PERİYODİK DALGA KILAVUZUNUN SPEKTRUMUNDA KESİM FREKANSININ AYRILMASI

Victor A. POGREBNYAK **Uğur C. HASAR** **Ömer E. İNAN**

Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Çukurova Üniversitesi, 01330, Balcalı, Adana

vpog@mail.cu.edu.tr ugurcem@eemb.cu.edu.tr oevinan@yahoo.com

Anahtar sözcükler:Dalga kılavuzu, Periyodik Yapı, Bant Aralığı

ÖZET

Periyodik oluklu dalga kılavuzunun kalınlığındaki değişikliğin, bazı değerlerinde, kesim frekanslarından bir tanesinin yasak aralık kadar ikiye ayrılacağı, diğer kesim frekanslarının ise periyodiklikten dolayı sadece ufak kaymalara maruz kalacağı gösterilmiştir. Bu ayrılma, dalga kılavuzunun elektromanyetik spektrumunda ilave bir modun oluşmasına sebep olur.

1. GİRİŞ

Periyodik yapılardaki dalga yayılımının analizi, filtreler, çoklu ayırıcılar, mikrodalga optoelektroniği, yüksek yönlenimli antenler, vb gibi [1-7] mikrodalga teknolojilerinin pek çok sahasında yoğun olarak kullanılmasından dolayı çok önemli bir yere sahiptir.

Periyodik yapılardaki dalga yayılımının temel fiziksel özelliği olarak bilinen Bragg yansıma olayı veya Bragg rezonansı, yasaklanmış bant genişliğinin, yapıların elektromanyetik spektrumunda artmasına neden olmaktadır [1, 2]. Bragg yansıması hem sınırlandırılmamış periyodik ortam durumunda hem de periyodik elektromanyetik dalga kılavuzu örneğindeki gibi sınırlandırılmış periyodik yapı durumunda oluşmaktadır. Bundan başka, Bragg yansıması her iki durumda da Bragg yasası [1 - 7] olarak bilinen bir koşulda ortaya çıkar. Bragg yasası, periyodik dalga kılavuzu ekseni, örnek olarak x-ekseni, boyunca ilerleyen dalgaların yapıcı girişimlerini matematiksel olarak formülize eden bir yasadır. Entegre optikte, Bragg yansıması, boyuna modların (x-birleşenlerin) birleşmesi veya boyuna faz eşleşmesi olarak da adlandırılmaktadır [5].

[8] numaralı çalışmada, belirli durumlarda, dalganın enine bileşenlerinin (durağan dalgaların) birleşiminin olduğu ve bunun da oluklu dalga kılavuzunda dalga yayılımına çok fazla etki ettiği gösterilmiştir. Farklı uzay harmonilerinin enine bileşenlerinin birleşmeleri, Bragg olmayan bant aralığını arttırmaktadır. Boşluklar, dalga kılavuzunun her modunun kesim frekansı ile Bragg rezonans frekansı arasında bulunmaktadır [8].

Raporda sunulan analiz, periyodik oluklu dalga kılavuzunda kesim frekansının ayrılması olayını açıklar. Tek katmanlı düzlemsel bir dalga kılavuzunun spektrumunda kesim frekansının konumunun, katmanın kalınlığıyla değiştiği bilinmektedir. Periyodik dalga kılavuzunda, yapının periyoduna olan ilave bir bağımlılık ortaya çıkmaktadır. Geometrik boyutlara dayalı bu bağımlılığın rezonant bir karakteristiğe sahip olduğu bulunmuştur. Periyodik dalga kılavuzunun bazı kalınlık değerlerinde, kesim frekanslarından biri yasak aralık kadar ikiye ayrılır.

