E-KİTAP

.pdf

ePUB

ANILARINA SAYGI SERİSİ

ELEKTROMAGNETİK ALAN TEORİSİ

2

Stasyoner Elektrik Akımı, Stasyoner Magnetik Alan Quasistasyoner Magnetik Alan

Prof. Ahmet AKHUNLAR

İTÜ Elektrik Fakültesi - Emekli Öğretim Üyesi

Tıpkı Basım

Basım : İTÜ Elektrik Fakültesi

İstanbul, 1965

TMMOB

Elektrik Mühendisleri Odası

1954

ISBN: 978-605-01-0755-5

EMO YAYIN NO: EK/2015/608

Hüseyin Yeşil.

T. C.
İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANESİ
Sayı: 648

HÜSEYİN YEŞİL
ARMAĞANIDIR
ELEKTRİK MÜHENDİSLERİ ODASI 1954 ANKARA

ELEKTROMAGNETİK ALAN TEORİSİ

II

Stasyoner Elektrik Akımı, Stasyoner Magnetik Alan, Quasistasyoner Magnetik Alan

Yazan:
Prof. Ahmet Akhunlar

İ.T.Ü. Elektrik Fakültesi

Matbaa Teknisyenleri Basımevi
Divanyolu, Biçkiyurdu sokak 12
İSTANBUL — 1966

ANIYA SAYGI SERİSİ

Ahmet AKHUNLAR

1916 tarihinde İzmir' de doğmuştur. 1936' da Yüksek Mühendis Mektebine girmiş, 1937 yılında Maarif Vekaleti hesabına Almanya' ya gönderilmiştir. 1943 ' de Dresden Yüksek Mühendis Mektebi Kuvvetli Akım Kolundan mezun olmuştur. Aynı okulda bir süre asistanlık yapan Akhunlar, 1945 yılında yurda dönerek İTÜ Elektrik Fakültesi Teorik Elektrik Kürsüsüne asistan olmuştur. 1949' da yeterlik tezini vermiş, 1952' de ise Doçent ünvanını kazanmış ve Elektroteknik Kürsüsüne Doçent olarak atanmıştır.

1958 yılında Profesörlüğe yükseltilerek Elektroteknik ve Elektrik Ölçmesi Kürsüsündeki açık kadroya atanan Akhunlar Teknik Üniversiteye bağlı Teknik Okulda, Elektrik, Makina ve Maden Fakültelerinde çeşitli dersler vermiş, muhtelif zamanlarda araştırma ve inceleme aracıyla yurt dışına gitmiştir. Yabancı dilde ve Türkçe yazılmış 10' un üstünde makalesi,20' in üzerinde tercüme ve özet yazısı, ikisi tercüme 10' un üstünde, kitabı olan Prof.Akhunlar 1962-1964 yılları arasında Fakültede Dekanlık görevini yapmış, 1984 yılında yaş haddinden emekliye ayrılmıştır.

Bekar olan Prof. Ahmet Akhunlar 1991 yılında vefat etmiştir.

ÖNSÖZ

Elektromagnetik Alan Teorisi kitabının 2. cildi olan bu kitapta stasyoner elektrik akımı, stasyoner magnetik alan ve quasistasyoner magnetik alan bahisleri yer almıştır. Bundan sonra yayınlanmasına çalışılacak olan 3. cilt zamanla değişen alanlar bahsini içine alacaktır. Elektromagnetik alan teorisindeki temel prensiplerin ve temel kanunların iyice anlaşılmasını sağlamak maksadiyle her bahsin sonuna çeşitli örnekler konmuştur.

Kitabın öğrencilere ve araştırıcı elemanlara faydalı olmasını dilerim.

Ahmet Akhunlar

İÇİNDEKİLER

	Sahife
B. Stasyoner elektrik akımı	1
I. Temel denklemler	1
1. Târifler	1
2. Ohm kanunu	1
3. Süreklilik denklemi, Kirşof kanunları	2
4. Direncin hesabı	4
5. Joule kanunu	5
6. Potansiyel denklemi	7
7. Konveksiyon akımı	7
8. Yüzeysel akımlar	8
9. Sınır şartları	9
10. Statik ve stasyoner alan arasındaki analoji	11
11. Elektrod sistemleri	13
12. İki boyutlu akım problemleri	15
13. Grafik metod	16
14. Elektrolitik metod	17
15. Uzay yükü alanı	18
II. Stasyoner alan örnekleri	18
16. Topraklamalar	18
17. Dirençlerin hesabı	26
18. Sınır değeri problemleri	32
C. Stasyoner magnetik alan	48
I. Temel denklemler	48
19. Magnetik alan vektörleri	48
20. Amper kanunu	49
21. Magnetik akı, Gauss teoremi	50
22. Magnetik vektör potansiyel	51
23. Vektör potansiyelin tatbikatı	55
24. Magnetik skaler potansiyel	58
25. Sınır şartları	61

II. Stasyoner magnetik alanın hesabı 65
26. Hesap metodları 65
27. Teklik teoremleri 65
28. rotrot $\vec{A}=\mu\vec{J}$ denkleminin integrasyonu 67
29. $\Delta\vec{A}=0$ denkleminin çözümü 69
30. Çizgisel akım dağılışı örnekleri 70
31. Yüzeysel akım dağılışı örnekleri 96
32. Hacimsel akım dağılışı örnekleri 102

III. Maddenin magnetik özellikleri 112
33. Makroskopik teori 112
34. Magnetik karakteristikler 116
35. Mikroskopik teori 119
36. Magnetik devre 122
37. Sürekli miknatıslar 123
38. Miknatıslanmanın yok edilmesi 125

IV. Sınır değeri problemleri 127
39. Metodlar 127
40. Örnekler 127
41. Grafik metod 149

D. Quasistasyoner magnetik alan 151

I. Elektromagnetik endüksiyon 151
42. Quasistasyoner alanın târifi 151
43. Elektromagnetik endüksiyon kanunu 152
44. Örnekler 157
45. Öz ve ortak endüksiyon 159
46. Endüktansların hesabı, Neumann formülü 161
47. Örnekler 164

II. Girdap akımları 180
48. Genel bilgi 180
49. Örnekler 183

III. Magnetik alanın enerjisi 195
50. Çizgisel devreler sisteminin magnetik enerjisi 195
51. Magnetik enerji yoğunluğu 197
52. Histerezis kaybı 201
53. Örnekler 203

IV. Magnetik alandaki kuvvetler 206
54. Elektrodinamik kuvvetler 206
55. Demirli sistemlerdeki mekanik kuvvetler 215
56. Magnetik alanın iç kuvvetleri 218
57. Magnetik ve elektriksel kuvvetlerin karşılaştırılması . . . 224
58. Örnekler 224

B. STASYONER ELEKTRİK AKIMI

I. TEMEL DENKLEMLER

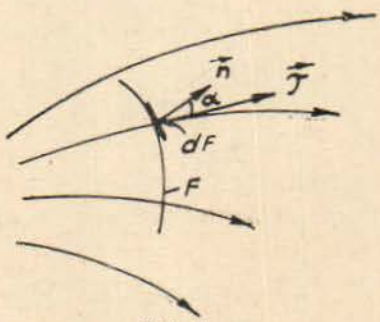
1. Târifler.

Statik elektrik alanında serbest yüklerin hareketi geçicidir ve iletken içinde statik denge kuruluncaya kadar devam eder. Yüklerin sürekli olarak hareket edebilmesi için statik alandan farklı bir fiziksel şartın sağlanması gerekir. Sürekli yük hareketine elektrik akımı denilir.

İletkenler içindeki akım dağılışı akım yoğunluğu ($\vec{J}$) vektörü ile belirtilir. Akım yoğunluğunun MKSC—birimi A/m² dir. Bir F yüzeyinden geçen akım

$$I = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F} \qquad (1)$$

integrali ile hesaplanır. Akımın MKSC—birimi A dir. Zamanla değişmiyen akıma stasyoner adı verilir. Stasyoner akım dağılışına akım alanı veya stasyoner elektrik alanı adları da verilir. Akım dağılışı akım çizgileri yardımiyle gösterilir. $\vec{J}$ vektörü her noktada bu çizgilere teğettir, şek. 1. Çizgilerin yönü pozitif yüklerin hareket yönüdür. Bir kapalı eğriye dayanan akım çizgileri bir akım tübü meydana getirirler. Şek. 1 de dF elemanından $dI = \vec{J} \cdot d\vec{F}$ akımı geçer. $\alpha = 0$ için $J = dI/dF$ olacağından, J nin akım çizgilerine dik olan birim yüzeyden geçen akımı gösterdiği anlaşılır. Akım skaler bir büyüklüktür.



Şek. 1

2. Ohm kanunu.

İzotrop bir iletken içinde akım yoğunluğu ile alan şiddeti a rasında

$$\vec{J} = \varkappa \vec{E} \qquad (2)$$

bağıntısı vardır. $\varkappa$, ortamın öziletkenliğini gösterir ve MKSC—birimi S/m (S=Siemens) dir. Bu bağıntı Ohm kanununun diferansiyel şeklidir. Öziletkenliğin tersi olan özdirenç (ρ) yardımiyle

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

yazılabilir. ρ nın MKSC—birimi Ωm dir.

3. Süreklilik denklemi, Kirşof kanunları.

Şek. 2

Akım yük hareketinden doğduğuna göre ikisi arasında bir bağıntı beklenebilir. Şek. 2 de F yüzeyinden dışarı doğru pozitif yük hareketi oluyorsa bu sırada V bölgesindeki pozitif yükde bir azalma meydana geleceğinden

$$\oint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \qquad (3)$$

yazılabilir. Bu denklem yüklerin korunduğunu belirtmektedir. Zira bölgedeki yük değişimi bölgenin sınırından bir akımın geçmesine sebep olmaktadır.

Diverans teoremi yardımiyle

$$\int_V (\text{div}\ \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t})\, dV = 0$$

bulunur. V nin seçimi gelişi güzel olduğundan

$$\text{div}\ \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

yazılabilir. (3) ve (4), yüklerin korunması prensibinin integral ve diferansiyel ifadeleridir. (4) bağınfısına süreklilik denklemi adı da verilir.

Stasyoner akımda $\partial/\partial t = 0$ olduğundan (3) ve (4)

$$\oint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0\ , \qquad \text{div}\ \vec{J} = 0 \qquad (5)$$

şekline girerler. Stasyoner akımda $\vec{J}$ solenoidaldir. Akım çizgileri ka-

palı eğrilerdir. Uzunluk koordinatı s olan çizgisel iletken için $dI/ds=0$ olur. (5) bağıntıları Kirşof akımlar kanununun integral ve diferansiyel ifadeleridir.

Homogen ve izotrop bir iletken için div $\vec{J}=x$ div $\vec{E}=x\rho/\varepsilon$ yazılabileceğinden (4) yardımiyle

$$\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. İntegre ederek

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6}$$

bulunur. ρ_0, $t=0$ anındaki yük dağılışını ve $\tau=\varepsilon/x$ ise yük yoğunluğunun ρ_0/e ye düşmesi için geçen zamanı göstermektedir. τ ya rölaksasyon müddeti adı verilir. Bu denklem, iletkenler içinde statik dengenin kurulması için geçen zaman hakkında bir fikir verir. İletkenin her hangi bir bölgesine bir yük dağılışı getirildiği takdirde yükler hareket ederek iletken içinde $\vec{E}=0$ olacak şekilde bir yüzey dağılışı meydana gelir. İyi iletkenlerde τ çok küçük olduğundan (10^{-19} s kadar) denge durumu anî denebilecek kadar kısa bir sürede kurulur. Buna karşılık fena iletkenlerde ve dielektriklerde τ büyük olduğundan dengenin kurulması uzun zamana ihtivaç gösterir. İdeal bir iletkende $\tau=0$ ($\varkappa=\infty$) ve ideal bir dielektrikte $\tau=\infty$ ($\varkappa=0$) dır.

Ohm kanununa göre bir akımın meydana gelebilmesi için elektrik alanına ihtiyaç vardır. Yalnız statik alanın tesiriyle sürekli bir akım elde edilemez. Zira serbest yüklerin sürekli hareketi esnasında ortaya çıkacak olan ısı enerjisinin statik alan tarafından karşılanması gerekir ki konservatif karakterdeki bir alan için bu mümkün değildir. O halde her noktada alanın konservatif olacağını düşünemeyiz ve genel olarak

$$\vec{E}=\vec{E}_s+\vec{E}_0=-\operatorname{grad}\varphi+\vec{E}_0 \tag{7}$$

olduğunu kabul etmemiz gerekir. Bu ifadede $\vec{E}_s=-\operatorname{grad}\varphi$, potansiyelden türetilebilen statik alan terimini ve $\vec{E}_0$ ise konservatit olmayan alan terimini gösterir. $\vec{E}_s$ nin kaynağı elektrik yükleri ve $\vec{E}_0$ ın kaynağı ise şimik, termik vs. gibi elemanlardır. $\vec{E}_0$ kaynaklarına örnek olarak pilleri ve termoelektrik elemanları gösterebiliriz. Bunlar

$\vec{E}_0$ alanından başka, yük birikmeleri vasıtasiyle $\vec{E}_s$ statik alanının da kaynağı olmaktadırlar. $\vec{E}_0$ dağılışı sürekli veya süreksiz olabilir. Meselâ bir devrede yalnız üretecin bulunduğu yerde $\vec{E}_0 \neq 0$ dır, $\vec{E}_0 = 0$ olan noktalarda $\vec{E} = \vec{E}_s = -\text{grad}\ \varphi$ olacaktır.

(7) yardımiyle Ohm kanunu

$$\vec{J} = \varkappa(\vec{E}_s + \vec{E}_0) \tag{8}$$

şekline girer.

(7) yi kapalı bir eğri üzerinden integre ederek

$$\oint_C (\vec{E} - \vec{E}_0) \cdot \vec{ds} = 0 \tag{9}$$

bulunur. Bu denklem Kirşof gerilimler kanununun integral ifadesidir. Diferansiyel ifade ise

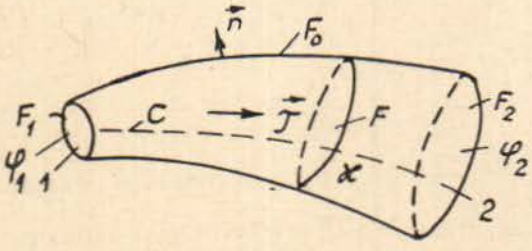
$$\text{rot}\ (\vec{E} - \vec{E}_0) = 0 \tag{10}$$

olacaktır.

$\vec{E}_0$ kaynaklarını karakterize etmek için elektromotör kuvvet (emk) denilen büyüklükten faydalanılır. Her hangi iki nokta arasındaki emk

$$E_{ab} = \int_a^b \vec{E}_0 \cdot \vec{ds} \tag{11}$$

eğrisel integrali yardımiyle hesaplanır. emk, gerilim boyutunda olan skaler bir büyüklüktür.



Şek. 3

4. Direncin hesbı.

Şek. 3 de görülen iletkenin iki eşpotansiyel yüzeyi arasındaki direnci $R = U_{12}/I$ dir. U_{12} gerilimi 1 ve 2 eşpotansiyel yüzeyleri arasında her hangi bir eğri boyunca hesaplanan

$$U_{12}=\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

integrali yardımiyle ve iletkenden geçen I akımı ise her hangi bir F yüzeyi boyunca hesaplanan

$$I=\int_F \vec{j}\cdot d\vec{F} = \varkappa \int_F \vec{E}\cdot d\vec{F}$$

integrali yardımiyle bulunur. Böylece

$$R=\frac{\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{ds}}{\varkappa \int_F \vec{E}\cdot d\vec{F}} \qquad (12)$$

elde edilir.

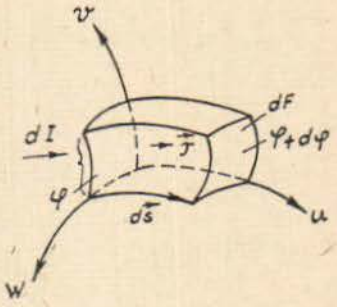
Direnci, gerilimi ve akımı hesaplamadan da bulabiliriz. Şek. 4 de iletkenin hacim elemanı görülmektedir. Eşpotansiyel yüzeylerin denklemi u = sab. olduğuna göre bu elemanın direnci için

$$dR=\frac{ds}{\varkappa\, dF}=\frac{h_u du}{\varkappa h_v h_w dv dw}$$

yazılabilir. Bunu bir eşpotansiyel yüzey üzerinden ve bir akım çizgisi boyunca integre ederek

$$R=\frac{1}{\varkappa}\int_C \frac{ds}{\int_F dF} \qquad (13)$$

formülü bulunur.



Şek. 4

5. Joule kanunu.

Şek. 4 deki elemanda harcanan güç $dP = -d\varphi\, dI$ dir. $d\varphi = -\vec{E}_s\cdot\vec{ds}$ koyarak $dP = dI(\vec{E}_s\cdot\vec{ds})$ bulunur. Diğer taraftan $dI = JdF$ yazılabileceğinden $dV = dsdF$ ve $J\vec{ds} = \vec{J}ds$ koyarak $dP = \vec{E}_s\cdot\vec{J}\,dV$ ve buradan

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E}_s \cdot \vec{J} \tag{14}$$

bulunur. p, ısı gücü yoğunluğunu yani birim zamanda ve birim hacimde ısıya değişen enerjiyi gösterir. Güç yoğunluğunun MKSC — birimi W/m^3 dür. $\vec{E}_s \cdot \vec{J}$ yerine $J^2/\varkappa$ veya $\varkappa E_s^2$ yazılabilir.

V hacmindeki ısı gücü

$$P = \int_V p dV = \int_V \vec{E}_s \cdot \vec{J} dV = \int_V \frac{J^2}{\varkappa} dV \tag{15}$$

olacaktır. Bu ifade Joule kanununu göstermektedir.

Direnci

$$R = \frac{\int_V \vec{E}_s \cdot \vec{J}\, dV}{I^2} = \frac{P}{I^2} \tag{16}$$

şeklinde de hesaplayabiliriz. Bu bağıntının $R = U_{12}/I$ ye eşdeğer olduğu kolayca görülebilir. $\vec{E}_s = -$ grad φ koyarak ve div $(\varphi \vec{J}) = \vec{J}$ grad φ yazılabileceğini (div $\vec{J} = 0$) gözönüne alarak diverjans teoremi yardımiyle

$$P = -\oint_{F_0+F_1+F_2} \varphi \vec{J} \cdot d\vec{F}$$

yazılabilir, şek. 3. F_0 yüzeyi boyunca $\vec{J} \cdot d\vec{F} = 0$ olduğundan

$$RI^2 = -\varphi_1 \int_{F_1} \vec{J} \cdot d\vec{F} - \varphi_2 \int_{F_2} \vec{J} \cdot d\vec{F} = (\varphi_1 - \varphi_2) I = U_{12} I$$

bulunur.

$\vec{E}_0 \neq 0$ olan noktalarda $\vec{J} = \varkappa(\vec{E}_s + \vec{E}_0)$ olacağından bunu $\vec{J} dV$ ile skaler olarak çarptıktan sonra V hacmi üzerinden integre ederek

$$\int_V \vec{E}_s \cdot \vec{J} dV = \int_V \frac{J^2}{\varkappa} dV - \int_V \vec{E}_0 \cdot \vec{J} dV \tag{17}$$

şeklindeki güç bilançosu bulunur. $\vec{E}_s = -\operatorname{grad}\varphi$ koyarak diverjans teoremi yardımiyle

$$P = -\oint_F \varphi \vec{J} \cdot d\vec{F} + \int_V \vec{E}_0 \cdot \vec{J}\, dV$$

yazılabileceğinden V bölgesi bütün akım dağılışını içine aldığı takdirde sınırda $\vec{J} = 0$ olacağından

$$P = \int_V \vec{E}_0 \cdot \vec{J}\, dV$$

elde edilir.

6. Potansiyel denklemi.

İletken içinde $\vec{E}_0 = 0$ olan noktalarda $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ olacağından $\operatorname{div}\vec{J} = 0$ yardımiyle homogen ve izotrop bir ortam için

$$\Delta\varphi = 0$$

Laplace denklemi elde edilir. Stasyoner akım dağılışının sınır değeri problemleri bu parsiyel diferansiyel denklemi sağlayan ve sınır şartlarına uyan harmonik fonksiyonlardır. Statik ve stasyoner alanlar arasındaki analojiye dayanarak statik alandaki bütün çözüm metodlarından stasyoner akım dağılışını hesaplamak için faydalanılabilir.

$\vec{J} = \varkappa(\vec{E}_s + \vec{E}_0)$ ın rotasyoneli ve diverjansı hesaplanırsa

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{J}}{\varkappa}\right) = \operatorname{rot}\vec{E}_0\,,\ \operatorname{div}(\varkappa\vec{E}_s) = -\operatorname{div}(\varkappa\vec{E}_0) \qquad (18)$$

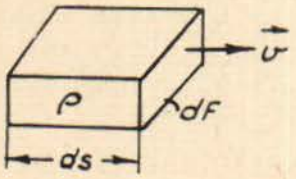
bulunur. $\varkappa$ ve $\vec{E}_0$ bilindiği taktirde $\vec{J}$ ve $\vec{E}_s$ fonksiyonları bu denklemler yardımiyle hesaplanır.

7. Konveksiyon akımı.

İletkenler içindeki serbest yüklerin hareketinden doğan akıma iletken akımı denilir. Bu serbest yükler meselâ madenlerde serbest elektronlar ve elektrolitlerde ise iyonlardır. Dielektirikler içindeki yük hareketlerine konveksiyon akımı adı verilir. Konveksiyon akımlarına ör-

nek olarak elektron tübündeki ve katod ışınlı osilograftaki elektron akımını gösterebiliriz.

Şek. 5 de bir konveksiyon akımının hacim elemanı görülmektedir.



Şek. 5

Yoğunluğu ρ olan yük dağılışı $\vec{v}$ hızı ile hareket ettiğine göre hacim elemanındaki $dQ = \rho dV = \rho dF ds$ yükü $dt = ds/v$ zamanı zarfında sağ tarafa taşınacağından bu esnada meydana gelen konveksiyon akımı

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \rho v dF$$

olacaktır. Buradan konveksiyon akımının yoğunluğu için $J_k = \rho v$ veya vektörel olarak

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \tag{19}$$

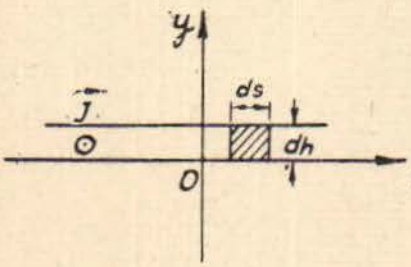
elde edilir. $\vec{E}$ alanının tesiriyle meydana gelen konveksiyon akımının güç yoğunluğu

$$P_k = \vec{E} \cdot \vec{J}_k = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} \tag{20}$$

olacaktır. Ancak bu güç ısıya değişmiyerek hareket eden yüklerin kinetik enerjilerinin artmasını sağlar.

8. Yüzeysel akımlar.

Bazı hallerde yüzeysel akım kavramından faydalanmak elverişlidir.



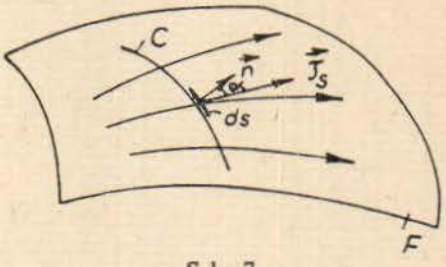
Şek. 6

Şek. 6 daki ince levhadan $\vec{k}$ yönünde ve yoğunluğu $\vec{J} = \vec{k} J_z$ olan bir akımın geçtiğini farzedelim. $dF = dh\, ds$ elemanından geçen akım $dI = J_z dh ds$ dir. $dh \to 0$ limitine geçilirse her ne kadar $J_z \to \infty$ olursa da

$$J_s = \lim_{dh \to 0} (J_z ds) \tag{21}$$

sınırlı değerde kalır. J_s ye, yüzeysel akım yoğunluğu adı verilir. J_s nin MKSC—birimi A/m dir. (21) yardımiyle ds elemanından geçen

yüzeysel akım için $dI = J_s ds$ bulunur. $\vec{J}_s$ ye, yüzeysel akım dağılışını belirten bir vektör gözüyle bakılabilir. Bu vektör yüzeydeki akım çizgilerine her noktada teğettir. Şek. 7 de C eğrisi üstündeki ds elemanından geçen akım $dI = \vec{J}_s \cdot \vec{n}\, ds$ dir. C eğrisi boyunca geçen akım ise



Şek. 7

$$I = \int_C \vec{J}_s \cdot \vec{n}\, ds \qquad (22)$$

integrali yardımiyle hesaplanır.

$\vec{J}_s$ yoğunluğunu yüzeydeki yük dağılışı yardımiyle de ifade edebiliriz. $\vec{J} = \rho \vec{v}$ yi dh ile çarpıp $dh \to 0$ limitine geçilirse $\lim_{dh \to 0} (\rho dh) = \sigma$ olacağını gözönüne alarak

$$\vec{J}_s = \sigma \vec{v} \qquad (23)$$

bulunur.

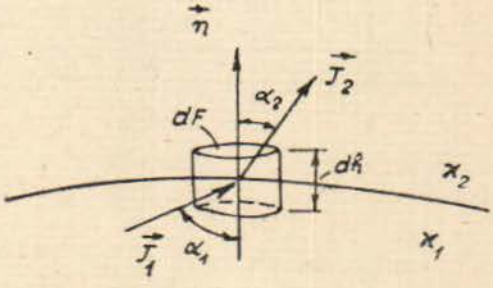
Yüzeysel akımlara pratikte meselâ yüksek frekanslı alternatif akımlarda rastlanır. Zira ileride görüleceği gibi cidar olayından dolayı çok yüksek frekanslarda akım esas itibariyle iletkenin yüzeyindeki çok ince bir tabakadan geçer ve böylece bir yüzey dağılışı bahis konusu olur.

9. Sınır şartları.

Şek. 8 de iki iletken ortamı ayıran sınır yüzeyi görülmektedir. (5) integralini sınır yüzeyine normal olan silindire uygulayarak $dh \to 0$ için $J_{2n} dF - J_{1n} dF = 0$ ve buradan

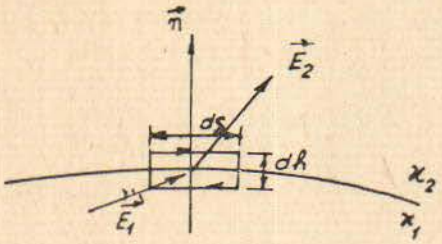
$$J_{1n} = J_{2n} \qquad (24)$$

bulunur. Akım yoğunluğunun normal bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir.



Şek. 8

Sınır yüzeyi civarında alanın konservatif olduğu kabul edilirse şek. 9 da görülen ve sınıra normal olan dikdörtgen yardımiyle $dh \to 0$ için $E_{2t} ds - E_{1t} ds = 0$ yazı-



Şek. 9

labileceğinden

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (25)$$

bulunur. Alan şiddetinin teğetsel bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir.

(24) ve (25), iki iletkeni ayıran sınır yüzeyindeki sınır şartlarıdır. Bunlar yardımiyle J— ve E— çizgilerinin kırılma açıları için

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \qquad (26)$$

bulunur. Şayet $\varkappa_1 \gg \varkappa_2$ ise α_2 açısı çok küçük olacağından akım çizgileri $\varkappa_2$ ortamında sınır yüzeyine yaklaşık olarak dik olurlar. İdeal iletken $\varkappa \to \infty$ şeklinde tarif edilir. Böyle bir iletken içinde akımın sınırlı değerde kalabilmesi için $\vec{E} \to 0$ olmak zorundadır. $\varkappa_1 \to \infty$ $(\vec{E}_1 = 0)$ için sınır şartları

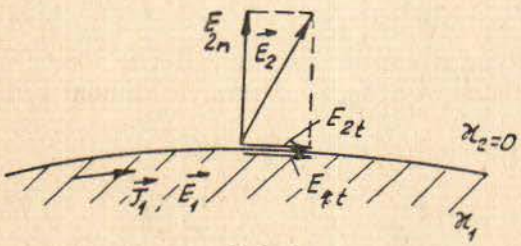
$$J_{1n} = \varkappa_{2n} E_{2n}, \qquad E_{2t} = 0$$

olacaktır. Aşağıdaki incelemelerde ideal iletkenlere kısaca elektrod denilecektir.

Bir iletkenle dielektrik arasındaki sınır yüzeyinde, dielektrik tarafında $\vec{J}_2 = 0$ ($\varkappa_2 = 0$ farzediliyor) olacağını gözönüne alarak

$$J_{1n} = 0, \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

şartları elde edilir, şek. 10. İletken tarafında $J_{1n} = 0$ olduğundan $\vec{J}_1$ ve $\vec{E}_1$ vektörleri sınır yüzeyine paraleldir. Akım çizgileri sınır yüzeyine paralel olduklarından eşpotansiyel yüzeyler sınır yüzeyine normal olur.



Şek. 10

Sınır şartlarını potansiyel cinsinden de ifade edebiliriz. Böylece iki iletken arasındaki sınır yüzeyi için

$$\varkappa_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varkappa_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} , \quad \varphi_1 = \varphi_2 \tag{27}$$

ve $\varkappa_1 \to \infty$ için

$$\varkappa_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -J_{1n} , \quad \varphi_2 = \text{sab.}$$

yazılabilir. Elektrodun yüzeyi bir eşpotansiyel yüzeydir. Elektrodların stasyoner alandaki rolü, iletkenlerin statik alandaki rolüne benzer. $\varkappa_2 = 0$ için

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 , \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

bulunur.

İki ortamın dielektrik sabitleri ε_1 ve ε_2 olduğuna göre

$$D_{2n} - D_{1n} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varkappa_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1} \right) J_{1n}$$

yazılabileceğinden $\varepsilon_2/\varkappa_2$ oranı $\varepsilon_1/\varkappa_1$ oranından farklı olduğu takdirde sınır yüzeyinde bir yük dağılışının belireceği anlaşılır. $\varkappa_1 \to \infty$ için yük yoğunluğu $D_{2n} = \varepsilon_2 J_{1n}/\varkappa_2$ olacaktır.

div $\vec{D} = 0$ olduğunu gözönüne alarak ε, $\varkappa$ ortamı içindeki noktalar için

$$\text{div } \vec{D} = \text{div } (\varepsilon E) = \vec{J} \cdot \text{grad } \frac{\varepsilon}{\varkappa}$$

bulunur. Bundan $\varepsilon/\varkappa \neq$ sab. için ortam içinde serbest yüklerin belireceği anlaşılır.

10. Statik ve stasyoner alan arasındaki analoji.

Stasyoner alanda $\vec{J}$ fonksiyonu konservatif bölgelerde $\Delta\varphi = 0$ denkleminin sınır şartlarını sağlayan çözümü yardımiyle bulunabilir ve $\vec{J} = -\varkappa$ grad φ dir. Benzer çözüm statik alanda $\rho = 0$ olan bölgelerde $\vec{D}$ için elde edilir ve $\vec{D} = -\varepsilon$ grad φ dir. Böylece bir sistem için bulunan $\vec{D}$ çözümünden $\vec{J}$ ye veya $\vec{J}$ çözümünden $\vec{D}$ ye geçilebilir ve bu esnada ε ile $\varkappa$ yı değiştirmek icap eder. Bir çözümden diğerine geçebilmek için sınır şartlarının eşdeğer olması gerekir.

Bazı stasyoner akım problemlerinin statik analojisi bulunamaz.

Bir ortamda $\varkappa=0$ olabilirse de $\varepsilon=0$ olan bir ortam yoktur ve $\varepsilon_r<1$ olamaz. $\varkappa=0$ ortamı için sınır şartı $J_n=0(\partial\varphi/\partial n=0)$ dır. Buna karşılık $\varepsilon=0$ olamayacağından statik alanda $D_n=0\,(\partial\varphi/\partial n=0)$ şartı yazılamaz. Bu sebeple $\varkappa=0$ bölgelerini ihtiva eden bir stasyoner akım dağılışı için statik analoji bulunamaz. Akım dağılışı dielektriğin başladığı yerde son bulduğu halde statik alan ancak iletkenler içinde sıfır olabilir.

Bir elektrod dışındaki bölgede harcanan ısı gücü

$$P=\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

integrali ile bulunur. $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ koyarak ve $\vec{J}\cdot\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{div}(\varphi\vec{J})$ olduğunu gözönüne alarak diverjans teoremi yardımiyle

$$P=-\oint_F \varphi\vec{J}\cdot d\vec{F}=-\varphi\oint_F \vec{J}\cdot d\vec{F}$$

yazılabilir. F, elektrodun sınır yüzeyidir ve normal yönü içeri doğrudur. Elektrodun potansiyeli sabit olduğundan φ integral dışına çıkarılmıştır. Pozitif akım yönü elektrodun dışına doğru alınırsa $P=\varphi I$ bulunur. Şayet sistemde n elektrod varsa toplam ısı gücü

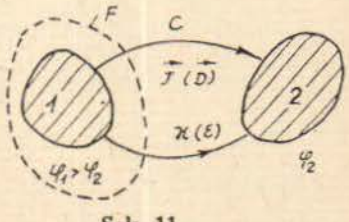
$$P=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k I_k \qquad (28)$$

olacaktır. Bu bağıntı statik alanda n iletkenli sistemin enerjisini bulmaya yarayan

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k Q_k$$

denkleminin yerine geçer.

İki alan arasındaki analojiye dayanarak kapasite ve direnç arasında basit bir bağıntı bulunur. Şek. 11 de görülen iki iletken arasındaki kapasite



Şek. 11

$$C = \frac{\varepsilon \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{F}}{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

dir. İletkenlerin yerrine ayni geometrik yapıda iki elektrod konulacak ve ε ortamı yerine $\varkappa$ ortamı alınacak olursa elektrodlar arasındaki direnç

$$R = \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\varkappa \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F}}$$

olacaktır. Buradan

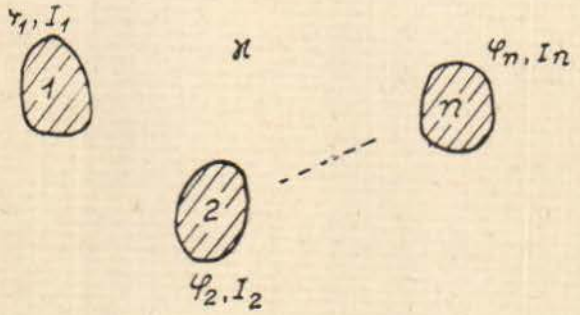
$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \tag{29}$$

bulunur. $G = 1/R$, elektrodlar arasındaki iletkenliği göstermektedir. Bu bağıntıdan faydalanarak C den R ye veya R den C ye geçmek kabil olur.

Aşağıdaki incelemelerde iki alan arasındaki analojiden geniş ölçüde faydalanılacaktır.

11. Elektrod sistemleri.

Şek. 12 de n elektrodlu sistem görülmektedir. Elektrodların akımları ve potansiyelleri I_k ve φ_k dır $(k = 1,2,\ldots, n)$. Akımlar, yalıtıl-



Şek. 12

mış teller yardımiyle elektrodlara uygulanmıştır. Lineer bir ortamda ($\varkappa$ = sab.) potansiyeller ile akımlar arasında

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= r_{11} I_1 + \ldots + r_{1n} I_n \,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n &= r_{n1} I_1 + \ldots + r_{nn} I_n \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

bağıntıları caridir. r_{ik} lara direnç katsayısı denilir ve birimleri Ω dur. Bu katsayıların fiziksel anlamı statik alanda olduğu gibi kolayca açıklanabilir.

(30) sistemi akımlara göre çözülürse

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= g_{11} \varphi_1 + \ldots + g_{1n} \varphi_n \,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ I_n &= g_{n1} \varphi_1 + \ldots + g_{nn} \varphi_n \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

bulunur. g_{ik} lara iletkenlik katsayısı denilir ve birimleri S dir. Bu katsayıların anlamı da kolayca açıklanabilir.

(31) sistemini gerilimlere göre düzenliyerek

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= G_{11} \varphi_1 + G_{12} U_{12} + \ldots + G_{1n} U_{1n} \,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_n &= G_{n1} U_{n1} + G_{n2} U_{n2} + \ldots + G_{nn} \varphi_n \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

yazılabilir. $i \neq k$ için G_{ik}, i ve k elektrodları arasındaki parsiyel iletkenliği ve G_{ii} ise i elektrodunun toprak iletkenliğini gösterir. G_{ik} ler eşdeğer şemalarda dirençler yardımiyle gösterilir.

Statik alanda p, c, C katsayıları için görülen özelliklerin r, g, G ler için de cari olacağı kolayca gösterilebilir. Katsayılur arasında

$$\frac{r_{ik}}{p_{ik}} = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \,, \quad \frac{g_{ik}}{c_{ik}} = \frac{\varkappa}{\varepsilon} \,, \quad \frac{G_{ik}}{C_{ik}} = \frac{\varkappa}{\varepsilon} \tag{33}$$

bağıntıları vardır.

Sistemdeki her hangi bir elektrodun akımı için

$$I_k = -\varkappa \oint_{F_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dF \tag{34}$$

yazılabilir. Bu denklem, statik alanda her hangi bir iletkenin yükünü veren

$$Q_k = -\varepsilon \oint_{F_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dF$$

nin yerine geçer.

12. İki boyutlu akım problemleri.

Statik alanda ancak yaklaşık olarak bir iki boyutlu alan şekli düşünülebilir. Zira sınırlı uzunluktaki silindirik iletkenlerde kenar tesirleri ancak bazı şartlar altında ihmal edilebilir. Buna karşılık stasyoner akım dağılışında $\varkappa = 0$ olan bölgelerde bir kenar tesiri bahis konusu olamayacağından stasyoner alanda iki boyutlu problemlere daha sık rastlanır. Meselâ ince levhalardaki akım dağılışını bu tiplere örnek olarak gösterebiliriz. Bu problemlerin çözümü için en elverişli metod bilindiği gibi konform tasvirdir.

Bir iki boyutlu akım problemini konform tasvirle çözmek için z-düzlemindeki orijinal sistem uygun bir $w = w(z)$ analitik fonksiyonu vasıtasiyle w-düzlemine transforme edilir. w-düzlemindeki kompleks potansiyel $P(w) = \varphi(u, v) + j\Psi(u, v)$ olduğuna göre z-düzlemindeki kompleks potansiyel bu fonksiyonda $w = w(z)$ koyarak elde edilir. z-düzlemindeki kompleks alan şiddeti ve akım yoğunluğu (φ = potansiyel)

$$\dot{E} = E_x + jE_y = -\left(\overline{\frac{dP}{dz}}\right) = -\left(\overline{\frac{dP}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}}\right) \quad , \tag{35}$$

$$\dot{J} = \varkappa \dot{E} = J_x + jJ_y \tag{36}$$

yardımiyle hesaplanır. Şayet w-düzlemindeki kompleks potansiyel $P(w) = w$ şeklinde, yani üniform alanın potansiyeli ise, z-düzlemindeki kompleks potansiyel $w(z)$ tasvir fonksiyonundan ibaret olur. Bu durumda $dP/dw = 1$ olacağından

$$\dot{J} = -\varkappa\left(\overline{\frac{dw}{dz}}\right) \tag{37}$$

bulunur. Şayet problemi çözerken meselâ $z \to w \to \zeta$ şeklinde iki transformasyon yapmak gerekirse ζ — düzlemindeki kompleks potansiyelin $P(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + j\Psi(\xi, \eta) = \zeta$ olduğunu kabul ederek

$$\dot{J} = -\varkappa\left(\overline{\frac{d\zeta}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}}\right) \tag{38}$$

elde edilir.

