ZAMANLA DEĞİŞEN LİNEER SİSTEMLERİN DALGACIK ANALİZİ İLE ÇÖZÜMÜ

Hasari KARCİ[1] **Gülay TOHUMOĞLU[2]**

Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Mühendislik Fakültesi
GaziantepÜniversitesi, 27310, Gaziantep

[1] nubus_k@hotmail.com [2] g_tohumoglu@gantep.edu.tr

Anahtar sözcükler: Zamanla değişen sistemler, dalgacık dönüşümü

ÖZET

Bilindiği gibi son yirmi beş yılda dalgacık teorisindeki hızlı gelişmelerden dolayı dalgacık dönüşümünün uygulamalarını farklı alanlarda görmekteyiz. Dalgacıkların lokal olarak tanımlı ve orthogonal fonksiyonlar olması zamanla değişen lineer sistemlerin çözümünde uygun olarak kullanımını sağlamaktadır.

Bu bildiride zamanla değişen lineer sistemlerin dalgacık ortamında analizi gösterilmektedir. Sistem davranışını tanımlayan denklemler türev, integral, ve çarpım matrisleriyle algebraik olarak ifade edilerek bu metot genelleştirilmiştir.Özel olarak sistem denklerimde kullanılan türev, integral, ve çarpım operatörleri dalgacık ortamında matrislerle gösterimi yapılmıştır. Yapılan türetimlerin uygulaması örnek üzerinde gösterilmiş olup sonuçlar analitik çözümle karşılaştırılmıştır.Ortalama hatanın sıfira yakınlığı gözlemlenmiştir.

1. GİRİŞ

Zamanla değişen sistemlerin analizi zamanla değişmeyen sistemlerin analizinden çok karmaşıktır. Zamanla değişen sistemlerin analizi için zaman ve frekans ortamında farklı metodlar bulunmaktadır [1]. Özellikle periyodik olarak zamanla değişen sistemlerin kalıcı çözümünü bulmak için kullanılan metodlardan birisi spektral analiz metodudur [2,3]. Spektral analiz metodu periyodik özelliğinden dolayı Fourier dönüşümü kullanarak sistem denklemlerini algebraik matris-vektör ilişkisine dönüştürmüştür. Bu metodun kesikli zaman sistemlerine de uygulanabilirliği gösterilmiştir [4]. Temel olarak spektral analiz metodunun zamanla değişen sistemlere uygunluğu düşünülerek dalgacık ortamında sistem analizi çözümü düşünülmüştür.

Dalgacık dönüşümü son 25 yılda dikkatleri üzerine çekerek teorik gelişmelerin yanısıra çok farklı alanlara uygulanmaktadır[5-7]. Dalgacıkların temel özelliği lokal olarak tanımlanması ve orthogonal fonksiyonlar olması zamanla değişen lineer sistemlerin çözümünde uygun olarak kullanımını sağlamaktadır. Genel olarak ortogonal temel fonksiyonların, lineer sistemlerin analitik çözümünde kullanımı bilinen bir metottur. Daha önceki ortogonal fonksiyonlar $a \le t \le b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar olmalarından dolayı; belli zaman aralığında yerel değişim gösteren sinyallerin analizinde bu fonksiyonlar yetersiz kalmaktadır. Bu metotların temel amacı sistem parametrelerini temel fonksiyonların lineer toplamı şeklinde yazarak sistemin diferansiyel denklemini cebirsel denklemlere dönüştürmektir. Sistem analizinde dalgacık kullanımı yeni bir uygulamadır. Durum denklemleriyle ifade edilen sistemde sadece integral operatörü Haar dalgacığı için tanımlanarak lineer sistemlerin analizinde dalgacıklar kullanılmıştır [9].

Bu bildiride zamanla lineer değişen sistemlerin çözümü için farklı dalgacıklar kullanarak gerekli olan türev, integral, ve çarpma ve ters alma matrisleri tanımlanarak genel bir metot oluşturulmaya çalışılmıştır. Bölüm 2 de kısaca dalgacık dönüşümü, sistem denklerinde kullanılacak türetimler bölüm 3 te izleyen bölümde sonuç verilmektedir.

2. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde waveletlerin genel özellikleri [1] kısaca verilmiştir.

$L^2(R)$ Hilbert uzayının temel fonksiyonları olan dalgacıklar bir ana dalgacığın, $\psi(t)$'nin daraltılıp genişletilmesi ve zamanda kaydırılması ile elde edilir. Ana dalgacık ölçekleme (scale) ve kaydırma (shift) faktörünün örneklenmesiyle kesikli dalgacık tanımlanır.

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \qquad (2.1)$$

Bir $L^2(R)$ kümesi elemanı olan fonksiyon Dalgacık dönüşümüyle şu şekilde gösterilir:

$$f(t)=\sum_k c_J(k)2^{J/2}\varphi(2^J t-k) \qquad (2.2)$$

Ana dalgacık fonksiyonu $\psi(t)$ ise $\varphi(t)$ ölçek fonksiyonundan elde edilir.

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k\varphi(2t-k) \qquad (2.3)$$

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} g_k\varphi(2t-k) \qquad (2.4)$$

$$g_k=(-1)^k h_{L-k-1} \qquad k=0,1,....,L-1 \qquad (2.5)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1 \qquad (2.6)$$

Dalgacık fonksiyonları lokal tanımlı fonksiyonlar oldukları için $\varphi(2^J t-n)$ fonksiyonu sadece $[\frac{k}{2^J},\frac{k+1}{2^J}]$ aralığında sıfırdan farklıdır. Yani

$$\varphi(2^J t-n)\neq 0 \qquad \frac{k}{2^J}\leq t\leq\frac{k+1}{2^J} \qquad (2.7)$$

Dalgacıklarla $L^2(R)$ uzayında çokçözünürlük analizi yapılır ve $L^2(R)$ uzayı birbirini kapsayan alt kümelerle aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$....\subset V_{-2}\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2.... \; ; \; \bigcap_{j\in Z} V_j=0, \quad \overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$$

W_j kümesini, V_j kümesini V_{j+1} kümesine tamamlayan ortogonal küme olarak tanımlarsak $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$ olur. Böylece $L^2(R)$ kümesi W_j kümesinin direk toplamları $L^2(R)=\bigoplus_{j\in Z} W_j$ olur.

$f(t)\in L^2(R)$ fonksiyonunun kesikli dalgacık açılımı

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(t-k)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{J} d_j(k)2^{j/2}\psi(2^j t-k)$$

şeklinde yazılabilir. Bu açılım

$$c_{j+1}(k)=\sum_m c_j(m)h(k-2m)+\sum_m d_j(m)g(k-2m)$$

kullanılarak

$$f(t)=\sum_k c_J(k)2^{J/2}\varphi(2^J t-k)$$

denklem (2.2) de ki gibi elde edilir.

3.ZAMANLA DEĞİŞEN SİSTEMLERDE DALGACIK MATRİSLERİ

Zamanla lineer değişen sistemlerin dalgacık ortamındaki analizi yapmak için özellikle n. derece diferansiyel denklem ya da durum denklemleri gösterimi ve bu denklemlerin çözümünde kullanılacak olan türev, integral ve çarpım matrislerini tanımlayarak sistem denklemleri cebirsel olarak ifade edilip kalıcı çözümü hesaplanacaktır. Bunun için özellikle türev, integral ve çarpım operatörlerinin dalgacık ortamındaki etkileri ifade edilecektir.