2. BAŞLANGIÇ DENKLEMLERİ

Periyodik oluklu dalga kılavuzu $y_d(x) > y > y_{-d}(x)$ uzayını dolduran ve profilleri, aşağı levha için $y_d(x) = -d/2 + \xi\cos(qx)$ ve yukarı levha için $y_d(x) = d/2 + \rho\cos(qx+\theta)$ denklemleri ile verilen metal levhalar arasında sıkıştırılmış bir di elektrik katmanından yapılmış olsun. Burada d dalga klavuzunun ortalama kalınlığını, $q = 2\pi/a$, ξ , ρ ve a, olukların büyüklüğü ve periyodunu, θ parametresi ise üst ve alt periyodik oluklar arasındaki faz farkını gösterir. Bu durumda karakteristik değer problemi iki boyutlu dalga denkleminin çözümüne indirgenmiş olur.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\varphi = 0. \qquad (1)$$

Bu denklem aşağıdaki sınır koşuluna tabidir.

$$\varphi(x, y_{-d}(x)) = \varphi(x, y_d(x)) = 0 \qquad (2)$$

Burada $\varphi(x, y)$, örneğin, TE dalgasının elektrik alanının z bileşeni, E_z, ω dalga frekansını, ε

katmanın di elektrik sabitini, c ışık hızını göstermektedir. Sınır periyodikliğinden dolayı $\varphi\left(x,y\right)$ aşağıdaki gibi

$$\varphi(x,y)=\sum_n[a_n\cos(k_{yn}y)+b_n\sin(k_{yn}y)]\times \exp[j(k_x+nq)x] \quad (3)$$

Fourier serisi formunda gösterilebilir (Floquet Teoremi).

Burada a_n ve b_n Fourier serisi katsayılarını, k_{yn} ve k_x, sırasıyla $\boldsymbol{k}$ dalga vektörünün enine ve boyuna bileşenlerini göstermektedir. (1)'deki dalga denklemi (3) nolu eşitlik yardımıyla

$$\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-(k_x+nq)^2-k_{yn}{}^2=0 \quad (4)$$

dispersiyon eğrisinin, $\omega(\boldsymbol{k})$, bulunmasına yarayacak şekilde yazılabilir.

(3) denklemini sınır koşulunda yerine yazarsak, a_n ve b_n katsayıları için lineer bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemin determinantını sıfır için çözersek k_{yn}'nin izin verilen değerlerini dolayısıyla da dalga kılavuzunun frekans spektrumunu buluruz. Küçük oluklar için yani $\xi/d<<1$ ve $\rho/d<<1$ için, ilk üç uzay harmonisini elde etmek yeterlidir. Sonuç olarak, k_{y0}'ın $k_x=0$'daki izin verilen değerlerini bulmak için

$$\tan(k_0d)=\frac{1}{2}(\xi+\rho^2)\frac{k_0k_1}{\tan(dk_1)}-\frac{\xi\rho k_0k_1\cos(\theta)}{\cos(k_0d)\sin(k_1d)} \quad (5)$$

karakteristik denklemi elde edilmiş olur.

Burada k_1 ve k_{-1} ($k_1=k_{-1}=\sqrt{k_0^2-q^2}$) ilk harmonisinin dalga numaralarıdır. (5) denkleminde ve aşağıdaki denklemlerde k_{yn} dalga numaralarındaki y alt indisi çıkartılmıştır.

3. KESİM FREKANSI KAYMALARI

Denklem (5)'in çözümü, ξ ve ρ'ya göre ardışık yaklaşım metodu ($k_0=k_0^{(0)}+\delta k+...$) ile bulunabilir. İlk olarak, $\xi=0$ ve $\rho=0$ için (yani pürüzsüz bir dalga klavuzu için), denklem (5)'ten $\tan\left(k_0^{(0)}d\right)=0$ bulunur; böylece,

$$k_0^{(0)}=\frac{p\pi}{d}\equiv k_{op},\quad \omega_{op}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{p\pi}{d},\ p=1,2,3... \quad (6)$$

eşitliği elde edilir.

Pürüzsüz düzlemsel dalga kılavuzlarında çok iyi bilinen modlar ve kesim frekansları bulunmaktadır.