Potansiyelleri φ_1 , φ_2 olan iki elektrod sisteminde ψ_1 , ψ_2 akım çizgileri arasından birim uzunluk boyunca geçen akım

$$\bar{I} = \varkappa(\psi_1 - \psi_2) \tag{39}$$

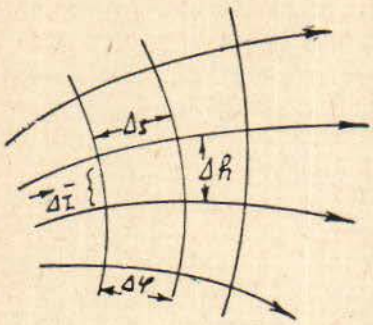
olacaktır. Elektrodlar arasındaki gerilim $\varphi_1 - \varphi_2$ olduğundan birim uzunluktaki direnç için

$$\bar{R} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\psi_1 - \psi_2} \tag{40}$$

bulunur. Analojik sistemin kapasite formülü yardımiyle $\bar{R}\bar{C} = \varepsilon/\varkappa$ olacağı kolayca görülebilir.

13. Grafik metod.

Analitik metodlardan ancak küresel, silindirik vs. gibi belli geometrik yapıdaki sistemler için faydalanılabilir. Sistemin geometrisi analitik çözüme uygun olmadığı takdirde yaklaşık çözümleri araştırmak gerekir. Bunlar da nümerik, grafik ve deneysel çözüm metodlarıdır. Aşağıda akım dağılışı için grafik metod kısaca gözden geçirilmiştir.



Şek. 13

İki boyutlu akım problemlerinde yaklaşık kareler metodundan faydalanılabilir. Şek. 13 de iki boyutlu akım alanının her hangi bir düzlemdeki akım çizgileri ve eşpotansiyel çizgileri görülmektedir. Her hangi bir noktadaki E alanı yaklaşık olarak $E \approx \Delta\varphi/\Delta s$ şeklinde hesablanabileceğinden

$$J \approx \varkappa \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

bulunur. Diğer taraftan Δh genişliğindeki akım tübünden birim uzunluk boyunca (şekil düzlemine dik doğrultuda) geçen akım

$$\Delta\bar{I} \approx \varkappa \Delta\varphi \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

olacaktır. Bütün tüb boyunca $\Delta\bar{I}=$ sab. kalmak zorunda olduğundan iki eşpotansiyel çizgi arasındaki potansiyel farkını ($\Delta\varphi$) ve $\Delta h/\Delta s$ oranını sabit tutarak bu şart sağlanabilir. Şayet yaklaşık dikdörtgenin kenarları arasındaki oran her yerde ayni değerde tutulacak olursa bütün akım tübleri için $\Delta\bar{I}$ ayni değerde kalacaktır. Bu oranı 1 alarak yaklaşık kareler elde edilir.

Alan şeklini çizerken aşağıdaki noktalar gözönünde tutulmalıdır :

1) Akım çizgileri eşpotansiyel çizgilere normaldir.

2) Elektrodların yakınlarında eşpotansiyel çizgiler sınır eğrilerine yaklaşırlar.

3) Akım çizgileri elektrodların sınır yüzeylerine normaldir.

Çizme tekniği statik alan gibidir. Kaba bir taslak çizildikten sonra karelere yaklaşmak için düzeltmeler yapılır.

Alan şeklinden elektrodlar arasındaki geçiş direnci hesaplanabilir. Akım tübü sayısı n ile ve eşpotansiyel çizgi sayısı m ile gösterilirse birim uzunluktan geçen akım ($k=1$) ve elektrodlar arasındaki gerilim

$$\bar{I}=n\Delta\bar{I}=n\varkappa\Delta\varphi\ ,\quad U=(m+1)\Delta\varphi$$

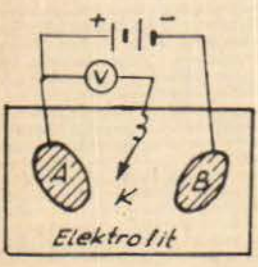
olacağından birim uzunluktaki geçiş direnci için

$$\bar{R}=\frac{1}{\varkappa}\,\frac{m+1}{n} \tag{41}$$

bulunur. l uzunluğu için direnç $R=\bar{R}/l$ olacaktır.

14. Elektrolitik metod.

Akım alanını elektrolitik model yardımiyle de incelemek kabildir. Bilindiği gibi bu metod yardımiyle statik alanın şeklini bulmak için analojik akım alanından faydalanılmaktadır. Akım alanını incelemek için iletken ortam yerine bir elektrolit ve elektrodlar yerine de iyi iletkenden yapılmış modelleri alınır ve bu elektrodlar orijinal sistem gibi elektrolitin içine yerleştirilir, şek. 14. Elektrolit içinde meydana gelen potansiyel alanı bir voltmetre veya bir köprü montajı yardımıyla incelenir. Bir ucu elektrodlardan birine birleştirilen voltmetrenin diğer ucu yalıtılmış bir telle etektrolit içinde gezdirilen K kontağına bağlanmıştır. Voltmetrenin sapması değişmediği müddetçe K ucunun gezdirildiği noktalar bir eşpotansiyel yüzey üstünde bulunurlar. Köprü montajında ayni potansiyeldeki noktalar



Şek. 14

için galvanometre sıfırı gösterecektir. Ölçüler alternatif akımla yapıldığı takdirde galvanometre yerine bir kulaklık kullanılır ve denge durumu sesin kesilmesiyle anlaşılır.

Akım alanı iki boyutlu olduğu takdirde elektrolitik model yerine bir direnç kağıdından faydalanılabilir. Elektrod kesitleri kâğıt üstüne meselâ gümüş sürerek elde edilir.

Elektrolit kabının genişliği sınırlı olduğundan orijinal sistemde bulunmayan yeni bir sınır ortaya çıkar ($J_n = 0$). Bu sebeple elde edilen alan şekli yaklaşıktır. Bununla beraber elektrolit kabını elektrod sisteminin boyutlarına göre geniş tutarak gerçeğe daha yakın bir sonuç bulunabilir.

Bu metod yardımiyle eşpotansiyel yüzeyler veya çizgiler elde edilir. Bu yüzey veya çizgilere ortogonal olan eğrileri çizerek akım çizgileri bulunur.

15. Uzay yükü alanı.

Elektron tübünde katodla anod arasındaki bölge katoddan fırlatılan ve anoda doğru giden elektronlar tarafından doldurulmuştur. Bir cins yük tarafından doldurulan bu bölge bir uzay yükü alanıdır. Atmosferdeki etektrik alanı da uzay yükü alanına örnek olarak gösterilebilir. Uzay yükü alanında $\Delta\varphi = -\rho\,\varepsilon$ Poisson denklemi caridir.

II. STASYONER ALAN ÖRNEKLERİ

16. Topraklamalar.

Pratikte çeşitli şekilde topraklamalara rastlanır. Bunlar, çok iyi iletkenden yapılmış elektrodları toprağa gömerek elde edilir. Aşağıda bazı topraklama tertipleri incelenmiştir.

1 — Küresel topraklamalar incelenecektir.

Şek. 15 de sınırsız toprak içine gömülen küresel elektrod görülmektedir. Elektrod akımı yalıtılmış bir tel vasıtasıyla uygulanmıştır. Dönüş eletrodunun çok uzakta olduğu farzedilmektedir.

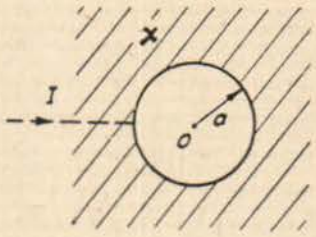
Dielektrik içindeki yüklü küre ile analojiden faydalanarak potansiyel için $\varphi = I/4\pi\varkappa r$ ($r \to \infty$ için $\varphi = 0$) bulunur. Kürenin potansiyeli

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\varkappa a}$$

dır. Bu potansiyel küre ile sonsuz arasındaki gerilimi gösterir. Küre ile toprak arasındaki geçiş direnci

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{4\pi\varkappa a}$$

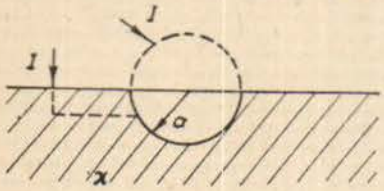
şeklinde hesaplanır. Bu formül, $RC = \varepsilon/\varkappa$ da $C = 4\pi\varepsilon a$ koyarak bulunabilir. Her hangi bir noktadaki akım yoğunluğu $\vec{J} = -\varkappa \operatorname{grad}\varphi = \vec{u}_r I/4\pi\varkappa r^2 = \vec{u}_r J_r$ dir.



Şek. 15

φ = sab. yüzeyleri ortak merkezli küreler ve akım çizgileri yarıçap doğrularıdır.

Yukarıdaki tertibe pratikte raslanmaz. Bazı hallerde toprak yüzeyine gömülen yarım küre, topraklamalara eşdeğer alınabilir, şek. 16. Bu tertibin akım dağılışı yarım kürenin toprak yüzeyine göre imajını alarak bulunur. İmaj yarım küresine de aynı akımı uygulayarak toprak yüzeyindeki sınır şartı ($J_n = 0, \partial\varphi/\partial n = 0$) sağlanır. Böylece $2I$ akımını taşıyan kürenin potansiyeli $\varphi_0 = I/2\pi\varkappa a$ olacağından geçiş direnci (topraklama direnci) için



Şek. 16

$$R = \frac{1}{2\pi\varkappa a}$$

elde edilir. Akım dağılışı tam küre gibidir (toprak içinde).Yarım küre ile toprak yüzeyindeki bir nokta arasındaki gerilim

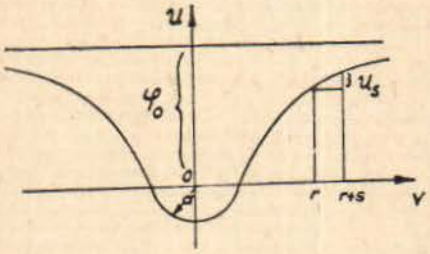
$$U = \varphi_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

olur, şek. 17. Topraklamaya yaklaşan bir canlının ayakları ile köprülediği gerilime adım gerilimi denir. Canlının adımı s ile gösterilirse en tehlikeli durumda, yani ayaklar bir akım çizgisi doğrultusunda açılınca, adım gerilimi

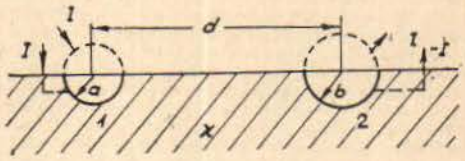
$$U_s = \frac{I}{2\pi\varkappa}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s}\right) = \frac{as}{r(r+s)}\,\varphi_0$$

olacaktır. Tam topraklama dibinde $U_{s\max}=s\varphi_0/(a+s)$ olur. Şek. 17 deki eğriye gerilim hunisi adı verilir. Bu huninin bilinmesi hayat tehlikesi bakımından önemlidir. Meselâ bir demir direğin topraklamasının $a=1$ m yarıçaplı yarım küreye eşdeğer olduğu farzedilirse toprak için $\varkappa=10^{-2}$ S/m alarak $R=16\,\Omega$ bulunur. Bir toprak kısa devresinde $I=100$ A akacak olursa $\varphi_0=1600$ V olacağından direk dibinde bulunan ve ayakları en tehlikeli durumda açılmış olan bir insan için $s=80$ cm alarak $U_{s\max}=1970$ V bulunur. Bu örnek topraklama dirençlerinin önemini göstermektedir.

Şek. 18 de toprak yüzeyine gömülen iki yarım küre görülmektedir.



Şek. 17



Şek. 18

Toprak yüzeyindeki sınır şartı ayni akımlar uygulanan imaj yarım küreleri vasıtasiyle sağlanır. $d\gg a$ ve $d\gg b$ için kürelere noktasal kaynak gözüyle bakılabileceğinden $\pm 2I$ akımlarını taşıyan sınırsız ortam içindeki küreler arasındaki gerilim için yaklaşık olarak

$$U_{12}\approx\frac{I}{2\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}\right)$$

yazılabilir. Buradan geçiş direnci için

$$R\approx\frac{1}{2\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}\right)$$

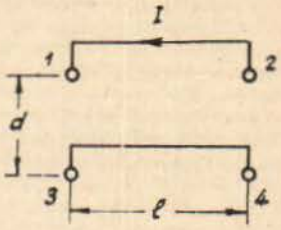
bulunur. d çok büyükse üçüncü terimi bırakarak $a=b$ için

$$R\approx\frac{1}{\pi\varkappa a}$$

yazılabilir.

Yarım küresel topraklamalara örnek olarak kuvvetli akım hattı-

nın zayıf akım hattına tesirini gözden geçirelim. Şek. 19 da dönüşleri toprak olan hatların topraklamaları görülmektedir. Topraklamalar kuvvetli akım için 1,2 ve zayıf akım için 3,4 ile işaretlenmiştir. Kuvvetli akım hattından I akımı geçince zayıf akım devresinde $U_{34}=\varphi_3-\varphi_4$ gerilimi meydana gelir. Topraklamaların noktasal kaynak gibi olduklarını farzederek bu gerilim için



Şek. 19

$$U_{34}=\frac{I}{\pi\chi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{d^2+l^2}}\right)$$

bulunur. $l \gg d$ için

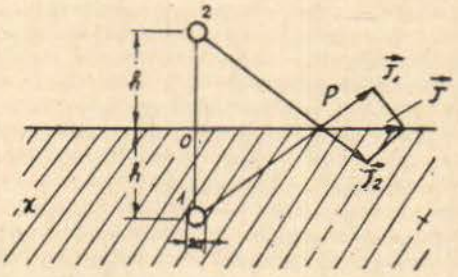
$$U_{34}\approx\frac{I}{\pi\chi d}$$

yazabiliriz. Şayet 4 topraklaması 1, 2, 3 topraklamalarından çok uzakta ise $\varphi_4 \approx 0$ alınabileceğinden

$$U_{34}\approx\frac{I}{2\pi\chi d}$$

bulunur. Meselâ $I=500$ A, $d=50$ m için ve 4 topraklaması uzakta olduğuna göre $U_{34}\approx 160$ V bulunur ($\chi=10^{-2}$ S/m). Bu örnek topraklamaların yeter uzaklıkta alınmalarının gerektiğini göstermektedir.

Şek. 20 de toprak yüzeyinden h derinliğine gömülen küçük bir küre görülmektedir. Akım dağılışını, kürenin toprak yüzeyine göre imajını alarak bulabiliriz. h derinliği yeter büyüklükte ise elektrodlar noktasal olarak kabul edilebilir. Şek. 20 yardımiyle toprak-yüzeyinde sınır şartının ($J_n=0$) sağlandığı görülmektedir. Kürenin potansiyeli



Şek. 20

$$\varphi_0=\frac{I}{4\pi\chi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2h}\right)$$

olacağından topraklama direnci için

$$R=\frac{1}{4\pi\chi a}\left(1+\frac{a}{2h}\right).$$

bulunur. Bu değer sınırsız ortam içindeki kürenin geçiş direncinden biraz büyüktür.

Toprak yüzeyindeki potansiyel dağılışı için

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\varkappa} \frac{1}{\sqrt{h^2 + z^2}}$$

elde edilir. O ve P noktaları arasındaki gerilim ise

$$U = \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+(z/h)^2}} \right]$$

olacaktır.

P noktasındaki potansiyel gradyanı için

$$E_z = \frac{I}{2\pi\varkappa} \frac{z}{(h^2 + z^2)^{3/2}}$$

bulunur. Potansiyel gradyanı $z = h/\sqrt{2}$ için maksimum olur.

Şek. 21 de yarım küre toprak yüzeyine gömülüdür ve h derinliğinde öziletkenliği topraktan çok büyük olan su tabakası başlamaktadır. Yarım kürenin topraklama direncini, iki dielektrik düzlem arasındaki küçük kürenin statik alanı yardımiyle hesaplayabiliriz. Yarım kürenin toprak yüzeyine göre imajına I akımını uygulayarak toprak yüzeyindeki sınır şartı sağlanır. Diğer imajlar $z = \pm 2nh (n = 1, 2, ...)$ noktalarındaki $(-1)^n 2I$ akımlarını taşıyan kürelerdir. Dielektrik sabitleri yerine öziletkenlikleri ve Q yerine $2I$ koyarak

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\varkappa a} \left(1 - \frac{a}{h} \ln \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \right)$$

ve $\varkappa_2 \gg \varkappa_1$ için

$$R \approx \frac{1}{2\pi\varkappa a} \left(1 - \frac{a}{h} \ln 2 \right)$$

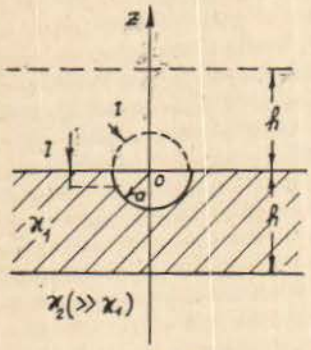
bulunur.

2 — Çubuk şeklindeki topraklamalar incelenecektir.

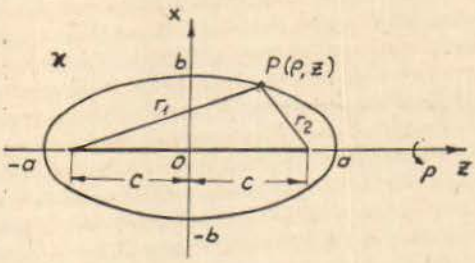
İlk önce şek. 22 de görülen sınırsız ortam içindeki çizgisel elektrodun akım dağılışını gözden geçirelim. Dielektrik içindeki çizgisel yükle olan analojiden faydalanarak potansiyel için

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(\rho, z) = \frac{I}{8\pi\chi h} \ln \frac{z + h + \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}}{z - h + \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}}$$

yazılabilir. ($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$). I, elektrodun toplam akımıdır ve $I/2h = \bar{I}$ çizgisel akım yoğunluğu sabittir. Akım dağılışı eksenel simetriktir. Eş-



Şek. 21



Şek. 22

potansiyel yüzeyler rotasyon elipsoidleri ve akım çizgileri hiperbollerdir. Elipslerin ve hiperbollerin odakları elektrodun uçlarındadır. Elipsoid biçimindeki bir elektrodun akım dağılışı bu şekilde olacaktır. Şek. 23 de görülen elektrodun potansiyeli için meselâ $z=0$, $\rho=d/2$ noktası yardımiyle

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\chi h} \ln \frac{h + \sqrt{(d/2)^2 + h^2}}{d/2}$$

bulunur. d, elipsoidin $z=0$ düzlemindeki yarıçapıdır. Diğer taraftan $l^2 = (d/2)^2 + h^2$ olduğundan $l \gg d/2$ için $h \approx l$ alınabilir. Bu durumda elipsoid, yuvarlak uçlu bir silindire yaklaşır. Bu şekli haiz olan bir çubuğun potansiyeli için

$$\varphi_0 \approx \frac{I}{4\pi\chi l} \ln \frac{4l}{d}$$

yazılabileceğinden geçiş direnci Için

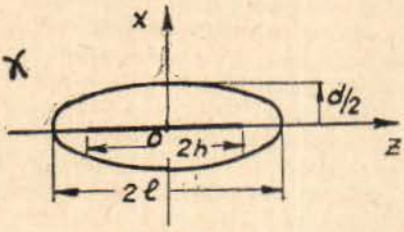
$$R \approx \frac{1}{4\pi\chi l} \ln \frac{4l}{d}$$

bulunur.

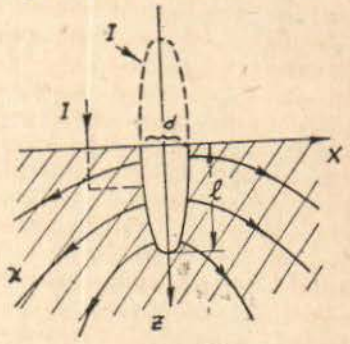
Toprak yüzeyine düşey olarak gömülen bir çubuğun akım dağılışı imaj yardımiyle bulunur, şek. 24. Çubuğun akımı $2I$ olacağından toprak yüzeyindeki potansiyel dağılışı için ($z = 0$)

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\varkappa h} \ln \frac{h+\sqrt{\rho^2+h^2}}{\rho}$$

yazılabilir. Buradan $h \approx l$ ve $\rho = d/2$ koyarak çubuğun potansiyeli için



Şek. 23



Şek. 24

$$\varphi_0 \approx \frac{I}{2\pi\varkappa l} \ln \frac{4l}{d}$$

ve topraklama direnci için

$$R \approx \frac{1}{2\pi\varkappa l} \ln \frac{4l}{d}$$

elde edllir. Bu formüle göre küçük dirençler elde edebilmek için uzun çubuklar seçilmelidir. Uzun çubuklar yerine paralel bağlı kısa çubuklar kullanmak pratik bakımdan daha elverişlidir.

Çubukla toprak yüzeyindeki bir nokta arasındaki gerilim için

$$U = \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{\ln(4l/d)} \ln \frac{1+\sqrt{1+(\rho/l)^2}}{\rho/l} \right]$$

bulunur. Bu ifade yardımiyle çubuğun gerilim hunisi kolayca çizilebilir. Çok uzaklarda $\rho \gg l$ olacağından

$$\varphi \approx \frac{I}{2\pi\varkappa\rho}$$

yazılabilir. Böylece uzaklardaki potansiyel dağılışının yarım küre gibi olacağı anlaşılır.

Toprak yüzeyindeki potansiyel gradyanı için

$$E\rho = -\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{I}{2\pi\varkappa\rho\sqrt{\rho^2+l^2}}$$

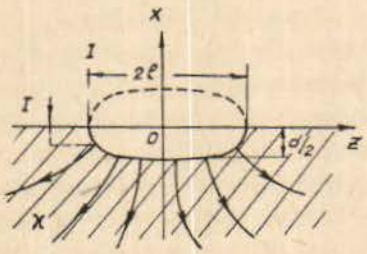
bulunur. $\rho=d/2$ için, yani çubuğun dibinde, E_ρ maksimum olarak $l \gg d/2$ için $E_{\rho max} \approx I/\varkappa\pi ld$ değerini alır.

Toprak yüzeyine yatay olarak gömülen yarım silindirik çubuğun akım dağılışı da benzer şekilde incelenir, şek. 25. İmaj yarım silindiri yardımiyle toprak yüzeyindeki sınır şartı sağlanır. Toprak yüzeyindeki potansiyel dağılışı için ($x=0$, $\rho=y$)

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\varkappa h} \ln \frac{z+h+\sqrt{y^2+(z+h)^2}}{z-h+\sqrt{y^2+(z-h)^2}}$$

bulunur. Çubuğun potansiyeli için meselâ $z=0$, $y=d/2$ koyarak $h \approx l$ için

$$\varphi_0 = \frac{I}{2\pi\varkappa h} \ln \frac{4l}{d}$$



Şek. 25

elde edilir. Böylece geçiş direncinin düşey çubuk gibi olduğu anlaşılır.

Toprak yüzeyindeki potansiyel gradyanları $E_y = -\partial\varphi/\partial y$ ve $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ yardımiyle hesaplanabilir. Meselâ

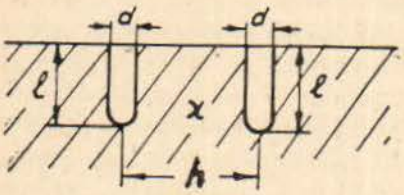
$$E_z = \frac{I}{4\pi\varkappa h}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+(z+h)^2}}\right]$$

bulunur. Bu gradyan $y=0$, $z=l$ için, yani çubuğun ucunda maksimum olarak $E_{zmax}=2I/\pi\varkappa d^2$ değerini alır. $E_{zmax}/E_{\rho max}=2l/d \gg 1$ olacağından yatay çubuk daha tehlikelidir.

Şek. 26 da görülen iki çubuk arasındaki geçiş direncini sınırlı uzunluktaki paralel iki silindirin kapasitesini bulmaya yarayan formül yardımiyle hesaplayabiliriz. Sınır şartının imaj yarım silindirleri vasıtasiyle sağlandığını gözönüne alarak

$$R = \frac{1}{\pi\varkappa l} \ln\left(\frac{4l}{d}\,\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)$$

bulunur. Geçiş direnci için



Şek. 26

$$R \approx \frac{1}{\pi \varkappa l} \ln \frac{2h}{d} \qquad (l \gg h),$$

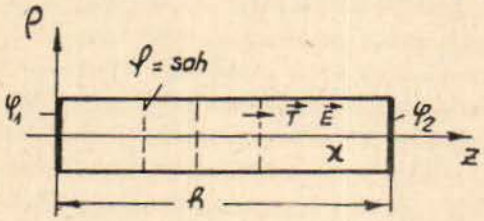
$$R \approx \frac{1}{\pi \varkappa l} \ln \frac{4l}{d} \qquad (h \gg l)$$

yaklaşık formülleri kullanılabilir.

17. Dirençlerin hesabı.

Aşağıda çeşitli sistemlerin dirençleri hesaplanmıştır.

1 — Üniform kesitli silindirin direnci bulunacaktır, şek. 27.



Şek. 27

Silindirin kenarlarındaki elektrodlara φ_1 ve φ_2 potansiyelleri uygulanmıştır. Potansiyel dağılışı yalnız z ye bağlı olacağından $d^2\varphi/dz^2 = 0$ dır. Buradan sınır şartları yardımiyle

$$\varphi = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} z + \varphi_1 = -\frac{U_{12}}{l} z + \varphi_1$$

ve $E_z = -d\varphi/dz = U_{12}/l$ bulunur. Akım yoğunluğu $J_z = \varkappa E_z = \varkappa U_{12}/l$ ve akım $I = J_z F = \varkappa F U_{12}/l$ olduğundan

$$R = \frac{l}{\varkappa F}$$

bulunur. Eşpotansiyel yüzeyler z = sab. kesitleri ve akım çizgileri ise eksene paralel doğrulardır.

2 — Şek. 28 deki küreler arasındaki geçiş direnci bulunacaktır.

Elektrodlar arasındaki gerilim

$$U_{12} = \frac{I}{4\pi\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

olacağından geçiş direnci için

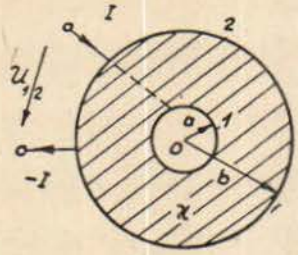
$$R = \frac{1}{4\pi\varkappa} \frac{b-a}{ab}$$

bulunur. $b \to \infty$ için sınırsız ortam içindeki kürenin geçiş direnci elde edilir. Geçiş direncini (13) ve (29) yardımiyle de hesaplayabiliriz. Bir akım çizgisi ve bir eşpotansiyel yüzey üzerinden integrali hesaplayarak

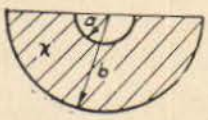
$$R = \frac{1}{\varkappa} \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2}$$

yardımiyle ayni formül bulunur.

Şek. 29 da görülen yarım küreler için



Şek. 28



Şek. 29

$$R = \frac{1}{2\pi\varkappa} \frac{b-a}{ab}$$

olacağı kolayca görülebilir. $b \to \infty$ için toprak yüzeyine gömülen yarım kürenin direnci elde edilir.

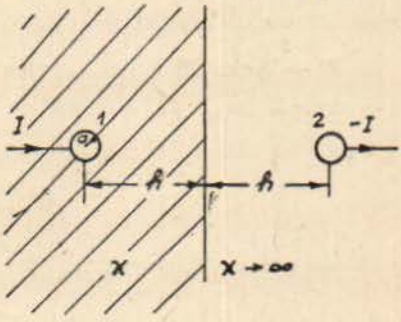
3 — Şek. 30 da küçük küre ile sonsuz levha arasındaki geçiş direnci bulunacaktır.

Akım çizgileri sonsuz levhaya dik olacağından $J_t = 0$ sınır şartı imaj küresine $-I$ akımını uygulayarak sağlanabilir. $a \gg d$ olduğu farzedilirse kürenin potansiyeli için

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h}\right)$$

yazılabileceğinden geçiş direnci için

$$R = \frac{1}{4\pi\varkappa a}\left(1 - \frac{a}{2h}\right)$$



Şek. 30

bulunur. Bu formülü $RC=\varepsilon/\varkappa$ da

$$C=\frac{4\pi\varepsilon a}{1-\frac{a}{2h}}$$

koyarak da bulabilirdik.

4 — Bir damarlı kablonun geçiş direnci bulunacaktır, şek. 28. $RC=\varepsilon/\varkappa$ da

$$C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

koyarak

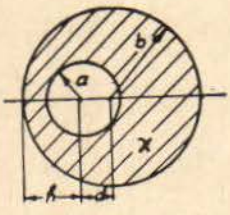
$$R=\frac{1}{2\pi\varkappa l}\ln\frac{b}{a}$$

bulunur. Birim uzunluğun direnci $\overline{R}=Rl$ dir.

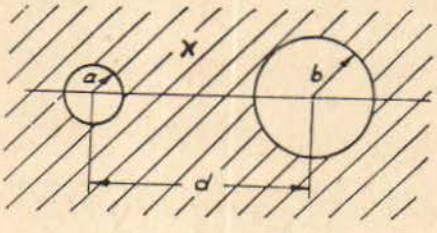
Silindirler ortak eksenli değilse kapasite formülü yardımiyle

$$R=\frac{1}{2\pi\varkappa l}\operatorname{Ch}^{-1}\left(\pm\frac{d^2-a^2-b^2}{2ab}\right)$$

bulunur. Negatif işaret şek. 31 için ve pozitif işaret şek. 32 için kullanılır. Şek 32 de $a=b$ için direnç formülü



Şek. 31



Şek. 32

$$R=\frac{1}{\pi\varkappa l}\operatorname{Ch}^{-1}\frac{d}{2a}$$

şekline girer. $d\gg a$ için yaklaşık olarak

$$R\approx\frac{1}{\pi\varkappa l}\ln\frac{d}{a}$$

yazılabilir. Toprak yüzeyine gömülen iki paralel silindir için bu değerin iki katı alınır.

Silindirle sonsuz levha arasındaki geçiş direnci için imaj silindiri yardımiyle

$$R=\frac{1}{2\pi\varkappa l}\,\mathrm{Ch}^{-1}\frac{h}{a}$$

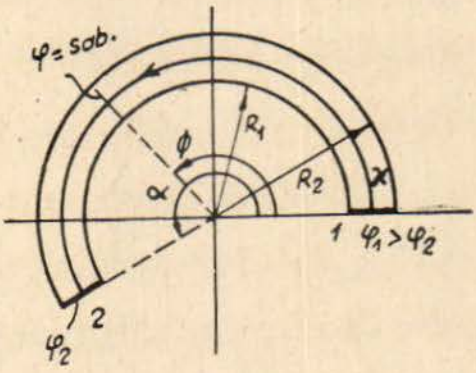
bulunur, şek. 30. Bu değer iki silindir arasındaki geçiş direncinin yarısıdır.

5 — Toroid parçasının direnci bulunacaktır, şek. 33.

Toroidin 1 ve 2 kesitlerindeki elektrod levhalarına φ_1 ve φ_2 potansiyelleri uygulanmıştır. Simetriden dolayı potansiyel fonksiyonu yalnız ϕ açısına bağlı olacağından

$$\varphi=A\phi+B$$

dir. A ve B sabitleri sınır şartları yardımiyle kolayca bulunabilirse de direncin hesabı için buna lüzum yoktur. Eşpotansiyel yüzeyler ϕ = sab. kesitleridir. Potansiyel gradyanı ve akım yoğunluğu



Şek. 33

$$E_\phi=-\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\phi}=-\frac{A}{\rho}\,,\qquad J_\phi=\varkappa E_\phi=-\varkappa\frac{A}{\rho}$$

dır. Akım çizgileri daire yaylarıdır. Toroide uygulanan gerilim

$$U_{12}=\int_0^\alpha E_\phi\rho d\phi=-A\alpha$$

dır. Kesit daire şeklinde olduğu takdirde akım

$$I=-\varkappa A\int_{z=-\sqrt{a^2-(\varrho-R_0)^2}}^{\sqrt{a^2-(\varrho-R_0)^2}}\ \int_{\varrho=R_0-a}^{R_0+a}\frac{dz\,d\rho}{\rho}=-2\pi\varkappa A(R_0-\sqrt{R_0^2-a^2})$$

olacağından

$$R = \frac{a}{2\pi\varkappa(R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2})}$$

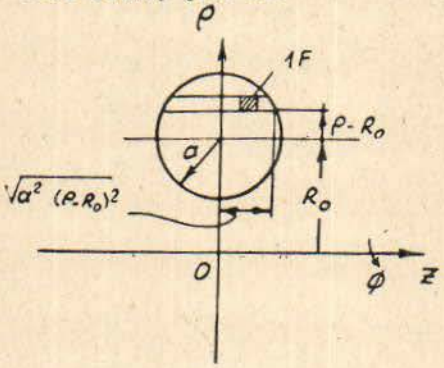
bulunur, şek. 34. Kesit dikdörtgen şeklinde ise

$$I = -\varkappa A \int_{z=-c/2}^{c/2} \int_{\varrho=R_1}^{R_2} \frac{dz d\rho}{\rho} = -\varkappa c \ln \frac{R_2}{R_1}$$

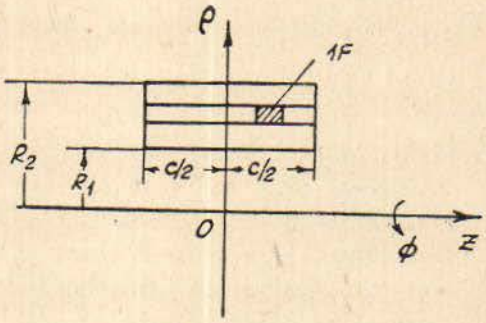
olacağından

$$R = \frac{\alpha}{\varkappa c \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

elde edilir, şek. 35.



Şek. 34



Şek. 35

6 — Şek. 36 da görülen sektörün direnci hesaplanacaktır.

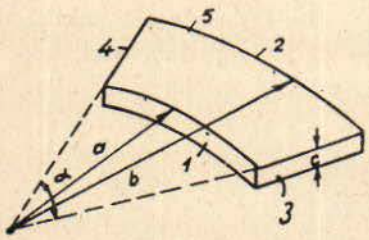
İlk önce 1 ve 2 kesitleri arasındaki direnci bulalım. Simetriden dolayı potansiyel fonksiyonu yalnız ρ koordinatına bağlı olacağından

$$\varphi = A \ln \rho + B$$

bulunur. Buradan $E_\varrho = -A/\rho$, $J_\varrho = -\varkappa A/\rho$ ve

$$U_{12} = -A \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = -A \ln \frac{b}{a},$$

$$I = -\varkappa A \int_0^\alpha \frac{c\rho d\phi}{\rho} = -\varkappa c A \alpha$$



Şek. 36

bulunacağından sektörün direnci için

$$R = \frac{1}{\varkappa c \alpha} \ln \frac{b}{a}$$

elde edilir. 3 ve 4 kesitleri arasındaki direnç toroid gibi hesaplanır ve kesitin dikdörtgen şeklinde olduğunu gözönüne alarak

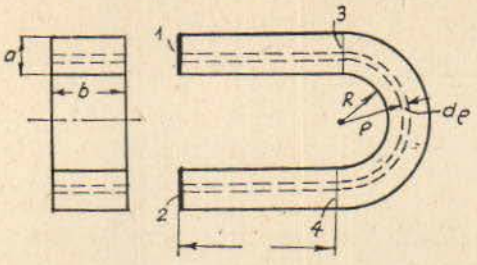
$$R = \frac{\alpha}{\varkappa c \ln \frac{b}{a}}$$

bulunur. 5 ve 6 kesitleri arasındaki kısma, uzunluğu c ve kesiti $F=(b^2-a^2)\alpha/2$ olan bir iletken gözüyle bakılabileceğinden

$$R = \frac{2c}{\varkappa(b^2 - a^2)\alpha}$$

bulunur.

7 — Şek. 37 de görülen atnalı biçimindeki iletkenin direnci bulunacaktır.



Şek. 37

Direncin tam değerini analitik olarak bulmak kabil olmadığı vakit yaklaşık hesap yapılır. Meselâ yaklaşık kareler yardımiyle direnci grafik yoldan bulabiliriz. Bazı hallerde aşağıdaki özellikten faydalanarak yaklaşık değeri hesaplayabiliriz. Bir iletkende her hangi bir bölgenin $\varkappa$ sı arttırılırsa direnç küçülür ve tersine olarak $\varkappa$ küçültülürse direnç büyür. Bu gerçekten faydalanarak direncin alt ve üst limitleri bulunabilir. Alt limiti bulmak için iletkenin içine ve mümkün mertebe eşpotansiyel yüzeylere intibak edecek şekilde çok ince elektrod tabakalarının yerleştirildiği ve üst limiti bulmak için de mümkün mertebe akım çizgilerine intibak edecek şekilde çok ince dielektrik tabakalarının yerleştirildiği farzedilir. Bu tabakaların, limit değerlerinin kolayca hesaplanmasını sağlayacak şekilde yerleştirilmesine çalışılır.

Şek. 37 de ince elektrodların 3 ve 4 kesitlerine intibak ettikleri farzedilirse bu kesitler eşpotansiyel yüzey haline gelmeye zorlanırlar.

Gerilimin uygulandığı 1 ve 2 kesitlerine de böyle ince elektrod tabakaları tesbit edilmiştir. Sistemin direnci üç bölgenin dirençlerini toplayarak bulunacağından direncin alt limiti için

$$R_{min} = \frac{1}{\varkappa b}\left[\frac{2c}{a} + \frac{\pi}{\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)}\right]$$

elde edilir. İnce dielektrik tabakaları şek. 36 da görüldüğü gibi yerleştirilirse iki tabaka arasında kalan $d\rho$ kalınlığındaki şeridin iletkenliği

$$dG_{max} = \frac{\varkappa b d\rho}{2c + \pi\rho}$$

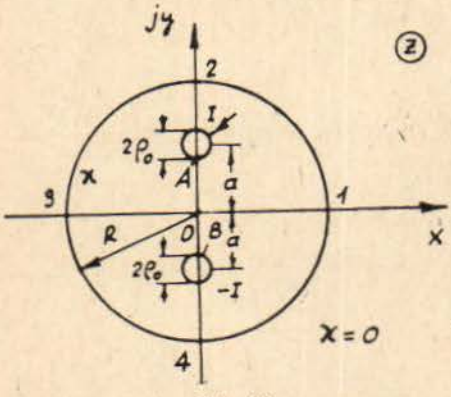
olacaktır. Bunu R_1 ve R_2 sınırları arasında integre ederek direncin üst limiti için

$$R_{max} = \frac{\pi}{\varkappa b \ln \frac{\pi(R+a)+2c}{\pi R + 2c}}$$

bulunur. İletkenin direnci yaklaşık olarak

$$R \approx \frac{R_{min}+R_{max}}{2}$$

şeklinde hesaplanabilir. Kesitin daire, üçgen vs. şeklinde olması halinde de benzer hesaplar yapılır.



Şek. 38

18. Sınır değeri problemleri.

Stasyoner akım dağılışında sınır değeri problemlerini çözmek için statik alanda görülen bütün metodlardan faydalanabiliriz. Aşağıda bazı sınır değeri problemlerinin çözümleri verilmiştir.