3.1 Türev Matrisi

$y(t),x(t)\in L^2(R)$ olmak üzere $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonlarının kesikli dalgacık açılımları

$$y(t)=\sum_n y_J(n)2^{J/2}\varphi(2^J t-n) \qquad (3.1)$$

$$x(t)=\sum_k x_J(k)2^{J/2}\varphi(2^J t-k) \qquad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. $y(t)$ ve $x(t)$ sinyalleri arasındaki ilişki

$y(t)=\frac{d}{dt}(x(t))$ şeklinde ise

$$x'(t)=\sum_k x_J(k)2^{3J/2}\varphi'(2^J t-k) \qquad (3.3)$$

olduğundan $y_J(n)$ katsayıları

$$y_J(n)=<x'(t),2^{J/2}\varphi(2^J t-n)> \qquad (3.4)$$

ile hesaplanabilir. Denklem (3.3)'ü denklem (3.4) de yerine koyarsak

$$y_J(n)=\sum_k x_J(k)2^J\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\tau)\varphi(\tau+k-n)dt \qquad (3.5)$$

$r_i=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\tau)\varphi(\tau-i)dt$ şeklinde tanımlarsak

$$y_J(n)=\sum_k x_J(k)2^J r_{n-k} \qquad (3.6)$$

$\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ vektörleri $y(t)$ ve $x(t)$ 'nin dalgacık katsayı vektörleri $\mathbf{D}$ ise türev operatörünün matrisi olmak üzere

$y(t)=\frac{d}{dt}(x(t))$ ifadesini dalgacık ortamında yazarsak,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{DX} \qquad (3.7)$$

öyleki

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_0 & y_{+1} & y_{-1} & y_{+2} & y_{-2} & \cdots \end{bmatrix}^T \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_0 & x_{+1} & x_{-1} & x_{+2} & x_{-2} & \cdots \end{bmatrix}^T \qquad (3.9)$$

$$\mathbf{D}=2^J\begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{+1} & r_{-2} & r_{+2} & \cdots \\ r_{+1} & r_0 & r_{+2} & r_{-1} & r_{+3} & \cdots \\ r_{-1} & r_{-2} & r_0 & r_{-3} & r_{+1} & \cdots \\ r_{+2} & r_{+1} & r_{+3} & r_0 & r_{+4} & \cdots \\ r_{-2} & r_{-3} & r_{-1} & r_{-4} & r_0 & \cdots \\ & & \vdots & & & \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

şeklindedir.

a_n ölçek fonksiyonunun otokoralasyon katsayıları olmak üzere

$$a_n = 2\sum_{i=0}^{L-1-n} h(i)h(i+n) \quad n = 1,...L-1 \qquad (3.11)$$

r_i nın hesaplanması için [4]

$\sum_i i r_i = -1$, ve

$$r_i = 2[r_{2i} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1}(r_{2i-2k+1} + r_{2i+2k-1})]$$

denklem sisteminin çözülmesi gerekir.

3.2 İntegral Matrisi

$x(t)$ ve $y(t)$ sinyalleri L^2(R) elemanı olmak üzere şu şekilde ifade edilir:

$$x(t) = \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \varphi(2^J t - k) \qquad (3.12)$$

$$y(t) = \sum_n y_J(n) 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) \qquad (3.13)$$

Eğer $y(t)$ sinyali ile $x(t)$ sinyali arasındaki ilişki aşağıdaki gibi $x(t)$'nin integrali şeklinde ifade edilsin.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \qquad (3.14)$$

Bu durumda (3.12) ve (3.13) ifadelerini (3.14) denkleminde yerine koyar ve $y(t)$ sinyalinin dalgacık katsayılarını bulmak için $2^{J/2}\varphi(2^J t - n)$ fonksiyonu ile iç çarpımını alırsak

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \varphi(2^J t' - k) dt' 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) dt \qquad (3.15)$$

ve (2.7) ifadesini dikkate alarak iç integralin sınırlarını yeniden düzenlersek

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{n+1}{2^J}} \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \varphi(2^J t' - k) dt' 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) dt \qquad (3.16)$$

$2^J t' - k = u$ şeklinde değişken değiştirip iç integralin sınırını yeniden düzenlediğimizde

