

Direnç ile Sonlandırılmış Yüksek Geçiren LC Merdiven Devrelerin Sentezi

Synthesis of Resistively Terminated High-Pass LC Ladder Networks

Metin Şengül¹, Zafer Aydoğar²

^{1,2}Mühendislik Fakültesi

Kadir Has Üniversitesi

¹msengul@khas.edu.tr, ²zaferaydogar@hotmail.com

Özet

Bu bildiride, direnç ile sonlandırılmış yüksek geçiren LC merdiven devreleri için transfer matrisi ayrıştırmasına dayanan bir sentez algoritması sunulmuştur. Algoritmada, çekilen elemanın değeri ve kalan devrenin saçılma transfer matrisi, tüm devrenin saçılma transfer matrisi katsayıları kullanılarak ifade edilmiştir. Önerilen sentez algoritmasının kullanımını açıklamak amacıyla bir örnek verilmiştir.

Abstract

In this paper, a transfer matrix factorization based synthesis algorithm for resistively terminated high-pass LC ladder networks is presented. In the algorithm, component value of the extracted element and the scattering transfer matrix of the remaining network are formulated in terms of scattering transfer matrix coefficients of the whole network. An example is presented to exhibit the application of the proposed synthesis algorithm

1. Giriş

Literatürde, filtre sentezi için klasik prosedürler tanımlanmıştır [1]-[3]. Bu metotlarda, araya-girme kaybı fonksiyonu verilir, yansıma katsayısının $\rho(p)$ modül-karesi bulunur $|\rho(j\omega)|^2$, ve kararlı bir $\rho(p)$ elde edilir, daha sonra buna karşılık gelen giriş empedans fonksiyonu $Z(p)$ hesaplanır. Bu empedans fonksiyonu kullanılarak, tanımlanan araya-girme kaybını sağlayan, direnç ile sonlandırılmış kayıpsız bir devreye ulaşılır.

Elde edilen giriş empedans fonksiyonu sürekli-kesirlere ayırma metodu kullanılarak sentezlendiğinde merdiven tipi devreler elde edilir. Bazı çalışmalarda, merdiven tipi devrelerdeki eleman değerleri için açık ifadeler verilmiştir [4]-[8].

Bu bildiride, yüksek geçiren LC merdiven devreleri için bir sentez algoritması sunulmuştur. Devreleri tanımlamak için yansıma parametrelerinin Belevitch notasyonu ($h(p)$, $g(p)$ ve $f(p)$ polinomları) kullanılmış, tüm eleman değerleri, bu polinomların katsayıları kullanılarak hesaplanmıştır.

Benzer bir algoritma, alçak geçiren LC merdiven devreleri için geliştirilmiş [9]. Bant geçiren ve bant söndüren LC merdiven tipi devreleri için de benzer algoritmalar geliştirilmektedir.

Kayıpsız iki-kapılı devrelerin ardışıl ayrıştırılması literatürde farklı metotlar ile formüle edilmiş klasik bir problemdir. Standart yaklaşım, verilen giriş fonksiyonu (empedans veya yansıma) ile başlamak ve çekilen iletim sıfırına göre temel bölümlerin ayrıştırılmasıdır. Bu yaklaşımda, eleman çekme işlemi ve kalan devrenin empedans veya yansıma fonksiyonu hesaplama işlemi çok yoğun hesaplamalar gerektirmektedir. Alternatif bir metot, devreye ait saçılma transfer matrisinin ayrıştırılmasıdır. Sadece üç polinom ile ifade edilebiliyor olmasından dolayı bu alternatif yol daha tercih edilir olmuştur [10]. Verilen bir transfer matrisinin, daha basit iki transfer matrisinin çarpımı şeklinde yazılması konusunda Fettweis tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır [10]. Problem doğrusal bir denklem seti çözümüne indirgenmiştir.

Direnç ile sonlandırılmış kayıpsız bir iki-kapılıya (N) ait saçılma matrisi S ve saçılma transfer matrisi T şu şekilde ifade edilir [11,12]

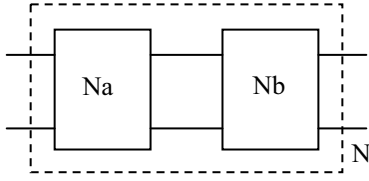
$$S(p) = \frac{1}{g(p)} \begin{pmatrix} h(p) & \alpha f(-p) \\ f(p) & -\alpha h(-p) \end{pmatrix} \quad (1a)$$

$$T(p) = \frac{1}{f(p)} \begin{pmatrix} \sigma g(-p) & h(p) \\ \sigma h(-p) & g(p) \end{pmatrix} \quad (1b)$$

Buradaki $f(p)$, $g(p)$ ve $h(p)$ polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $g(p)$ kesin Hurwitz polinomudur.
- $f(p)$ çift veya tek bir polinomdur.
- Bu üç polinom arasında şu bağıntı vardır:
 $g(p)g(-p) = h(p)h(-p) + f(p)f(-p)$. Dolayısıyla polinomlar arasındaki derece ilişkisi şu şekildedir;
 $\deg h(p) \leq \deg g(p)$, $\deg f(p) \leq \deg g(p)$.

