirtilen özelliği taşıyan rasgele kare matrisler türetilebilir. Bu durumu aşağıda verilen denklemlerle göstermek mümkündür. Bunun için öncelikle türetilen dizinin aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim.

$$\sigma = \left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n\right\} \qquad (15)$$

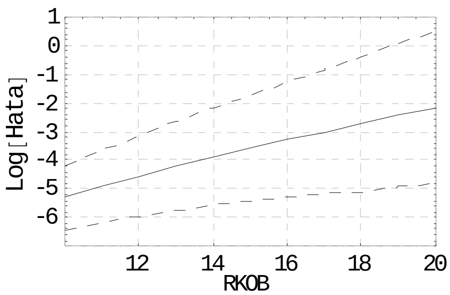
Daha sonra bu dizinin elemanlarından aşağıdaki denklem (16)'de verildiği gibi bir diyagonal matris türettiğimizi düşünelim. Son olarak aynı denklemde gösterildiği gibi bu diyagonal matrisin koordinatlarını standart koordinatlardan rasgele seçilmiş olan koordinatlara taşıdığımız takdirde, öz değer kümesini verilen bir karmaşık sayı dizisinin elemanlarının oluşturduğu bir rasgele kare matris türetmiş oluruz.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = T^{-1}\Lambda T \qquad (16)$$

Denklem (16) ile gösterilen A matrisinin elemanlarının reel değerli olabilmesi için koordinat dönüşümü için kullanılan T matrisinin sütunlarının özel olarak seçilmesi gerekir. Şöyle ki; öncelikle diyagonal matrisin her hangi bir karmaşık değerli elemanına karşılık karmaşık değerli elemanlar içeren bir sütün vektörü rasgele olarak türetilir. Seçilen matris elemanının karmaşık eşleniği için ise türetilen sütun vektörünün karmaşık eşleniği kullanılır. Diyagonal matrisin reel değerli elemanları için ise tüm elemanları reel değerli olacak şekilde rasgele sütun vektörleri türetilir. Durum matrisleri yukarıda verilen yöntem kullanılarak türetildikten sonra rasgele giriş ve çıkış matrisleri türetildiği takdirde durum uzayı modelinde ve reel kutup oranının beklenen değeri daha önceden belirlenebilen rasgele sistemler türetilmiş olunacaktır. Sistem boyutu çok arttığında T matrisinin tersinin hesaplanmasında büyük nümerik hesaplama hataları yapılabilir. Bu hataların bir sonucu olarak türetilen A matrisinin beklenen RKO' su istenen değerden farklı bir değere sapabilir. Bu durum çok yüksek mertebeden sistemler için göz önünde bulundurulmalıdır.

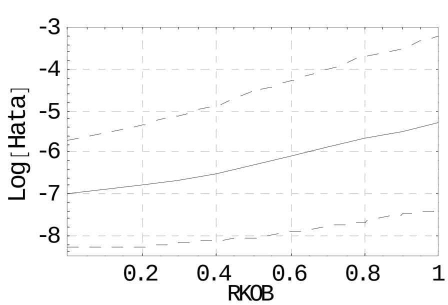
6. ANALİZ SONUÇLARI

Bir önceki bölümde bahsedilen araçlar kullanılarak açık çevrim ve kapalı çevrim RKOB değerleri sabit kalacak şekilde rasgele sistemler türetilerek kutup atama işleminin performansı doğrudan sistem mertebesine bağlı olarak elde edilmiştir. Açık çevrim ve hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının RKOB değerleri 0.5 değerinde sabit kalacak şekilde, sistem mertebesi 10 dan 20'ye kadar artırılarak yapılan deneyler sonucunda elde edilmiş olunan istatistiksel veriler aşağıdaki Şekil 2 ile verilmiştir. Şekilde dikey eksen nümerik kutup atama işlemi sonucunda elde edilen hatanın onluk tabanda logaritmasını, yatay eksen ise sistem mertebesini temsil etmektedir. Kesikli çizgiler ise standart sapma alt ve üst değerlerini temsil etmektedir. Şekil'den de görüldüğü gibi sistem mertebesi ile elde edilen hatanın logaritması arasında lineer bir ilişki mevcuttur. Standart sapmalar ise yine sistem mertebesine bağlı olarak artmaktadır.