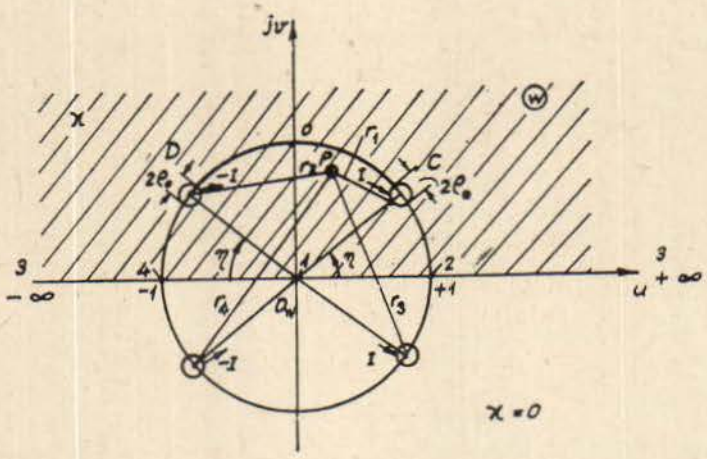
1 — Şek. 38 de görülen disk üzerine yerleştirilen iki silindirik elektroda I ve $-I$ akımları uygulanmıştır. $\rho_0 \ll a$ olduğunu kabul

ederek potansiyel fonksiyonu ve elektrodlar arasındaki geçiş direnci hesaplanacaktır. Diskin kalınlığı d dir.

Disk dışında $\vec{J} = 0$ olduğundan probleme iki boyutlu gözüyle bakabiliriz. Sistem w—düzleminin üst yarısına

$$w = j\frac{R-z}{R+z}$$

analitik fonksiyonu vasıtasiyle transforme edilebilir, şek. 39. Bu transformasyonda diskin sınırı u—eksenine tekabül eder. Elektrodlar z—düzleminde $z = \pm ja$ noktalarında bulunduklarından meselâ A nın transformasyonu ile elde edilen C elektrodu w—düzleminde



$$w_C = j\frac{R-ja}{R+ja} = \frac{2Ra}{R^2+a^2} + j\frac{R^2-a^2}{R^2+a^2}$$

noktasında bulunur. Buradan $|w_C| = 1$ ve $\arg(w_C) = \eta = \operatorname{arctg}\dfrac{R^2-a^2}{2Ra}$ elde edilir. B nin transformasyonu ile elde edilen D elektrodu C nin imajiner eksene göre imajının bulunduğu yerde olacaktır.

Sonsuz küçük şekillerdeki konformluk özelliğine dayanarak w—düzlemindeki elektrodların yarıçapları için

$$\rho_w = \left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=ja} \rho_0 = \frac{2R}{R^2+a^2}\rho_0$$

bulunur. Bu elektrodlara çizgisel kaynak gözüyle bakılabileceğinden w—düzlemindeki problem, C ve D elektrodlarının reel eksene göre imajlarını almak ve bunlara I ve $-I$ akımlarını uygulamak suretiyle çözülebilir. Bu imajlar yardımiyle u — ekseni boyunca sınır şartının ($J_n = 0$) sağlandığı kolayca görülebilir. Elektrodların çizgisel akım yoğunluğu $\overline{I_i}$ ile gösterilirse ($i = 1, \ldots, 4$) çizgisel yükle analojiden faydalanarak w_i noktasındaki akımın kompleks potansiyeli için (λ_i yerine $\overline{I_i}$ ve ε yerine $\varkappa$ koyarak)

$$P_i = -\frac{\overline{I_i}}{2\pi\varkappa} \ln (w - w_i) + k_i$$

yazılabilir. Böylece iki orijinal ve iki imaj elektrodunun her hangi bir noktadaki toplam kompleks potansiyeli için

$$P = \frac{\overline{I}}{2\pi\varkappa} \ln \left[\frac{w - e^{j(\pi-\eta)}}{w - e^{j\eta}} \cdot \frac{w - e^{-j(\pi-\eta)}}{w - e^{-j\eta}} \right] + k$$

bulunur. Bu ifadede $w = u + jv$ koyduktan sonra reel kısmı hesaplarsak w—düzlemindeki $\varphi = \varphi(u, v)$ potansiyel fonksiyonunu buluruz. Şayet

$$w = j\frac{R - z}{R + z}$$

koyup reel kısmı hesaplarsak z — düzlemindeki $\varphi = \varphi(x, y)$ potansiyelini elde ederiz. Şek. 39 da P noktasındaki potansiyel için

$$\varphi_P = \frac{\overline{I}}{2\pi\varkappa} \ln \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} + k$$

bulunur. Şayet P noktası C elektrodu üstünde alınırsa

$$r_1 = \rho_w, \quad r_2 = \frac{2Ra}{R^2 + a^2}, \quad r_3 = 2\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2}, \quad r_4 = 2$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\varphi_C = \frac{\overline{I}}{2\pi\varkappa} \ln \frac{4Ra}{\rho_w (R^2 - a^2)} + k$$

bulunur. D elektrodunun potansiyeli $\varphi_D = -\varphi_C$ olacağından iki elektrod arasındaki gerilim için

$$U_{CD} = \varphi_C - \varphi_D = \frac{\bar{I}}{\pi\varkappa} \ln \frac{2a(R^2 + a^2)}{\rho_0 (R^2 - a^2)}$$

elde edilir. Bu ifadede $\bar{I} = I/d$ koyarak elektrodlar arasındaki geçiş direnci için

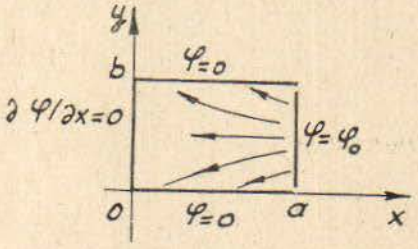
$$R = \frac{1}{\pi\varkappa d} \ln \frac{2a(R^2 + a^2)}{\rho_0 (R^2 - a^2)}$$

bulunur. Birim uzunluk için direnç $\bar{R} = Rd$ olacaktır. Disk sonsuz geniş alınırsa $R \to \infty$ koyarak

$$R_\infty = \frac{1}{\pi\varkappa d} \ln \frac{2a}{r}$$

bulunur.

2 — Şek. 40 da görülen levhadaki akım dağılışı incelenecektir.



Şek. 40

Bu akım dağılışı, meselâ bir direnç kâğıdının $x = a$, $y = 0$ ve $y = b$ kenarlarına gümüş elektrodlar kaplayarak gerçeklenebilir. Problem iki boyutludur ve sınır şartları

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad , \quad \varphi(a, y) = \varphi_0 \quad , \quad \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0$$

şeklindedir. Son üç şart bir bataryanın pozitif kutbunu $x =$ kenarına ve negatif kutbunu da $y = 0$ ve $y = b$ kenarlarına birleştirerek sağlanabilir. Birinci şart ise levha ile hava arasındaki sınır yüzeyinde cari olan $J_n = 0$ şartının bir sonucudur. Lineer çözümlerin kullanılamayacağı ve harmoniği

$$XY = (A \text{ Sh } mx + B \text{ Ch } mx)(C \sin my + D \cos my)$$

şeklinde almak gerektiği kolayca görülebilir. $Y(0) = 0$ şartından $D = 0$ ve $Y(b) = 0$ şartından $m_\alpha = \alpha\pi/b$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ bulunacağından

$$Y_\alpha = C_\alpha \sin \frac{\alpha \pi y}{b}$$

olur. $(\partial\varphi/\partial x)_{x=0} = 0$ şartı yardımiyle $A = 0$ bulunacağından

$$X_\alpha = B_\alpha \operatorname{Ch} \frac{\alpha \pi x}{b}$$

dir. $B_\alpha\ C_\alpha = K_\alpha$ koyarak $\varphi(x, y)$ için

$$\varphi(x, y) = \sum_\alpha K_\alpha \operatorname{Ch} \frac{\alpha \pi x}{b} \sin \frac{\alpha \pi y}{b}$$

elde edilir. $\varphi(a, y) = \varphi_0$ şartı yardımiyle

$$\varphi_0 = \sum_\alpha K_\alpha \operatorname{Ch} \frac{\alpha \pi a}{b} \sin \frac{\alpha \pi y}{b} = \sum_\alpha M_\alpha \sin \frac{\alpha \pi y}{b}$$

Fourier sinüs serisi bulunur. M_α katsayıları

$$M_\alpha = \frac{2\varphi_0}{b} \int_0^b \sin \frac{\alpha \pi y}{b} dy = \frac{4\varphi_0}{\alpha \pi} \qquad (\alpha = \text{tek sayı})$$

olacağından

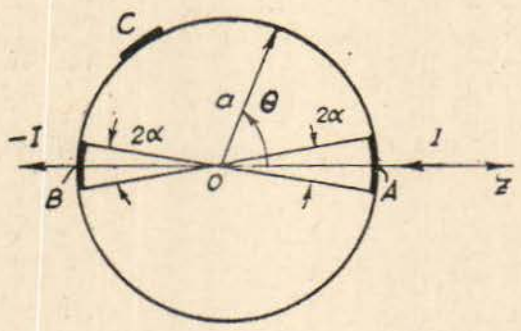
$$\varphi(x, y) = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_\alpha \frac{1}{\alpha \operatorname{Ch} \frac{\alpha \pi a}{b}} \operatorname{Ch} \frac{\alpha \pi x}{b} \sin \frac{\alpha \pi y}{b}$$

bulunur. Akım yoğunluğu $\vec{J} = -\varkappa \operatorname{grad}\varphi$ yardımiyle hesaplanır.

3— Şek. 41 de görülen iletken küre içindeki akım dağılışı bulunacaktır.

Elektrodların A ve B noktalarında bulunduğu farzedilirse akım dağılışı eksenel simetriden dolayı yalnız r ve θ ya bağlı olur. Böylece $r \leqq a$ için

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu)$$



Şek.

yazılabilir ($\mu = \cos\theta$). Elektrodların kapladığı yer dışında küre yüzeyinde $J_n = 0$ dır. Akım yoğunluğunun normal bileşeni küre yüzeyinde

$$J_n = -\varkappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \varkappa n A_n a^{n-1} P_n(\mu)$$

dir. Her hangi bir $G(\mu)$ fonksiyonu için Legendre polinomları serisi

$$G(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_n(\mu)$$

dir ve bu serinin katsayıları

$$M_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\mu=-1}^{+1} G(\mu) P_n(\mu)\, d\mu$$

yardımiyle hesaplanır. İncelenen problemde $M_n = -\varkappa n A_n a^{n-1}$ ve $G(\mu) = J_n(\mu)$ olduğundan

$$-\varkappa n A_n a^{n-1} = \frac{2n+1}{2} \int_{\mu=-1}^{+1} J_n(\mu) P_n(\mu)\, d\mu$$

yazılabilir. Elektrodlara uygulanan akım I ile gösterilirse, küçük α açıları için elektrodların disk şeklinde alınabileceğini gözönüne alarak

akım yoğunluğu için $J = I/\pi(\alpha a)^2$ yazılabilir. Şek. 42 de J_n dağılışı görülmektedir. Bu dağılışa göre

$$-\frac{2}{2n+1}(\varkappa n A_n a^{n-1}) = \int_{\mu=-1}^{-\cos\alpha} J P_n(\mu)\,d\mu - \int_{\mu=\cos\alpha}^{+1} J P_n(\mu)\,d\mu$$

yazılabileceğinden $n = 2k+1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ koyarak

$$A_n = A_{2k+1} = \frac{J}{(2k+1)\varkappa a^{2k}}[P_{2k}(\cos\alpha) - P_{2k+2}(\cos\alpha)]$$

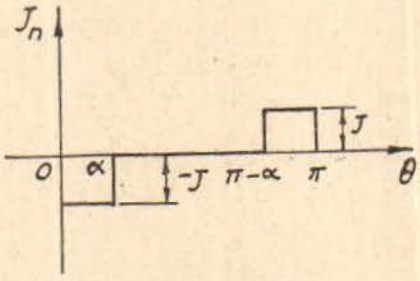
bulunur. Böylece potansiyel fonksiyonu için

$$\varphi(r, \theta) = \frac{aJ}{\varkappa}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}[P_{2k}(\cos\alpha) - P_{2k+2}(\cos\alpha)]P_{2k+1}(\cos\theta)$$

elde edilir. Elektrodlar arasındaki gerilim

$$U = \varphi(a, 0) - \varphi(a, \pi) = \frac{2I}{\pi a^2 \varkappa a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}[P_{2k}(\cos\alpha) - P_{2k+2}(\cos\alpha)]$$

olacağından direnç için



Şek. 42

$$R = \frac{2}{\pi a^2 \varkappa a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}[P_{2k}(\cos\alpha) - P_{2k+2}(\cos\alpha)]$$

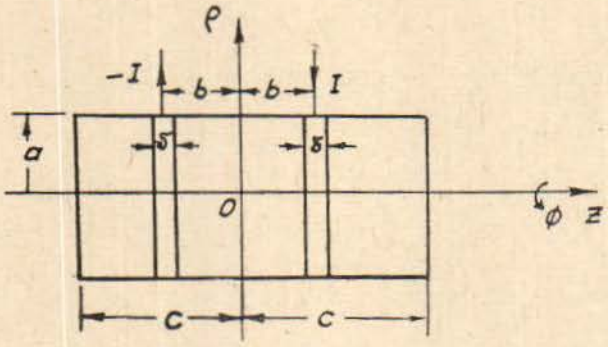
bulunur.

Şayet B deki elektrod meselâ C ye kaydırılırsa eksenel simetri bozulacağından potansiyel r, θ, ϕ koordinatlarına bağlı olur. $r = 0$ noktasının ve poler eksenin çözüm bölgesinde bulunduğunu ve elektrodlardan geçen düzleme göre simetriyi gözönüne alarak

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} [A_{n,m} r^n P_n^m (\cos\theta) \cos m\phi + B_n r^n P_n (\cos\theta)]$$

yazılabilir. Katsayılar sınır şartları yardımiyle bulunur. Direnç yukarıdaki gibi hesaplanır.

4— Şek. 43 de görülen dairesel silindir içindeki akım dağılışı incelenecektir. Silindirin akımı δ kalınlığındaki iki elektrod vasıtasiyle uygulanmıştır.



Şek. 43

Elektrodlardaki akım yoğunluğu için $J = \pm I/2\pi a\delta$ yazılabilir. Elektrodların dışındaki sınır yüzeyinde $J_n = 0$ olacaktır. Akım dağılışı eksenel simetriden dolayı ϕ açısına bağlı değildir. Silindirin uzunluğu sınırlı olduğundan Z fonksiyonu için

$$Z = A \sin mz + B \cos mz$$

seçerek

$$R = C I_0 (m\rho) + D K_0 (m\rho)$$

elde edilir. I_0 ve K_0, modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. Silindirin tabanlarında $\partial\varphi/\partial z = 0$ olduğundan

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=\pm c} = 0$$

yardımiyle

$$m(A\cos mc - B\sin mc) = m(A\cos mc + B\sin mc) = 0$$

bulunur. Bu bağıntılar ancak $B = 0$ ve $\cos mc = 0$ için gerçeklenebileceğinden

$$m_\alpha = \frac{(2\alpha+1)\pi}{2c} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \infty)$$

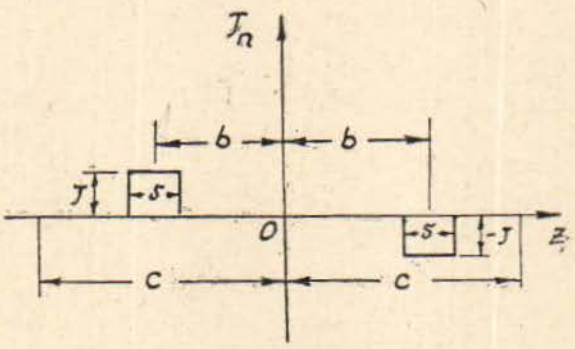
almak gerekir. Diğer taraftan $\rho = 0$ için K_0 fonksiyonu sonsuz olduğundan $D = 0$ alarak

$$\varphi(\rho, z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} M_\alpha I_0(m_\alpha \rho)\sin m_\alpha z$$

elde edilir. Buradan akım yoğunluğunun sınır yüzeyindeki normal bileşeni için

$$J_n = J_\varrho(a, z) = -\varkappa\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\varrho=a} = -\varkappa\sum_{\alpha=0}^{\infty} m_\alpha M_\alpha I_1(m_\alpha a)\sin m_\alpha z$$

bulunur. Şek. 44 de sınır yüzeyindeki J_n dağılışı görülmektedir.



Şek. 44

J_n yi Fourier sinüs serisine açarak

$$J_n = \sum_{\alpha=0}^{\infty} J_\alpha \sin m_\alpha z$$

yazılabilir. Serinin katsayıları

$$J_\alpha = -\frac{2}{c}\int_{b-\frac{\delta}{2}}^{b+\frac{\delta}{2}} \frac{I}{2\pi a \delta} \sin m_\alpha z \, dz = -\frac{I}{\pi a c} \frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2} \sin m_\alpha b$$

dir. Bu katsayılar ile J_n serisinin katsayılarını karşılaştırarak

$$M_\alpha = \frac{I}{\pi a c \varkappa}\left[\frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2}\right] \frac{\sin m_\alpha b}{m_\alpha I_1(m_\alpha a)}$$

bulunur. $\delta \to 0$ için köşeli parantez içindeki ifadenin limiti 1 olacağından, elektrodların kalınlığı sıfır olduğu takdirde hesaplarda bir değişikliğe lüzum yoktur. $\delta \neq 0$ için $m_\alpha = (2\alpha + 1)\pi/2c$ koyarak

$$M_\alpha = \frac{2I}{(2\alpha+1)\pi^2 a \varkappa} \frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2} \frac{\sin m_\alpha b}{I_1(m_\alpha a)}$$

elde edilir.

Elektrodlar arasındaki gerilim

$$U = \varphi(a, b) - \varphi(a, -b) = 2\sum_{\alpha=0}^{\infty} M_\alpha I_0(m_\alpha a) \sin m_\alpha b$$

olacağından direnç için

$$R = \frac{2}{\pi c \varkappa} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{I_0(m_\alpha a)}{m_\alpha a I_1(m_\alpha a)} \frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2} \sin^2 m_\alpha b$$

bulunur.

Şayet elektrodlar yalnız $\phi = \pm\beta$ açıları arasındaki bölgeyi kavrarlarsa eksenel simetri bozulur. Bu durumda genel çözüm

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \sum_n \sum_m [C_{n,m} I_n(m\rho) + D_{n,m} K_n(m\rho)] (A_m \sin mz + B_m \cos mz)$$
$$(E_m \sin m\phi + F_m \cos m\phi)$$

şeklini alır. Yukarıda açıklanan sebeplerden dolayı $B = D = 0$ ve $m_\alpha = (2\alpha + 1)\pi/2c$ alarak

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (M_{n,\alpha} \sin n\phi + N_{n,\alpha} \cos n\phi) I_n(m_\alpha \rho) \sin m_\alpha z$$

yazılabilir. Akım yoğunluğu elektrodlar üstünde $J = \pm I/2a\beta\delta$ değerini alacaktır. Potansiyel yardımıyle J_n için

$$J_n = J_\varrho(a, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (M_{n,\alpha} \sin n\phi + N_{n,\alpha} \cos n\phi) \left[-\frac{n}{m_\alpha a} I_n(m_\alpha a) \right.$$
$$\left. + I_{n-1}(m_\alpha a) \right] m_\alpha \sin m_\alpha z$$

bulunur. Bu bir çift Fourier serisidir. Bu serinin katsayıları sınır yüzeyindeki J_ϱ dağılışını çift Fourier serisine açarak ve bu serinin katsayılarını J_ϱ serisi ile karşılaştırarak bulunur. J_ϱ dağılışının çift Fourier serisini

$$J_\varrho = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} J_{n,\alpha} \cos n\phi \sin m_\alpha z$$

şeklinde alalım. J nin ϕ ye göre çift ve z ye göre tek fonksiyon olduğunu gözönüne alarak serinin katsayıları için ($n \geqq 1$)

$$J_{n,\alpha} = -\frac{4}{c\pi} \int_{\phi=0}^{\beta} d\phi \int_{z=b-\frac{\delta}{2}}^{b+\frac{\delta}{2}} \frac{I}{2a\beta\delta} \cos n\phi \sin m_\alpha z \, dz$$

$$= -\frac{2I}{\pi ac} \frac{\sin n\beta}{n\beta} \frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2} \sin m_\alpha b$$

elde edilir. $n = 0$ için

$$J_{0,\alpha} = -\frac{2}{c\pi}\beta \int_{z=b-\frac{\delta}{2}}^{b+\frac{\delta}{2}} \frac{I}{2a\beta\delta} \sin m_\alpha z\, dz = -\frac{I}{\pi a c} \frac{\sin(m_\alpha \delta/2)}{m_\alpha \delta/2} \sin m_\alpha b$$

olacaktır. Böylece

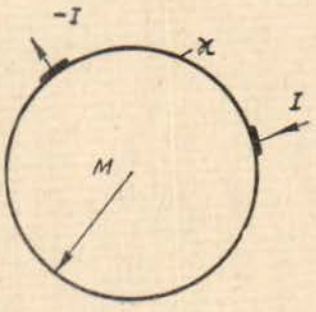
$$M_{n,\alpha} = 0 \quad , \quad N_{n,\alpha} = \left[I_{n-1}(m_\alpha a) - \frac{n}{m_\alpha a} I_n(m_\alpha a) \right]^{-1} \frac{J_{n,\alpha}}{\chi m_\alpha}$$

elde edilir. $N_{0,\alpha}$ katsayısı $J_{0,\alpha}$ yardımiyle hesaplanır.

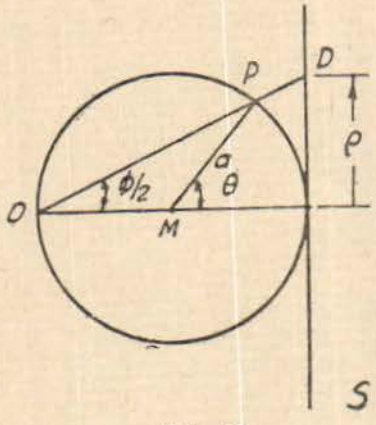
U gerilimi ve R direnci yukarıda görüldüğü gibi hesaplanır. Şayet elektrodlardan biri $\phi = \pm\beta$ ve diğeri $\phi = \pm\gamma$ açılarını kavrarsa hesaplar benzer şekilde yapılır.

5— Şek. 45 de görülen ince küresel tabakanın stasyoner alanı incelenecektir.

A ve B elektrodları, koordinatları (a, θ_1, ϕ_1) ve (a, θ_2, ϕ_2) olan noktalara yerleştirilmiştir. Tabakanın çok ince olduğu farzedildiğinden potansiyelin r ye bağlı olmayacağı düşünülebilir. Böylece Laplace denklemi



Şek. 45



Şek. 46

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

şeklinde olur. Şek. 46 da küre yüzeyinin stereografik projeksiyonu görülmektedir. S, her hangi bir teğet düzlemdir. Bu düzleme dik olan çapın O ucundan ve küre yüzeyindeki P noktasından geçen OP doğrusu teğet düzlemi P' noktasında kesmektedir. P' noktası P nin stereografik projeksiyonudur. P' noktasının ρ koordinatı için

$$\rho = 2a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

bulunur. $\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ operatörü için

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

yazılabileceğinden Laplace denklemi

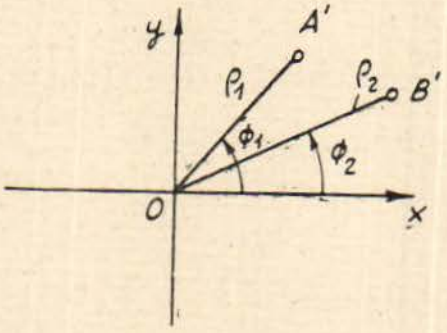
$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

şekline girer. Bu denklem, S düzlemindeki poler koordinatlar cinsinden yazılmış Laplace denklemidir. Böylece Laplace denkleminin S düzlemindeki her hangi bir çözümü yardımiyle küre yüzeyindeki çözümün bulunabileceği anlaşılır.

Küre yüzeyindeki elektrodların projeksiyonları alınırsa S düzlemindeki A', B' elektrodları elde edilir. Bu elektrodların koordinatları $\rho_1 = 2a \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}$, ϕ_1 ve $\rho_2 = 2a \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}$, ϕ_2 dir, şek. 47. S düzlemindeki kompleks potansiyel

$$w = \frac{I}{2\pi\varkappa} \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

olacağından potansiyel fonksiyonu için



Şek. 47

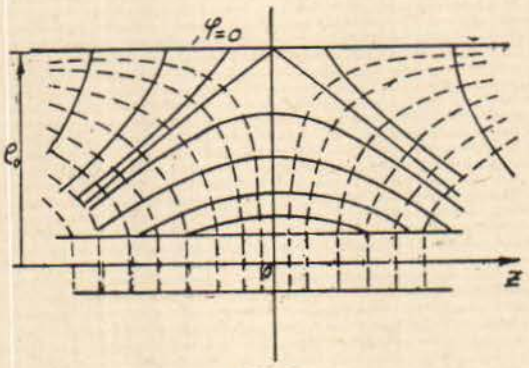
$$\varphi(\rho,\phi) = u = \frac{I}{2\pi\chi}\,\mathrm{Re}\left\{\ln\frac{z-z_1}{z-z_2}\right\} = \frac{I}{4\pi\chi}\ln\frac{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\phi-\phi_1)}{\rho^2+\rho_2^2-2\rho\rho_2\cos(\phi-\phi_2)}$$

bulunur. Bu ifadede ρ, ρ_1, ρ_2 yerine yukarıdaki eşitlerini koyarak küre yüzeyindeki potansiyel dağılışı için

$$\varphi(\theta,\phi) = \frac{I}{4\pi\chi}\ln\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\theta_1}{2}-2\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}\cos(\phi-\phi_1)}{\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\theta_2}{2}-2\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}\cos(\phi-\phi_2)}$$

elde edilir.

6— İçinden $\vec{k}$ yönünde I akımı geçen dairesel silindirin stasyoner alanı incelenecektir, şek. 48.



Şek. 48

Eksenel simetriden dolayı silindirin içinde ve dışında potansiyel ϕ ye bağlı değildir. Çözüm periyodik olamayacağından $Z(z)$ ve $R(\rho)$ fonksiyonları için

$$Z = A\,z + B \qquad , \qquad R = C\ln\rho + D$$

alınabilir. İçteki ve dıştaki potansiyelleri φ_i ve φ_0 ile gösterelim. z— ekseni çözüm bölgesine girdiğinden

$$\varphi_i = A_1 z + B_1$$

yazılabilir. Buradan potansiyel gradyanı için

$$E_{iz} = -\frac{d\varphi_i}{dz} = -A_1$$

bulunur. Alan üniformdur. $E_{iz} = J_z/\varkappa$ olduğunu gözönüne alarak ($J_z = I/\pi R^2$) φ_i için

$$\varphi_i = -\frac{J_z}{\varkappa} z + B_1$$

yazılabilir.

Silindir dışındaki potansiyel

$$\varphi_0 = (A_2 z + B_2)(C_2 \ln \rho + D_2)$$

şeklindedir. $\rho = R$ için $\varphi_i = \varphi_0$ olacağını gözönüne alarak yazılan

$$A_1 z + B_1 = (A_2 z + B_2)(C_2 \ln R + D_2)$$

yardımiyle

$$A_2 = \frac{A_1}{C_2 \ln R + D_2} \quad , \quad B_2 = \frac{B_1}{C_2 \ln R + D_2}$$

elde edilir. $D_2/C_2 = -\ln \rho_0$ koyarak bu ifade

$$\varphi_0 = (A_1 z + B_1) \frac{\ln (\rho/\rho_0)}{\ln (R/\rho_0)}$$

şekline sokulabilir. Silindir dışındaki alan bileşenleri

$$E_{0\varrho} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} = -(A_1 z + B_1) \frac{1}{\rho \ln (R/\rho_0)} \quad ,$$

$$E_{0z} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -A_1 \frac{\ln (\rho/\rho_0)}{\ln (R/\rho_0)}$$

dır. Dıştaki alanın, içtekinden farklı olarak, radyal bileşeni vardır.

Silindir yüzeyindeki serbest yük yoğunluğu

$$\sigma = D_{0\varrho}(R, z) = \varepsilon E_{0\varrho}(R, z) = -\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = -\varepsilon (A_1 z + B_1) \frac{1}{R \ln (R/\rho_0)}$$

olacaktır.

$\varphi_i(0) = 0$ seçilirse φ_i, φ_0 ve σ ifadeleri

$$\varphi_i = A_1 z \ , \quad \varphi_0 = A_1 z \frac{\ln(\rho/\rho_0)}{\ln(R/\rho_0)} \ , \quad \sigma = -\varepsilon A_1 \frac{z}{R \ln(R/\rho_0)}$$

şeklini alırlar.

Meridyen düzlemindeki eşpotansiyel çizgilerin denklemi $\varphi_i = \text{sab.}$ ve $\varphi_0 = \text{sab.}$ olduğundan silindir içinde $z = \text{sab.}$ ve dışında ise

$$z \ln \frac{\rho}{\rho_0} = k = \text{sab.}$$

elde edilir. Silindir içindeki eşpotansiyel yüzeyler paralel kesitlerdir. Silindir dışında $k=0\,(\varphi_0 = 0)$ için $z = 0$ veya $\rho = \rho_0$ olacağından sıfır potansiyelindeki eşpotansiyel yüzeylerin $z=0$ düzlemi ile $\rho = \rho_0$ silindiri olacağı anlaşılır, şek. 48.

Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi

$$z\,dz - \rho \ln \frac{\rho}{\rho_0} d\rho = 0$$

şeklinde olduğundan integre ederek

$$z^2 - \rho^2 \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2} \right) = c = \text{sab.}$$

bulunur. Silindir içindeki akım çizgileri paralel doğrulardır, şek. 48.

C. STASYONER MAGNETİK ALAN

I. TEMEL DENKLEMLER

19. Magnetik alan vektörleri.

Stasyoner magnetik alan stasyoner akımlar tarafından meydana getirilir. Magnetik alanın varlığı akım taşıyan iletkenler üstünde veya magnetik cisimlerde görülen kuvvet tesiriyle anlaşılabilir.

Magnetik alan magnetik endüksiyon ($\vec{B}$) ve magnetik alan şiddeti ($\vec{H}$) vektörleri yardımiyle belirtilir. B ve H nın MKSC - birimleri $Wb/m^2 = Vs/m^2 = T$ (Tesla) ve A/m dir.

Magnetik alan içinde bulunan çizgisel iletkenin $\vec{ds}$ elemanına tesir eden kuvvet

$$\vec{dF} = I(\vec{ds} \times \vec{B}) \tag{42}$$

dir. Alan içinde $\vec{v}$ hızı ile hareket eden q yükü $I\vec{ds} = q\vec{v}$ akım elemanına eşdeğerdir. Böylece q yüküne tesir eden kuvvet için

$$\vec{f} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{43}$$

elde edilir. İleride magnetik alan içindeki kuvvetler etraflı olarak incelenecektir. Yukardaki bağıntılardan magnetik alanı belirten büyüklüğü tarif etmek için faydalanılabilir. Keza bu bağıntılar yardımiyle magnetik endüksiyonun birimi de bulunabilir.

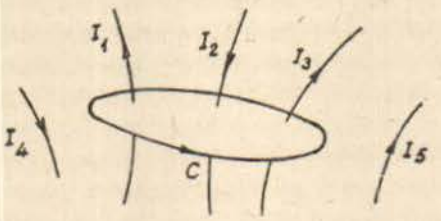
Izotrop bir ortam içinde $\vec{B}$ ile $\vec{H}$ arasında

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{44}$$

bağıntısı vardır. μ, ortamın magnetik geçirgenliğidir ve MKSC- birimi $\Omega s/m = H/m$ dir. Her hangi bir ortam için $\mu = \mu_0 \mu_r$ yazılır. μ_0, boşluğun magnetik geçirgenliğini gösterir ve rasyonalize MKSC - sisteminde $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ H/m dir. μ_r, bağıl magnetik geçirgenliktir ve birimsiz bir sayıdır. μ ye mutlak magnetik geçirgenlik adı da verilir.

20. Amper kanunu.

Magnetik alan içinde $\vec{H}$ vektörünün kapalı bir eğri boyunca hesaplanan eğrisel integrali, bu eğri ile zincirlenen akımların cebrik toplamına eşittir. Böylece Şek. 49 da görülen kapalı eğri için



Şek. 49

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Sigma I \tag{45}$$

yazılabilir. Cebrik toplamda, eğrinin pozitif yönüne sağ sisteme göre bağlı olan akımlar pozitif ve diğer akımlar ise negatif işaretlenir. Şek. 49 daki yönlere göre $\Sigma I = I_1 - I_2 + I_3$ olacaktır. I_4 ve I_5 akımları kapalı eğri ile zincirlenmediğinden toplama girmezler.

Akım dağılışı sürekli olursa şek. 50 de görülen C eğrisi tarafından sınırlanan F yüzeyinden geçen akım için

$$I = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F}$$

yazılabileceğinden (45) bağıntısı

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F} \tag{46}$$

şekline girer. C eğrisi için seçilen pozitif yönle yüzey normalinin pozitif yönü sağ sisteme göre bağlıdır. Bu bağıntı meselâ içinden akım geçen bir iletken ortam için yazılabilir. (45) bağıntısı ise çizgisel akım dağılışı içindir.

(46) bağıntısı Stokes teoremi yardımiyle

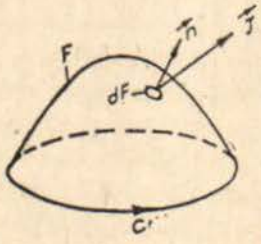
$$\int_F \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{F} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F}$$

şekline sokulabilir. Bu bağıntı F yüzeyine bağlı olmadığından

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{47}$$

elde edilir.

(46) ve (47) bağıntıları Amper kanununun integral ve diferansiyel ifadeleridir. Elektromagnetik alan teorisinin temel denklemlerinden biri olan bu denklem magnetik alan şiddeti ile alanın kaynağı olan akım arasındaki bağıntıyı gösterir. (45) denklemi cizgisel dağılış için Amper kanunu ifadesidir.



Şek. 50

Amper kanunu özel olarak silindirik simetriyi haiz olan sistemlerde alan hesapları için elverişlidir.

μ = sab. için (47) denklemi

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu\vec{J} \tag{48}$$

şeklinde yazılabilir.

Amper kanununa göre magnetik alan genel olarak konservatif değildir ve ancak $\vec{J} = 0$ olan, yani akım geçmiyen bölgelerde

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = 0 \quad , \quad \text{rot}\,\vec{H} = 0 \tag{49}$$

olacağından, bu çeşit bölgelerde konservatif özellik gösterir. Buna karşılık statik elektrik alanı daima konservatiftir.

21. Magnetik akı, Gauss teoremi.

Magnetik endüksiyon vektörünün akısı

$$\phi = \int_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{F} \tag{50}$$

integrali ile hesaplanır. Magnetik akının MKSC — birimi Vs=Wb dir.

Akı skalar bir büyüklüktür. $\vec{B}$ ye akı yoğunluğu adı da verilir.

Magnetik alan içinde kapalı bir yüzey için daima

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \tag{51}$$

dır. Buradan diverjans teoremi yardımiyle

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{52}$$

elde edilir. Bu bağıntılar magnetik alandaki Gauss teoreminin integral ve diferansiyel ifadeleridir. $\vec{B}$ vektörü solenoidal olduğundan magnetik alanı göstermek için faydalanılan $\vec{B}$ — çizgileri daima kapalı eğrilerdir ve alanın kaynağı olan akımlarla zincirlenirler. Gauss teoremi magnetik yük kavramının fiziksel bakımdan anlamsız olduğunu belirtmektedir.

$\vec{B}$ — çizgilerinin diferansiyel denklemi $\vec{B} \times d\vec{s} = 0$ şeklinde olacaktır. $\vec{H}$ — çizgileri her zaman kapalı değildir. İleride bu hususta örnekler görülecektir.

Magnetik alan zamanla değişse bile $\vec{B}$ vektörü yine solenoidaldir. Statik elektrik alanında $\vec{D}$ vektörü ancak $\rho = 0$ olduğu vakit solenoidal karakter gösterir.

(52) denklemi de elektromagnetik alan teorisinin temel denklemlerinden biridir.

22. Magnetik vektör potansiyel.

$\vec{J} \neq 0$ olan bölgelerde magnetik alan konservatif olmadığından bir skaler potansiyelden türetilemez. Bununla beraber $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{53}$$

yazmak ve böylece magnetik alanı bir $\vec{A}$ vektör fonksiyonundan türetmek kabil olur. Bu vektör yardımiyle (47) diferansiyel denklemi, μ = sab. için

$$\operatorname{rotrot} \vec{A} = \operatorname{graddiv} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J} \tag{54}$$

şekline girer. $\vec{A}$ yerine $\vec{A'} = \vec{A} + \text{grad}\,\psi$ alındığı takdirde $\vec{B}$ vektöründe bir değişiktik olmayacağını kolayca görebiliriz. Şayet $\text{div}\,\vec{A} = 0$ alınacak olursa (54) denklemi sadeleşerek

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \tag{55}$$

şeklini alır. $\text{div}\,\vec{A} \neq 0$ olduğu vakit $\vec{A}$ yerine $\vec{A'} = \vec{A} + \text{grad}\,\psi$ alarak $\text{div}\,\vec{A'} = \text{div}\,\vec{A} + \Delta\psi = 0$ denklemini sağlayan bir ψ skaler fonksiyonu ve böylece diverjansı sıfır ve rotasyoneli $\vec{B}$ olan bir $\vec{A'}$ vektörü bulunabilir.

Poisson tipinde olan (55) denkleminde laplasiyen diferansiyel işlemi bir vektör fonksiyonuna uygulandığından birim vektörlerin değişimlerini gözönüne almak gerekir. $\vec{A}$ nın her hangi bir bileşeni A_i ile gösterilirse genel olarak $\Delta(\vec{u_i} A_i) \neq \vec{u_i} \Delta A_i$ dir. $\vec{u_i}$, birim vektördür. Birim vektör sabit olduğu takdirde $\Delta(\vec{u_i} A_i) = \vec{u_i} \Delta A_i$ olur. Meselâ kartezyen koordinatlarda her bileşen için durum böyledir. Silindirik koordinatlarda yalnız z — bileşeni için bunu yazabiliriz.

$\vec{A}$ vektörüne vektör potansiyel adı verilir ve MKSC —birimi Wb/m dir.

$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$ şeklindeki skaler Poisson denkleminin partiküler çözümü bilindiği gibi

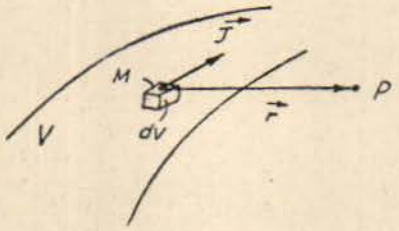
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho\, dV}{r}$$

dir. Bu çözüme analojik olarak (55) denkleminin partiküler çözümü için

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}\, dV}{r} \tag{56}$$

yazılabilir, şek. 51. Hacim integrali $\vec{J} \neq 0$ olan bölge üzerinden hesaplanır. Şayet V bölgesi bütün akım dağılışını içine alacak şekilde seçilirse partiküler çözüm genel çözüm haline gelir. Buna karşılık V bölgesi bütün akım dağılışını içine almayacak olursa partiküler çözü-

me Laplace tipindeki homogen $\Delta \vec{A} = 0$ denkleminin çözümünü ekleyerek genel çozüm elde edilir. Bu denklemin çözümü V bölgesi dışındaki akım dağılışına tekabül eder.