Problem, kayıpsız iki-kapılı N devresinin, N_a ve N_b şeklinde iki kayıpsız iki-kapılıya ayrıştırılmasıdır, Şekil 1. Bu, verilen transfer matrisinin T , iki transfer matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilmesi anlamına gelmektedir [11],



Şekil 1: Kayıpsız bir iki-kapılının ardışıl ayrıştırılması.

$$T(p) = T_a(p) \cdot T_b(p) \quad (2)$$

burada

$$T_a = \frac{1}{f_a} \begin{pmatrix} \sigma_a g_{a*} & h_a \\ \sigma_a h_{a*} & g_a \end{pmatrix}, \quad T_b = \frac{1}{f_b} \begin{pmatrix} \sigma_b g_{b*} & h_b \\ \sigma_b h_{b*} & g_b \end{pmatrix}$$

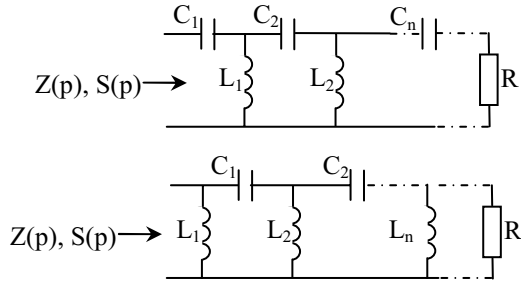
burada (*) parakonjuge işlemini göstermekte, $\{g_a, h_a, f_a\}$ ve $\{g_b, h_b, f_b\}$ polinom setleri, $\{g, h, f\}$ polinom seti ile aynı özelliklere sahip olmalı ve aşağıdaki ilişkiler sağlanmalıdır;

$$g_a g_{a*} - h_a h_{a*} = f_a f_{a*} \quad (3a)$$

$$g_b g_{b*} - h_b h_{b*} = f_b f_{b*} \quad (3b)$$

2. Direnç ile Sonlandırılmış Yüksek Geçiren LC Merdiven Devreleri

Şekil 2 'de gösterilen devreyi ele alalım, kapasitif seri kol ve endüktif paralel kol. Bu devrenin giriş empedansı $Z(p)$ (giriş yansıma faktörü $S(p)$) olsun, burada p frekans değişkenidir ($p = \sigma + j\omega$). İlk eleman ya seri kapasite ya da paralel bobindir.



Şekil 2: Yüksek geçiren LC merdiven devreleri.

Matematiksel olarak, bu devre (ikinci Cauer yapısı) aşağıdaki ifade ile tanımlanabilir,

$$Y(p) = 1/Z(p) = \frac{1}{\frac{1}{a_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{a_2 s} + \frac{1}{\frac{1}{a_3 s} + \dots}}} \quad (4)$$

İfadedeki a_i katsayıları, devrenin sıfırlarında ardışıl bölme işlemi ile hesaplanabilir.

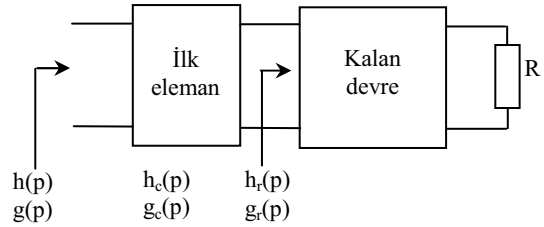
Direnç ile sonlandırılmış merdiven tipi devrenin giriş yansıması $S(p)$ ve giriş empedansı $Z(p)$, $h(p)$ ve $g(p)$ polinomları kullanılarak şu şekilde ifade edilir;

$$S(p) = \frac{Z(p) - 1}{Z(p) + 1} = \frac{h(p)}{g(p)} \quad (5)$$

$$Z(p) = \frac{1 + S(p)}{1 - S(p)} = \frac{g(p) + h(p)}{g(p) - h(p)} \quad (6)$$

Önerilen sentez algoritmasında $h(p)$ ve $g(p)$ polinomları ve $T(p)$ saçılma transfer matrisi kullanılmıştır.