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{n-k+1} \sum_k x_J(k) 2^{-J/2} \varphi(u) du) 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) dt \qquad (3.17)$$

ifadesini elde ederiz. Ölçek fonksiyonu yerel tanımlı olduğundan (3.17) ifadesindeki iç integral ancak $k \le n$ durumunda sıfırdan farklıdır. Böylece $2^J t - k = \tau$ şeklinde değişken değiştirilir ve ölçek fonksiyonunun integralinin (2.6) ifadesinden anlaşılacağı gibi 1 olduğu da dikkate alınırsa $y_J(n)$ dalgacık katsayıları

$$y_J(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x_J(k) 2^{-J} \qquad (3.18)$$

şeklinde bulunur.

Bu durumda $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ vektörlerini (3.8), (3.9) da belirtildiği gibi alıp $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$ ifadesini dalgacık ortamında yazarsak

$$\mathbf{Y} = \mathbf{PX} \qquad (3.19)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade de $\mathbf{P}$ integral operatörünün dalgacık ortamındaki matrisidir.

$$\mathbf{P} = 2^{-J}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

3.3 Çarpım Matrisi

Zamanla değişen sistemde, $x(t)$ sinyali $m(t)$ gibi bir zamanla değişen fonksiyonla çarpılarak $y(t)$ sinyalini

$$y(t) = m(t)x(t) \qquad (3.21)$$

oluşturuyorsa, $m(t), x(t), y(t) \in L^2(R)$, her bir fonksiyonun dalgacık açılımı kullanılarak denklem (3.21) açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_n y_J(n) 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) = (\sum_k x_J(k) 2^{J/2} \varphi(2^J t - k)) (\sum_l m_J(l) 2^{J/2} \varphi(2^J t - l)) \qquad (3..22)$$

(2.7) ifadesinden

$$\varphi(2^J - k)\varphi(2^J - l) = 0 \qquad k \ne l$$

$$\varphi(2^J - k)\varphi(2^J - l) = \varphi^2(2^J - k) \qquad k = l$$

Bu durumda eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_n y_J(n) 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) = \sum_k m_J(k) x_J(k) 2^J \varphi^2(2^J t - k) \qquad (3.23)$$

ifade edilir. $y_J(n)$ katsayılarını bulmak için

$$y_J(n) = \langle m(t)x(t), 2^{J/2}\varphi(2^J t - n) \rangle \qquad (3.24)$$

$$y_J(n) = \sum_k m_J(k) x_J(k) \int_{-\infty}^{\infty} 2^J \varphi^2(2^J t - k) 2^{J/2} \varphi(2^J t - n) dt \qquad (3.25)$$

denklemlerinde $\tau = 2^J t - k$ dönüşümü kullanılarak

$$y_J(n) = \sum_k 2^{J/2} m_J(k) x_J(k) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau)\varphi(\tau + k - n) d\tau \qquad (3.26)$$

ifadesi bulunur. $\varphi^2(\tau)$ fonksiyonu da yerel tanımlı bir fonksiyon olduğundan

$$k \neq n \text{ ise } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau)\varphi(\tau + k - n)d\tau = 0 ,$$

$k = n$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau)\varphi(\tau + k - n)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^3(\tau)d\tau = 1 ,$$

yazılır. Buradan da

$$y_J(n) = 2^{J/2} m_J(n) x_J(n) \tag{3.27}$$

sonucuna varılır.

$y(t) = m(t)x(t)$ ilişkisini matris vector ilişkisi şeklinde yazarsak,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{MX} \tag{3.28}$$

öyleki

$\mathbf{M}$ çarpım matrisi

$$\mathbf{M} = 2^{J/2} \begin{pmatrix} m_0 & & & & 0 \\ & m_{+1} & & & \\ & & m_{-1} & & \\ & & & m_{+2} & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Sistem denklemlerinde kullanılacak türetimler karmaşık gibi görünsede aslında denklemler dört işlem kullanılarak çözümleniyor. Geliştirdiğimiz operatör matrislerini analitik çözümü $y(t) = 0.5 - 0.5e^{-t^2}$ olan