Şek. 51

Şek. 51 de P, vektör potansiyelin hesaplandığı noktayı ve M ise integrasyon bölgesindeki noktayı göstermektedir. (56) çözümünde $\vec{J} = \vec{J}(M)$, $r = r(P, M)$ ve $\vec{A} = \vec{A}(P)$ dir. M noktasındaki $\vec{J}dV$ elemanı P noktasında

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{J}dV}{r} \tag{57}$$

vektör potansiyelini meydana getirecektir.

$\mathrm{div}_P \vec{A} = 0$ olduğunu kolayca görebiliriz. P endisi diverjansın P nin koordinatlarına göre hesaplandığını belirtir. (56) nın diverjansı

$$\mathrm{div}_P \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathrm{div}_P \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dV$$

dir. Zira integrasyon M nin koordinatlarına göre yapıldığından div_P yi intagral işareti içine sokabiliriz. Diğer taraftan $\mathrm{div}_P \vec{J}(M) = 0$ olduğundan $\mathrm{div}_P (\vec{J}/r) = \mathrm{grad}_P (1/r) \cdot \vec{J}$ yazılabilir. Böylece $\mathrm{grad}_P (1/r) = -\mathrm{grad}_M (1/r)$ olduğunu hesaba katarak

$$\mathrm{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(M) \cdot \mathrm{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

bulunur. Nihayet $\mathrm{div}_M \vec{J}(M) = 0$ olduğunu gözönüne alarak $\vec{J} \cdot \mathrm{grad}_M (1/r) = \mathrm{div}_M (\vec{J}/r)$ yazılabileceğinden diverjans teoremi vardımiyle

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_F \frac{J_n \, dF}{r}$$

bulunur. J_n, $\vec{J}$ nin V bölgesinin sınır yüzeyindeki normal bileşenidir. Sınır yüzeyi bütün akım dağılışını içine alacak genişlikte seçildiğinden $J_n = 0$ ve dolayısiyle $\text{div}_P \vec{A} = 0$ olur.

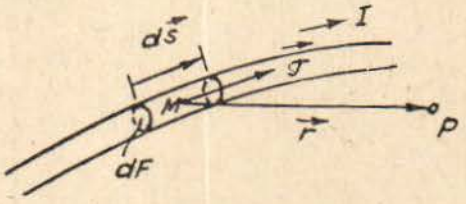
Çizgisel akım dağılışı için $\vec{J} dV = I \vec{ds}$ yazılabileceğinden

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{ds}}{r} \tag{58}$$

olacaktır, şek. 52. $I\vec{ds}$ akım elemanı P noktasında

$$d\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\vec{ds}}{r} \tag{59}$$

vektör potansiyelini meydana getirecektir. (58) eğrisel integrali akım geçen bütün kapalı iletken çevre üzerinden hesaplanır.



Şek. 52

Skaler potansiyel gibi vektör potansiyelin de fiziksel bir anlamı yoktur ve ekseriya hesapları kolaylaştıran bir yardımcı hesap büyüklüğüdür. Magnetik vektör potansiyel gibi statik elektrik alanında da $\rho = 0$ için bir elektrik vektör potansiyeli tarif edilebilirse de konservatif olan bu alanda skaler potansiyelden faydalanmak daha elverişlidir.

(56) integrali sürekli akım dağılışında ve (58) integrali ise çizgisel akım dağılışında $\vec{A}$ yı hesaplamaya yarar. Şayet akım dağılışı yüzeysel karakterde ise

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_F \frac{\vec{J_s} dF}{r} \tag{60}$$

olacaktır.

23. Vektör potansiyelin tatbikatı.

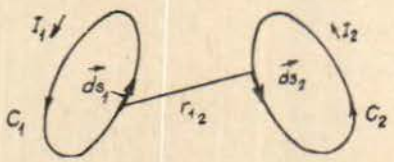
Magnetik akıyı hesaplamaya yarayan

$$\phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$$

integralinde $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ koyarak Stokes teoremi yardımiyle

$$\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \qquad (61)$$

bulunur. Eğrisel integral F yüzeyini sınırlayan C kapalı eğrisi üzerinden hesaplanır ve yüzeyin normali ile eğrinin yönü bir sağ sisteme göre bağlıdır. Akının eğrisel integral yardımiyle hesabı ekseriya daha kolaydır.



Şek. 53

Şek. 53 de iki çizgisel çevre görülmektedir. C_1 çevresinden geçen I_1 akımı $d\vec{s}_2$ elemanının bulunduğu noktada

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1}{r_{12}}$$

vektör potansiyelini meydana getireceğinden bu akımın magnetik alanı içinde C_2 çevresi ile zincirlenecek olan akı

$$\phi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}}$$

olacaktır. C_2 çevresinden geçen I_2 akımının alanı içinde C_1 çevresi ile zincirlenen akı

$$\phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{s}_1$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Şayet ortamın magnetik geçirgenliği

akıma bağlı değilse $\vec{A}_2$ için

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_2}{r_{12}}$$

yazılabileceğinden $\phi_{21}/I_1 = \phi_{12}/I_2$ olacağı anlaşılır.

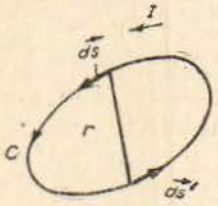
Bir çevreden geçen akımın alanı içinde bu çevre ile zincirlenen magnetik akının hesabında matematik güçlükle karşılaşılır. Şek. 54 de

$$\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}' \quad , \quad \vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s}}{r}$$

olacağından

$$\phi = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{s}'}{r}$$

bulunur. Bu integralde r uzaklığı $r=0$ değerini alabileceğinden integral sonsuz olur. Bu durum iletken kesitinin sonsuz küçük alınmasından ileri gelmektedir. Kesiti sınırlı alarak bu zorluğu yenmak düşünülebilirse de bu sefer de akının hesabında bir belirsizlik ortaya çıkar. Zira eğrisel integralin hesaplanacağı kapalı eğri belirsizdir. Ayni belirsizlik, şek. 53 deki iletkenler sınırlı kesitte alındığı vakit de ortaya çıkacaktır. Bu zorluklar zincir akısı kavramı ile yok edilebilir. Bu kavram ileride görülecektir.



Şek. 54

$\vec{B} = \text{rot}_P \vec{A}$ yardımiyle sürekli akım dağılışındaki magnetik endüksiyon için

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \text{rot}_P \left(\frac{\vec{J}}{r}\right) dV$$

bulunur. Diğer taraftan $\text{rot}_P \left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = \frac{1}{r} \text{rot}_P \vec{J} + \text{grad}_P \left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{J}$ ve $\text{rot}_P \vec{J} = 0$ ($\vec{J}$ dağılışı M noktasının koordinatlarına bağlıdır) olduğu gözönüne alınırsa $\text{grad}_P (1/r) = -\vec{r}/r^3$ koyarak

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \tag{62}$$

bulunur, şek. 51. $\vec{J}dV$ elemanı P noktasında

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} \tag{63}$$

endüksiyonunu meydana getirecektir.

Çizgisel akım dağılışı için $\vec{J}dV = I\vec{ds}$ koyarak

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3} dV \tag{64}$$

elde edilir, şek. 52. Bu bağıntıya Biot-Savart formülü adı verilir. $\vec{Ids}$ akım elemanı P noktasında

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3} \tag{65}$$

endüksiyonunu meydana getirir. Biot - Savart formülünü, çizgisel akım dağılışının vektör potansiyelini hesaplamaya yarayan (58) ifadesinin rotasyonelini alarak da bulabiliriz. Zira

$$\vec{B} = \text{rot}_P \vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \text{rot}_P \left(\frac{\vec{ds}}{r} \right)$$

olacağından

$$\text{rot}_P \left(\frac{\vec{ds}}{r} \right) = \text{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) X \vec{ds}$$

ve $\text{grad}_P (1/r) = -\vec{r}/r^3$ olduğunu gözönüne alarak (64) bulunur.

Yüzeysel akım dağılışı için

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_F \frac{\vec{J}_s \times \vec{r}}{r^3} dF$$

bulunur. $\vec{r}$ vektörü dF elemanından P noktasına doğru yönelir.

Stasyoner akım dağılışında $\operatorname{div}\vec{J}=0$ olduğundan akım elemanları için yazılan $d\vec{A}$ ve $d\vec{B}$ nin fiziksel anlamı yoktur. Zira akım çizgileri daima kapalı eğrilerdir. $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{J}$ denkleminin diverjansı alınırsa $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}=0$ olduğundan $\operatorname{div}\vec{J}=0$ olacağı görülür.

24. Magnetik skaler potansiyel.

Magnetik alan içinde $\vec{J}=0$ olan noktalarda $\operatorname{rot}\vec{H}=0$ olacağından bu çeşit bölgeler için

$$\vec{H}=-\operatorname{grad}\psi \tag{66}$$

yazmak ve böylece alan vektörünü magnetik skaler potansiyeli gösteren ψ skaler fonksiyonundan türetmek kabil olur. Magnetik skaler potansiyelin MKSC — birimi A dir. Bu potansiyel fonksiyonu $\vec{J}=0$ olan bölgelerde alanı hesaplamak için elverişlidir.

$\operatorname{div}\vec{B}=\operatorname{div}(\mu\vec{H})=0$ denkleminde $\vec{H}=-\operatorname{grad}\psi$ koyarak

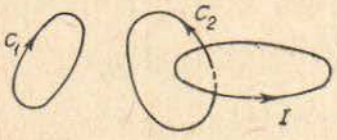
$$\mu\Delta\psi+\operatorname{grad}\mu\cdot\operatorname{grad}\psi=0$$

yazılabileceğinden $\mu=$ sab. için

$$\Delta\psi=0 \tag{67}$$

Laplace denklemi elde edilir. ψ fonksiyonu sınır şartlarını sağlayan harmonik bir fonksiyondur. Stasyoner alanda sınır değeri problemlerini çözmek için statik elektrik alanında görülen bütün metodlardan faydalanılabilir.

Statik alanda ψ nin bir değerli olmasına karşılık ψ potansiyeli çok değerli bir fonksiyondur. Zira Amper kanununa göre her kapalı eğri için



Şek. 55

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s}=0$$

yazılamaz. Meselâ Şek. 55 de C_1 eğrisi için integral sıfır olursa da C_2 eğrisi için sıfırdan farklıdır ve I ye eşittir.

İki nokta arasındaki magnetik gerilim statik alanda olduğu gibi

$$V_{ab}=\int_a^b \vec{H}\cdot\vec{ds}=\psi_a-\psi_b \qquad (68)$$

şeklinde târif edilir. Magnetik gerilimin birimi de ψ gibi A dir.

Magnetik skaler potansiyelin çok değerli olacağını şek. 56 yardımiyle kolayca görebiliriz. C_2 yolu çevre ile n defa zincirlendiğine göre seçilen yönler yardımiyle

$$(V_{ab})_1=(V_{ab})_2+nI$$

ve $\psi_b=0$ seçerek

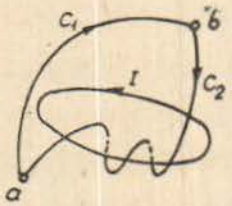
$$(\psi_a)_1=(\psi_a)_2+nI$$

yazılabilir. Böylece genel olarak magnetik gerilimin integrasyon yoluna bâğlı olacağı anlaşılır. Şek. 56 da akım veya eğri yönlerinden biri değişirse $-nI$ alınır.

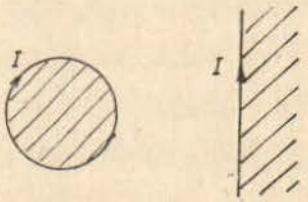
Skaler potansiyeli bir değerli yapmak için baraj yüzeylerinden faydalanılabilir. İntegrasyon yolu bu yüzeyleri kesmedikçe daima

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{ds}=0$$

şartı sağlanacağından ψ potansiyeli bir değerli olur. Çizgisel akım dağılışı için iletkenin sınırladığı her hangi bir yüzey baraj olarak alı-



Şek. 56



Şek. 57

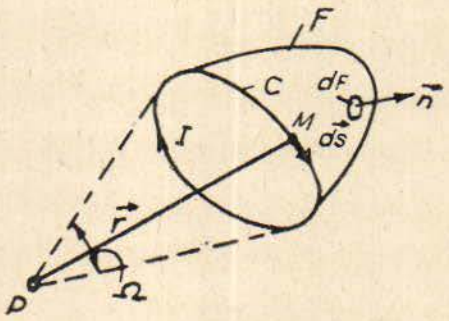
nabilir. Şek. 57 de dairesel akımın ve sonsuz uzun doğrusal akımın baraj yüzeyleri görülmektedir. Birinci halde baraj yüzeyi bir daire ve ikinci halde ise bir yarı sonsuz düzlemdir. Hiç şüphesiz baraj yüzeyi olarak başka şekiller de düşünülebilir. Baraj yüzeyinden pozitif yönde (sağ sistem) geçerken potansiyel I kadar bir süreksizlik gösterecektir.

Bir çizgisel çevrenin skaler potansiyeli vcktör potansiyel yardımiyle hesaplanabilir. Şek. 58 de görülen çevre P noktasında

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{ds}}{r}$$

vektör potansiyelini meydana getirir. Bu ifade, her hangi bir skaler fonksiyon için cari olan

$$\oint_C \varphi \, \vec{ds} = \int_F \vec{n} X \operatorname{grad} \varphi \, dF$$



Şek. 58

integral teoremi yardımiyle ve $\operatorname{grad}_P (1/r) = -\operatorname{grad}_M (1/r)$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{A} = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_F \left[\vec{n} X \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dF$$

şekline sokulabilir. Buradan $\vec{B} = \operatorname{rot}_P \vec{A}$ yardımiyle P noktasındaki magnetik endüksiyen için

$$\vec{B} = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_F \operatorname{rot}_P \left[\vec{n} \times \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \right] dF$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\operatorname{rot}_P \left[\vec{n} X \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \vec{n} \cdot \Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) - \operatorname{grad}_P \left[\vec{n} \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

olduğundan F yüzeyi P yi ihtiva etmiyecek şekilde seçildiği takdirde $\Delta_P (1/r) = 0$ olacağından $\operatorname{grad}_P (1/r) = -\vec{r}/r^3$ koyarak

$$\vec{B} = -\frac{\mu I}{4\pi} \operatorname{grad}_P \Omega \qquad (69)$$

bulunur. Ω, P noktasından yüzeyi gören uzay açıdır. $\vec{r}$ vektörü P ye doğru yöneldiğinden P den yüzeyin pozitif tarafı görünürse $\Omega > 0$ ve negatif tarafı görünürse $\Omega < 0$ almalıdır. Yüzeyin pozitif tarafı P

den bakıldığı vakit akım yönü saat yönünün tersi olarak görünen taraftır.

(69) dan

$$\vec{H} = -\frac{I}{4\pi}\,\mathrm{grad}_P\,\Omega \tag{70}$$

bulunur ve $\vec{H} = -\mathrm{grad}_P\,\psi$ ile karşılaştırarak

$$\psi = \frac{I}{4\pi}\,\Omega = \frac{I}{4\pi}\int_F \vec{n}\cdot\mathrm{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)dF \tag{71}$$

bulunur. Pozitif normal yönünde ölçülen koordinat n ile gösterilirse

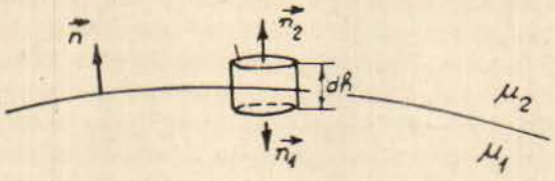
$$\psi = \frac{I}{4\pi}\int_F \frac{\partial(1/r)}{\partial n}\,dF \tag{72}$$

yazılabilir. Zira $\vec{n}\cdot\mathrm{grad}_M(1/r) = \partial(1/r)/\partial n$ dir.

F yüzeyine pozitif veya negatif taraftan yaklaşıldığına göre uzay açı $+2\pi$ veya -2π, potansiyel ise $+I/2$ veya $-I/2$ değerine yaklaşacağından sınır yüzeyinden geçerken potansiyelin I kadar bir atlama yaptığı anlaşılır. Böylece F yüzeyinin bir çift tabaka karakterinde olduğu söylenir.

25. Sınır şartları.

Şek. 59 da μ_1 ve μ_2 ortamlarını ayıran sınır yüzeyi görülmektedir. Gauss teoremini silindirin yüzeyine uygulayarak $dh \to 0$ için $\vec{B}_2\cdot\vec{n}_2\,dF + \vec{B}_1\cdot\vec{n}_1\,dF = \vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,dF = 0$ yazılabileceğinden

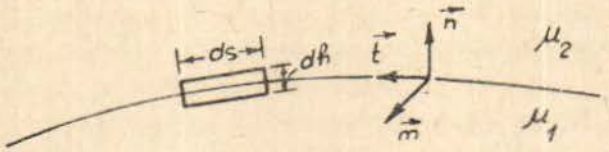


Şek. 59

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad , \quad B_{1n} = B_{2n} \tag{73}$$

bulunur. Magnetik endüksiyonun normal bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir.

Amper kanununu şek. 60 daki dikdörtgen şeklindeki çevreye uygulayarak $dh \to 0$ için



Şek. 60

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t}\, ds = 0$$

bulunur. $\vec{m}$, çevrenin sınırladığı yüzeyin pozitif normalidir ve $\vec{t}$ birim vektörü için $\vec{t} = \vec{m} \times \vec{n}$ dir. Böylece

$$\vec{m} \cdot [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = 0$$

yazılabilir. Çevrenin durumu ve dolayısiyle $\vec{m}$ nin yönü gelişi güzel olduğundan

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad , \quad H_{1t} = H_{2t} \tag{74}$$

bulunur. Magnetik alan şiddetinin teğetsel bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir.

Şayet sınır yüzeyinde yoğunluğu $\vec{J}_s$ olan bir yüzey akımı dağılışı varsa $dh \to 0$ için

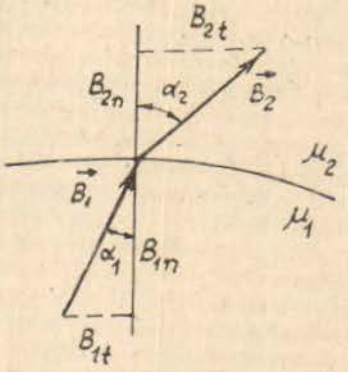
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \lim_{dh \to 0} (\vec{J} dh) = \vec{J}_s \tag{75}$$

olacaktır. Öziletkelikleri sınırlı olan ortamlarda $\vec{J}_s = 0$ dır. Zira $\vec{E}$ sınırlı olduğundan limit sıfırdır. Buna karşılık $\varkappa \to \infty$ şeklinde târif edilen ideal iletkenlerde $\vec{E} \to 0$ ve $\vec{J}$ sınırlı olduğundan $\vec{J}_s \neq 0$ dır. Alanın hesabını kolaylaştırmak için $\varkappa \to \infty$ alınırsa (75) sınır şartını kullanmak gerekir.

Şek. 61 yardımiyle $\operatorname{tg} \alpha_1 = B_{1t}/B_{1n}$ ve $\operatorname{tg} \alpha_2 = B_{2t}/B_{2n}$ yazılabileceğinden $\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = B_{1t}/B_{2t} = \mu_1 H_{1t}/\mu_2 H_{2t}$ ve $\vec{J}_s = 0$ için

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{76}$$

bulunur. Bu denklem $\vec{B}$— ve $\vec{H}$— çizgilerinin sınır yüzezindeki kırılma kanununu belirtmektedir. Ferromagnetik olmayan ortamlar arasındaki sınır yüzeyinde pratik bakımdan bir kırılma meydana gelmez. Zira bu ortamlarda geçirgeliklerin ayni olduğu kabul edilebilir. $\mu_1 \gg \mu_2$ için $\alpha_2 \ll \alpha_1$ olacağından magnetik geçirgenliği küçük olan ortam içinde çizgiler normal doğrultusu ile daha küçük bir açı yaparlar. Meselâ ferromagnetik bir ortamla ferromagnetik olmayan bir ortam arasındaki sınır yüzeyinde bu durumla karşılaşılır. Ferromagnetik olmayan ortam içinde çizgiler sınır yüzeyinde normale çok yakın ve dolayısiyle ferromagnetik ortamın yüzeyine dik olurlar. Ideal magnetik ortam $\mu \to \infty$ şeklinde tarif edilir. Böyle bir ortam içinde $\vec{B}$ nin sınırlı kalabilmesi için $\vec{H} \to 0$ olmak zorundadır. İdeal magnetik cisim magnetik alanda, statik alandaki iletkenler ve stasyoner elektrik alanındaki elektrodlar gibi rol oynar. $\mu_1 \to \infty$ alınırsa $H_{2t}=0$ olacaktır. Çizgilerin ferromagnetik cisimlerin yüzeyine dik olması ozelliği elektrik makinalarında magnetik alanın dağılışının bulunmasını kolaylaştırır.



Şek. 61

Sınır şartları skaler potansiyel cinsinden

$$\psi_1 = \psi_2 \,(H_{1t} = H_{2t}) \quad , \quad \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \,(B_{1n} = B_{2n}) \tag{77}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mu_1 \to \infty$ için $\psi_2 =$ sabit. olacağından ideal magnetik cismin sınır yüyeyi bir eşpotansiyel yüzeydir.

Sınır şartları vektör potansiyel yardımiyle de ifade edilebilir. $H_{1t} = (\text{rot}\,\vec{A}_1)_t/\mu_1$ ve $H_{2t} = (\text{rot}\,\vec{A}_2)_t/\mu_2$ olacağından $H_{1t} = H_{2t}$ şartından

$$\frac{1}{\mu_1}(\text{rot}\,\vec{A}_1)_t = \frac{1}{\mu_2}(\text{rot}\,\vec{A}_2)_t \tag{78}$$

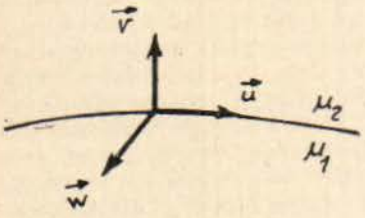
bulunur. Sınır yüzeyinin meselâ $v =$ sab. koordinat yüzeyi ile intibak ettiği farzedilirse teğetsel bileşenleri hesaplayarak

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w A_{1w})-\frac{\partial}{\partial w}(h_v A_{1v})\right]&=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w A_{2w})-\frac{\partial}{\partial w}(h_v A_{2v})\right],\\ \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v A_{1v})-\frac{\partial}{\partial v}(h_u A_{1u})\right]&=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v A_{2v})-\frac{\partial}{\partial v}(h_u A_{2v})\right]\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

yazılabilir, şek. 62.

Magnetik endüksiyonun normal bileşeni

$$B_n=\frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_u A_u)-\frac{\partial}{\partial u}(h_w A_w)\right]$$



Şek. 62

olacağından $B_{1n} = B_{2n}$ şartı yardımiyle

$$A_{1u} = A_{2u} \qquad A_{1w} = A_{2w} \quad (80)$$

veya vektörel olarak

$$(\vec{A}_1)_t = (\vec{A}_2)_t \quad (81)$$

şartı bulunur. Vektör potansiyelin teğetsel bileşeni sınır yüzeyinde süreklidir. Bu şartı doğrudan doğruya

$$\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

integralinin sınır yüzeyindeki bir eğri için her iki ortamda eşit sonuç vermesi gerektiğini düşünerek de bulabiliriz.

II. STASYONER MAGNETİK ALANIN HESABI

26. Hesap metodları.

Stasyoner magnetik alanı Amper kanunu, skaler potansiyel, Biot-Savart formülü ve vektör potansiyel yardımiyle hesaplayabiliriz. Amper kanunu ancak simetrik halde alan hesabı için elverişlidir. Biot-Savart integrali veya vektör potansiyel integrali ile alanı hesaplayabilmek için akım dağılışının bilinmesi gerekir. Vektör potansiyel metodu daha elverişlidir. Skaler potansiyelden ancak iletkenler dışındaki bölgeler için faydalanılabilir. Sınır değeri problemleri $\vec{J}=0$ için $\Delta\Psi=0$ veya $\Delta\vec{A}=0$ denklemleri yardımiyle ve $\vec{J}\neq 0$ için $\Delta A=-\mu\vec{J}$ denklemi yardımiyle çözülebilir.

27. Teklik teoremleri.

Magnetik skaler potansiyelin teklik teoremi φ potansiyeli gibidir. Vektör potansiyelin teklik teoremi birinci vektör Green teoremi yardımiyle bulunur. Diverjans teoremi $\vec{U}X\,\mathrm{rot}\,\vec{W}$ vektörüne uygulanırsa

$$\int_V (\mathrm{rot}\,\vec{U}.\ \mathrm{rot}\,\vec{W}-\vec{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{W})\,dV=\oint_F(\vec{U}X\,\mathrm{rot}\,\vec{W})\cdot d\vec{F} \qquad (82)$$

bulunur. Bu ifade birinci Green teoreminin vektörel şeklidir. İkinci Green teoreminin vektörel şekli $\vec{U}$ ile $\vec{W}$ nin rollerini değiştirerek yazılan ifadeyi bu denklemden çıkararak bulunur. Böylece ikinci Green teoremi için

$$\int_V(\vec{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{W}-\vec{W}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{U})\,dV=\oint_F(\vec{W}X\,\mathrm{rot}\,\vec{U}-\vec{U}X\,\mathrm{rot}\,\vec{W})\cdot d\vec{F} \qquad (83)$$

bulunur.

(82) de $\vec{U}=\vec{W}=\vec{A}$ koyarak

$$\int_V [(\text{rot}\,\vec{A})^2 - \vec{A}\cdot\text{rot rot}\,\vec{A}]\,dV = \oint_F \vec{n}\cdot(\vec{A}X\,\text{rot}\,\vec{A})\,dF$$

bulunur. V bölgesindeki akım dağılışlarının vektör potansiyeldeki payları vektör potansiyel integralleri ile bir değerli olarak bellidir. Dış kaynakların payını gösteren iki farklı çözüm $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ ve bunlara tekabül eden magnetik endüksiyonlar $\vec{B}_1=\text{rot}\,\vec{A}_1$ ve $\vec{B}_2=\text{rot}\,\vec{A}_2$ ile gösterilirse $\text{div}\,\vec{A}_1=\text{div}\,\vec{A}_2=0$ ve $\Delta(\vec{A}_1-\vec{A}_2)=0$ olacağını gözönüne alarak

$$\int_V (\vec{B}_1-\vec{B}_2)^2\,dV=\oint_F(\vec{A}_1-\vec{A}_2)\cdot[(\vec{B}_1-\vec{B}_2)X\vec{n}]\,dF=$$

$$\oint_F(\vec{B}_1-\vec{B}_2)[\vec{n}X(\vec{A}_1-\vec{A}_2)]\,dF$$

yazılabilir. Şayet sınır. yüzeyinde $\vec{n}X\vec{A}_1=\vec{n}X\vec{A}_2$ veya $\vec{B}_1X\vec{n}=\vec{B}_2X\vec{n}$ değerleri verilmişse yüzey integrali sıfır olacağından

$$\int_V (\vec{B}_1-\vec{B}_2)^2\,dV=0$$

bulunur. $(\vec{B}_1-\vec{B}_2)^2$ pozitif olduğundan her iki halde de bölge içinde her noktada $\vec{B}_1=\vec{B}_2$ olacaktır ve dolayısiyle çözüm tektir. Diğer taraftan rot $\vec{A}_1=\text{rot}\,\vec{A}_2$ bağıntısına göre $\vec{A}_1-\vec{A}_2=\text{grad}\,\phi$ yazılabileceğinden vektör potansiyel için iki farklı çözüm grad ϕ kadar farkedebilir. Şayet sınırdaki vektör potansiyel değeri verilmişse yüzey üstünde grad $\phi=0$ olacaktır. grad ϕ sınırda sıfır olunca bölge içinde de sıfır olacağından $\vec{A}_1=\vec{A}_2$ olacağı yani bu halde vektör potansiyel için çözümün tek olacağı anlaşılır.

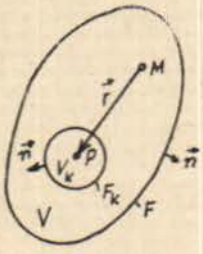
28. rot rot $\vec{A}=\mu\vec{j}$ denkleminin integrasyonu.

$f(M)$, M noktasının koordinatlarına bağlı olan sürekli bir fonksiyonu gösterdiğine göre P noktası bölge dışında olduğu vakit

$$\int_V f(M)\,\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)dV$$

integralinin sıfıra ve bölge içinde olduğu vakit de $-4\pi f(P)$ ye eşit olacağı kolayca görülebilir, şek. 63. Gerçekten birinci halde $r=0$ olamayacağından V bölgesinde $\Delta_P(1/r)=0$ olacaktır. Buna karşılık ikinci halde r uzaklığı $r=0$ değerini alabileceğinden $\Delta_P(1/r)$ ancak $r\neq 0$ için sıfır olursa da $r=0$ tekil noktasında $0/0$ belirsiz şeklini alır. Tekil noktayı dış yüzeyi F_k ve hacmi V_k olan küçük bir küre içine alalım. $f(M)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, kürenin yarıçapı, küre içinde her hangi bir M noktasındaki $f(M)$ değeri tekil noktadaki $f(P)$ değerine eşit kabul edilebilecek kadar küçük seçilebilir. Bu şartla integral

$$\int_V f(M)\,\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)dV=f(P)\int_V \Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)dV$$



Şek. 63

şekline girer. Diğer taraftan $\text{grad}_P(1/r)=-\text{grad}_M(1/r)$ ve $\Delta_P(1/r)=\Delta_M(1/r)$ olduğunu gözönüne alarak V_k bölgesi için diverjans teoremi yardımiyle

$$\int_{V_k}\Delta_M\left(\frac{1}{F}\right)dV_k=\oint_{F_k}\text{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{F}_k$$

yazabiliriz. V_k bölgesinin pozitif normali dışarı doğrudur. Bu ifadede $\text{grad}_M(1/r)=\vec{r}/r^3$ ve $d\vec{F}_k=\vec{n}\,r^2\,d\Omega$ koyarak ve $\vec{r}\cdot\vec{n}=-r$ olduğunu gözönüne alarak

$$\int_{V_k}\Delta_M\left(\frac{1}{r}\right)dV_k=-\oint_{F_k}d\Omega=-4\pi$$

bulunur. $d\Omega$, P noktasından dF_k elemanını gören uzay açı elemanıdır. Böylece

$$\int_V f(M)\,\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)dV = -\pi f(P) \tag{84}$$

olacağı anlaşılır.

(84) yardımiyle $\vec{R}(P)$ vektör fonksiyonu için

$$4\pi\vec{R}(P) = -\int_V \vec{R}(M)\,\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)dV = -\Delta_P\int_V \frac{\vec{R}(M)}{r}\,dV$$

yazılabilir. Laplasiyeni hesaplayarak

$$\vec{R} = \frac{1}{4\pi}\int_V\left[\operatorname{rot}_M\vec{R}\times\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)+(\operatorname{div}_M\vec{R})\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[(\vec{n}\cdot\vec{R})\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)+(\vec{n}\times\vec{R})\times\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF \tag{85}$$

veya

$$\vec{R} = \frac{1}{4\pi}\int_V\left[\frac{\operatorname{rot}_M\operatorname{rot}_M\vec{R}}{r}+(\operatorname{div}_M\vec{R})\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV \tag{86}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[\frac{\vec{n}\times\operatorname{rot}_M\vec{R}}{r}+(\vec{n}\cdot\vec{R})\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)+(\vec{n}\times\vec{R})\times\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF$$

elde edilir. Son denklemde $\vec{R}=\vec{A}$, $\operatorname{rot}_M\operatorname{rot}_M\vec{A}=\mu\vec{J}$ ve $\operatorname{div}_M\vec{A}=0$ koyarak

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}}{r}dV-\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[\frac{\vec{n}\times\operatorname{rot}_M\vec{A}}{r}+(\vec{n}\cdot\vec{A})\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right.$$

$$\left.+(\vec{n}\times\vec{A})\times\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF \tag{87}$$

bulunur. Bu ifade rotrot $\vec{A}=\mu\vec{J}$ ($\operatorname{div}\vec{A}=0$) denkleminin genel çözümüdür. Birinci terim partiküler çözümdür ve bölge içindeki akım dağılışının vaktör potansiyeldeki payını gösterir. Yüzey integralleri bölge

dışındaki kaynakların vektör potansiyeldeki payıdır ve $\Delta\vec{A}=0$ homogen denkleminin çözümünü gösterir. Bölgenin sınırı sonsuza giderse yüzey integraller sıfır olarak partiküler çözüm genel çözüm haline gelir. Bölge içindeki akım dağılışı ve sınır yüzeyindeki $\vec{A}$ ve rot $\vec{A}$ değerleri bilinirse bölge içındeki vektör potansiyel bu formül yardımiyle hesaplanabilir.

(85) de $\vec{R}=\vec{B}$, $\text{div}_M\vec{B}=0$ ve $\text{rot}_M\vec{B}=\mu\vec{J}$ koyarak ($\mu=$sab.)

$$\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \vec{J}\times \text{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)dV-\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[(\vec{n}\cdot\vec{B})\,\text{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)+\right.$$

$$\left.(\vec{n}\times\vec{B})\times \text{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)\right]dF \qquad (88)$$

bulunur, Bu denklem sınırlı bir bölge için Biot-Savart formülüdür ve ikinci terim dış kaynakların alan vektöründeki paylarını gösterir. Bölge içindeki akım dağılışı ve sınır yüzeyindeki $\vec{B}$ değeri verilirse bölge içindeki $\vec{B}$ endüksiyonu bu formül yardımiyle hesaplanabilir.

29. $\Delta\vec{A}=0$ denkleminin çözümü.

$\text{div}\vec{A}=0$ bağıntısından dolayı $\vec{A}$ nın üç bileşeninden yalnız ikisi bağımsızdır. Kartezyan koordinatlarda $\Delta\vec{A}=0$ denklemi A_x, A_y, A_z bileşenleri için Laplace tipinde üç parsiyel diferansiyel deukleme eşdeğer olursa da diğer koordinatlarda karışık yapıda ve çözümleri güç olan denklem sistemleri elde edilir. Meselâ dairesel silindirik koordinatlarda bileşenler

$$\Delta A_\rho+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}-\frac{A_\rho}{\rho^2}=0,\quad \Delta A_\phi+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}-\frac{A_\phi}{\rho^2}=0,\quad A_z=0$$

denklemlerini sağlamak zorundadır ve bunlardan yalnız üçüncüsü Laplace tipindedir. $\text{div}\vec{A}=0$ dan dolayı sistemin çözümünde 12 integrasyon sabiti bulunur. Bu denklemlerin çözümü güç olduğundan daha kolay bir yol bulmak gerekmektedir. Statik elektrik alanı bir skaler fonksiyondan türetilebildiğinden $\Delta\vec{A}=0$ denkleminin vektör karakterinden

dolayı $\vec{A}$ nın üç skaler fonksiyondan türetilebileceğini düşünebiliriz. Diğer taraftan $\operatorname{div}\vec{A}=0$ dan dolayı bu fonksiyonlardan ikisi bağımsız olacaktır. Böylece $\vec{A}$ nın iki skaler fonksiyondan türetilebileceği anlaşılır. Aşağıda görüleceği gibi bu fonksiyonların sayısını bire indirmek kabildir. Bu maksadla V ve U iki potansiyel fonksiyonunu göstermek üzere ($\Delta V=0$, $\Delta U=0$)

$$\vec{A}=\operatorname{grad} V+\operatorname{rot}(\vec{u}\,U) \tag{89}$$

yazalım. $\vec{u}$, her hangi bir ortogonal sistemin bir birim vektörüdür. İki tarafın diverjansı alınırsa $\operatorname{div}\vec{A}=0$ olacağı görülür. Diğer taraftan $\vec{B}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{u}\,U)$ olduğundan $\vec{B}$ alanı yalnız U ya bağlıdır. Böylece yalnız U fonksiyonu yardımiyle alanın belli olacağı anlaşılır. Bununla beraber $\vec{A}$ nın belli olabilmesi için V ye ihtiyaç vardır. $\vec{u}$ birim vektörü $\operatorname{rot}\vec{u}=0$ olacak şekilde seçilirse $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=0$ olacağı da kolayca görülebilir. Böylece birim vektörünün eksenel veya radyal karakterde olabileceği anlaşılır. ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{u}_r$ gibi).

30. Çizgisel akım dağılışı örnekleri.

1 — Sonsuz uzun doğrusal akımın magnetik alanı incelenecektir.

Simetriden dolayı $\vec{B}$ — ve $\vec{H}$ — çizgileri ortak merkezli dairelerdir, şek. 64. Amper kanununu ρ yarıçaplı daireye uygulayarak

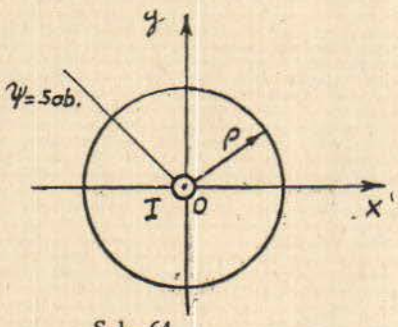
$$\vec{H}=\vec{u}_\phi H_\phi=\vec{u}_\phi\frac{I}{2\pi\rho}=(\vec{k}\,X\,\vec{u}_\rho)\frac{I}{2\pi\rho}$$

bulunur. Alan yönü ile akım yönü sağ sisteme göre bağlıdır. Akım yönü değişirse $-I$ alınır. Alan yönü pratikte sağ el veya burgu kaidesi yardımiyle bulunur.

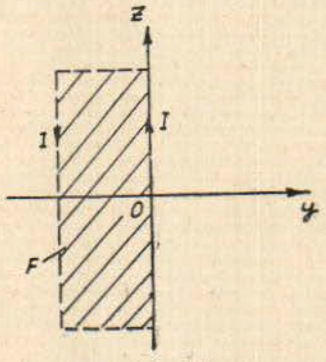
Doğrusal akımın alanı iki boyutludur. Doğrusal akımın skaler potansiyeli

$$\Psi=-\int\vec{H}\cdot d\vec{s}=-\frac{I}{2\pi}\phi+k$$

dır, Her hangi bir $z =$ sab. düzlemindeki eşpotansiyel çizgiler $\phi =$ sab. yarı sonsuz doğrularıdır. Eşpotansiyel yüzeyler ortak eksenli dairesel



Şek. 64



Şek. 65

silindirlerdir. Çizgisel akımın magnetik alanı üniform çizgisel vükün statik alanı ile karsılaştırılırsa alan çizgileri ile eşpotansiyel çizgilerin rol değiştirdikleri anlaşılır.

Skaler potansiyeli (72) yardımiyle doğrudan doğruya hesaplayabiliriz. Akım sürekli olduğundan sonsuzdan kapanır. Meselâ $x = 0$ düzlemde bir kenarı $z -$ ekseni ve diğer kenarları sonsuzda bulunan dikdörtgen integrasyon yüzeyi olarak seçilirse $dF = d\eta\, d\zeta$, $r = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ ve $\partial(1/r)/\partial n = \partial(1/r)/\partial\xi = -\partial(1/r)/\partial x$ koyarak

$$\psi = \frac{x\,I}{4}\int_{\eta=-\infty}^{0}\int_{\zeta=-\infty}^{\infty}\frac{d\eta\, d\zeta}{[x^2+(y-\eta)^2\,(z-\zeta)^2]^{3/2}} = -\frac{I}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{I}{4}$$

bulunur. şek. 65. Alan bileşenleri için $\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi$ yardımiyle $H_\rho = -\partial\psi/\partial\rho = 0$, $H_\phi = -\partial\psi/\rho\partial\phi = I/2\pi\rho$, $H_z = -\partial\psi/\partial z = 0$ bulunur.