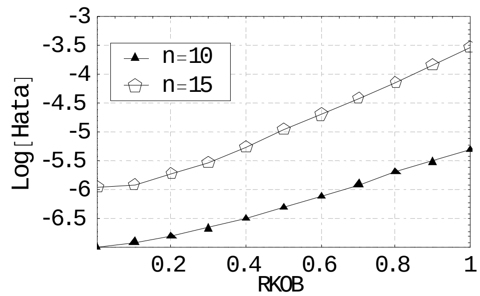


Şekil 2: Sistem mertebesi ile hataların değişimi arasındaki ilişkiyi veren bir grafik. Dikey eksen nümerik kutup atama işlemi sonucunda elde edilen hatanın onluk tabanda logaritmasını, yatay eksen ise sistem mertebesini temsil etmektedir. Kesikli çizgiler ise standart sapma alt ve üst değerlerini temsil etmektedir.(RKOB=0.5)

Eğer sistem mertebesi sabit tutulup, açık çevrim sistemin ve hedeflenen kapalı çevrim sistemin kutupları için RKOB değeri değiştirildiği takdirde elde edilecek olan grafik ise aşağıdaki Şekil 3 ile verilmiştir. Şekil elde edilirken sistem mertebesi 10 da sabitlenerek RKOB değeri 0 dan 1'e kadar artırılmıştır. Şekilden de kolaylıkla görülebileceği gibi RKOB'nin artışı ile elde edilen hataların logaritması arasında lineere yakın bir ilişki mevcuttur. Standart sapmalar ise yine RKOB değerine bağlı olarak artmaktadır. Şekil 4'de ise 10. ve 15. mertebeden sistemler için hataların ortalama değeri ile RKOB arasındaki ilişki aynı grafik üzerinde verilmiştir.



Şekil 3: RKOB ile hataların değişimi arasındaki ilişkiyi veren bir grafik. Dikey eksen nümerik kutup atama işlemi sonucunda elde edilen hatanın onluk tabanda logaritmasını, yatay eksen ise RKOB değerini temsil etmektedir. Kesikli çizgiler ise standart sapma alt ve üst değerlerini temsil etmektedir.(n=10 sabit)



Şekil 4: 10. ve 15. mertebeden sistemler için RKOB'nin değişimi ile hataların ortalama değeri arasındaki ilişki veren grafik.

7.SONUÇ

Artan sistem mertebesinin ve reel kutup sayısının kutup atama işleminde ortaya çıkan nümerik hataları artırdığı eskiden beri bilinen bir gerçektir. Bu çalışmada ilk olarak nümerik hatalardaki bu artışın ne ölçüde olduğu bilimsel olarak ortaya konmuştur. Buna göre açık ve kapalı çevrim sistem reel kutuplarının tüm kutup sayısına oranı arttıkça hata üstel olarak artmaktadır. Bundan sonraki çalışmalar kutup atama işlemindeki nümerik hataların diğer olası kaynaklarının saptanması yönünde ilerleyecektir.

KAYNAKLAR

[1] M.T Söylemez, 1999. Pole Assignment for uncertain systems, UMIST Control Systems Centre Research Studies. ISBN 0 86380 246 X

[2] M.T Söylemez, and N.Munro, Robust pole assignment in uncertain systems *IEE Proc-Control Theory Appl.*, Vol. 144, No 3, May 1997

[3] N.J. Higham, 1996. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms SIAM Society for Industrial an Applied Mathematics, p,40-67.

[4] Burkard, R.E., Derigs, U. : 'Assignment and matching problems' (Springer-Verlag, 1980)

[5] M.T Söylemez, Munro, N., 1998 Pole assignment and symbolic algebra: a new way of thinking, *UKACC International Conference on CONTROL '98, 1-4 September 1998, Conference Publication No.455, IEE*

[6] Bozkurt, E.Murat, Nümerik kutup yerleştirme işleminde hata analizi. *İstanbul Teknik Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi* (2006)