Bir sonraki yaklaşımda, $\rho\neq0$ ve $\xi\neq0$ koşullarında, pürüzsüz dalga kılavuzundaki konuma bağlı olarak, kesim frekansları ve kesim frekanslarının kaymaları, $\delta\omega_p$, için

$$\omega_p=\omega_{op}[1+\frac{\xi^2+\rho^2}{2d}k_1\cot(k_1d)+(-1)^{p+1}\frac{\xi\rho k_1\cos\theta}{2d\sin(k_1d)}] \quad (7)$$

$$\delta\omega_p=\omega_{op}[\frac{\xi^2+\rho^2}{2d}k_1\cot(k_1d)+(-1)^{p+1}\frac{\xi\rho k_1\cos\theta}{2d\sin(k_1d)}] \quad (8)$$

denklemleri elde edilir.

Denklem (7), spektrumdaki kesim frekansının konumunu, periyodik dalga kılavuzunun geometrik parametreleri olan ξ, ρ, d ve a'nın bir fonksiyonu olarak tanımlar. Denklem (5) ve (7), denklem (6)'nın pürüzsüz dalga kılavuzu için karşılıklarıdır. Denklem (7)'ye bakıldığında, ω_p değerinin, dalga kılavuzunun geometrik boyutları üzerindeki önemli sayılabilecek bağımlılığı görülebilir. İlk olarak, denklem (7)' den, sistemin rezonans davranışı görülebilir, fakat bu arada ω_p değerinin θ açısına olan bağımlılığı da önemlidir; mesela bir periyodik sınırın faz kaymasının diğerine göre bağımlılığı. Aşağıda göreceğimiz gibi, iki bağımlılık da dalga kılavuzu içindeki dalga yayılımıyla ilgili yeni özelliklerin oluşmasına yol açmaktadır.

4.KESİM FREKANSININ AYRILMASI

Denklem (5) ve (7)' den rezonans oluşumunun, aşağıdaki şartlara bağlı olduğu görülür.

$$k_1=\frac{m\pi}{d}\equiv k_{1m},\qquad m=1,2,3\,... \quad (9)$$

(9) nolu denkleme k_1 ve k_0 değerlerini yerleştirerek, rezonans koşulu, dik üçgen ilişkisi şeklinde

$$k_{op}{}^2+k_{1m}{}^2=q^2,\qquad m<p \quad (10)$$

veya rezonans kalınlığı d_r ile yapının periyodu a_r arasındaki açık ilişki şeklinde

$$d_r = \frac{a_r}{2}\sqrt{p^2 - m^2} \tag{11}$$

yeniden yazılabilir.

Seçilen rezonans kalınlığı d_r ve periyot a_r için, (11) ilişkisi mod indisleri p ve m'nin tek çifti için geçerlidir. Bundan dolayı (11) koşulu altında kesim frekanslarından sadece bir tanesi rezonans durumunda olur. Bu frekans ω_{pm} olarak gösterilmiştir. Eğer d artacak olursa, bu durumda eşitlik, mod indeksi p'nin bir sonraki büyük değeri için geçerli olacaktır.

Rezonans koşulunun fiziksel anlamının açık hale gelmesi için, son denklemler sıfırıncı, λ_0, ve birinci, λ_1, uzay harmonileri $(\lambda = 2\pi / k)$ ile ilişkilendirilmiş durağan dalgaların dalga boyu cinsinden

$$d = p\frac{\lambda_0}{2} = m\frac{\lambda_1}{2} \tag{12}$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (12), dalga kılavuzunun kalınlığı d'nin, sıfırıncı ve birinci uzay harmonileriyle ilişkilendirilmiş, fakat farklı p ve m tam sayılarına sahip durağan dalgaların yarım dalga boylarının eş zamanlı katları olması durumunda, rezonans bölünmesinin oluşacağını göstermektedir.

Bragg yansımasının oluşmasını sağlayan boyuna ilerleyen dalgaların birleşmeleri hakkındaki yaygın değerlendirmenin tersine, (9) - (12) denklemlerinin, enine bileşenlerin (durağan dalgaların) birleşimi koşulu olduğunu vurgulamak uygun olacaktır. Bu yüzden rezonansın doğası, Bragg olmayan tiptendir.