Şek. 66 da $Id\zeta$ akım elemanı $P(\rho, \phi, z)$ noktasında

$$d\vec{A} = \vec{k}\, dA_z = \vec{k}\frac{\mu\, Id\zeta}{4\pi r}$$

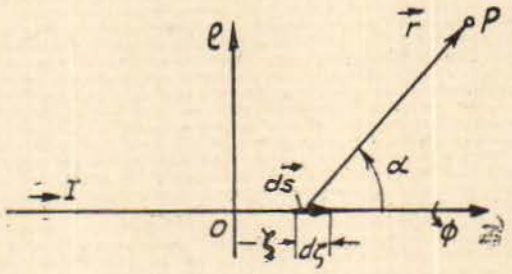
vektör potansiyelini meydana getirir. $d\vec{A}$ akım yönündedir ve yalnız dA_z bileşeni yardır. $B_\phi = -dA_z/d\rho$ olduğundan

$$A_z = -\int B_\phi d\rho = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \rho + k$$

bulunur. $\rho = \rho_0$ için $A_z = 0$ seçilirse

$$A_z = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

yazılabilir.



Şek. 66

Doğrusal akımın alanını Biot-Savart integrali yardımiyle hesaplayalım. Şek. 66 da $Id\zeta$ elemanı P noktasında

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\zeta (\vec{k} \times \vec{r})}{r^3}$$

alanını meydana getireceğinden $\vec{r} = \vec{u}_\rho \rho + \vec{k}(z - \zeta)$ ve $\vec{k} \times \vec{r} = \vec{u}_\phi \rho$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{H} = \vec{u}_\phi \frac{\rho I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}$$

ve $\rho = r \sin \alpha$, $z - \zeta = \rho \operatorname{ctg} \alpha$, $d\zeta = r d\alpha / \sin \alpha$ koyarak

$$\vec{H} = \vec{u}_\phi \frac{I}{4\pi\rho} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \vec{u}_\phi \frac{I}{2\pi\rho}$$

bulunur. $\vec{u}_\phi$ birim vektörü integrasyon koordinatına bağlı değildir.

2 — Sonsuz uzun paralel doğrusal akımların magnetik alanı incelenecektir, Şek. 67.

Doğrusal akım $z=$sab. düzleminde $M(\xi, \eta)$ noktasında ise $P(x, y)$ noktasındaki skaler potansiyel için

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\sum_i I_i \alpha_i + k$$

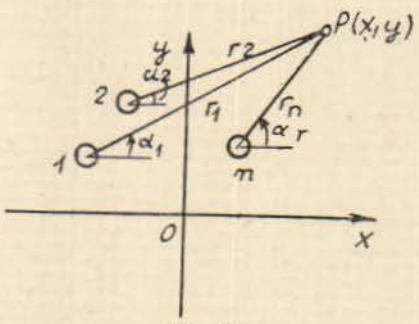
bulunur ($i=1, \ldots, n$). Öne doğru yönelen akımlar pozitif ve arkaya doğru yönelenler negatif alınmalıdır. $\vec{H} = -\operatorname{grad}\Psi$ yardımiyle ve

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = -\frac{\sin\alpha_i}{r_i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = \frac{\cos\alpha_i}{r_i}$$

olacağını gözönüne alarak alan bileşenleri için

$$H_x = -\frac{1}{2\pi}\sum_i I_i \frac{\sin\alpha_i}{r_i},$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{\cos\alpha_i}{r_i}$$



Şek. 67

elde edilir. Paralel akımların alanı iki boyutludur.

Paralel akımların vektör potansiyeli için

$$A_z = -\frac{\mu}{2\pi}\sum_i I_i \ln r_i + K$$

bulunur.

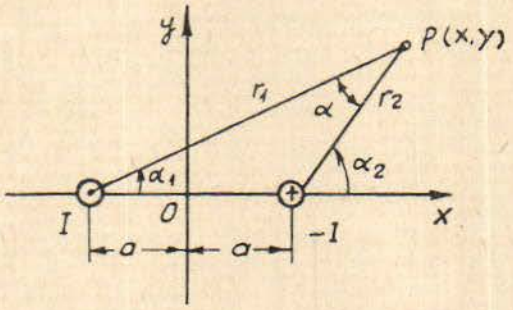
Şek. 68 de görülen iki iletken sistemi için

$$\Psi = -\frac{I}{2\pi}(\alpha_1 - \alpha_2) + k = \frac{I}{2\pi}\alpha + k,$$

$$A_z = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + K$$

olacaktır. $\alpha = 0$ için $\psi = 0$ ve $r_1 = r_2$ için $A_z = 0$ seçilirse $k = K = 0$

olur. Alan bileşenleri $\vec{H} = -\text{grad}\ \psi$ ve $\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$ yardımiyle hesaplanır ve $B_x = \partial A_z/\partial y$, $B_y = -\partial A_z/\partial x$, $B_z = 0$ dır.

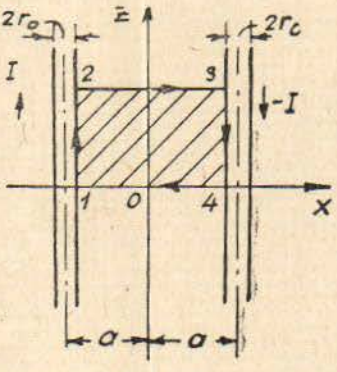


Şek. 68

Eşpotansiyel çizgilerin denklemi $\psi = \text{sab.}$ olduğundan merkezleri y — ekseni üstünde olan daireler elde edilir. $\vec{B}$ — ve $\vec{H}$ — çizgileri silindir şeklindeki eşpotansiyel yüzeylere ortogonal olduğundan merkezleri x — ekseni üstünde olan dairelerdir. Alan çizgilerinin diferansiyel denklemi $B_x/B_y = dx/dy$ şeklinde olduğundan

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A_z}{\partial y}\,dy = dA_z = 0$$

bulunur. Çizgilerin denklemi $A_z = \text{sab.}$ dir. A_z ifadesi üniform λ ve $-\lambda$ çizgisel yüklerinin φ potansiyeline benzediğinden magnetik alanın alan çizgileri $\varphi = \text{sab.}$ çizgilerine ve eşpotansiyel çizgileri ise statik alandaki alan çigllerine tekabül ederler. Her noktada $\vec{B}$ ve $\vec{E}$ vektörleri ortogonaldir.



Şek. 69

Teller arasından birim uzunluk için geçen magnetik akıyı

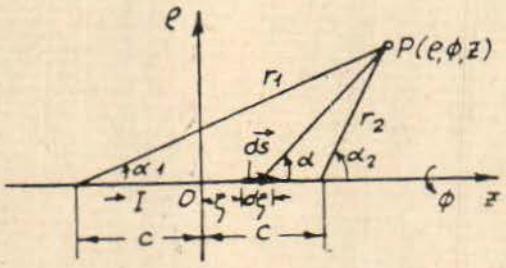
$$\overline{\phi} = \int_F B_\phi(x,0)\,dx \quad , \quad \overline{\phi} = \oint_C \vec{A}\cdot\vec{ds}$$

integralleri yardımiyle hesaplayabiliriz. İkinci integrali kullanarak şek. 69 yardimiyle

$$\overline{\phi} = \int_1^2 A_z(r_0 - a, 0)\, dz - \int_3^4 A_z(a - r_0, 0) dz = \frac{\mu_0 l I}{\pi} \ln \frac{2a - r_0}{r_0}$$

bulunur. r_0, tellerin yarıçapıdır.

3 — Doğrusal iletken parçasının magnetik alanı hesaplanacaktır, şek. 70.



Şek 70

Biot-Savart integrali yardımiyle

$$H_\phi = \frac{I}{4\pi\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{I}{4\pi\rho} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

bulunnr. Bu formülde $\alpha_1 \to 0$ ve $\alpha_2 \to \pi$ koyarak sonsuz uzun akımın alanı bulunur.

Vektör potansiyel

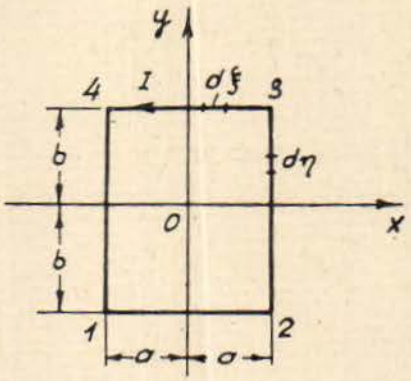
$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-c}^{c} \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} = \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{z + c + r_1}{z - c + r_1}$$

dir. $r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z+c)^2}$ ve $r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z-c)^2}$ koyarak $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$ yardımiyle

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu I}{4\pi\rho} \left(\frac{z+c}{r_1} - \frac{z-c}{r_2} \right)$$

elde edilir. Alan çizgileri ortak odaklı elipslerdir.

4 — $z=0$ düzlemindeki dikdörtgen çevrenin magnetik alanı hesaplanacaktır, şek. 71.



Şek. 71

Çevrenin alanı vektör potansiyel yardımiyle kolayca hesaplanabilir. Her hangi bir $P(x, y, z)$ noktasında vektör potansiyelin yalnız A_x ve A_y bileşeni bulunacağından

$$A_x=\frac{\mu I}{4\pi}\left[\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+b)^2+z^2}}-\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]$$

$$=\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{(x+a+r_1)(x-a+r_3)}{(x-a+r_2)(x+a+r_4)}$$

$$A_y=\frac{\mu I}{4\pi}\left[\int_{-b}^{b}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-a)^2+(y-\eta)^2+z^2}}-\int_{-b}^{b}\frac{d\eta}{\sqrt{(x+a)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right]$$

$$=\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{(y+b+r_2)(y-b+r_4)}{(y-b+r_3)(y+b+r_1)}$$

bulunur. $r_1,\ldots,r_4$ ler $1,\ldots,4$ köşelerinin P ye uzaklığıdır. Alan bileşenleri

$$B_x=-\frac{\partial A_y}{\partial z}\ ,\ B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}\ ,\ B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

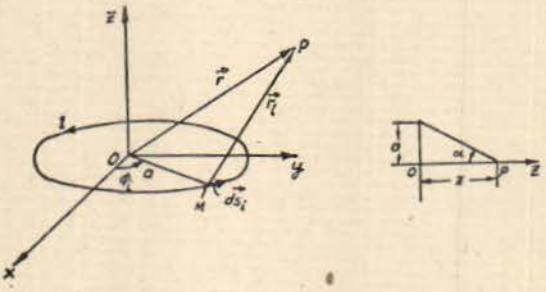
yardımiyle hesaplanır.

Eksen üstündeki alanı bulmak için $x=y=0$ ve merkezdeki alanı bulmak için de $x=y=z=0$ koymak gerekir. Çevre düzleminde $z=0$ olacağından $B_x=B_y=0$ bulunur. Tellerin yarıçapı r_0 ile gösterilirse çevre ile zincirlenen magnetik akı

$$\phi = \int_{x=r_0-a}^{a-r_0} \int_{y=r_0-b}^{b-r_0} B_z \, dx \, dy$$

iktegrali yardımiyle hesaplanabilir.

4 — Dairesel akımın magnetik alanı incelenecektir, şek. 72.



Şek. 72

$M(a, \phi_i, 0)$ noktasındaki $I\vec{ds_i} = \vec{u_\phi} Ia \, d\phi_i$ akım elemanı P noktasında

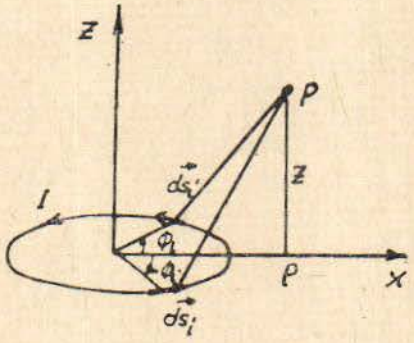
$$d\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\vec{ds_i}}{r_i}$$

vektör potansiyelini meydana getirir. i endisi, integrasyon bögesini belirtmektedir. $\vec{u_\phi} = -\vec{i} \sin\phi_i + \vec{j} \cos\phi_i$ koyarak $A_z = 0$ ve

$$A_x = -\frac{\mu a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi_i \, d\phi_i}{r_i}, \quad A_y = \frac{\mu a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi_i \, d\phi_i}{r_i}$$

bulunur. Hesaplar için silindirik koordinatları kullanmak elverişlidir. Bu koordinatlarda $r_i = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos(\phi - \phi_i) + z^2}$ dir. Eksenel simetriden dolayı A_ρ ve A_ϕ bileşenleri ϕ açısına bağlı olmadığından her hangi bir meridyen düzlemi seçilebilir. $\phi = 0$ seçilirse (P noktası $y=0$ düzleminde) $A_x = A_\rho$ ve $A_y = A_\phi$ olur. ϕ_i ve $-\phi_i$ noktalarındaki akım

elemanlarının P deki bileşke vektör potansiyeli $\vec{u}_\phi$ yönünde olacağından yalnız A_ϕ bileşeni vardır ve



Şek. 73

$$A_\phi(\rho,z)=\frac{\mu a I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi_i\,d\phi_i}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\phi_i+z^2}}$$

yazılabilir, şek. 73. $\phi_i=\pi+2\beta$ değişken transformasyonu yapılırsa

$$A_\phi(\rho,z)=\frac{\mu a I}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2\sin^2\beta-1)d\beta}{\sqrt{(a+\rho)^2+z^2-4a\rho\sin^2\beta}}$$

yazılabilir ve eliptik integrallerden faydalanarak

$$A_\phi(\rho,z)=\frac{\mu I}{2k\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\left[(2-k^2)K(k)-2E(k)\right]$$

elde edilir. $K(k)$ ve $E(k)$, birinci ve ikinci nevi komple (tam) eliptik integralleri ve k ise

$$k=2\sqrt{\frac{a\rho}{(a+\rho)^2+z^2}}$$

modülünü göstermektedir.

$\vec{B}=\text{rot}\,\vec{A}$ yardımiyle

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{\mu z I}{2\pi\rho\sqrt{(a+\rho)^2+z^2}}\left[-K(k)+\frac{a^2+\rho^2+z^2}{(a-\rho)^2+z^2}K(k)\right],$$

$$B_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) = \frac{\mu I}{2\pi\rho\sqrt{(a+\rho)^2+z^2}}\left[K(k)+\frac{a^2-\rho^2-z^2}{(a-\rho)^2+z^2}E(k)\right]$$

bulunur. $B_\phi = 0$ dır.

$\rho = 0$ için $k = 0$ ve $K(0) = E(0) = \pi/2$ olacağından eksen üstünde $B\rho = 0$ ve

$$B_z = \frac{\mu a^2 I}{2(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu I}{2a}\sin^3\alpha$$

bulunur. Bu ifadede $z = 0$ koyarak merkezdeki endüksiyon için $B_z = \mu I/2a$ elde edilir.

A_ϕ yi $\Delta\vec{A} = 0$ diferansiyel denklemi yardımiyle de bulabiliriz. A_ϕ nin ϕ açısına bağlı olmadığını ve $A_r = A_\theta = 0$ olduğunu gözönüne alarak küresel koordinatlarda

$$\Delta A_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\phi = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi değişkenlere ayırarak

$$A_\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n^1(\cos\theta)$$

çözümü bulunur ($m = 1$). Poler eksen çözüm bölgesinde bulunduğundan $Q_n^1(\cos\theta)$ alınmamıştır. İntegrasyon sabitlerini sınır şartları yardımiyle bulmak için c yarıçaplı kürenin yüzeyinde yoğunluğu $\vec{J}_s = \vec{u}_\phi J_\phi(\theta)$ olan yüzey dağılışının bulunduğunu farzedelim, şek. 74. Akım çizgileri paralel dairelerdir. Küre yüzeyindeki ($r = c$) sınır şartları $B_{1n} = B_{2n}$ ve $\vec{n}\,X\,(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu\vec{J}_s$ dir. $\vec{n} = \vec{u}_r$ ve $B_\phi = 0$ olduğunu gözönüne alarak

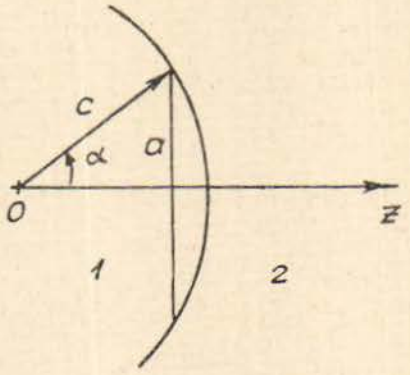
$$B_{1r} = B_{2r}\ ,\ B_{2\theta} - B_{1\theta} = \mu J_\phi$$

yazılabilir. Magnetik endüksiyonun bileşenleri

$$B_r = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(A_n r^{n-1} + \frac{B_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos\theta),$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) A_n r^{n-1} - n B_n \frac{1}{r^{n+2}} \right] P_n^1(\cos\theta)$$

dır. Potansiyelin sınırlı kalması için 1 bölgesinde $(r < c)$ $b_n = 0$ ve 2 bölgesinde $(r > c)$ $a_n = 0$ almak gerekir. Böylece sınır şartları yardımiyle



Şek. 74

$$b_n/a_n = c^{2n+1} \ (a) \ , \ \sum_{n-1}^{\infty} \left[n B_n \frac{1}{c^{n+2}} + (n+1) A_n c^{n-1} \right] P_n^1(\cos\theta) = \mu J_\phi \ (b)$$

bulunur. $J_\phi(\theta)$ yı

$$J_\phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n^1(\cos\theta)$$

serisine açabiliriz. Bu serinin katsayıları

$$c_n = \frac{1}{N_n(1)} \int_0^{\pi} J_\phi(\theta) P_n^1(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

integrali yardımiyle hesaplanır. $m = 1$ için normu gösteren $N_n(1)$

dir. c_n yi hesaplayabilmek için küre yüzeyindeki akım dağılışını bilmek gerekir.

Dairesel akımda yalnız $\theta = \alpha$ için ve ince bir şerit üstünde akım sıfırdan farklı olduğundan $P_n^1(\cos\theta) \approx P_n^1(\cos\alpha)$ alınabilir. Böylece

$$c_n \approx \frac{I \sin\alpha}{c\, N_n(1)} P_n^1(\cos\alpha)$$

bulunur. Diğer taraftan (b) şartı (a) yardımiyle

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, a_n\, c^{n-1} P_n^1(\cos\theta) = \mu\, J_\phi$$

şekline gireceğinden J_ϕ serisi ile karşılaştırarak a_n ve b_n bulunur. Böylece

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu I \sin\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n^1(\cos\alpha)\, P_n(\cos\theta) \qquad (r<c),$$

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu I \sin\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos\alpha) P_n^1(\cos\theta) \qquad (r>c)$$

serileri elde edilir. B_r ve B_θ bileşenleri ise

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu I \sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\alpha)\; P_n(\cos\theta), \\ B_\theta &= -\frac{\mu I \sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{c}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\alpha)\, P_n^1(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (r<c)$$

ve

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu I \sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+2} P_n^1(\cos\alpha) P_n(\cos\theta), \\ B_\theta &= -\frac{\mu I \sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+2} P_n^1(\cos\alpha)\, P_n^1(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (r>c)$$

olacaktır.

Orijinden d uzaklığında bulunan dairesel akımın eksen üstündeki M noktasında skaler potansiyeli

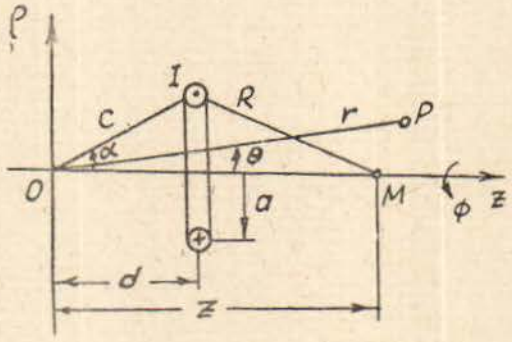
$$\psi(r,0)=\frac{I}{2}\left(1-\frac{z-d}{R}\right)$$

olacağından $1/R$ yi Legendre serisine açarak eksen dışındaki potansiyel için

$$\psi(r,\theta)=\frac{I}{2}\left(1+\frac{d}{c}\right)-\frac{I\sin\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^{n}P_n^1(\cos\alpha)\,P_n(\cos\theta)\quad(r<c),$$

$$\psi(r,\theta)=\frac{I\sin\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1}P_n^1(\cos\alpha)\,P_n(\cos\theta)\qquad(r>c)$$

serileri elde edilir, şek. 75. Alan bileşenleri $H_r=-\partial\psi/\partial r$ ve $H_\theta=-\partial\psi/r\partial\theta$ yardımiyle hesaplanır.



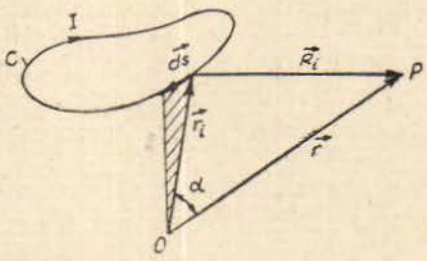
Şek. 75

5 — Magnetik dipolün alanı incelenecektir, şek. 76.

Boyutları alanın hesaplandığı noktanın uzaklığından çok küçük olan bir akıma magnetik dipol denilir. Şek. 75 de C çevresi P noktasında

$$\vec{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_C\frac{d\vec{r}_1}{R_1}$$

vektör potansiyelini meydana getirir. $1/R_1$ için



Şek. 76

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r_i}{r}\cos\alpha}} = \frac{1}{r} f\left(\frac{r_i}{r}\right)$$

yazılabileceğinden $f(r_i/r)$ fonksiyonunu

$$f\left(\frac{r_i}{r}\right) = f(0) + f'(0)\left(\frac{r_i}{r}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + \dots$$

Maclaurin serisine açarak

$$f\left(\frac{r_i}{r}\right) = 1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r_i}}{r^2} + \dots$$

bulunur. Böylece

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi r}\oint_C d\vec{r_i} + \frac{\mu I}{4\pi r^3}\oint_C d\vec{r_i}(\vec{r}\cdot\vec{r_i}) + \dots$$

elde edilir. Birinci terim sıfıdır. $r_i \ll r$ için ikinciden başka bütün terimleri bırakarak

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi r^3}\oint_C d\vec{r_i}(\vec{r}\cdot\vec{r_i})$$

yazılabilir. İntegral içindeki ifade

$$d\vec{r_i}(\vec{r}\cdot\vec{r_i}) = \frac{1}{2} d[\vec{r_i}(\vec{r}\cdot\vec{r_i})] + \frac{1}{2}(\vec{r_i}\times d\vec{r_i})\times\vec{r}$$

şekline sokulabileceğinden tam diferansiyel için integralin sıfır olacağını gözönüne alarak

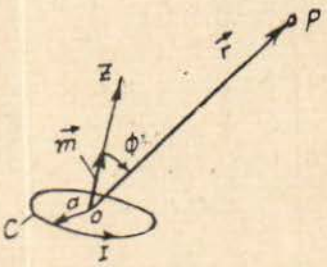
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi r^3}\left[\frac{I}{2}\oint_C \vec{r_i}\times d\vec{r_i}\right]\times\vec{r} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\vec{m}\times\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\mathrm{rot}_P\left(\frac{\vec{m}}{r}\right)$$

bulunur. $\vec{m}$, çevrenin magnetik momentini gösterir:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{r}_i \times d\vec{r}_i \,.$$

Çevreye magnetik dipol adı verilir. İhmal edilen diğer terimler mültipollerin vektör potansiyellerine tekabül eder. Bu ifadede $\frac{1}{2}\vec{r}_i \times d\vec{r}_i = d\vec{S}$, taranan üçgenin yüzeyidir. İntegral, tepesi orijinde bulunan koninin $\vec{S}$ vektör yüzeyini vereceğinden $\vec{m} = I\vec{S}$ yazılabilir. Vektör yüzeyi yalnız çevrenin şekline bağlıdır ve orijine bağlı değildir. Şek. 77 de görülen dairesel çevre için orijinin merkezde bulunduğunu farzederek ve $\vec{r}_i = \vec{u}_\rho a$, $d\vec{r}_i = \vec{u}_\phi a\, d\phi_i$ koyarak $\vec{m} = \vec{k}\, m = \vec{k}\, \pi a^2 I$ bulunur.



Şek. 77

P noktasındaki magnetik endüksiyon için $\vec{B} = \mathrm{rot}_P \vec{A}$ yardımiyle

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right] = -\mu\, \mathrm{grad}_P\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}\right)$$

elde edilir. Bu denklemi $\vec{B} = -\mu\, \mathrm{grad}_P \psi$ ile karşılaştırarak magnetik dipolün skaler potansiyeli için

$$\psi = \frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$$

bulunur.

Dairesel akım için $\vec{m} = \vec{k}\, m$ ve $\vec{r} = \vec{u}_r r$ koyarak

$$\vec{A} = \vec{u}_\phi A_\phi = \vec{u}_\phi \frac{\mu}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^2} \,,$$

$$\vec{B} = \frac{\mu m}{4\pi r^3}(-\vec{k} + 3\vec{u}_r \cos\theta) \,,$$

$$\psi = \frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}$$

bulunur. Magnetik endüksiyonun küresel koordinatlardaki bileşenleri için $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$, $B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{u}_\theta$, $B_\phi = \vec{B} \cdot \vec{u}_\phi$ yardımiyle

$$B_r = \frac{\mu m}{2\pi r^3} \cos\theta, \quad B_\theta = \frac{\mu m}{4\pi r^3} \sin\theta$$

bulunur. $B_\phi = 0$ dır. B_r, B_θ ve ψ ifadeleri statik alandaki noktasal dipol için bulunan ifadelere benzemektedir.

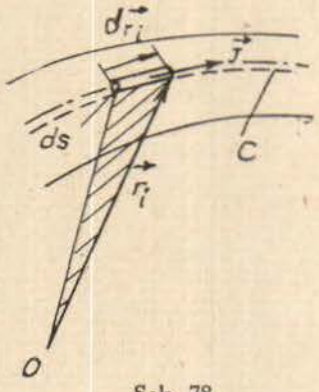
Sürekli akım dağılışında kesiti dF olan akım tübünün magnetik momenti için

$$\vec{dm} = \frac{1}{2} \oint_C J dF (\vec{r}_i \times \vec{dr}_i)$$

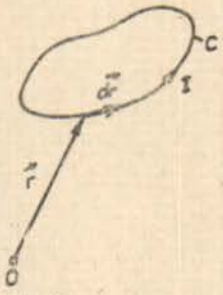
yazılabileceğinden $J\vec{dr}_i = \vec{J}\, dr_i$ ve $dV = dS dr_i$ koyarak

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r}_i \times \vec{J}\, dV$$

bulunur, şek. 78.



Şek. 78



Şek. 79

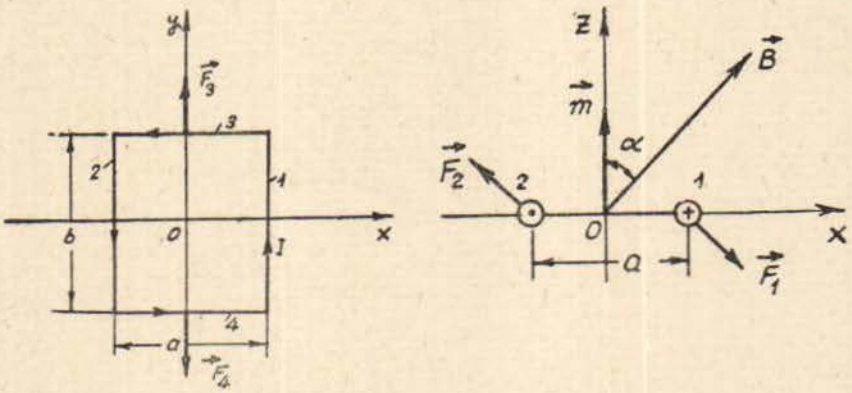
Magnetik alan içine sokulan bir dipole tesir eden dönme momentini hesaplayalım. Şek. 79 daki çevrenin $\vec{dr}$ elemanına tesir eden kuvvet $\vec{dF} = I(\vec{dr} \times \vec{B})$ olduğundan 0 noktasına göre moment $\vec{dM} = \vec{r} \times \vec{dF}$ $= I[\vec{r} \times (\vec{dr} \times \vec{B})]$ olacaktır. Buradan bileşke moment için

$$\vec{M} = I \oint_C \vec{r} X (d\vec{r} \times \vec{B})$$

bulunur. Üniform alanda bu ifade

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

şekline girer. Meselâ şek. 80 de görülen dikdörtgen çevreye tesir eden



Şek. 80

dönme momentini bulalım. Çevrenin $z = 0$ düzleminde bulunduğunu ve üniform magnetik alanın $\vec{B} = \vec{i}\, B_x + \vec{k}\, B_z$ şeklinde verildiğini farzedelim. Dikdörtgenin magnetik momenti $\vec{m} = \vec{k}\, m = \vec{k}\, a\, b\, I$ olacağından $\vec{M} = \vec{j}\, m\, B_x = \vec{j}\, m\, B \cos \alpha$ bulunur. Halbuki kenarlara tesir eden kuvvetlerin toplamı sıfırdır. Zira $\vec{F}_1 = b(\vec{i}\, B_z - \vec{k}\, B_x) = -\vec{F}_2$ ve $\vec{F}_3 = \vec{j}\, aB_x = -\vec{F}_4$ dir.

6 — Üniform magnetik alanın vektör potansiyeli incelenecektir.

$\vec{B}$ fonksiyonu bilindiği vakit $\vec{A}$ nın hesabı, statik alanda $\vec{E}$ bilindiği vakit φ nin

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

iitegrali ile hesaplanması kadar kolay değildir ve üç parsiyel diferansiyel denkleme eşdeğer olan rot $\vec{A} - \vec{B}$ denklemini çözmek gerekir. Magnetik alan üniform olduğu takdirde vektör potansiyel kolayca bulunabilir. Meselâ $\vec{B} = \vec{i}B_0$ üniform alanının vektör ponsiyeli için $\vec{A} = \vec{j}\alpha z B_0 + \vec{k}(1+\alpha)y B_0$ alınabilecegi kolayca görülebilir.

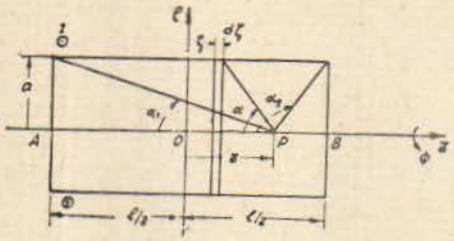
Genel olarak üniform alan içnde yer vektörü $\vec{r}$ olan bir noktadaki vektör potansiyelin

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$$

şeklinde hesaplanabileceği kolayca gösterilebilir. Bunun için de sağ tarafın rotasyonelinin $\vec{B}$ ye eşit olacağını göstermek yetecektir. Meselâ $\vec{B} = \vec{i}B_0$ için $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ koyarak $\vec{A} = -\vec{j}zB_0/2 + \vec{k}yB_0/2$ bulunur ($\alpha = -1/2$).

Silindirik koordinatlarda $\vec{B} = \vec{k}B_0$ için $\vec{r} = \vec{u}_\rho \rho + \vec{k}z$ koyarak $\vec{A} = \vec{u}_\phi B_0 \rho/2$ ve küresel koordinatlarda ayni alan için $\vec{r} = \vec{u}_r r$ koyarak $\vec{A} = \vec{u}_\phi B_0 r \sin\theta/2$ bulunur. Bu ifadelere bir sabiti veya grad ϕ yi ekleyebiliriz.

7 — Solenoidin eksenindeki magnetik alan bulunacaktır, şek. 81.



Şek. 81

Solenoidin alanı $\vec{J}_s = \vec{u}_\phi w I/l$ yüzey dağılışının alanına eşdeğer kabul edilebilir. $d\zeta$ elemanındaki $dI = wId\zeta/l$ akım elemanı P noktasında $dH_z = wId\zeta \sin^3\alpha/2al$ alanını meydana getireceğinden $z-\zeta = a$ ctg α olduğunu gözönüne alarak

$$H_z = \frac{wI}{2l} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

bulunur.

$d\zeta$ genişliğindeki dairesel akımı her hangi bir noktadan gören uzay açı Ω ile gösterilirse bu noktadaki skaler potansiyel

$$\psi = \frac{wI}{4\pi l} \int_{-l/2}^{l/2} \Omega \, d\zeta$$

olur. Eksen üstündeki nokta için $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ koyarak yukarıdaki formül elde edilir.

Silindir sonsuz uzun olduğu takdirde simetriden dolayı vektör potansiyelin yalnız $A_\phi(\rho)$ bileşeni bulunur. Böylece silindirik koordinatlarda

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_\phi}{d\rho} \right) - \frac{A_\phi}{\rho^2} = 0$$

diferansiyel denklemi bulunur. İç ve dış bölgedeki vektör potansiyeller $A_i\phi = C\rho$, $A_0\phi = D/\rho$ olacaktır. Buradan $\vec{B}_i = \vec{k}\, 2C$ = sab. ve $\vec{B}_0 = 0$ bulunur. Sınır şartı $\vec{n} X (\vec{B}_0 - \vec{B}_i) = \mu \vec{J}_s$ şeklinde olduğundan $C = \mu wI/2l$ olacaktır. $\rho = a$ için $A_i\phi = A_0\phi$ olacağını da gözönüne alarak

$$A_i\phi = \frac{\mu wI}{2l} \rho \, , \quad A_0\phi = \frac{\mu w a^2 I}{2\rho}$$

elde edilir. Solenoidin dışında $\vec{B}_0 = 0$ ve içinde $\vec{B}_i \neq 0$ dır. Bu örnek $\vec{A} \neq 0$ olan bir bölgede $\vec{B} = 0$ olabileceğini göstermektedir.

Yukarıdaki sonuçlar spiral şeklindeki solenoidin alanından limite geçerek çıkarılabilir, şek. 82. Yarıçapı a olan silindir üstüne sarılmış olan spiral

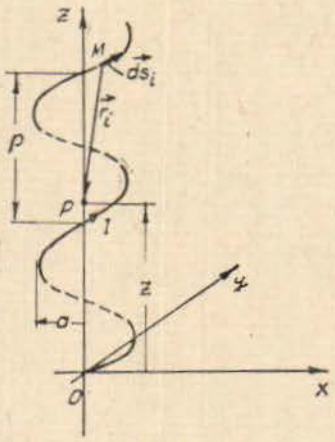
$$\xi = a \cos \phi \, , \quad \eta = a \sin \phi \, , \quad \zeta = a\phi \operatorname{tg} \alpha$$

denklemleri ile târif edilir. ϕ açısı 2π kadar artınca ζ uzaklığı $p = 2\pi a \operatorname{tg} \alpha$

kadar artar. $M(\xi, \eta, \zeta)$ noktasındaki $I\,ds_i$ akım elemanı eksen üstündeki $P(0, 0, z)$ noktasında

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\vec{ds_i} \times \vec{r_i}}{r_i^3}$$

endüksiyonunu meydana getireceğinden $\vec{ds_i} = \vec{i}\,d\xi + \vec{j}\,d\eta + \vec{k}\,d\zeta$ ve $\vec{r_i} = -\vec{i}\xi + \vec{j}\eta + \vec{k}(z-\zeta)$ olduğunu gözönüne alarak meselâ B_z bileşeni için



Şek. 82

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{-\eta d\xi + \xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\left[1 + \left(\frac{z}{a} - \phi \operatorname{tg} \alpha\right)\right]^{3/2}}$$

integrali bulunur. Alt ve üst sınır $\phi_1 = 0$ ve $\phi_2 = 2\pi w$ olacağından (zira ϕ açısının 2π kadar artışında bir sarım eklenir) integrali hesaplayarak

$$B_z = \frac{\mu I}{2p}\left[\frac{pw - z}{\sqrt{a^2 + (pw - z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right] = \frac{\mu w I}{2l}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

bulunur.

P noktasındaki B_x ve B_y bileşenleri için

$$B_x = \frac{\mu I}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi w} \frac{z \cos \phi + a \operatorname{tg} \alpha (\sin \phi - \phi \cos \phi)}{\left[1 + \left(\frac{z}{a} - \phi \operatorname{tg} \alpha\right)\right]^{3/2}} d\phi,$$

$$B_y = \frac{\mu I}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi w} \frac{z \sin \phi - a \operatorname{tg} \alpha (\cos \phi + \phi \sin \phi)}{\left[1 + \left(\frac{z}{a} - \phi \operatorname{tg} \alpha\right)\right]^{3/2}} d\phi$$

integralleri elde edilir. $p = 0$ $(\alpha = 0)$ için bu bileşenler sıfır olur. $p \neq 0$ için eksen boyunca alanın üç bileşeni bulunacağından alan çizgileri spiral şeklindedir.

8 — Eksenel simetrik magnetik alan genel olarak incelenecektir. Eksenel simetrik alanda skaler potansiyel

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0$$

denklemini sağlar. Zira $\partial/\partial\phi = 0$ dır. Simetri ekseni boyunca $\psi(0, z) = f(z)$ dağılışı bilindiği takdirde her hangi bir noktadaki $\psi(\rho, z)$ değeri aşağıdaki yollardan giderek hesaplanabilir.

a) Simetriyi gözönüne alarak $\psi(\rho, z)$ fonksiyonu

$$\psi(\rho, z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(z)\,\rho^{2k}$$

serisine açılabilir. Bu serinin birinci terimi $f_0(z)=f(z)$ dir. Seriyi diferansiyel denklemde yerine koyarak her hangi bir k değeri için

$$(2k+2)^2 f_{2k+2}(z)+\frac{d^2 f_{2k}(z)}{dz^2}=0$$

bulunur. Bu formül yardımiyle $\psi(\rho, z)$ için

$$\psi(\rho, z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}\frac{d^{2k}f(z)}{dz^{2k}}$$

serisi elde edilir. Eksen boyunca $H_z(0,z)=g(z)$ dağılışı bilindiği takdirde $f(z)=-\int g(z)dz$ ve $df/dz = -g(z)$ olduğunu gözönüne alarak

$$\psi(\rho, z)=-\int g dz+\frac{(\rho/2)^2}{1!^2}\frac{dg}{dz}-\frac{(\rho/2)^4}{2!^2}\frac{d^3g}{dz^2}+-\ldots.$$

serisi yazılabilir.

b) $\psi(\rho, z)$ fonksiyonu

$$\psi(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(z + j\rho \cos\phi)\, d\phi$$

integrali yardımiyle de hesaplanabilir. Bu ifadenin potansiyel denklemini sağladığı ve $\rho = 0$ için $f(z)$ ye eşit olduğu kolayca görülebilir.

c) $\psi(\rho, z)$ fonksiyonu Legendre polinomları serisine açılabilir.

$\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi$ yardımıyle H_ρ ve H_z bileşenleri için

$$H_\rho(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-1!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k-1} \frac{d^{2k-1}g}{dz^{2k-1}},$$

$$H_z(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \frac{d^{2k}g}{dz^{2k}}$$

serileri bulunur. İkinci formülde ilk terim $g(z)$ dir. $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ bağıntısından dolayı iki bileşen bağımsız değildir ve

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\rho) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

dır.