İlk olarak, eleman değerleri $h(p)$ ve $g(p)$ polinom katsayıları kullanılarak hesaplanmış, daha sonra, çekilen devre elemanına ait $h_c(p)$ ve $g_c(p)$ polinomları yazılmıştır. Bu dört polinom kullanılarak kalan devrenin saçılma transfer matrisi hesaplanmış ve bir sonraki eleman çekilmiştir. Devredeki tüm elemanlar çekilene dek bu işlem sürdürülmüştür, Şekil 3.



Şekil 3: Devre elemanı çekimi.

3. Sentez Algoritması

Yüksek geçiren bir devrenin saçılma transfer matrisi şu şekilde verilmiş olsun

$$T(p) = \frac{1}{f(p)} \begin{pmatrix} \mu g(-p) & h(p) \\ \mu h(-p) & g(p) \end{pmatrix} \quad (7)$$

burada $g(p)$, $h(p)$ ve $f(p)$ polinomları şu şekilde yazılabilir

$$g(p) = g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \dots + g_n p^n \quad (8a)$$

$$h(p) = h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \dots + h_n p^n \quad (8b)$$

$$f(p) = p^n \quad (8c)$$

Çekilecek ilk elemanın değeri aşağıdaki ifade kullanılarak hesaplanır

$$CV = \frac{g_1 - \mu h_1}{g_0 + \mu h_0} \quad (9)$$

burada $\mu = \frac{h_0}{g_0}$, ve eğer $\mu = +1$ ise ilk eleman seri bir kapasite, eğer $\mu = -1$ ise, ilk eleman paralel bir bobindir.

Daha sonra çekilen elemana ait $h_C(p), g_C(p), f_C(p)$ polinomları ve bunların konjuge $h_C(-p), g_C(-p), f_C(-p)$ polinomları aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$h_C(p) = h_{C1}p + h_{C0} = \frac{\mu}{2CV},$$

$$h_C(-p) = -h_{C1}p + h_{C0} = \frac{\mu}{2CV} \quad (10a)$$

$$g_C(p) = g_{C1}p + g_{C0} = p + \frac{1}{2CV},$$

$$g_C(-p) = -g_{C1}p + g_{C0} = -p + \frac{1}{2CV} \quad (10b)$$

$$f_C(p) = p, \quad f_C(-p) = -p. \quad (10c)$$

Eğer eleman seri kapasite ise $\mu_C = +1$, eğer paralel bobin ise $\mu_C = -1$ 'dir.

Bu polinomlar ve μ_C sabiti kullanılarak, çekilen elemana ait saçılma transfer matrisi hesaplanır;

$$T_c(p) = \frac{1}{f_c(p)} \begin{pmatrix} \mu_c g_c(-p) & h_c(p) \\ \mu_c h_c(-p) & g_c(p) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Daha sonra kalan devrenin saçılma transfer matrisi hesaplanır;

$$T_R(p) = T_c^{-1}(p)T(p) = \frac{1}{f_R(p)} \begin{pmatrix} \mu_R g_R(-p) & h_R(p) \\ \mu_R h_R(-p) & g_R(p) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Şimdi, kalan devrenin polinomları $h_R(p), g_R(p), f_R(p)$ ve μ_R sabiti kullanılarak ikinci eleman çekilebilir.

Elemanların çekilmesi, aynı işlem uygulanarak sonlandırma direncine ulaşılan dek devam eder.

4. Örnek

Yüksek geçiren bir devrenin saçılma transfer matrisi şu şekilde verilmiş olsun

$$T(p) = \frac{1}{f(p)} \begin{pmatrix} \mu g(-p) & h(p) \\ \mu h(-p) & g(p) \end{pmatrix}$$

burada

$$h(p) = 0.0139 - 0.0556p + 0.1667p^2,$$

$$g(p) = 0.0139 + 0.1111p + 0.5p^2 + p^3,$$

$$f(p) = p^3, \quad \mu = +1.$$

$\mu = +1$ olduğu için, ilk eleman seri kapasite olacaktır, ve değeri

$$CV = \frac{g_1 - \mu h_1}{g_0 + \mu h_0} = \frac{0.1111 + 0.0556}{0.0139 + 0.0139} = 6.$$