(5) - (7) denklemlerinin rezonans durumundaki çözümleri, rezonanstaki kesim frekansının, boşluk değeri kadar, $\delta\omega_{pm} = \omega_{pm}^{+} - \omega_{pm}^{-}$, ω_p^{+} ve ω_p^{-} olarak ikiye ayrıldığını göstermektedir.

$$\omega_{pm}^{\pm} = \omega_{op}[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}d}\frac{m}{p}(\xi^2 + 2(-1)^{p-m+1}\xi\rho\cos\theta + \rho^2)^{1/2}] \tag{13}$$

$$\delta\omega_{pm} = \sqrt{2}\frac{\omega_{op}}{d}\frac{m}{p}(\xi^2 + 2(-1)^{p-m+1}\xi\rho\cos\theta + \rho^2)^{1/2} \tag{14}$$

$\delta\omega_{pm}$ değeri yasaklanmış boşluk olduğundan dolayı, bölünme dalga kılavuzunun frekans spektrumundaki ilave modun, ω_{pm}^{-}, oluşmasına neden olur. Bu mod, p. modun spektrumunun, ω_{pm}^{+}, kenarından boşluk değeri, $\delta\omega_{pm}$, kadar ayrılmıştır.

Bölünmenin değeri, sınırların simetrisine ve alan konfigürasyonuna bağlıdır. Bu durum detaylı olarak sadece iki durum için analiz edilmiştir.

1) Asimetrik sınırlar durumu, $\theta = 0$,
2) Simetrik sınırlar durumu, $\theta = \pi$ (Buradaki simetri, dalga kılavuzunun merkez çizgisine, yani x-eksenine göredir).

<u>1) Asimetrik dalga kılavuzu,</u> $\theta = 0$: Bu durumda, $\xi = \rho$ koşuluyla, uygun sınırlar arasındaki mesafe sabit ve x koordinat ekseninin herhangi bir yerinde d'ye eşittir.

a) Eğer p ve m'nin ikisi de çift veya ikisi de tek sayı ise rezonans durumundaki kesim frekansı ve boşluk denklemi

$$\omega_{pm}^{\pm} = \omega_{op}[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{p}\frac{|\xi - \rho|}{d}] \;, \tag{15}$$

$$\delta\omega_{pm} = \sqrt{2}\frac{m}{p}\frac{|\xi - \rho|}{d}\omega_{op} \tag{16}$$

şekilde yazılır.

b) Eğer p çift fakat m tek ise veya tam tersi ise, rezonans durumundaki kesim frekansı ve boşluk ifadeleri

$$\omega_{pm}^{\pm} = \omega_{op}[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{p}\frac{|\xi + \rho|}{d}] \;, \tag{17}$$

$$\delta\omega_{pm} = \sqrt{2}\frac{m}{p}\frac{|\xi + \rho|}{d}\omega_{op} \tag{18}$$

şeklinde yazılır.

2) <u>Simetrik dalga kılavuzu,</u> $\theta = \pi$: Bu durumda levhalar arasındaki açıklık x-koordinatına göre $d + \xi + \rho$ ve $d - \xi - \rho$ değerleri arasında değişmektedir.

a) Eğer p ve m'nin ikisi de çift veya ikisi de tek sayı ise, bölünmüş kesim frekansının, $\delta\omega_{pm}$, ifadesi (17) ve (18) denklemlerindeki gibidir.

b) Eğer p çift ve m tek veya tam tersi ise, bölünmüş kesim frekansının, $\delta\omega_{pm}$, ifadesi (15) ve (16) denklemlerindeki gibidir.

(17) ve (18) denklemlerinden ilk olarak, beklendiği üzere bant genişliğinin, $\delta\omega_{0p}$, periyodiklikten kaynaklanan pertürbasyonla, $|\xi+\rho|/d$, doğru orantılı olduğu görülmektedir. Fakat denklem (15) bu genel kuralın her zaman geçerli olmadığını göstermektedir. Periyodikliğin etkileri, sınırların ve alanın simetrisine bağlıdır.

Asimetrik dalga kılavuzu durumunda, (15) ve (16) denklemlerde belirtildiği gibi, kesim frekansı ayrımı $\xi=\rho$ ve her iki mod simetrik, yani hem p hemde m çift, tek veya asimetrik, iken ortadan kalkar. Bu koşulda kesim frekansı, ω_{0p}, değişmez ve düzgün yüzeyli dalga kılavuzundaki değerini korur.