Eksenel simetrik alanda vektör potansiyelin yalnız $A_\phi(\rho, z)$ bileşeni vardır. Bu fonksiyonun serisini bulmak için Hertz vektöründen faydalanacağız. $\vec{A}$ ve ψ potansiyelleri bir tek vektörden türetilebilir. Bu vektörü $\vec{R}$ ile göstererek

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{R}, \quad \mu\psi = -\operatorname{div}\vec{R}$$

yazalım. Buradan $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ ve

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{R} - \Delta\vec{R},$$

$$\vec{B} = -\mu \operatorname{grad}\psi = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{R}$$

bulunur. Sayet $\vec{R}$ vektörü $\Delta\vec{R}=0$ denklemini sağlarsa her iki ifadeden aynı $\vec{B}$ elde edilir. $\vec{R}$ ye magnetik Hertz vektörü adı verilir. Bu vektör elektromagnetik teoride önemli bir rol oynar. $\vec{R}=\vec{k}R_z(\rho, z)$ alınırsa $\vec{A}=$ rot $\vec{R}$ yardımiyle

$$A_\phi(\rho, z) = -\frac{\partial R_z}{\partial \rho}$$

bulunur. R_z için

$$R_z(\rho, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(z + j\rho\cos\phi)\, d\phi$$

çözümü kullanılırsa

$$A_\phi(\rho, z) = -\frac{j}{\pi}\int_0^\pi F'(z+j\rho\cos\phi)\cos\phi\, d\phi$$

olacaktır. $F(z)$ fonskiyonu eksen boyunca $R_z(0,z)$ dağılışını göstermektedir. F' ise $\partial F/\partial\xi$ dir ($\xi = z+j\rho\cos\phi$). Son denklemde $F'(z+j\rho\cos\phi)= G(z+j\rho\cos\phi)$ koyarak

$$A_\phi(\rho, z) = -\frac{j}{\pi}\int_0^\pi G(z+j\rho\cos\phi)\cos\phi\, d\phi$$

yazalım. G fonksiyonu $\rho=0$ civarında Taylor serisine açılırsa

$$G(z+j\rho\cos\phi) = G(z) + G'(z)(j\rho\cos\phi) + \frac{1}{2!}G''(z)(j\rho\cos\phi)^2 + \ldots$$

bulunur. Bu seriyi $\cos\phi$ ile çarpıp 0 ile π arasında integre ederek ve

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^{2n}\phi\, d\phi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,, \qquad \int_0^\pi \cos^{2n+1}\phi\, d\phi = 0$$

olduğunu gözönüne alarak ($n0,=1,2,\ldots$)

$$A_\phi(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+1} \frac{d^{2n+1}G}{dz^{2n+1}}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \quad B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi)$$

olduğundan eksen boyunca $B_\rho\ (0,z)=0$ ve $B_z(0,z)= G'(z)$ elde edilir. Böylece

$$A_\phi(\rho, z)= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+1} \frac{d^{2n} B_z(0, z)}{dz^{2n}}$$

serisi bulunur. Bu serinin ilk terimi $\rho B_z(0,z)/2$ dir.

Eksene dik olan ρ yarıçaplı daireden geçen akı için

$$\phi(\rho, z) = 2\pi\rho\, A_\phi\ (\rho, z)$$

yazılabilir. $\phi\ (\rho, z)$ ye, eksnel simetrik alanın akı fonksiyonu denilir. Bu fonksiyonun ρ ve z ye göre parsiyel türevleri $\partial\phi/\partial\rho = 2\pi\rho B_z(\rho,z)$, $\partial\phi/\partial z = -2\pi\rho B_\rho\ (0,z)$ olacağından rot $\vec{B} = \vec{u}_\phi \mu J_\phi$ yardımiyle (eksenel simetrik alanın kaynağı J_ϕ dağılışıdır).

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = -2\pi\mu\rho J_\phi$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eksenel simetrik alanda A_ϕ vektör potansiyeli

$$\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial\rho} - \frac{A_\phi}{\rho^2} = -\mu J_\phi$$

denklemini sağladığından akı fonksiyonu için bulunan diferansiyel denklemin daha basit olduğu görülmektedir.

Eksenel simetrik bir ortogonal koordinat sisteminde koordinatlar ξ, η, ϕ olduğuna göre akı fonksiyonu için

$$\phi(\xi, \eta) = 2\pi\rho(\xi, \eta) A_\phi(\xi, \eta)$$

yazılabilir.

Yukardaki sonuçlar eksenel simetrik elektrik alanına da uygulanabilir.

9 — İki boyutlu magnetik alan genel olarak incelenecektir (konform tasvir).

İki boyutlu magnetik alanın kaynağı çizgisel veya silindirik akım dağılışıdır. Kenar tesirlerinin ihmal edilebilmesi için iletkenlerin teorik olarak sonsuz ve pratik bakımdan çok uzun olmaları gerekir. Çizgisel akım dağılışı $z-$ ekseni dorultusunda ve $\vec{J}$ dağılışının $\vec{J} = \vec{k}J_z$ şeklinde olduğu kabul edilirse vektör potansiyelin yanlız A_z bileşeni bulunacaktır. ψ ve A_z potansiyelleri z koordinatına bağlı değildir ve iletkenler dışında iki boyutlu Laplace denklemini sağlarlar. Şayet kompleks potansiyel

$$P(z) = \phi(x,y) + j\psi(x,y)$$

şeklinde alınırsa reel kısım akı fonksiyonunu ve imajiner kısım skaler magnetik potansiyeli gösteirir. Alan çizgilerinin ve eşpotansiyel çizgilerin denklemleri $\phi(x,y) =$ sab. ve $\psi(x,y) =$ sab. şeklindedir. Kompleks alan şiddeti ve modülü

$$\dot{H} = H_x + jH_y = -j\left(\overline{\frac{dP}{dz}}\right), \quad |\dot{H}| = \left|\frac{dP}{dz}\right|$$

yardımiyle hesaplanır.

İki boyutlu alanda $B_x = \partial A_z/\partial x$ ve $B_y = -\partial A_z/\partial y$ dir. Diğer taraftan $H_x = -\partial\psi/\partial x$ ve $H_y = -\partial\psi/\partial y$ olduğundan Cauchy — Riemann denklemleri yardımiyle $A_z = \mu\phi$ olacağı anlaşılır (sabit bırakılmıştır).

Şayet kompleks potansiyel $P(z) = \psi(x, y) + j\phi(x, y)$ şeklinde alınırsa $\dot{H} = -(\overline{dP/dz})$, $A_z = -\mu\phi$ olacaktır.

Kompleks potansiyel meselâ

$$P(z) = A_z(x, y) + j\psi(x, y)$$

şeklinde de alınabilir. Bu ifade $P(z) = \phi + j\psi$ ye eşdeğerdir. Böylece vektör potansiyelin akı fonksiyonu rolünü oynadığı anlaşılır.

Şek. 83 de 1 ve 2 noktalarını birleştiren eğriden, düzleme dik doğrultuda birim uzunluk boyunca geçen magnetik akı

$$\overline{\phi} = A_z(z_1) - A_z(z_2) = \mu(\phi_1 - \phi_2)$$

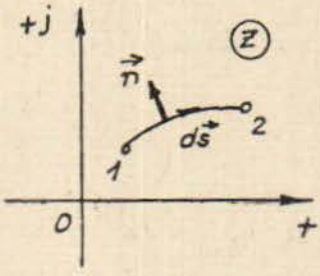
olacaktır.

Örnek olarak $P(z) = c\ lnz + k$ kompleks potansiyelini inceleyelim. c nin reel ve k nın kompleks olduğu farzedilirse $k = k_1 + j k_2$ ve $z = \rho e^{j\theta}$ koyarak

$$P(z) = c\ ln\rho + k_1 + j(c\theta + k_2)$$

bulunur. Alan çizgilerinin denklemi ρ = sab. ve eşpotansiyel çizgilerin denklemi ise θ=sab. dir. Bu ise orijinde bulunan sonsuz uzun çizgisel akımın alan şeklidir. c sabiti için

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{ds} = \psi(0) - \psi(2\pi) = -2\pi = I$$



Şek. 83

yardımiyle $c = -I/2\pi$ bulunacağından akı ve potansiyel fonksiyonları için

$$\phi = -\frac{I}{2\pi} \ln\rho + k_1, \qquad \psi = -\frac{I}{2\pi}\theta + k_2$$

elde edilir. Çizgisel akımın kompleks potansiyeli

$$P(z) = -\frac{I}{2\pi} \ln \frac{z}{z_0}$$

şeklinde de yazılabilir $(z_0 = \rho_0 e^{j\theta_0})$.

z_1 noktasındaki çizgisel akımın kompleks potansiyelinin

$$P(z) = -\frac{I}{2\pi} \ln (z - z_1) + k$$

olacağı kolayca görülebilir. Paralel iletken sisteminin komleks potansiyeli ise

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} I_i \ln(z - z_i) + k$$

olacaktır. Bu toplemda $\vec{k}$ yönündeki akımlar pozitif ve diğerleri negatif alınmalıdır.

İkinci bir örnek olarak üniform alan içine sokulan çizgisel akımı inceleyelim. y— ekseni doğrultusundaki üniform alanın kompleks potansiyeli

$$P_0(z) = a\,z + b = \phi_0 + j\,\psi_0$$

şeklinde olacaktır. a reel ve b komplekstir. $b = b_1 + j\,b_2$ koyarak

$$\phi_0 = a\,x + b_1, \qquad \psi_0 = a\,y + b_2$$

bulunur. Şayet alan $-\vec{j}$ yönünde ise $H_y = -d\psi_0/dy = -a = -H_0$ olur. Böylece

$$P_0(z) = H_0\,z + b$$

yazılabilir. Orijindeki çizgisel akımın kompleks potansiyelini süperpoze ederek

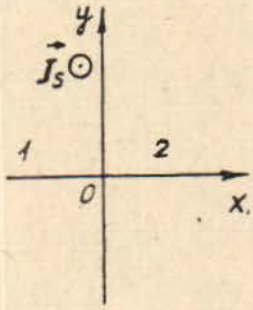
$$P(z) = -\frac{I}{2\pi}\ln z + H_0\,z + k$$

bulunur.

31. Yüzeysel akım dağılışı örnekleri.

1 — Sonsuz düzlemdeki üniform akım dağılışının magnetik alanı incelenecektir, şek. 84.

Akım dağılışı $x = 0$ düzlemindedir ve $\vec{J}_s = k\vec{J}_s$ dir (J_s = sab.). Vektör potansiyelin yalnız A_z bileşeni vardır ve simetriden dolayı yalnız x uzaklığına bağlıdır. $\Delta A_z = 0$ denkleminin çözümü $A_z(x) = Cx + D$ dir ve $x<0$ bölgesinde $-C$ alınmalıdır. $\vec{B}$ için $\vec{B} = -\vec{j}\,dA_z/dx$ yardımiyle $x<0$ için $\vec{B}_1 = \vec{j}\,C$ ve $x>0$ için $\vec{B}_2 = -\vec{j}\,C$ bulunacağından $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$ olacağı anlaşılır. $\vec{i} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{k}\,\mu J_s$



Şek. 84

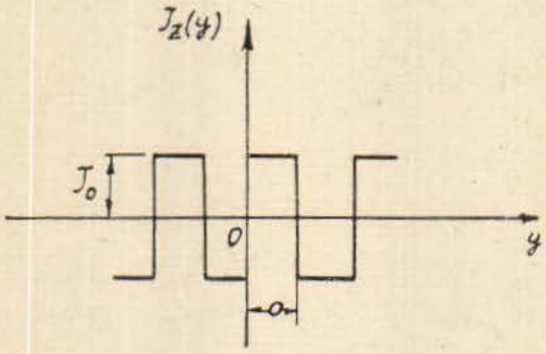
sınır şartı yardımiyle $C = -\mu J_0/2$ bulunur. Böylece

$$A_{1z}(x) = \frac{\mu J_0}{2} x + D, \quad A_{2z}(x) = -\frac{\mu J_0}{2} x + D,$$

$$\vec{B}_1 = -\vec{j}\frac{\mu J_0}{2}, \qquad \vec{B}_2 = \vec{j}\frac{\mu J_0}{2}$$

yazılabilir. Alan üniformdur ve yalnız B_y bileşeni vardır.

2 — $x = 0$ düzlemindeki $\vec{J}_s = \vec{k} J_z(y)$ dağılışının magnetik alanı bulunacaktır, şek. 85.



Şek. 85

Bu akım dağılışı genişlikleri a olan sonsuz uzun şeritlerden periyodik olarak $\pm a J_0$ akımlarını geçirerek gerçeklenebilir. $J_z(y)$ yi

$$J_z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \sin \frac{\pi n y}{a}$$

Fourier sinüs serisine açabiliriz. Serinin katsayıları $M_n = 4 J_0/\pi n$ dir (n = tek sayı). Problem iki boyutlu olduğundan $\Delta A_z = 0$ denkleminin çözümü

$$A_z(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k e^{-m_k x} + B_k e^{m_k x})(C_k \sin m_k y + D_k \cos m_k y)$$

dir. Potansiyelin sonsuzda sınırlı kalması gerektiğinden

$$A_{1z}=\sum_{k=0}^{\infty} e^{m_k x}\,(a_k \sin m_k y+b_k \cos m_k y) \quad (x<0),$$

$$A_{2z}=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-m_k x}\,(c_k \sin m_k y+d_k \cos m_k y) \quad (x>0)$$

alınır. $B_{1x}=B_{2x}$ sınır şartı yardımiyle $a_k=c_k$, $b_k=d_k$ ve $B_{2y}-B_{1y}=\mu J_z$ şartı yardımiyle $k=n$, $b_k=0$ ve

$$m_k=\frac{\pi k}{a}\,, \qquad a_k=\frac{\mu a M_k}{2\pi k}$$

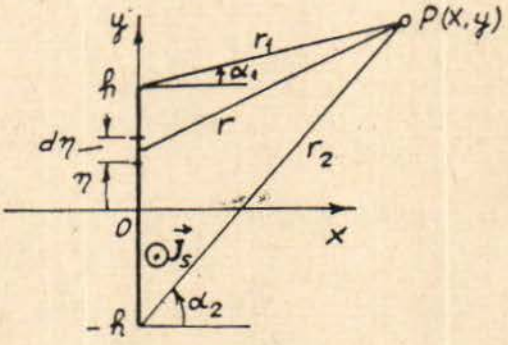
bulunur. Böylece

$$A_{1z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu a M_k}{2\pi k}\sin\frac{\pi k y}{a}\,e^{\frac{\pi k x}{a}}\,,$$

$$A_{2z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu a M_k}{2nk}\sin\frac{\pi k y}{a}\,e^{-\frac{\pi k x}{a}}$$

elde edilir. $B_x=\partial A_z/\partial y$ ve $B_y=-\partial A_z/\partial x$ dir.

3 — Şek. 86 daki şeritten $\vec{k}$ yönünde I akımı geçtiğine göre P noktasındaki alan hesaplanacaktır.



Şek. 86

Akım yoğunluğu $\vec{J}_s=\vec{k}\,J_z=\vec{k}\,I/2h$ dır. Vektör potansiyel

$$A_z=-\frac{\mu J_z}{2\pi}\int_{-h}^{h}\ln r\,d\eta$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Buradan $[r=\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}]$

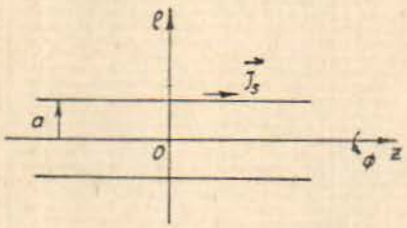
$$A_z = \frac{\mu J_z}{2\pi}\left[(y-h)\ \ln\ r_1 - (y+h)\ \ln\ r_2 + 2h + x(\alpha_1-\alpha_2)\right]$$

bulunur. B_x ve B_y ise

$$B_x = \frac{\mu J_z}{2\pi}\ \ln\ \frac{r_1}{r_2}\ ,\quad B_y = \frac{\mu J_z}{2\pi}(\alpha_2-\alpha_1)$$

olacaktır.

4 — Eksene paralel sonsuz uzun üniform silindirik akım dağılışının magnetik alanı bulunacaktır, şek. 87.



Şek. 87

Silindirik simteriden dolayı vektör potansiyelin yalnız $A_z(\rho)$ bileşeni bulunacağından silindirik koordinatlarda

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\ \frac{dA_z}{d\rho}\right) = 0$$

denklemini çözerek

$$A_z(\rho) = C\ \ln\ \rho + D$$

bulunur. Buradan $B\rho = B_z = 0$ ve $B_\phi = -dA_z/d\rho = -C/\rho$ elde edilir. Silindir içinde $C=0$ olacağından

$$A_{iz}(\rho) = D_i\ ,\quad A_{0z}(\rho) = C_0\ \ln\ \rho + D_0\ ,$$

$$B_{i\phi} = 0\ ,\quad B_{0\phi} = -\frac{C_0}{\rho}$$

yazılabilir. $\vec{u}_\rho \times (\vec{B}_0 - \vec{B}_i) = \vec{k}\,\mu J_z$ sınır şartı yardımiyle $C_0 = -\mu a J_z$ ve $A_{iz}(a) = A_{0z}(a)$ şartı yardımiyle de $D_i = -\mu a J_z\ \ln\ a + D_0$ bulunacağından

$$A_{iz} = -\mu a J_z \ln a + D_0 = \text{sab.} \ ,$$

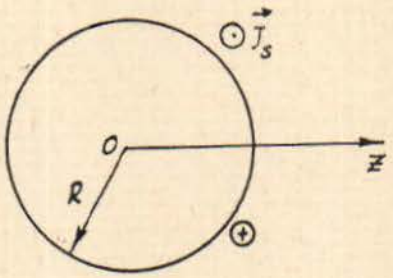
$$A_{0z}(\rho) = -\mu a J_z \ln \rho + D_0$$

elde eldilir. Silindir içinde alan sıfırdır ve dışında

$$B_{0\phi} = \frac{\mu a J_z}{\rho}$$

şeklinde değişir.

5 — Yoğunluğu $\vec{J}_s = \vec{u}_\phi J_0 \sin\theta$ (J_0 = sab.) olan küresel akım dağılışının magnetik alanı bulunacaktır, şek. 88.



Şek. 88

Vektör potansiyelin yalnız A_ϕ (r, θ) bileşeni vardır ve Laplace denklemi

$$\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\theta} = 0$$

şeklindedir. Bu denlemin çözümü

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n^1(\cos\theta)$$

dır. Poler eksen çözüm bölgesine girdiğinden $Q_n^1(\cos\theta)$ alınmamıştır. Vektör potansiyelin sınırlı kalacağını gözönüne alarak

$$A_{i\phi} = \sum_n a_n r^n P_n^1(\cos\theta) \qquad (r < a) \ ,$$

$$A_{0\phi} = \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n^1(\cos\theta) \qquad (r > a)$$

yazılabilir. Sınır şartları $r = R$ için $B_{ir} = B_{0r}$ ve $B_{0\theta} - B_{i\theta} = \mu_0 J_0 \sin\theta$ şeklinde olacağından

$$\frac{b_n}{a_n} = R^{2n+1}, \quad \sum_n (2n+1)\, a_n R^{n-1} P_n^1(\cos\theta) = \mu_0 J_0 \sin\theta$$

bulunur. Böylece $n=1$ için $a_1 = \mu_0 J_0/3$, $b_1 = \mu_0 J_0 R^3/3$ ve $n \neq 1$ için $a_n = b_n = 0$ bulunacağından

$$A_{i\phi} = \frac{\mu_0 J_0}{3} r \sin\theta, \qquad A_{0\phi} = \frac{\mu_0 J_0 R^3}{3r^2} \sin\theta,$$

ve

$$B_{ir} = \frac{2\mu_0 J_0}{3} \cos\theta, \qquad B_{i\theta} = -\frac{2\mu_0 J_0}{3} \sin\theta,$$

$$B_{0r} = \frac{2\mu_0 J_0 R^3}{3r^3} \cos\theta, \qquad B_{0\theta} = \frac{\mu_0 J_0 R^3}{3r^3} \sin\theta,$$

elde edilir. Küre içinde

$$\vec{B}_i = \frac{2\mu_0 J_0}{3} (\vec{u}_r \cos\theta - \vec{u}_\theta \sin\theta) = \vec{k} \frac{2\mu_0 J_0}{3}$$

olacağından alan üniformdur ve poler eksen yönündedir. Küre dışındaki alan ise orijinde bulunduğu farzedilen ve momenti $\vec{m} = \vec{k}\, 4\pi R^3 J_0/3$ olan magnetik dipolün alanı gibidir.

Bu akım dağılışı meselâ küresel solenoid yardımiyle gerçeklenebilir.

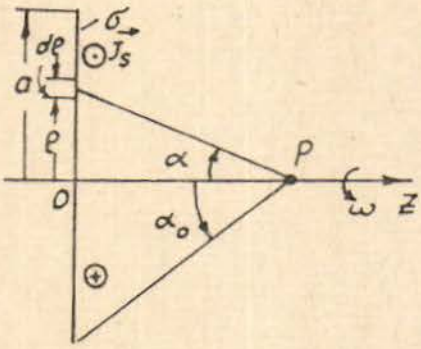
6 — Sabit açısal hızla döndürülen üniform yüklü diskin ekseninde-ki alan hesaplanacaktır, şek. 89.

Diskin hareketi, yoğunluğu $\vec{J}_s = \vec{u}_\phi \sigma\omega\rho$ olan yüzey akımına eşdeğerdir. Böylece P noktasındaki endüksiyon için

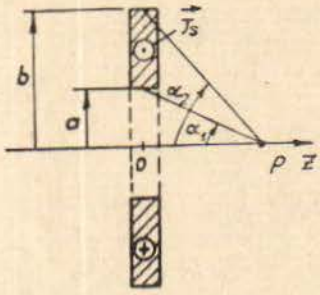
$$B_z = \frac{\mu_0 \omega \sigma z}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 \omega \sigma z}{2} \frac{(1-\cos\alpha_0)^2}{\cos\alpha_0}$$

bulunur.

7 — Yassı solenoidin eksenindeki magnetik alan hesaplanacaktır, şek. 90.



Şek. 89



Şek. 90

Akım dağılışına, yoğunluğu

$$\vec{J}_s = \vec{u}_\phi \frac{wI}{b-a}$$

olan yüzey dağılışı gözüyle bakılabileceğinden

$$B_z = \frac{\mu J_s}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\, d\alpha = \frac{\mu J_s}{2} \left[\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \right]$$

bulunur.

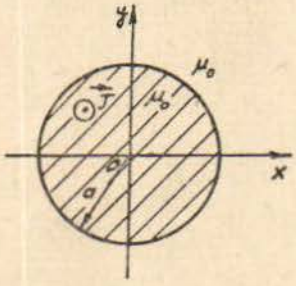
32. Hacimsel akım dağılışı örnekleri.

1 — Sonsuz uzun üniform silindirik akım dağılışının magnetik alanı incelenecektir, şek. 91.

Akım yoğunluğu $\vec{J} = \vec{k} J_z = \vec{k} I/\pi a^2$ dir. Silindirik simetriyi gözönüne alarak Amper kanunu yardımiyle

$$B_i \phi = \frac{\mu_0 J_z}{2} \rho\,, \quad B_0 \phi = \frac{\mu_0 a^2 J_z}{2\rho}$$

bulunur. Vektör potansiyelin yalnız $A_z(\rho)$ bi-



Şek. 91

leşeni bulunacağından $B_\phi = -dA_z/d\rho$ yardımiyle

$$A_{iz} = -\frac{\mu_0 J_z}{4}\rho^2 + C_i\,, \qquad A_{0z} = -\frac{\mu_0 a^2 J_z}{2}\ln\rho + C_0$$

elde edilir. $\rho = a$ için $A_{iz} = A_{0z}$ olacağından

$$C_i = \frac{\mu_0 a^2 J_z}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln a\right) + C_0$$

bulunur. $\rho = \rho_0$ için $(\rho_0 > a)$ $A_{0z} = 0$ seçilirse

$$A_{0z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\,,$$

$$A_{iz} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2 - \rho^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{a}$$

yazılabilir.

Vektör potansiyeli $\Delta A_{iz} = -\mu_0 J_z$ ve $\Delta A_{0z} = 0$ denklemlerini çözerek de bulabiliriz. Böylece

$$A_{iz} = -\frac{\mu_0 J_z \rho^2}{4} + b\,,$$

$$A_{0z} = c\ln\rho + d$$

ve buradan

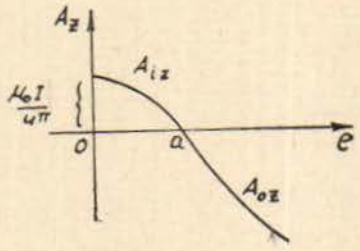
$$B_{i\phi} = \frac{\mu_0 J_z \rho}{2}\,, \qquad B_{0\phi} = -\frac{c}{\rho}$$

bulunur. $\rho = a$ için $B_{i\phi} = B_{0\phi}$ olacağını gözönüne alarak $c = -\mu_0 a^2 J_z/2$ ve $A_{iz} = A_{0z}$ olacağını gözönüne alarak

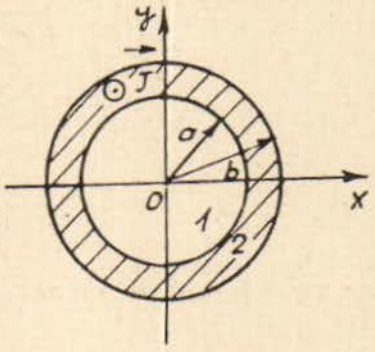
$$b = \frac{\mu_0 a^2 J_z}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln a\right) + d$$

bulunacağından vektör potansiyel için yukarıdaki sonuçlar elde edilir. Şek. 92 de $\rho = a$ için $A_{iz} = A_{0z} = 0$ alındığına göre A_z nin ρ ile nasıl değiştiği görülmektedir.

2 — Şek. 93 de vektör potansiyeller bulunacaktır.



Şek. 92



Şek. 93

Akım yoğunluğu $\vec{J} = \vec{k} J_z = \vec{k}\, I/\pi(b^2 - a^2)$ dir ve üç bölge için

$$A_{1z} = A\,, \quad A_{2z} = -\frac{\mu_0 J_z \rho^2}{4} + B\ln\rho + C\,, \quad A_{3z} = D\ln\rho + E$$

yazılabilir. Buradan

$$B_{1\phi} = 0\,, \qquad B_{2\phi} = \frac{\mu_0 J_z \rho^2}{2} - \frac{B}{\rho}\,, \qquad B_{3\phi} = -\frac{D}{\rho}$$

bulunur. $\rho = a$ için $B_{1\phi} = B_{2\phi}$, $A_{1z} = A_{2z}$ ve $\rho = b$ için $B_{2\phi} = B_{3\phi}$, $A_{2z} = A_{3z}$ olacağını gözönüne alarak ve $\rho = \rho_0$ için $(\rho_0 > b)$ $A_{3z} = 0$ seçerek

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 J_z}{4}\left(b^2 - a^2 + 2a^2 \ln\frac{a}{b}\right) + \frac{\mu_0 J_z}{2}(a^2 - b^2)\ln\frac{b}{\rho_0}\,,$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 J_z}{4}\left(b^2 - \rho^2 + 2a^2 \ln\frac{\rho}{b}\right) + \frac{\mu_0 J_z}{2}(a^2 - b^2)\ln\frac{b}{\rho_0}\,,$$

$$A_{3z} = \frac{\mu_0 J_z}{2}(a^2 - b^2)\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

ve

$$B_{1\phi} = 0, \quad B_{2\phi} = \frac{\mu_0 J_z}{2\rho}(\rho^2 - a^2)\,, \quad B_{3\phi} = -\frac{\mu_0 J_z}{2\rho}(a^2 - b^2)$$

bulunur. Silindir içinde alan sıfırdır. Bu formüller silindirik simetriden dolayı Amper kanunu yardımiyle kolayca bulunabilir.

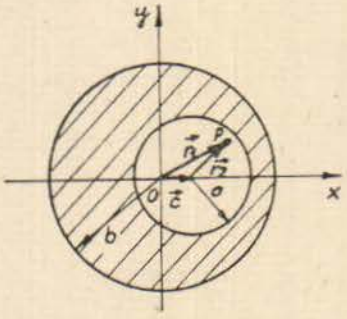
3 — Şek. 94 de silindirik boşluktaki magnetik alan hesaplanacaktır.

Akım yoğunluğu

$$\vec{J} = \vec{k} J_z = \vec{k} \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

dir. J_z yoğunluğundaki akımın b yarıçaplı silindirden geçtiği farzedilirse P noktasındaki alan

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_1)$$



Şek. 94

oulr. a yarıçaplı silindirden ters yönde ve yoğunluğu $-J_z$ olan akımın geçtiği farzedilirse bu bölgedeki alan sıfır olur. Diğer taraftan $-J_z$ dağılışı P de

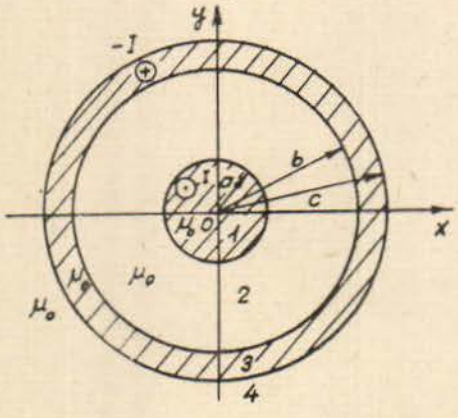
$$\vec{H}_2 = -\frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{r}_2)$$

alanını meydana getireceğinden bu noktadaki bileşke

$$\vec{H} = \frac{\vec{J}}{2} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\vec{J} \times \vec{c}}{2} = \vec{j} \frac{cJ_z}{2} = \text{sab.}$$

olacaktır. Boşluktaki alan üniformdur ve yalnız H_y bileşeni vardır.

4 — Bir damarlı kablonun magnetik alanı bulunacaktır, şek. 95.



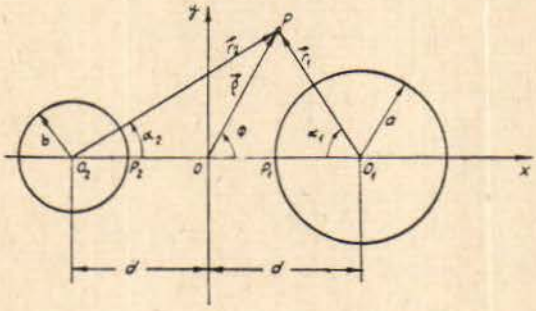
Şek. 95

Silindirik simetriden faydalanarak Amper kanunu yardımiyle

$$H_{1\phi} = \frac{I}{2\pi a^2}\rho,\quad H_{2\phi} = \frac{I}{2\pi\rho},\quad H_{3\phi} = \frac{I}{2\pi\rho}\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2},\quad H_{4\phi} = 0$$

bulunur. Bu ifadeleri rot $\vec{H} = \vec{J}$ veya $\Delta A_z = -\mu J_z$ diferansiyel denklemlerini çözerek de bulabiliriz.

5 — İki paralel silindirin magnetik alanı hesaplanacaktır, şek. 96.



Şek. 96

Silindirdeki akım yoğunlukları $J_{1z} = I/\pi a^2$ ve $J_{2z} = -I/\pi b^2$ dir. 1,2,3 bölgelerindeki vektör potansiyeller için

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r_1^2 + A \ln r_2 + B ,$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b^2} r_2^2 + C \ln r_1 + D ,$$

$$A_{3z} = E \ln r_1 + F \ln r_2 + G$$

yazılabilir. B_ϕ ler $B_\phi = -\partial A_z/\partial\rho$ yardımiyle hesaplanır. P_1 noktasında $B_{1\phi} = B_{3\phi}$, $A_{1z} = A_{3z}$ ve P_2 noktasında $B_{2\phi} = B_{3\phi}$, $A_{2z} = A_{3z}$ olacağını gözönüne alarak ve $r_1/r_2 = b/a$ için $A_{3z} = 0$ seçerek

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[1 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2 + 2 \ln \frac{r_2}{b}\right]$$

$$A_{2z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[1-\left(\frac{r_2}{b}\right)^2 + 2\ln\frac{r_1}{a}\right],$$

$$A_{3z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}\frac{a}{b}$$

bulunur.

Silindirlerin dışındaki alan eksenlere intibak eden çizgisel akımların alanına eşdeğerdir. Böylece 3 bölgesinde alan çizgilerinin merkezleri x—ekseni üstünde bulunan daireler olacağı anlaşılır.

Silindirlerin içinde ve x—ekseni üstünde $B_\rho = 0$ ($B_x = 0$) ve

$$B_{1\phi} = B_{1y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\rho-d}{a^2} - \frac{1}{\rho+d}\right),$$

$$B_{2\phi} = B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho+d} - \frac{\rho-d}{b^2}\right)$$

olacağından $\rho_1 = \sqrt{a^2+d^2}$ için $B_{1y} = 0$ ve $\rho_2 = \sqrt{b^2+d^2}$ için $B_{2y} = 0$ olur. Bu noktalara silindirlerin çekirdeği denilir (K_1 ve K_2).

Alan çizgilerinin denklemi $A_z = \text{sab.}$ olduğundan 1 silindiri için bütün sabitleri bir tarafa toplayarak

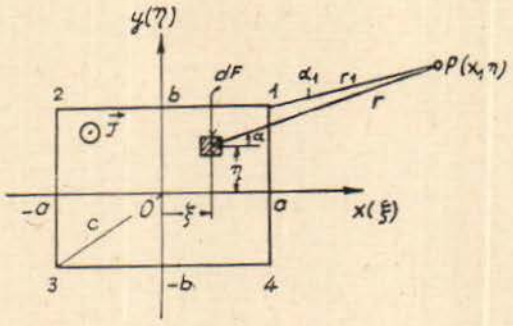
$$-\left(\frac{r_1}{a}\right)^2 + \ln\left[1+\left(\frac{r_1}{2d}\right)^2 - \frac{r_1}{d}\cos\alpha_1\right] = \text{sab.}$$

bulunur. 2 silindiri için de benzer denklem bulunur. $d\to\infty$ için $r_1 = \text{sab.}$ olur. Böylece bir silindirin alan çizgileri elde edilir. $r_1 \ll d$ için yaklaşık olarak

$$r_1^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4d^2}\right) + \frac{r_1}{d}\cos\alpha_1 = \text{sab.}$$

yazılabilir. Bu ifade, merkezi x—ekseni üstünde $r_1 \approx a^2/2d$ noktasında bulunan dairenin denklemidir. Böylece $d \gg a$ için merkezin çekirdek civarında olacağı anlaşılır. Alan çizgileri çekirdek civarında daire şeklindedir ve çekirdekten uzaklaşınca bu şekil bozularak silindirler dışında tekrar daire haline gelir. Bu alan şekli ile iki silindirin statik alanı arasında bir benzerlik yoktur.

6 — Dikdörtgen kesitli çok uzun çubuğun magnetik alanı hesaplanacaktır, şek. 97.



Şek. 97

$dI = J_z\,dF$ akım elemanına çizgisel akım gözüyle bakılabileceğinden P noktasındaki $\vec{B}$ ve $\vec{A}$ için

$$\vec{B} = \frac{\mu}{2\pi} \int_F \frac{J_z\,dF}{r^2} (\vec{k} \times \vec{r}) ,$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_F J_z \ln r\, dF$$

integralleri bulunur. Böylece $J_z = I/4ab$ olduğunu gözönüne alarak

$$A_z = -\frac{\mu I}{8\pi ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \ln \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta$$

yazılabileceğinden

$$A_z = -\frac{\mu I}{8\pi ab} \Big\{ (x-a)(y-b) \ln \frac{r_1}{c} - (x+a)(y-b) \ln \frac{r_2}{c}$$

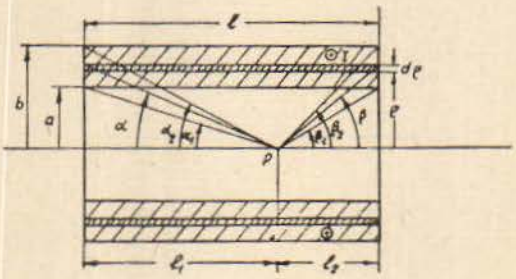
$$+ (x+a)(y+b) \ln \frac{r_3}{c} - (x-a)(y+b) \ln \frac{r_4}{c}$$

$$+ \frac{1}{2} [(x-a)^2(\alpha_1-\alpha_4) + (x+a)^2(\alpha_3-\alpha_2) +$$

$$(y-b)^2(\alpha_2-\alpha_1) + (y+b)^2(\alpha_4-\alpha_3)] \Big\}$$

bulunur. r ler dikdörtgenin köşelerinin P ye uzaklığını ve α lar ise r lerle yatay doğrultu arasındaki açıları göstermektedir. $B_x = \partial A_z/\partial y$, $B_y = -\partial A_z/\partial x$ dir. Alan çizgilerinin denklemi $A_z =$ sab. dir ve elipslere benziyen çizgiler elde edilir. Çubuk içindeki alan $\Delta A_z = -\mu J_z$ denklemini çözerek bulunur.

7 — Sınırlı uzunluktaki çok tabakalı solenoidin alanı hesaplanacaktır, şek. 98.



Şek. 98

Birim kesitteki sarım sayısı n ile gösterilirse akım yuğunluğu $J = nI$ olur. $d\rho$ genişliğindeki silindirik tabaka eksen üstünde

$$dH_z = \frac{n I\, d\rho}{2} (\cos\alpha \pm \cos\beta)$$

alanını meydana getirir. P noktası solenoid içinde ise $+$ işareti ve dışında ise $-$ işareti alınır. Diğer taraftan $\operatorname{tg}\alpha = \rho/l_1$ ve $\operatorname{tg}\beta = \rho/l_2$ olduğunu gözönüne alarak $d\rho = l_1\, d\alpha/\cos^2\alpha$ ve $d\rho = l_2\, d\beta/\cos^2\beta$ yazılabileceğinden

$$H_z = \frac{nI}{2}\left[l_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \pm l_2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{nI}{2}\left[l_1 \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \mp l_2 \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

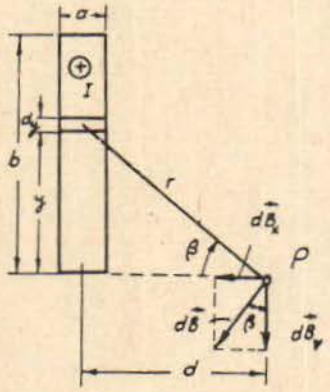
$$= \frac{nI}{4}\left[l_1 \ln \frac{(1+\sin\alpha_2)(1-\sin\alpha_1)}{(1-\sin\alpha_2)(1+\sin\alpha_1)} \pm l_2 \ln \frac{(1+\sin\beta_2)(1-\sin\beta_1)}{(1-\sin\beta_2)(1+\sin\beta_1)}\right]$$

bulunur. Eksen dışındaki alan daha önce görüldüğü gibi hesaplanır.

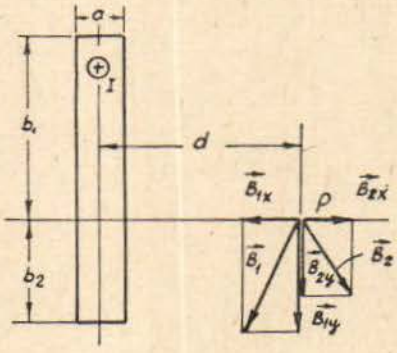
8 — İnce çubuğun magnetik alanı hesaplanacaktır, şek. 99.