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + 2t\,y(t) = t \qquad y(0) = 0$$

(3.30)

basit diferansiyel denklemine uygularsak t giriş fonksiyonun dalgacık katsayıları vektörü $\mathbf{U}_t$ ve $\mathbf{M}_{2t}$ $2t$ 'nin çarpım matrisi olmak üzere, (3.30) denkleminin dalgacık ortamındaki karşılığı

$$(\mathbf{D} + \mathbf{M}_{2t})\mathbf{Y} = \mathbf{U}_t \tag{3.31}$$

şeklindedir. Bu ifadeden de

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{D} + \mathbf{M}_{2t})^{-1}\mathbf{U}_t \tag{3.32}$$

bulunur.

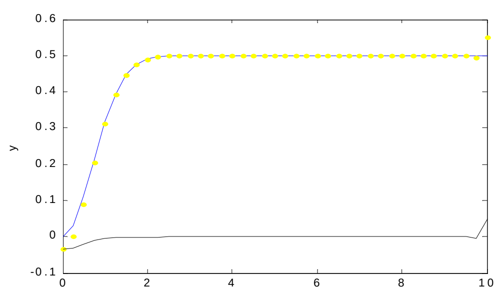

Figure 1: J=2 ve db1 için dalgacık çözümü (…)

Yukarıdaki şekilde analitik çözüm sürekli çizgi ile gösterilirken, noktalar dalgacık analizi ile elde edilen çözümdür. Ayrıca alt grafikte gösterilen sürekli çizgi ise iki çözüm arasındaki hatayı göstermektedir. Görüldüğü gibi ortalama hata miktarı sıfıra yakındır.

4. SONUÇ

Bu çalışmada zamanla değişen lineer sistemlerin analizinde dalgacık kullanımı için gerekli olan operatör matrisleri tanımlanmıştır. Bu konudaki literatür eksikliğinin giderilmesi ve sadece Haar dalgacığı için tanımlanan integral operatörü [9] diğer operatörler için ve farklı dalgacıklar için tanımlanarak genelleştirilmiştir. Dalgacık analizinin basit bir diferansiyel denklem üzerindeki uygulaması gösterilmiştir. Elde edilen sonuç bu metodun zamanla değişen lineer sistemlere uygulanabilirliğini göstermektedir. İleriki çalışmalarda yüksek mertebeli denklemlerin çözümüne uyarlanması düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

[1] Tucker D.G., *Circuits with Periodically Varying Parameters*, MC DONALD, London, 1964.

[2] Bardakjian B.L. and Sablatash M., Spectral analysis of periodically time-varying linear networks, IEEE TRANS. CIRCUIT THEORY **CT-19**, pp 297-299, 1972.

[3] Tohumoglu G. and Köksal M., Steady-state analysis of periodically time-varying networks by new developments in the spectral domain, INT JOURNAL OF CIRCUIT THEORY AND APPLİCATİONS, vol.24, pp.519-528 (1996).

[4] Tohumoglu G., Spectral analysis of periodically time-varying discrete-time systems, JOURNAL OF APPLIED MATHEMATİCS AND COMPUTATİON, January, 2005.

[5] Daubechies I., Orthonarmal Bases of Compactly Supported Wavelets, COMM PURE APPLİED MATH, Vol. XLI, 1988.

[6] Rioul O. and Vetterli M., Wavelets and signal processing, IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, pp.14-38, Oct 1991.

[7] Mallat S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, IEEE TRANS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, Vol.11, no.7, pp. 674-693, 1989.

[8] Beylkin G., On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets, SIAM J. NUMERICAL ANALYSIS, Vol. 6, pp. 1716-1740, Dec 1992.

[9] Xiangqian L., Lin Z, Analysis of Linear Time – varying Systems via Haar Wavelet, REPORT OF TSINGHUA SCIENCE AND TECHNOLOGY, 1999.