Böylece, elektromanyetik alanın bu belirli konfigürasyonu ve sınırların şekli için, dalga, rezonans durumunda hem dalga kılavuzunun periyodik profilini hissetmez hem de kesim frekansı kaymasında artışa neden olmaz.

Eğer modun birinci harmonisinin veya ikinci harmonisinin çiftliğini diğer parametreleri sabit tutarak değiştirmiş olsaydık, ayrılmış kesim frekansları arasındaki boşluk, (17) ve (18) denklemlerinde tanımlandığı üzere rezonans bölünmesinin genel kuralına uyacak şekilde maksimum değerini alırdı.

5.SONUÇ

Yukarıdaki çalışma, geometrik rezonansın periyodik oluklu dalga klavuzunda kesim frekansının ayrılmasının, dalga klavuzunun kalınlığı ve periyodu arasındaki özel bir ilişkiden dolayı meydana geldiğini göstermektedir.

Rezonanstaki bu ayrılma dalga klavuzu spektrumunda ilave modun, ω^{-}_{pm}, oluşmasına neden olmaktadır. Bu mod periyodik dalga klavuzunun p. modunda, boşluk değeri kadar alt kenardan ayrılmaktadır. Kalınlığın artmasıyla bütün birbirini izleyen daha yüksek kesim frekansları benzer ayrıma maruz kalır.

Boşluğun değeri, verilen kesim frekansına ve sınırların şekline (θ açısı) karşılık gelen alan konfigürasyonuna bağlıdır. Boşluk, örnek olarak asimetrik sınırlar durumu ve elektromanyetik alanın asimetrik konfigrasyonu için, başka bir ifadeyle baskın $(n=0)$ ve ilk $(n=1)$ uzay harmonilerinin mod indisleri p ve m farklı çift sayı değerlerine sahip olduğunda maksimum değerine ulaşır.

Tam tersi bir durumda, (15) ve (16) denklemleri, elektromanyetik alan ve sınırların şekli öyle bir simetriyle birleşir ki; bu birleşme kesim frekansında herhangi bir kaymaya yol açmaz.

Rezonans osilasyonunun fiziksel doğası oldukça basittir: dalga kılavuzunun kalınlığı, baskın ve ilk uzay harmonilerinin yarım dalga uzunluklarının eş zamanlı katları olduğu zaman, $d=p\lambda/2=m\lambda_1/2$, rezonans osilasyonu oluşur. Burada, bilinen $p\lambda_0=m\lambda_1$ koşulu, durağan dalganın rezonansta olduğunu gösterir.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışma 101E045 proje numarasıyla Türkiye Bilim ve Teknik Araştırma Konseyi (TÜBİTAK) tarafından desteklenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Brillouin L., "Wave Propagation in Periodic Structures", Mc Graw-Hill. Reprented by Dover, 2nd ed. New York, 1953.
[2] Harvey A.F., Periodic and Guiding Structures at Microwave Frequencies, IRE TRANS. MICROWAVE THEORY TECH. Vol 8, pp 30-61 (1960).
[3] Tamir T., Wang H.C., Oliner A.A., Wave Propagation in Sinusoidally Stratified Dielectric Media, IEEE TRANS. MICROWAVE THEORY TECH. Vol 12, pp 323-335 (1976).
[4] Elachi C., Wave in Active and Passive Periodic Structures, A Review, PROC. IEEE, Vol 64, 1666 - 1968 (1976).
[5] Yariv A., Yeh P., "Optical Waves in Crystals/ Propagation and Control of Lazer Radiation", J. Wiley, New York, 1984.
[6] Colling R.E., "Field Theory of Guided Waves", 2nd ed., IEEE PRESS, NJ,1991.
[7] Solimeno S., Crosignani B., DiPorto P., "Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation", Academic Press, Inc. 1986.
[8] Pogrebnyak V.A., Electromagnetic Standing Wave Resonances in a Dielectric Waveguide with a Periodically Irregular Boundary, PHYS. REV., Vol 58, pp. 5261-5264 (1998).