$a\,dy$ elemanından geçen $dI = Idy/b$ akım elemanı P noktasında

$$dB = \frac{\mu I}{2\pi b}\,\frac{dy}{\sqrt{d^2+y^2}}$$



Şek. 99



Şek. 100

endüksiyonunu meydana getirir. Diğer taraftan $dB_x = dB \sin\beta$, $dB_y = dB\cos\beta$ ve $\sin\beta = y/r$, $\cos\beta = d/r$ olduğu gözönüne alınırsa

$$B_x = \frac{\mu I}{4\pi b}\ln\frac{d^2+b^2}{d^2}\,, \qquad B_y = \frac{\mu I}{2\pi b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{d}$$

bulunur.

Şek. 100 de b_1 ve b_2 uzunluğundaki parçalardan geçen akımlar

$$I_1 = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,I \qquad , \qquad I_2 = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,I$$

olacağından bileşke için

$$B_x = B_{1x} - B_{2x} = \frac{\mu I}{4\pi(b_1 + b_2)} \ln \frac{d^2 + b_1^2}{d^2 + b_2^2}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu I}{2\pi(b_1 + b_2)} \left(\text{arc tg} \frac{b_1}{d} + \text{arc tg} \frac{b_2}{d} \right)$$

bulunur.

III. MADDENİN MAGNETİK ÖZELLİKLERİ

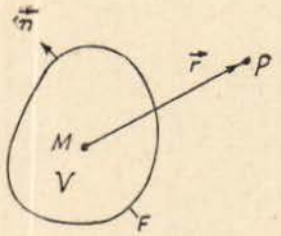
33. Makroskopik teori.

Maddenin magnetik özellikleri atom ve moleküllerdeki mikroskopik akımların varlığına dayanır. Elektronların yörünge ve spin hareketlerine eşdeğer olan akımlar yörünge ve spin momentlerinin doğmasına sebep olurlar. Birim hacimdeki bileşke momente miknatıslanma ($\vec{M}$) adı verilir. Miknatıslanmanın birimi A/m dir. dV elemanına momenti $\vec{M}\,dV$ olan bir magnetik dipol gözüyle bakılabileceğinden bu elemanın vektör potansiyeli için

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{M} \times \operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right) dV$$

yazılabilir, şek. 101. İntegre ederek

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M} \times \operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right) dV \qquad (90)$$



Şek. 101

bulunur. Bu ifade

$$\operatorname{rot}_M\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}_M \vec{M} + \operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{M}$$

özdeşliği ve

$$\int_V \operatorname{rot}_M\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dV = \oint_F \frac{\vec{n} \times \vec{M}}{r}\, dF$$

teoremi yardımiyle

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot}_M \vec{M}}{r}\, dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_F \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r}\, dF \qquad (91)$$

şekline sokulabilir. Bu bağıntıya göre

$$\text{rot}_M \vec{M} = \vec{J}_m \quad , \quad \vec{M} \times \vec{n} = \vec{J}_{ms}$$

büyüklüklerine hacimsel ve yüzeysel eşdeğer akım yoğunlukları gözüyle bakılabilir. $\vec{M}$ dağılışının meydana getirdiği vektör potansiyel bulunduktan sonra magnetik endüksiyon $\vec{B} = \text{rot}_P \vec{A}$ yardımiyle hesaplanır.

Maddenin magnetik tesirini eşdeğer yük yoğunlukları (magnetik) yardımiyle de belirtmek kabildir. Bu maksadla (90) denklemini

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}_P \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) dV$$

şeklinde yazdıktan sonra rotasyonelini hesaplayarak

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{grad}_P \, \text{div}_P \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \Delta_P \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) dV$$

buluruz. P noktası madde dışında ise $\Delta_P(1/r)=0$ olacağından $\text{div}_P \vec{M}=0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_P \int_V \vec{M} \cdot \text{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

bulunur. Bu ifadede

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{M} \cdot \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

skaler potansiyeli gösterir ve

$$\text{div}_M \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{div}_M \vec{M} + \vec{M} \cdot \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right)$$

özdeşliğinden faydalanarak

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint_F \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{r} dF - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}_M \vec{M}}{r} dV \qquad (92)$$

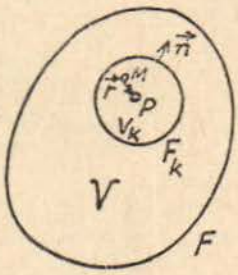
yazılabilir. Bu bağıntıya göre

$$\rho_m = -\operatorname{div}_M \vec{M}\,, \qquad \sigma_m = \vec{M} \cdot n$$

büyüklüklerine hacimsel ve yüzeysel eşdeğer yük yoğunlukları gözüyle bakılabilir. ρ_m ve σ_m, dielektrik polarizasyon yoğunluklarına tekabül ederler. Bununla beraber bu yük yoğunluklarının fiziksel anlamı yoktur ve sadece hesap büyüklükleridir. V bölgesindeki toplam magnetik yük

$$Q_m = \int_V \rho_m \, dV + \oint_F \sigma_m \, dF = 0$$

dır.



Şek. 102

P noktası madde içinde bulunduğu takdirde yalnız $r \neq 0$ olan noktalarda $\Delta_P (1/r) = 0$ olacağından

$$\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad}_P \psi - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \Delta_P \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) dV$$

yazılabilir. Tekil noktayı küçük bir küre ile kuşatalım, şek. 102. Kürenin yarıçapı, V_k bölgesindeki M değerleri tekil noktadaki M değerine eşit alınabilecek kadar küçük seçilirse

$$\int_V \vec{M} \, \Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) dV = \vec{M} \int_{V_k} \Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

yazılabilir. $\Delta_P(1/r) = \Delta_M (1/r)$ olduğundan diverjans teoremi yardımiyle

$$\int_{V_k} \Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) dV = \oint_{F_k} \operatorname{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{F} = -\oint_{F_k} d\Omega = -4\pi$$

bulunur. Böylece

$$\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad}_P \psi + \mu_0 \vec{M} \qquad (93)$$

elde edilir. Bölge dışında $\vec{M} = 0$ olacağından $\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \psi$ dir. Bu ifade

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{94}$$

yardımiyle

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}_P \psi \tag{95}$$

şekline girer. (94) ve (95) yardımiyle

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

olacağı anlaşılır. $\vec{M}$ dağılışının meydana getirdiği magnetik alan konservatif olmakla beraber solenoidal değildir.

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ Amper denklemi (94) yardımiyle

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \tag{96}$$

şekline sokulabilir,

Yukarıdaki sonuçları şöylece özetleyebiliriz: $\vec{M}$ dağılışının alanını hesaplamak için eşdeğer akım yoğunluklarından veya eşdeğer yük yoğunluklarından faydalanılabilir. Birinci halde vektör potansiyel yardımiyle $\vec{B}$ bulunduktan sonra madde dışında $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ve madde içinde ise $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ yardımiyle $\vec{H}$ vektörü hesaplanır. İkinci halde ise ψ yardımiyle $\vec{H} = -\operatorname{grad} \psi$ alanı ve made dışında $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ve madde içinde $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ yardımiyle $\vec{B}$ vektörü bulunur.

Magnetik polarizasyon vektörü

$$\vec{P}_m = \mu_0 \vec{M} \tag{97}$$

şeklinde târif edilir. MKSC—birimi T olan bu vektör $\vec{P}$ elektrik polarizasyon vektörüne tekabül eder. Magnetik polarizasyon yardımiyle

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m \tag{98}$$

yazılabilir.

34. Magnetik karakteristikler.

Magnetik alanın sınır değeri problemlerini çözebilmek için $\vec{B}$ ve $\vec{H}$ arasındaki veya $\vec{M}$ ve $\vec{H}$ arasındaki bağıntıyı bilmek gerekir. Bir çok malzemede M ile H arasındaki bağıntı lineer olduğundan

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{99}$$

dır. Birimsiz bir sayı olan χ_m ye magnetik duyarlık (süseptibilite) denilir. Paramagnetik malzemelerde $\chi_m > 0$ ve diyamagnetik malzemelerde ise $\chi_m < 0$ dır. Her iki grup için magnetik duyarlık 1 den çok küçüktür. Paramagnetik maddeler alanı biraz kuvvetlendirirler. Buna karşılık diyamagnetik maddeler alanı bir az zayıflatırlar.

Magnetik endüksiyon için

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

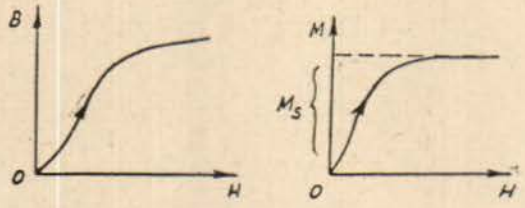
yazılabileceğinden

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{100}$$

olacağı anlaşılır. Paramagnetik grupta $\mu_r > 1$ ve diyamagnetik grupta ise $\mu_r < 1$ olmakla beraber magnetik duyarlık 1 den çok küçük olduğundan $\mu_r \approx 1$ ($\mu \approx \mu_0$) alınabilir. Magnetik geçirgenlik maddenin varlığını hesaba katan bir malzeme sabitidir ve μ bilindiği vakit $\vec{M}$ ye lüzum kalmadan alanı hesaplamak kabil olur.

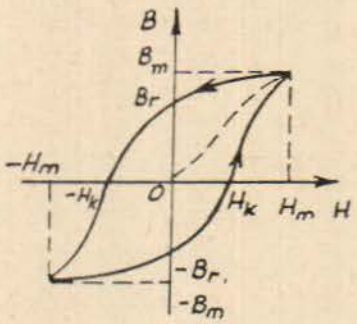
Ferromagnetik denilen bazı maddelerde $\vec{M}$ ile $\vec{H}$ arasındaki bağıntı lineer değildir. Demir, Nikel, Kobalt ve bazı alaşımlar bu gruba girerler. Bu maddelerde M veya B maddenin daha önce geçirdiği magnetik hallere bağlıdır (histerezis). Bağıntılar deney yardımiyle bulunur ve elde edilen eğrilere magnetik karakteristik adı verilir. Şek. 103 de $H = 0$ için $B = 0$ ve $M = 0$ olduğuna göre bulunan $B = B(H)$ ve $M = M(H)$ karakteristikleri görülmektedir. Bunlara ilk miknatıslanma eğrisi adı da verilir. M_s, doyma miknatıslanmasıdır. Doyma bölgesinde B ile H ara-

sındaki bağıntı lineerdir. Şek. 104 de ferromagnetik malzemenin histe-



Şek. 103

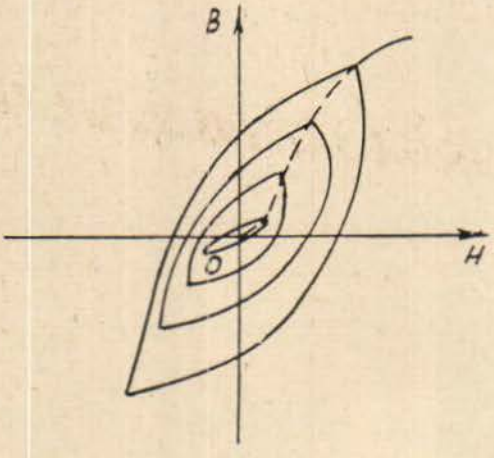
rezis büklümü görülmektedir. B_r ye remanens endüksiyonu ve H_k ya koersitif kuvvet adı verilir. Doyma bölgesine kadar gelerek çizilen büklüme sınır eğrisi denilir. Şek. 105 de genlikleri farklı histerezis büklümleri görülmektedir. Dönüş noktalarını birleştirerek elde edilen eğriye normal miknatıslanma eğrisi denilir. Bu eğri ilk miknatıslanma eğrisinden bir az farklıdır.



Şek. 104

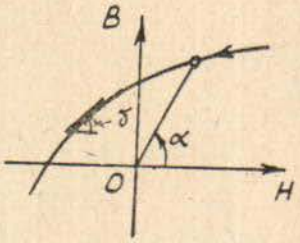
Histerezis büklümünün ikinci çeyrek bölmedeki parçasına miknatıslanmayı yoketme eğrisi denilir. Bu eğri sürekli miknatısların hesabı için önemlidir.

Karakteristiğin her hangi bir noktasında magnetik geçirgenlik

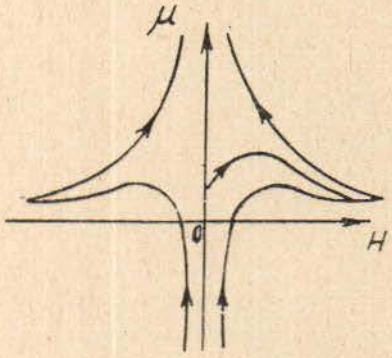


Şek. 105

$\mu = B/H \sim \text{tg}\,\alpha$ şeklinde bulunur, şek. 106. İlk miknatıslanma esnasında $B=H=0$ için $\mu=0/0$ belirsiz şekline rağmen orijinden çizilen teğetin H – ekseni ile yaptığı açının teğeti başlangıç geçirgenliğini tâyin eder. Şek. 107 de $\mu=\mu\,(H)$ karakteristiği görülmektedir.



Şek. 106



Şek. 107

Her hangi bir noktadaki diferansiyel magnetik geçirgenlik $\mu_{dif}=dB/dH \sim \text{tg}\,\delta$ şeklinde târif edilir.

Zayıf akım tekniğinde doğru akım yardımiyle elde edilen bir alana ekseriya küçük genlikli bir alternatif alan eklenir. Alan şiddetinin ΔH değişimine tekabül eden endüksiyon değişimi ΔB olduğuna göre $\mu_{süp} = \Delta B/\Delta H$ ya süperpozisyon geçirgenliği adı verilir.

İzotrop olmayan maddelerde magnetik geçirgenlik tansör karakterindedir.

Ferromagnetik malzemeler ya akımlar tarafından uyarılan alanı kuvvetlendirmek veya sürekli miknatıs şeklinde alanı doğurmak için kullanılır.

Magnetik karakteristikleri yaklaşık olarak ifade eden bazı fonksiyonlar kullanılmaktadır. Bunlardan biri ilk miknatıslanma eğrisi için kullanılan

$$B = \frac{H}{a+bH}$$

Frölich denklemidir.

Doğru veya alternatif akım uyarması ile elde edilen karakteristiklere statik veya dinamik karakteristik adı verilir. Girdap akımı kayıplarından dolayı dinamik karakteristikler statiklerden farklıdır.

35. Mikroskopik teori.

Magnetik özellikte başlıca rolü elektronun yörünge ve spin momenti ve en önemli rolü spin momenti oynamaktadır. Diyamagnetik atom ve moleküllerde bileşke momentin sıfır olmasına karşılık paramagnetiklerde bileşke sıfırdan farklıdır.

Diyamagnetik özellik. B alanı uygulanmadan önce elektronu yörüngede tutan f_0 elektriksel kuvveti denge durumunda $m_0\omega_0^2 r_0$ merkezkaç kuvveti tarafından karşılanacağından

$$f_0 = m_0 \omega_0^2 r_0$$

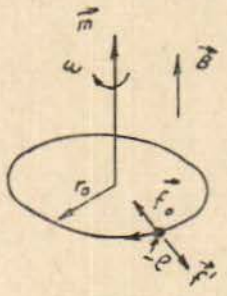
olacaktır. m_0 ve ω_0, elektronun kütlesini ve r_0 yarıçaplı yörüngedeki açısal hızını göstermektedir, şek. 108. Yörünge düzlemine dik olan $\vec{B}$ alanı uygulanınca elektrona ayrıca $f = e\omega r B$ magnetik kuvveti tesir edeceğinden yeni denge durumunda yarıçapın değişmediğini farzederek

$$f_0 - e\omega r_0 B = m_0 \omega^2 r_0$$

yazılabilir. Buradan $f_0 = m_0\omega_0^2 r_0$ koyarak ve $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ değişiminin küçük olduğunu farzederek

$$\Delta\omega = -\frac{e}{2m_0} B$$

bulunur. $\Delta\omega<0$ olduğundan elektron yavaşlar. Diğer taraftan yörünge hareketine eşdeğer olan akım $e\omega/2\pi$ olduğundan moment $m = e\omega r_0^2/2$ dir. Böylece $\vec{B}$ alanı uygulanınca momentin alçalacağı anlaşılır. $\vec{B} = 0$ iken bileşke moment sıfır olduğundan ters yöndeki bir yörünge için $\Delta\omega>0$ olacağından elektron hızlanacak ve uygulanan alana antiparalel olan momenti artacaktır. Sonuç olarak uygulanan alana antiparalel olan bir bileşke moment belireceğinden diyamagnetik madde içinde $\vec{B}$ nin zayıflayacağı anlaşılır. r_0 ın sabit kaldığını ve $\Delta\omega$ nın küçük olduğunu farzederek bulunan bu sonuçlar gerçeğe uymaktadır.



Şek. 108

Diyamagnetik özellik sıcaklığa bağlı değildir.

Paramagnetik özellik. Bu özellikte spin mömenti önemli bir rol oynar. Magnetik alan uygulanmadan önce molekülsel dipoller düzensiz olarak yöneldiklerinden madde magnetik bakımdan nötrdür. Dış magnetik alan uygulanınca dipolleri alana paralel hale getirmeye zorlayan kuvvetler ortaya çıkarsa da molekülsel ısı hareketlerinden dolayı tam bir yönelme olamaz. Böylece uygulanan alanı destekleyen zayıf bir miknatıslanma belirir ve alanla orantılı olarak yükselir.

Paramagnetik özellik sıcaklığa bağlıdır ve paramagnetik duyarlık mutlak sıcaklık derecesi ile

$$\chi_m = \frac{C}{T} \tag{101}$$

şeklinde yani ters orantılı olarak değişir. C, Curie sabitidir. Bu bağıntı çok alçak sıcaklıklar için kullanılamaz. Düşük sıcaklıklar için de

$$M = M_s\left(\mathrm{Cth}\, x - \frac{1}{x}\right) \tag{102}$$

şeklindeki Langevin fonksiyonu cari olur. Bu ifadede M_s, bütün dipoller paralel hale geldiği vakit meydana gelecek olan doyma miknatıslanmasını ve x ise

$$x = \frac{\mu_0 m}{kT} H$$

yı göstermektedir (m = molekülsel magnetik moment, k = Boltzmann sabiti).

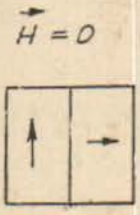
Paramagnetik maddelerde diyamagnetik özellik de ortaya çıkarsa da paramagnetik özellik tarafından örtülür.

Ferromagnetik özellik. Madde içinde her hangi bir molekül molekülsel alanın tesiri altındadır. Molekülsel alanda dış kaynakların tesirinden başka iç tesirlerin de payı vardır. İkinci tesir paramagnetik ve diyamagnetik maddelerde oldukça kuvvetlidir ve dış alan uygulanmadan madde magnetik özellik gösterebilir.

Domen teorisine göre ferromagnetik madde domen (Weiss domeni) denilen küçük bölgelerden meydana gelir. Paralel olarak yönelmiş molekülsel dipollerden ibaret olan domenlere bir mikromiknatıs gözüyle bakılabilir. Madde nötrken domenler düzensiz bir dağılış halindedirler

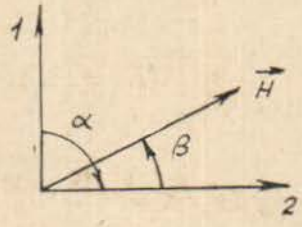
ve kristalin 6 kolay miknatıslanma yönlerinde bulunurlar. Şek. 109 da dış alan uygulanmadan önce iki domen görülmektedir. H alanı uygulanınca domenleri bu alana paralel hale getirmeye çalışan kuvvetler ortaya çıkar. H alanı zayıfsa ilk önce dıvar kayması denilen olay cereyan eder ve bu sırada magnetik yönleri uygulanan alanın yönüyle küçük bir açı yapan domenler diğer domenlerin zararına olarak genişlerler, şek. 110. Bu miknatıslanma periyodunda $H = 0$ yapılırsa domenler tekrar başlangıçtaki düzensiz duruma gelirler ve dolayısiyle olay tersinirdir. Bu periyod magnetik karakteristiklerin ilk parçasına tekabül eder.

Uygulanan alan arttılırsa domenler bu alanın yönüyle küçük bir açı yapan kristal ekseni yönüne sıçrarlar (Barkhausen olayı). Bu sırada meselâ 1 ekseni yönündeki domen α oku yönünde dönerek 2 ekseni yönüne sıçrar, şek. 111. Alanın arttırılmasına devam edilirse 2 yönüne



Şek. 109

Şek. 110



Şek. 111

sıçrayan domenlerin sayısı gittikçe artacağından maddenin miknatıslanması yükselir. Bu sırada dıvar kaymaları olursa da bunlar artık tersinir değildir. Domen sıçramaları Barkhausen deneyi yardımiyle ispatlanabilir. Miknatıslanmanın sıçrama şeklinde yükselmesinden dolayı magnetik karakteristikler gerçekte basamak şeklindedir.

Magnetik alan daha yüksek değerlere çıkarılırsa domenler β oku yönünde dönerek alan yönüne paralel hale geçerler ve bütün domenler bu yöne gelince doyma meydana gelir.

Doyma bölgesine geldikten sonra alan zayıflatılacak olursa domenler tekrar 2 yönüne gelirse de alanın zayıflatılmasına devam edilirse domenler başlangıçtaki düzensiz duruma dönmiyerek histerezis ortaya çıkar

Ferromagnetik özellik sıcaklığa bağlıdır ve bu maddeler Curie sıcaklığında paramagnetik hale geçerler.

Ferrimagnetik özellik. Ferrit adı verilen maddelerde magnetik tesirleri farklı olan domenler vardır. Alan uygulanınca kuvvetli domenler alana paralel hale geçerken zayıf domenler antiparalel olarak yönelirler. Ferritlerin genel formülü MFe_2O_4 şeklindedir ve M, iki değerli bir maden iyonunu gösterir. Ferritlerin iletkenliği zayıf olduğundan yüksek frekanslarda girdap akımı kayıplarını azaltmak için elverişlidirler. Bu maddelerin doyma miknatıslanması oldukça yüksektir.

36. Magnetik devre.

Ferromagnetik maddelerin varlığı halinde magnetik alanda sınır değeri problemlerinin çözümü oldukça güçtür. Bununla beraber teknikte rastlanan bazı sistemlerde çözümleri elektrik devreleri ile olan benzerlikten faydalanarak kolayca bulmak kabil olmaktadır.

div $\vec{J} = 0$ olduğundan elektrik devrelerinde akım çizgileri kapalı eğrilerdir. Ayni şekilde div $\vec{B} = 0$ olduğundan B-çizgileri kapalı eğrilerdir. $\vec{B}$-çizgileri esas itibariyle ferromagnetik malzemeler içinde kalan bir sisteme magnetik devre adı verilir. Elektrik devresi ile magnetik devre arasındaki benzerlik matematik karakterdedir ve arada hiç bir fiziksel benzerlik yoktur. Analojik büyüklükler

Elektrik devresi : $\vec{J}\ \vec{E}\ I\ U\ R(G)\ \varkappa$

Magnetik devre : $\vec{B}\ \vec{H}\ \phi\ V\ R_m(G_m)\ \mu$

dir. Gerilimler ve akımlar kanunu magnetik devrede

$$\sum \theta = \sum Hl = \sum R_m \phi \quad , \quad \sum \phi = 0$$

şeklini alır. $\theta = wI$, uyarma sargısının amper-sarımıdır ve emk'e analojik olduğundan magnetomotör kuvvet (mmk) adını alır.

Magnetik devreler magnetik karakteristikler yardımiyle hesaplanır.

Elektrik akımını tam olarak yalıtmak kabilse de magnetik akı için bu yapılamaz. Zira hava aralığının magnetik direnci yüksek olmakla beraber sonsuz değildir. Bu sebeple magnetik devreyi bir elektrolit içine daldırılan elektrik devresine benzetebiliriz.

37. Sürekli miknatıslar.

Sürekli miknatıs devrelerinde B_r ve H_k değerleri yüksek olan ferromagnetik malzemeler kullanılır. Geniş histerezis büklümüne sahip olan bu maddelere sert magnetik malzeme denilir. Elektrik makinalarının, transformatörlerin magnetik devrelerinde kullanılan yumuşak magnetik malzemelerin histerezis büklümleri dardır. Yumuşak malzemelerde karakteristikler bir değerli olarak kabul edilirse de sert malzemelerde bu mümkün değildir.

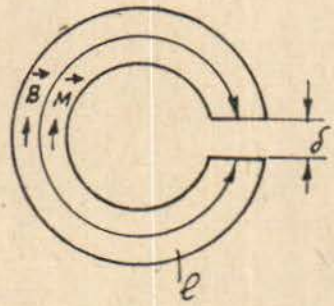
Şek. 112 de basit bir sürekli miknatıs devresi görülmektedir. Halka meselâ bir uyarma sargısı yardımiyle miknatıslanarak kendi haline terkedilmiştir. Miknatıs çeliği ve hava aralığındaki alan şiddetleri H ve H_δ ile gösterilirse

$$Hl + H_\delta \delta = 0$$

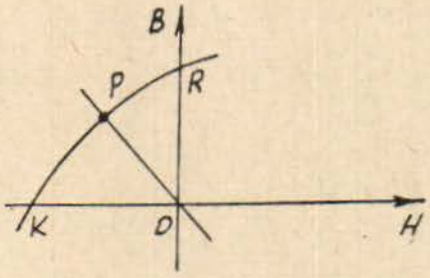
yazılabilir. Böylece H ve H_δ nın zıt yönlerde olacakları anlaşılır. Bu denklemde $H_\delta = B/\mu_0$ koyarak (B=çelik ve hava içindeki magnetik endüksiyondur)

$$B = -\frac{\mu_0 l}{\delta} H$$

bulunur. Bu doğrunun miknatıslanmayı yoketme eğrisini kestiği P noktası sürekli miknatısın çalışma noktasını tâyin eder, şek. 113. Hava aralığı küçültülürse doğru dikleşeceğinden çalışma noktası remanens (R) noktasına doğru kayar ve $\delta = 0$ için $B = B_r$ olur. Hava aralığı miknatıslanmayı zayıflatıcı bir rol oynamaktadır.



Şek. 112



Şek. 113

Sürekli miknatısların hesabında yumuşak malzemeden yapılan bağlan-

tı parçaları ekseriye hesaba katılmaz. Örnek olarak şek. 114 de görülen sürekli miknatısın hesabını gözden geçirelim. Taranan parça miknatıs çeliğidir. Kaçak gözönüne alınırsa $k = B_\delta F_\delta / BF < 1$ olur. Böylece

$$Hl + \frac{\delta}{\mu_0} B_\delta = 0 \qquad \text{(a)}$$

denkleminde

$$B_\delta = \frac{k B F}{F_\delta} \qquad \text{(b)}$$

koyarak

$$B = -\frac{\mu_0 l F_\delta}{\delta F} \qquad \text{(c)}$$

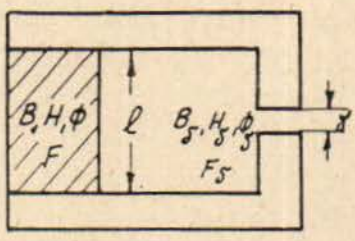
yazılabilir. (a) ve (b) yardımiyle miknatıs çeliğinin uzunluğu ve kesiti için

$$l = \frac{B_\delta \delta}{-\mu_0 H}, \quad F = \frac{B_\delta F_\delta}{k B} \qquad \text{(d)}$$

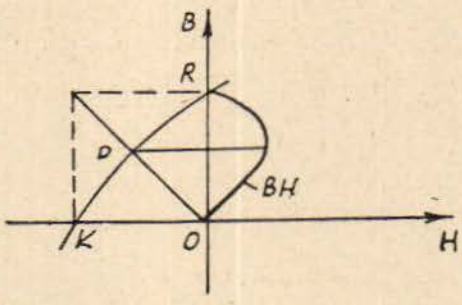
bulunur. B_δ, F_δ ve δ verildiği vakit çeliğin uzunluğunu ve kesitini bulabilmek için çelik içindeki B ve H değerlerinin bilinmesi gerekir. Çeliğin hacmi

$$V = \frac{B^2_\delta F_\delta \delta}{\mu_0 k(-BH)} \qquad \text{(e)}$$

dır. Çelik malzemesini minimum yapmak için B ve H değerlerini BH çarpımı maksimum olacak şekilde seçmek gerekecektir, şek. 115. Bu nokta yaklaşık olarak şek. 115 deki konstrüksiyonla bulunabilir. Böyle-



Şek. 114



Şek. 115

ce $(BH)_{max}$ değerinin sürekli miknatıslar için önemli olduğu anlaşılır. Modern malzemelerde bu değer oldukça yüksektir.

(e) yardımiyle

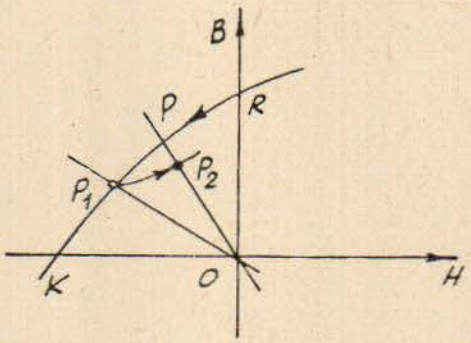
$$B_\delta = \sqrt{\mu_0 k \frac{V}{V_\delta} (-BH)}$$

yazılabilir. V ve V_δ hacimleri verildiği vakit $(BH)_{max}$ için B_δ maksimum olur. Bu kritere göre

$$l = \sqrt{\frac{B}{-\mu_0 H} \frac{k\delta V}{F_\delta}} \quad , \quad F = \frac{V}{l}$$

olacaktır.

Miknatıs çeliği magnetik devreye yerleştirilmeden önce meselâ bir uyarma sargısı yardımile miknatıslanacak olursa akım kesilince magnetik endiksiyon hava yolunun daha uzun olmasından dolayı P_1 noktasına kadar düşer, şek. 116. Çelik devreye sokulunca hava aralığı küçüle-



Şek. 116

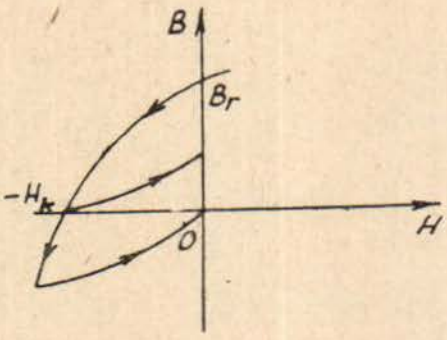
ceğinden, histerezisden dolayı magnetik endüksiyon P_1P_2 eğrisi boyunca değişerek P_2 çalışma noktası elde edilir. Buna karşılık çelik devreye yerleştirildikten sonra miknatıslanacak olursa çalısma noktası P de bulunur.

38. Miknatıslanmanın yokedilmesi.

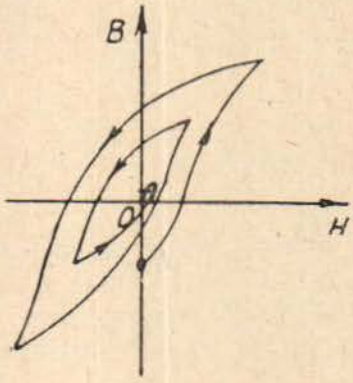
Bir malzemeye koersitif alanı uygulayarak $B=0$ yapılabilirse de alan kaldırılınca, histerezisden dolayı magnetik endüksiyon B_r den kü-

çük bir değere yükselir, şek. 117. Bununla beraber H yı koersitif alandan ileriye götürerek tekrar azaltmak suretiyle $H = 0$ için $B = 0$ yapılabilir.

Miknatıslanmayı yoketmek için diğer bir metod malzemeyi yönü ve genliği değişen bir alan içine sokmaktır, şek. 118. Bu işlem doğru akımla veya en iyisi alternatif akımla yapılır.



Şek. 117



Şek. 118

IV. SINIR DEĞERİ PROBLEMLERİ

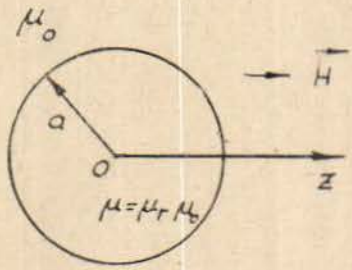
39. Metodlar.

Stasyoner magnetik alanın sınır değeri problemlerini çözmek için Elektromagnetik Alan Teorisi I de görülen bütün metodlardan faydalanılabilir. İki boyutlu problemler için konform tasvir metodu elverişlidir. Analitik çözüm metodları kullanılamadığı takdirde grafik ve nümerik hesap metodlarından faydalanılır.

40. Örnekler.

1 — Üniform alan içine sokulan magnetik kürenin alanı incelenecektir.

Şek. 119 da poler eksen yönündeki üniform alan içine sokulan magnetik küre görülmektedir. Problem üniform elektrik alanı içine sokulan dielektrik küre problemine idantik olduğundan $\mu_r = \text{sab.}$ için



Şek. 119

$$\psi_i = -\frac{3}{\mu_r + 2} Hr \cos\theta,$$

$$\psi_0 = -\left(1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{a^3}{r^3}\right) Hr \cos\theta$$

yazılabilir. Buradan $\vec{H} = -\operatorname{grad} \psi$ yardımiyle

$$\vec{H}_i = \frac{3}{\mu_r + 2} \vec{H},$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 H(2\vec{u}_r \cos\theta + \vec{u}_\theta \sin\theta)$$

bulunur. Küre içindeki alan üniformdur ve orijinal alanın yönündedir.

Kürenin dışındaki alan ise orijinal alan ile orijine yerleştirilen magnetik dipolün alanını birleştirerek bulunabilir.

Magnetik endüksiyonlar $\vec{B}_i = \mu \vec{H}_i = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{M})$ ve $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ yardımiyle hesaplanır. Miknatıslanma için

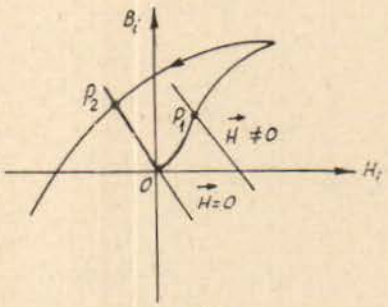
$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\,\vec{H}_i = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2}\,\vec{H}$$

bulunur. $\vec{M}$ vektörü üniformdur ve orijinal alan yönündedir.

$\mu \neq$ sab. için problemin çözümü güçleşir. Bununla beraber küre, silindir ve elipsoid gibi şekiller için miknatıslanma üniform olduğundan çözüm kolaylaşır. Küre içindeki değerler kolayca

$$\vec{H}_i = \vec{H} - \frac{\vec{M}}{3}\ ,\ \vec{B}_i = \mu_0(3\vec{H} - 2\vec{H}_i)$$

şekline sokulabilir. Bu ifadeler her hangi bir $\vec{H}$ alanı için $\vec{H}_i$ ile $\vec{M}$ veya $\vec{B}_i$ ile $\vec{H}_i$ arasındaki bağıntıyı göstermektedir. Birinci bağıntıya göre küre içindeki alan siddeti orijinal alandan zayıftır ve $\vec{H}_i = \vec{H} - D\vec{M}$ yazılırsa D ye miknatıslanmayı yoketme katsayısı denilir ve küre için $D = 1/3$ dür. Bu ifadelerin gösterdiği doğruların malzemenin $M = M(H)$ veya $B = B(H)$ karakteristiğini kestiği nokta küre içindeki B_i, H_i, M değerlerini tâyin eder, şek. 120 (P_1 noktası).



Şek. 120

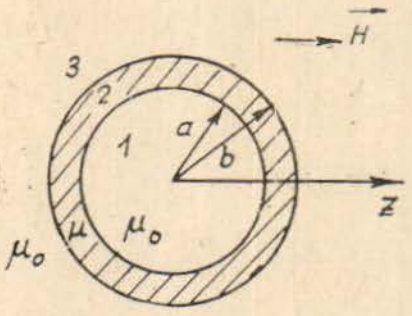
$\vec{H} = 0$ için üniform olarak miknatıslanan küre için

$$\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3} = -D\vec{M}\ ,\ \vec{B}_i = -2\mu_0\vec{H}_i = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

bulunur ve çalışma noktası P_2 olur ($\chi_m = -3$).

2 — Şek. 121 deki küresel tabaka üniform alan içine sokuluyor. İçteki bölgenin dış tesirden korunacağı gösterilecektir.

Problem üniform alan içine sokulan küresel dielektrik tabaka problemine idantik olduğundan ψ_1 için



Şek. 121

$$\psi_1 = -\frac{9\mu_r r\cos\theta}{9\mu_r - 2(\mu_r-1)^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1\right]} H$$

bulunur. Buradan $r\cos\theta = z$ koyarak

$$H_{1z} = -\frac{d\psi_1}{dz} = \frac{9\mu_r}{9\mu_r - 2(\mu_r-1)^2\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1\Big]} H$$

elde edilir. İçteki alan üniformdur ve orijinal alanın yönündedir. $\mu_r \gg 1$ için

$$H_{1z} \approx \frac{4{,}5\,H}{\mu_r\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right]}$$

yazılabilir. $H_{1z} \ll H$ olacağından küresel tabakanın ekranlayıcı bir rol oynadığı anlaşılır. Ekranlama tesiri a/b oranına da bağlıdır.

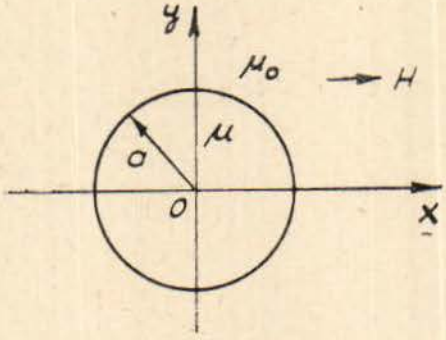
Üniform olarak miknatıslanan kürenin alanını eşdeğer akım yoğunlukları yardımiyle de hesaplayabiliriz. $\vec{M} = \vec{k}\,M =$ sab. olduğundan $\vec{J}_m = 0$ ve $\vec{J}_{ms} = \vec{u}_\phi M \sin\theta$ dır. Daha önce $\vec{J}_s = \vec{u}_\phi J_0 \sin\theta$ yüzey dağılışı için bulunan ifadelerde $J_0 = M$ ve $R = a$ koyarak

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, \quad \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 M a^3}{3r^3}(2\vec{u}_r\cos\theta + \vec{u}_\theta\sin\theta)$$

$$\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3}, \quad \vec{H}_0 = \frac{Ma^3}{3r^3}(2\vec{u}_r\cos\theta + \vec{u}_\theta\sin\theta)$$

bulunur. Küre dışındaki alan orijinde bulunduğu farzedilen dipolün alanına idantiktir.

3 — Üniform alan içine sokulan magnetik silindirin alanı incelenecektir, şek. 122.



Şek. 122

Problem üniform elektrik alanı içine sokulan dielektrik silindir problemine idantik olduğundan μ = sab. için

$$\psi_i = -\frac{2}{\mu_r + 1} H\rho \cos\phi,$$

$$\psi_0 = -\left(1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\ \frac{a^2}{\rho^2}\right) H\rho \cos\phi$$

yazılabilir. Buradan

$$\vec{H}_i = \frac{2}{\mu_r + 1}\ \vec{H},$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\ \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 H(\vec{u}_\rho \cos\phi + \vec{u}_\phi \sin\phi)$$

bulunur. Silindir içindeki alan üniformdur ve orijinal alanın yönündedir.

Silindir içindeki endüksiyon ve miknatıslanma için

$$\vec{B}_i = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}\ \vec{B},$$

$$\vec{M} = \frac{2(\mu_r - 1)}{\mu_r + 1}\ \vec{H}$$

bulunur ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$). Miknatıslanma üniformdur ve orijinal alan yönündedir.