Bu elemana ait polinomlar ve konjugeleri

$$h_C(p) = h_{C1}p + h_{C0} = \frac{\mu}{2CV} = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}$$

$$h_C(-p) = -h_{C1}p + h_{C0} = \frac{\mu}{2CV} = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

$$g_C(p) = g_{C1}p + g_{C0} = p + \frac{1}{2CV} = p + \frac{1}{2 \cdot 6} = p + \frac{1}{12},$$

$$g_C(-p) = -g_{C1}p + g_{C0} = -p + \frac{1}{2CV} = -p + \frac{1}{2 \cdot 6} = -p + \frac{1}{12},$$

$$f_C(p) = p \text{ ve } f_C(-p) = -p.$$

Bu polinomlar kullanıldığında kalan devrenin saçılma transfer matrisi şu şekilde hesaplanır

$$T_R(p) = T_c^{-1}(p)T(p) = \frac{1}{f_R(p)} \begin{pmatrix} \mu_R g_R(-p) & h_R(p) \\ \mu_R h_R(-p) & g_R(p) \end{pmatrix}$$

burada

$$h_R(p) = -0.0833 + 0.0833p, \quad h_R(-p) = -0.0833 - 0.0833p,$$

$$g_R(p) = 0.0833 + 0.4167p + p^2, \quad g_R(-p) = 0.0833 - 0.4167p + p^2$$

$$f_R(p) = p^2, \quad f_R(-p) = p^2.$$

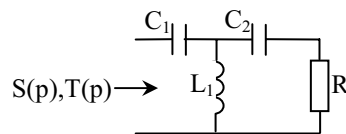
Kalan devreye ait polinomlar kullanılarak yeni bir sabit (μ) hesaplanır

$$\mu = \frac{h_0}{g_0} = \frac{-0.0833}{0.0833} = -1. \quad \mu = -1 \text{ olduğundan ikinci olarak}$$

çekilecek eleman paralel bir bobindir, ve değeri

$$CV = \frac{g_1 - \mu h_1}{g_0 + \mu h_0} = \frac{0.4167 + 0.0833}{0.0833 + 0.0833} = 3.$$

Tüm hesaplamalar tamamlandığında elde edilen devre ve eleman değerleri Şekil 4 'te görülmektedir.



Şekil 4: Elde edilen yüksek geçiren LC merdiven devresi.

5. Sonuç

Klasik LC merdiven tipi devre sentezi metotlarında, eleman değeri hesabı kutup-sıfır kaldırılması ile yapılmakta veya sürekli kesirlere ayırma işlemi ile gerçekleştirilmektedir. Fakat bu bildiride yüksek geçiren LC merdiven tipi devreler için önerilen ve transfer matrisi ayrıştırmasına dayanan algoritmada, tüm eleman değerleri $h(p)$ ve $g(p)$ polinom katsayıları kullanılarak hesaplanmaktadır. Bir eleman çekildikten sonra, kalan devrenin saçılma transfer matrisi bulunmaktadır. Devredeki tüm eleman değerleri elde edilene dek bu işlem tekrarlanmaktadır.

6. Kaynaklar

- [1] Balabanian, N., *Network synthesis*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1958.
- [2] Yengst, W.C., *Procedures of modern network synthesis*, New York, The Macmillian Company, 1964.
- [3] Pozar, D.M., *Microwave engineering*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [4] Weinberg, L. ve Slepian, P., “Takahasi’s results on Chebysheff and Butterworth ladder networks”, IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-7, pp.88-101, June 1960.
- [5] Srinivasagopalan, R. ve Sheno, B.A., “Necessary and sufficient conditions on the poles and zeros of the reflection coefficient for low-pass ladder networks”, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp.247-254, Mar.1971.
- [6] Mariotto, P.A., “On the explicit formulas for the elements in low-pass ladder filters”, IEEE Trans. Circuit Syst., vol. CAS-37, pp.1429-1436, Nov.1990.
- [7] Fielder, D.C., “Numerical determination of cascaded LC network elements from return loss coefficients”, IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-5, pp.356-359, Dec.1958.
- [8] Orchard, H.J., “Some explicit formulas for the components in low-pass ladder networks”, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-17, pp.612-616, Nov.1970.
- [9] Şengül, M., Aydoğar, Z., “Transfer matrix factorization based synthesis of resistively terminated LC ladder networks”, 6th International Conference on Electrical and Electronics Engineering, Eleco 2009, vol:2, pp:74-77, 5-8 November 2009, Bursa, Turkey.
- [10] Aksen, A., “Design of lossless two-ports with mixed lumped and distributed elements for broadband matching”, Dissertation, Ruhr University, Bochum, 1994.
- [11] Carlin, H.J., ve Civalieri, P.P., *Wideband circuit design*, CRC Press LLC, 1998.
- [12] Fetweiss, A., *Cascade synthesis of lossless two-ports by transfer matrix factorization*, in R. Boite: Network theory, pp.43-103, Gordon&Breach, 1972.