$\vec{H}_i$ ve $\vec{B}_i$ ifadeleri kolayca

$$\vec{H}_i = \vec{H} - \frac{\vec{M}}{2}, \quad \vec{B}_i = \mu_0 (2\vec{H} - \vec{H}_i)$$

şekline sokulabilir. $D = 1/2$ dir.

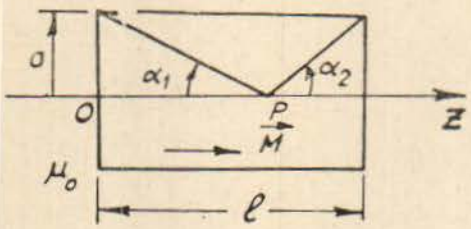
$\mu \neq$ sab. için problem magnetik küre problemi gibi çözülür. Silindir içindeki değerler $B_i = 2\mu_0 H - \mu_0 H_i$ doğrusunun $B = B(H)$ karakteristiğini kestiği nokta ile belli olur.

$\vec{H} = 0$ için

$$\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{2}, \quad \vec{B}_i = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{M}$$

olacaktır. Çalışma noktası $B_i = -\mu_0 H_i$ doğrusunun karakteristiği kestiği noktadadır ($\chi_m = -2$).

4 — Eksen yönünde üniform miknatıslanmış silindirin magnetik alanı bulunacaktır, şek. 123.



Şek. 123

Çubuğun alanını eşdeğer yük yoğunlukları veya akım yoğunlukları yardımiyle hesaplayabiliriz. $\vec{M} = \vec{k}\, M =$ sab. olduğundan $\rho_m = -\text{div}\, \vec{M} = 0$ ve $\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n}$ dir. Yan yüzeyde $\vec{M}$ ve n dik olduklarından $\sigma_m = 0$ dır. Dielektrik silindir için bulunan ifadelerde P/ε_0 yerine M koyarak meselâ P noktasındaki alan için

$$H_i = -M + \frac{M}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

bulunur. $\vec{H}_i = \vec{k} H_i$ alanı $\vec{M}$ ye antiparalel olduğundan miknatıslanmayı zayıflatır. Çubuk çok uzun olduğu takdirde uçlara yakın olmayan noktalarda $\vec{H}_i = 0$ olacağından $D \approx 0$ dır.

Eşdeğer akım yoğunlukları $\vec{J}_m = \text{rot}\, \vec{M} = 0$ ve $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n}$ olduğundan yalnız yan yüzeyde yoğunluğu $\vec{J}_{ms} = \vec{u}_\phi M$ olan bir yüzey akımı dağılışı bulunnr. Böylece çubuğun $wI/l = M$ olan bir solenoide eşdeğer olacağı anlaşılır.

5 — Sonsuz geniş magnetik levha düzlemine dik üniform alan içine sokulduğuna göre magnetik alan hesaplanacaktır, şek. 124.

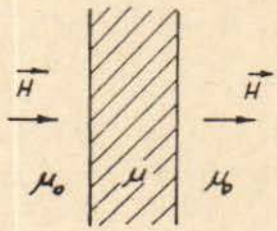
$\mu_0 H = \mu_0 \mu_r H_i$ sınır şartı yardımiyle

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{H}}{\mu_r} = \frac{\vec{H}}{\chi_m + 1}$$

bulunur. $\vec{B}_i = \mu_0 \vec{H}$ dır. $\vec{H}_i$ için

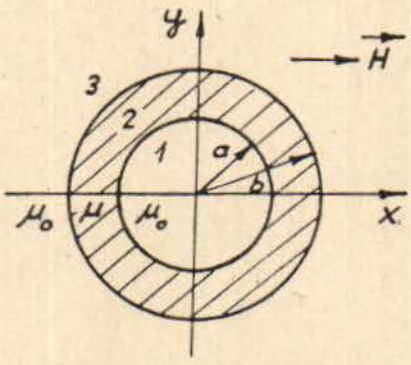
$$\vec{H}_i = \vec{H} - \vec{M}$$

yazılabileceğinden $D = 1$ olduğu anlaşılır.



Şek. 124

6 — Sonsuz uzun silindirik tabaka üniform alan içine sokuluyor. İçteki bölgenin dış tesirden korunacağı gösterilecektir, şek. 125.



Şek. 125

Problem üniform elektrik alanı içine sokulan dielektrik silindirik tabaka problemine idantik olduğundan

$$H_{1x} = \frac{4\mu_r}{4\mu_r - (\mu_r - 1)^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right]} H$$

bulunur. İçteki alan üniformdur ve orijinal alanın yönündedir. $\mu_r \gg 1$ için

$$H_{1x} \approx \frac{4}{\mu_r \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} H$$

yazılabilir. $H_{1x} \ll H$ olduğundan silindir ekran rolünü oynar.

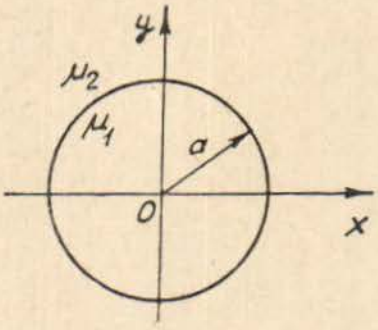
7 — Sonsuz uzun silindir iki boyutlu magnetik alan içine sokuluyor. Magnetik alan hesaplanacaktır, şek. 126.

İki boyotlu alanın vektör potansiyeli $A_z(\rho, \phi)$ dir. Silindir içindeki ve dışındaki vektör potansiyeller için

$$A_{iz} = k_1 A_z(\rho, \phi) \quad ,$$

$$A_{0z} = A_z(\rho, \phi) + k_2 A_z\left(\frac{a^2}{\rho}, \phi\right)$$

yazılabilir. Zira $\Delta A_z(\rho, \phi) = 0$ ve $\Delta A_z(a^2/\rho, \phi) = 0$ olduğundan $\Delta A_{iz} = 0$ ve $\Delta A_{0z} = 0$ dır. $A_{iz}(a, \phi) = A_{0z}(a, \phi)$ sınır şartı yardımiyle $1 + k_2 = k_1$ ve



Şek. 126

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{iz}}{\partial \rho}\right)_{\rho = a} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_{0z}}{\partial \rho}\right)_{\rho = a}$$

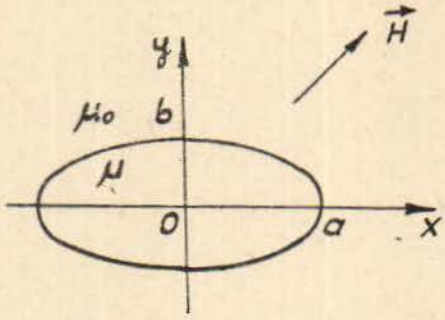
sınır şartı yardımiyle de $1 - k_2 = \mu_2 k_1/\mu_1$ bulunacağından k_1 ve k_2 için

$$k_1 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad , \quad k_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

bulunur. Meselâ x-ekseni yönündeki üniform magnetik alanın vektör potansiyeli için $A_z = B\rho \sin\phi$ yazılabileceğinden $\mu_1 = \mu_r \mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$ için

$$A_{iz} = \frac{2}{\mu_r + 1} B\rho \sin\phi \quad , \quad A_{0z} = \left(1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r - 1}\frac{a^2}{\rho^2}\right) B\rho \sin\phi$$

bulunur. Silindir içindeki ve dışındaki alan $\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$ yardımiyle kolayca hesaplanır.



Şek 127

8 — Magnetik elipsoid üniform alan içine sokuluyor, şek. 127 ($a>b>c$). Magnetik alan hesaplanacaktır.

Problem üniform elektrik alanı içine sokulan dielektrik elipsoid problemine idantik olduğundan μ = sab. için aşağıdaki sonuçlar elde edilir :

Üniform alanın kartezyen bileşenleri H_x , H_y , H_z ile gösterilirse elipsoid içindeki potansiyel için

$$\psi_i = -\frac{H_x x}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)A_1(0)} - \frac{H_y y}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)A_2(0)} - \frac{H_z z}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)A_3(0)}$$

bulunur. $A_1(0)$, $A_2(0)$ ve $A_3(0)$ sabitleri

$$A_1(0) = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s} , \quad A_2(0) = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s} , \quad A_3(0) = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s}$$

integralleri yardımiyle hesaplanır ve

$$R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}$$

dir. Bu üç sabitin toplamının 1 olacağı kolayca görülebilir. Elipsoid içindeki alan

$$\vec{H_i} = \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z =$$

$$= \vec{i}\,\frac{H_x}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)A_1(0)} + \vec{j}\,\frac{H_y}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)\,A_2(0)} + \vec{k}\,\frac{H_z}{1+\frac{abc}{2}(\mu_r-1)\,A_3(0)}$$

olacaktır. Elipsoid içindeki alan üniform olmakla beraber orijinal alana paralel değildir.

$\vec{M}$ vektörünün bileşenleri

$$M_x = (\mu_r - 1)\,H_{ix}\,,$$

$$M_y = (\mu_r - 1)\,H_{iy}\,,$$

$$M_z = (\mu_r - 1)H_{iz}$$

denklemleri yardımiyle bulunur ve $\vec{M} = (\mu_r - 1)\,\vec{H}_i$ dir.

$\vec{H}_i$ nin bileşenleri için

$$H_{ix} = H_x - \frac{abc}{2}A_1(0)\;M_x = H_x - D_x M_x\,,$$

$$H_{iy} = H_y - \frac{abc}{2}A_2(0)\,M_y = H_y - D_y M_y\,,$$

$$H_{iz} = H_z - \frac{abc}{2}A_3(0)\,M_z = H_z - D_z M_z$$

yazılabileceğinden üç eksene tekabül eden miknatislanmayı yoketme katsayıları

$$D_x = \frac{abc}{2}A_1(0)\,,$$

$$D_y = \frac{abc}{2}A_2(0)\,,$$

$$D_z = \frac{abc}{2}A_3(0)$$

dır.

Elipsoid dışındaki potansiyel için

$$\psi_0 = -H_x x \left[1 - \frac{\frac{abc}{2}(\mu_r - 1)\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)R_s}}{1 + \frac{abc}{2}(\mu_r - 1) A_1(0)} \right]$$

$$- H_y y \left[1 - \frac{\frac{abc}{2}(\mu_r - 1)\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+b^2)R_s}}{1 + \frac{abc}{2}(\mu_r - 1) A_2(0)} \right]$$

$$- H_z z \left[1 - \frac{\frac{abc}{2}(\mu_r - 1)\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+c^2)R_s}}{1 + \frac{abc}{2}(\mu_r - 1) A_3(0)} \right]$$

bulunnr.

Özel haller oblate ($a = b$) ve prolate ($b = c$) sferoidler için elde edilir ve integraller elemanter fonksiyonlar yardımiyle ifade edilebilir.

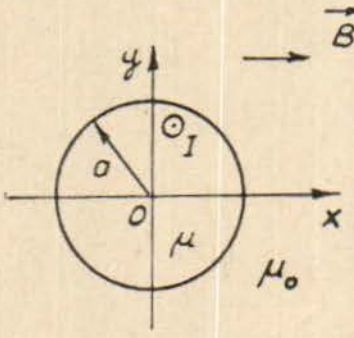
$\vec{H} = 0$ için meslâ x — ekseni yönünde miknatıslanan elipsoidin içindeki alan

$$H_{ix} = -\frac{abc}{2} A_1(0) M_x$$

olacaktır. Elipsoid içindeki alan üniformdur ve miknatıslanmaya antiparaleldir.

9 — İçinden I akımı geçen sonsuz uzun silindir eksenine dik olan üniform alan içine sokulduğuna göre μ = sab. için magnetik alan hesaplanacaktır.

Problem iki boyutludur. Akım yoğunluğu $\vec{J}=\vec{k}\,J_z=\vec{k}\,I/\pi a^2$ dir. x-ekseni yönündeki üniform alan $\vec{k}\,B\rho\sin\phi$ vektör potansiyelinden türetilebilir. Silindir içinde $\Delta A_{iz}=-\mu J_z$ denkleminin çözümü (μ = sab.)



Şek. 128

$$A_{iz}=-\frac{\mu I}{4\pi}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\sin n\phi+b_n\cos n\phi)\,\rho^n$$

şeklindedir. $\rho=0$ için A_{iz} nin sınırlı kalmasını sağlamak maksadiyle ρ^{-n} terimleri alınmamıştır. Silindir dışındaki vektör potansiyel için

$$A_{0z}=B\rho\sin\phi+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho+\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\sin n\phi+d_n\cos n\phi)\rho^{-n}$$

yazılabilir. Birinci terimi üniform alanın, ikinci terim silindirden geçen akımın ve üçüncü terim ise miknatıslanmanın vektör potansiyeldeki payını göstermektedir.

Problemin sınır şartları $\rho=a$ için

$$A_{iz}=A_{0z}\,,\quad \frac{\partial A_{iz}}{\partial\rho}=\mu_r\frac{\partial A_{0z}}{\partial\rho}$$

şeklindedir. Bunlar yardımiyle

$$a_1=\frac{2\mu_r}{\mu_r+1}B\,,\quad c_1=\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}a^2B\,,\quad d_0=(2\ln a-\mu_r)\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

bulunur. Diğer katsayılar sıfırdır. Böylece

$$A_{iz}=-\frac{\mu I}{4\pi}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2+\frac{2\mu_r}{\mu_r+1}B\rho\sin\phi\,,$$

$$A_{0z} = -\frac{\mu I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho} + \left(1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{\rho^2}\right) B\rho \sin\phi$$

ve $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$ yardımiyle

$$B_{i\rho} = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} B \cos\phi\,, \quad B_{i\phi} = \frac{\mu I}{2\pi a^2} \rho - \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} B \sin\phi\,,$$

$$B_{0\rho} = \left(1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_s + 1} \frac{a^2}{\rho^2}\right) B \cos\phi\,, \quad B_{0\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} - \left(1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{\rho^2}\right) B \sin\phi$$

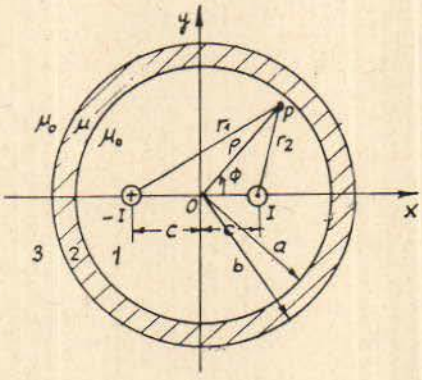
bulunur. Miknatıslanmanın bileşenleri kartezyen koordinatlarda

$$M_x = \frac{2(\mu_r - 1)}{\mu_0 (\mu_r + 1)} B - (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a^2} y\,,$$

$$M_y = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a^2} x$$

olacaktır. Üniform alan üziform miknatıslanmaya sebep olmaktadır. Miknatıslanma alanın yönündedir. Özel haller $\vec{B} = 0$ ve $I = 0$ için elde edilir.

10 — Şek. 129 da μ = sab. için magnetik alan hesaplanacaktır.



Şek. 129

Sonsuz uzun antiparalel akımlar P noktasında

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

vektör potansiyelini meydana getirirler. Diğer taraftan $\rho > c$ için $\ln r_1$ ve $\ln r_2$

$$\ln r_1 = \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c}{\rho}\right)^n (-1)^n \cos n\phi ,$$

$$\ln r_2 = \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c}{\rho}\right)^n \cos n\phi$$

serilerine açılabileceğinden

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{2n+1} \cos (2n+1)\phi$$

yazılabilir. Böylece 1, 2, 3 bölgelerindeki vektör potansiyeller için

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n+1} \rho^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{2n+1} \right] \cos (2n+1)\phi ,$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_{2n+1} \rho^{2n+1} + C_{2n+1} \rho^{-(2n+1)} \right] \cos (2n+1)\phi ,$$

$$A_{3z} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} \rho^{-(2n+1)} \cos (2n+1)\phi$$

yazılabilir. Sınır şartları

$$\rho = a \quad \text{için} \quad A_{1z} = A_{2z} \quad , \quad \mu_r \frac{\partial A_{1z}}{\partial \rho} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial \rho} ,$$

$$\rho = b \quad \text{için} \quad A_{2z} = A_{3z} \quad , \quad \frac{\partial A_{2z}}{\partial \rho} = \mu_r \frac{\partial A_{3z}}{\partial \rho}$$

dır. Meselâ

$$D_{2n+1} = \frac{4 \mu_r c^{2n+1}}{(2n+1)\left[(\mu_r+1)^2 - (\mu_r-1)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{4n+2}\right]}$$

olacağından

$$A_{3z} = \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^{4n+2} \right] \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c}{\rho} \right)^{2n+1} \cos(2n+1)\,\phi$$

bulunur. Buradan

$$B_{3\rho} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{2n+1}}{2n+1} \rho^{-(2n+2)} \sin(2n+1)\,\phi\,,$$

$$B_{3\phi} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, D_{2n+1}\, \rho^{-(2n+2)} \cos(2n+1)\,\phi$$

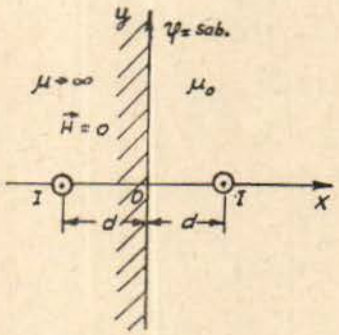
elde edilir, $\mu_r \gg 1$ ve $a \gg b$ için

$$D_{2n+1} \approx \frac{4\, c^{2n+1}}{(2n+1)\,\mu_r}$$

yazılabileceğinden silindirin dıştaki bölgeyi iç alanın tesirine karşı ekranlayacağı anlaşılır.

11 — Sonsuz geniş düzlem ile paralel sonsuz uzun çizgisel akım sisteminin magnetik alanı bulunacaktır ($\mu \to \infty$), şek. 130.

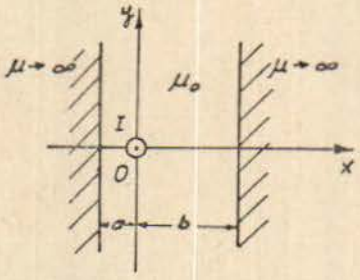
Problem magnetik imaj yardımiyle kolayca çözülebilir. $\mu \to \infty$ olduğu farzedildiğinden düzlem bir eşpotansiyel yüzeydir. Böylece $x > 0$ bölgesindeki magnetik alanın ayni yönde ve ayni değerde olan imaj akımı ile orjinal akımın alanına idantik olacağı anlaşılır. $x < 0$ bölgesindeki alan sıfırdır (ideal magnetik cisim).



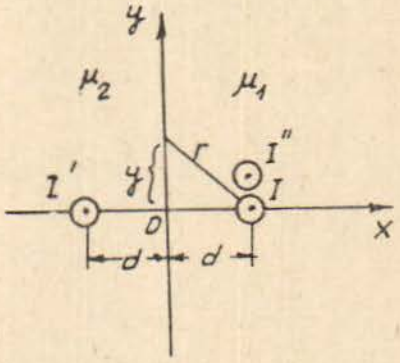
Şek. 130

Düzlem karşısına yerleştirilen n paralel akım için de benzer hesap yapılır. Birbirini $\alpha = \pi/n$ (n = tam sayı) açısı altında kesen iki yarı sonsuz ideal magnetik düzlem ile paralel cizgisel akım problemi de imaj yardımiyle çözülebilir. İmai akımlarının sayısı $2n-1$ dir ve hespsi ayni değer ve yöndedir.

12 — Şek. 131 deki sistemin magnetik alanı bulunacaktır.



Şek. 131



Şek. 132

Problem statik alandaki gibi incelenir. İmaj akımlarının sayısı sonsuzdur ve hepsi aynı değerde ve aynı yöndedir. Her hangi bir noktadaki vektör potansiyel

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \ln r_i$$

yardımiyle hesaplanır. r_1, orijinal akımın noktaya uzaklığıdır.

13 — Şek. 132 de μ_1 ve μ_2 ortamları içindeki magnetik alanlar bulunacaktır.

Bu problem de statik alandaki gibi çözülür. μ_1 ortamı içindeki alanın I orijinal akımı ile I' imaj akımı tarafından ve μ_2 ortamı içindeki alanın da orijinal akımla intibak eden I'' imaj akımı tarafından meydana getirildiğini farzedelim. İmaj akımlarının yönleri ve değerleri sınır şartlarını sağlayacak şekilde olmalıdır. Şek. 132 de imaj akımlarının orijinal akımın yönünde bulundukları farzedilmiştir. Sınır yüzeyinin μ_1 ortamı tarafında alanın teğetsel bileşeni

$$H_{1t} = \frac{d}{2\pi r^2} (I - I')$$

dir. μ_2 ortamı tarafında ise

$$H_{2t} = \frac{d}{2\pi r^2} I''$$

olacaktır. Böylece $H_{1t}=H_{2t}$ şartı yardımiyle $I=I'+I''$ bulunur. Diğer taraftan endiksiyonun normal bileşenleri

$$B_{1n}=\frac{\mu_1 y}{2\pi r^2}(I+I'), \quad B_{2n}=\frac{\mu_2 y}{2\pi r^2} I''$$

olacağından $B_{1n}=B_{2n}$ şartı yardımiyle $\mu_1 I=-\mu_1 I'+\mu_2 I''$ bulunur. Bu iki denklemi çözerek

$$I'=-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I, \quad I''=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} I$$

bulunur.. $\mu_1>\mu_2$ için I' ile I zıt yönde ve $\mu_1<\mu_2$ için ayni yönde olacaklardır. I'' ile I akımı aynı yöndedir.

$\mu_1=\mu_0$ (hava) ve $\mu_2=\mu_0\mu_r$ (demir) koyarak

$$I'=\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1} I, \; I''=\frac{2}{\mu_r+1} I$$

yazılabilir. $\mu_r \gg 1$ için $I' \approx I$ olacağından hava tarafındaki alan ayni yönde ve yaklaşık olarak ayni değerde olan iki paralel akımın alanına idantik olur. Demir tarafındaki alan ise çok zayıf olan I'' akımının alanı olacaktır, şek. 133. $\mu_r \to \infty$ için $I'=I$ ve $I''=0$ olur.

İletken, meselâ elektrik makinalarında olduğu gibi demir içindeki bir kanala (oluk) yerleştirilmişse $\mu_1=\mu_r\mu_0$ ve $\mu_2=\mu_0$ koyarak

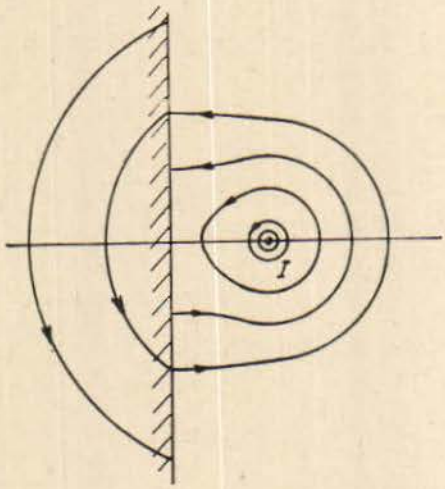
$$I'=-\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1} I, \quad I''=\frac{2\mu_r}{\mu_r+1} I$$

bulunur. Hava tarafındaki alan I'' akımı ve demir içindeki alan ise I ve I' akımları yardımiyle elde edilir. $\mu_r \gg 1$ için $I' \approx -I$ ve $I'' \approx 2I$ olacaktır, şek. 134. $\mu_r \to \infty$ için $I'=-I$, $I''=2I$ olacağından hava tarafındaki alanın, demir yokken meydana gelecek olan alanın iki katına eşit olacağı anlaşılır.

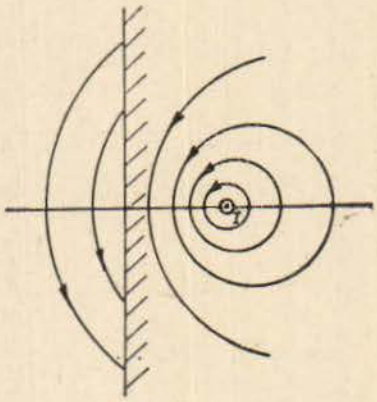
Problem vektör potansiyel yardımiyle de çözülebilir. Çizgisel akımın vektör potansiyli $A_z(x,y)$ ile gösterilirse

$$A_{1z}=A_z(x,y)+k_1 A_z(-x,y) \quad ,$$
$$A_{2z}=k_2 A_z(x,y)$$

yazılabilir. Zira $\Delta A_z = 0$ olduğundan $\Delta A_{1z} = 0$ ve $\Delta A_{2z} = 0$ dır. $A_{1z} = A_{2z}$ ve $\mu_2 \partial A_{1z}/\partial x = \mu_1 \partial A_{2z}/\partial x$ sınır şartları yardımiyle de



Şek. 133

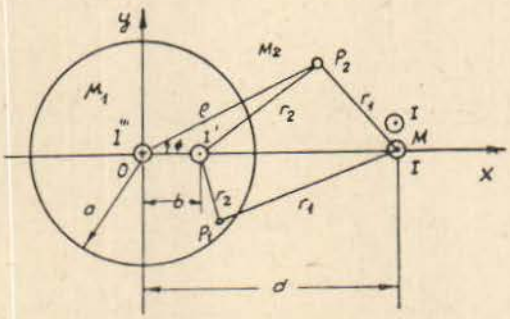


Şek. 134

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad , \quad k_2 = \frac{2\mu_2}{\mu_2 + \mu_1}$$

bulunur.

14 — Sonsuz uzun silindirle paralel çizgisel akım sisteminin magnetik alanı bulunacaktır, şek. 135.



Şek. 135

Daha önce görüldüğü gibi silindir içindeki vektör potansiyel için

$$A_{1z} = -\frac{\mu_1 I}{2\pi}\left(\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)\ln r_1$$

yazılabilir. Bu vektör potansiyelin kaynağı M noktasında bulunduğu farzedilen

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} I$$

imaj akımıdır ve I'' ile I akımı ayni yöndedir.

Silindir dışındaki vektör potansiyel için

$$A_{2z} = A_z(\rho,\phi) + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} A_z\left(\frac{a^2}{\rho}\ ,\ \phi\right)$$

yazılabilir. $A_z(\rho,\phi)$, I akımının vektör potansiyelini gösterir ve

$$A_z(\rho,\phi) = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}\ln r_1$$

dir. Böylece $a^2 = b\,d$ koyarak

$$A_{2z} = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}\ln r_1 - \frac{\mu_2}{2\pi}\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu^2}\ I\right)\ln r_1 + \frac{\mu_2}{2\pi}\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\ln\rho$$

bulunur. Bu denkleme göre, silindir dışındaki vektör potansiyel I akımı ile eksenden $b = a^2/d$ uzaklığındaki

$$I' = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I$$

imaj akımı ve eksenle intibak eden $I''' = -I'$ imaj akımı tarafından meydana getirilir. $\mu_1 = \mu_r\mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$ için

$$I' = \frac{\mu_r-1}{\mu_r+1} I\ ,\quad I'' = \frac{2\mu_r}{\mu_r+1} I\ ,\quad I''' = -\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1} I$$

bulunur. I' ve I'' akımları I ile ayni yönde ve I''' akımı zıt yöndedir. $\mu_r\to\infty$ için

$$I' = I\ ,\quad I'' = 2I\ ,\quad I''' = -I$$

olacağından silindir dışındaki alan çizgisel yükle paralel silindir sistemi

için cari olan imaj prensibi yardımiyle elde edilir. Ancak statik alanda imaj yükünün zıt işaretli olmasına karşılık imaj akımı I ile ayni yöndedir.

Silindir içindeki bir kanala yerleştirilen iletken probleminde silindir içindeki alan eksenden d uzaklığındaki I orijinal akımı ve silindir dışında ve $b = a^2/d$ uzaklığında bulunan

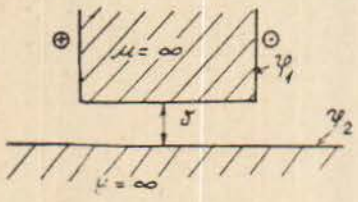
$$I' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I$$

imaj akımı yardımiyle elde edilir. Silindir dışındaki alan ise I ile intibak eden

$$I'' = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I$$

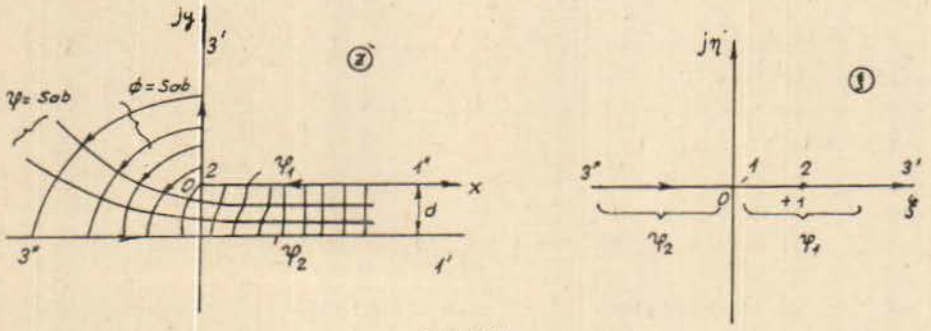
imal akımı ve eksenle intibak eden $I''' = I'$ imaj akımı yardımiyle elde edilir. $\mu_r \to \infty$ için $I' = -I$, $I'' = 2I$, $I''' = -I$ olacaktır.

15 — Şek. 136 daki magnetik elektrodların alanı Schwarz transformasyonu yardımiyle incelenecektir.



Şek. 136

Magnetik alanın kaynağı kutup üstündeki uyarma sargısıdır. ψ_1 ve ψ_2, elektrodların skaler potansiyelleridir. Simetriden dolayı sistemin yarısını incelemek yetecektir. Ayrıca kutup genişliğinin hava aralığından çok büyük olduğu farzedilirse şek. 137 deki eşdeğer sistem elde edilir. ζ— düzleminde $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = +1$, $\xi_3 = \pm\infty$ seçerek yazılan



Şek. 137

$$\frac{dz}{d\zeta} = A\frac{\sqrt{\zeta-1}}{\zeta}$$

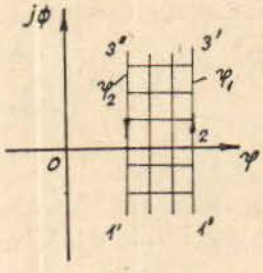
diferansiyel denklemini integre ederek

$$z = 2A(\sqrt{\zeta-1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta-1}) + B$$

bulunur. 1 ve 2 noktaları yardımiyle $A = j\delta/\pi$ ve $B = 0$ bulunacağından tasvir fonksiyonu

$$z = \frac{2j\delta}{\pi}(\sqrt{\zeta-1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\zeta-1})$$

şekline girer.



Şek. 138

Şek. 138 yardımiyle P düzlemindeki üniform alanı ζ—düzlemine transforme eden fonksiyon için $dP/d\zeta = C/\zeta$ diferansiyel denklemini integre ederek

$$P = C \ln \zeta + D$$

bulunur. 2 ve 3 noktaları yardımiyle ve $\psi_1 - \psi_2 = V$ koyarak (elektrodlar arasındaki magnetik gerilim)

$$P = j\frac{V}{\pi} \ln \zeta + \psi_1$$

elde edilir. P— düzlemindeki üniform alan

$$\zeta = e^{j\pi\frac{\psi_1 - P}{V}}$$

yardımiyle ζ—düzleminin üst yarısına transforme edilir. $P = \psi + j\,\phi$ koyarak

$$\xi = e^{\pi\frac{\phi}{V}} \cos \pi\frac{\psi_1 - \psi}{V}, \quad \eta = e^{\pi\frac{\phi}{V}} \sin \pi\frac{\psi_1 - \psi}{V}$$

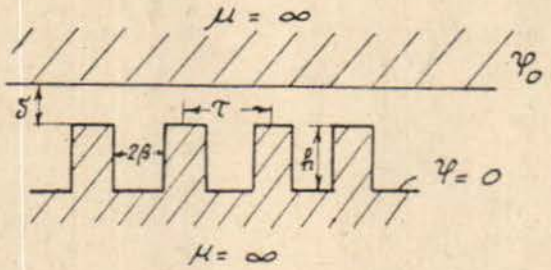
bulunur. z—düzlemindeki orijinal alan $z(\zeta)$ tasvir fonksiyonu yardımiyle ζ—düzlemindeki alanı transforme ederek elde edilir.

z—düzlemindeki kompleks alan için

$$\dot{H} = -\left(\frac{dP}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}\right) = -\frac{H_0}{\sqrt{\zeta - 1}}$$

bulunur. $H_0 = V/\delta$, iç bölgedeki üniform alanı göstermektedir, şek. 137. Alan çizgileri ϕ = sab. yardımiyle bulunur.

16 — Şek. 139 daki sistemin magnetik alanı Schwarz trasnformasyonu yardımiyle incelenecektir.



Şek. 139

Sistemin alanı elektrik makinalarındaki olukların alanına idantiktir. Oluk adımının (τ) ve oluk derinliğinin (h) çok büyük olduğu farzedilirse şek. 140 daki eşdeğer sistem elde edilir. Simetriden dolayı sistemin yarısını incelemek yetecektir. Negatif imajiner eksen alan çizgisidir.

ζ— düzleminde $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = +1$, $\xi_4 = \pm\infty$ seçerek yazılan

$$\frac{dz}{d\zeta} = A\frac{\sqrt{\zeta - p}}{\sqrt{\zeta}(\zeta - 1)}$$

diferansiyel denklemini integre ederek

$$z = -2jA\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta}{p}} + \frac{\sqrt{p-1}}{2}\ln\frac{\sqrt{p-\zeta} + \sqrt{\zeta}\sqrt{p-1}}{\sqrt{p-\zeta} - \sqrt{\zeta}\sqrt{p-1}}\right) + B$$

bulunur. 1 noktası yardımiyle

$$A = -j\frac{\delta}{\pi}\frac{1}{\sqrt{p-1}}$$

ve 3 noktası yardımiyle

$$-\beta - j\delta = -\frac{2\delta}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{p-1}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{p-1}}{2}\,j\pi\right)$$

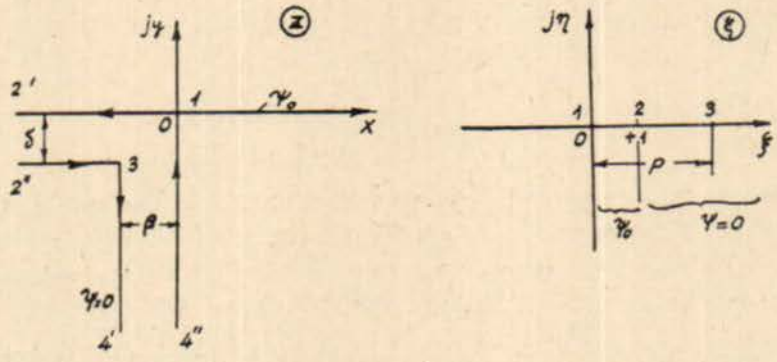
bulunacağından

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{p-1}}\,, \qquad p = 1 + \frac{\delta^2}{\beta^2}\,, \qquad A = -j\,\frac{\beta}{\pi}$$

elde edilir. Böylece tasvir fonksiyonu için

$$z = -\frac{2\beta}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta}{1+\frac{\delta^2}{\beta^2}}} + \frac{\delta}{2\beta}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\beta^2}}\,\zeta + \frac{\delta}{\beta}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\beta^2}}\,\zeta - \frac{\delta}{\beta}\sqrt{\zeta}}\right)$$

yazılabilir.



Şek. 140

ζ — düzleminde negatif reel eksen alan çizgisidir. 1 ve 2 noktaları arasında $\psi = \psi_0$ eşpotansiyel çizgisi ve 2 ile ∞ arasında $\psi = 0$ eşpotansiyel çizgisi bulunmaktadır. Şek. 141 deki üniform alanı ζ— düzlemin üst yarısına transforme eden fonksiyon için

$$\frac{dP}{d\zeta} = C\,\frac{1}{\sqrt{\zeta}(\zeta - 1)}$$

diferansiyel denklemini integre ederek

$$P = C\ln\frac{\sqrt{\zeta}-1}{\sqrt{\zeta}+1} + D$$

bulunur. $\zeta = \pm \infty$ için $P = 0$ olduğundan $D = 0$ dır. 2 noktası yardımiye $C = j\psi_0/\pi$ bulunacağından

$$P = j\frac{\psi_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}$$

elde edilir. Bu ifade yardımiyle

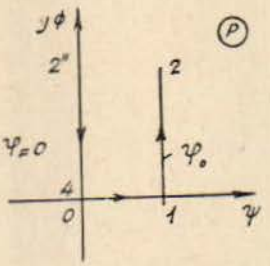
$$\zeta = \left(\frac{1 + e^{-i\frac{\pi P}{\psi_0}}}{1 - e^{-i\frac{\pi P}{\psi_0}}} \right)^2$$

bulunur. Bunu $z(\zeta)$ da yerine koyarak z—düzlemindeki orijinal alanın kompleks potansiyeli bulunur.

Alan şiddetinin modülü için

$$H = \frac{\psi_0}{\beta} \frac{1}{\left| \sqrt{\zeta - \left(1 + \frac{\delta^2}{\beta^2}\right)} \right|}$$

elde edilir.



Şek. 141

41. Grafik Metod.

İki boyutlu ve eksenel simetrik magnetik alan grafik metod yardımiyle yaklaşık olarak çizilebilir. Metodun esası statik alan gibidir. Metodu uygularken ferromagnetik yüzeylerin eşpotansiyel yüzey olduğu gözönünde tutulur. $a/b = 1$ seçerek yaklaşık kareler elde edilir.

Alan şekli yardımiyle hava yolunun magnetik direnci yaklaşık olarak hesaplanabilir. Alan çizgilerinin sayısı n ile ve eşpotansiyel çizgilerin sayısı m ile gösterilirse magnetik iletkenliğin $a/b = 1$ için

$$G_m = \mu_0 l \frac{m+1}{n}$$

yardımiyle hesaplanacağı kolayca gösterilebilir ($R_m = 1/G_m$). l, şekil düzlemine dik olarak ölçülen uzunluktur.

D. QUASİSTASYONER MAGNETİK ALAN

I. ELEKTROMAGNETİK ENDÜKSİYON

42. Quasistasyoner alanın târifi.

Buraya kadar yapılan incelemelerde $\partial/\partial t = 0$ dır. Elektrik alanının kaynağı yük dağılışı ve magnetik alanın kaynağı ise stasyoner akım dağılışıdır. Alan büyüklükleri zamanla değişirse elektrik alanın bir magnetik alanın kaynağı ve magnetik alan ise bir elektrik alanının kaynağı olur. Zamanla değişen elektrik alanının bir magnetik alan doğuracağını

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$$

denklemi ve

$$\text{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

şeklinde yazılabilen süreklilik denklemi yardımiyle kolayca görebiliriz. Zira birinci denkleme göre $\text{div}\,\vec{J} = 0$ ve ikinci denkleme göre ise $\text{div}\,\vec{J} \neq 0$ dır. Böylece $\partial/\partial t \neq 0$ için $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$ yerine

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{103}$$

almak gerektiği anlaşılır. İkinci terimin bulunacağını ilk önce Maxwell teorik olarak ileri sürmüştür. Bu terim olmadan elektromagnetik radyasyon mümkün değildir. Bu gerçek, Maxwell zamanındaki imkânların darlığından dolayı ancak sonradan Hertz tarafından deneysel olarak gösterilebilmiştir. (103) denklemi elektromagnetik alanın temel denklemlerinden biridir ve 1. Maxwell veya Maxwell-Amper denklemi adını alır.

(103) denklemi C eğrisi tarafından sınırlanan F yüzeyi üzerinden integre edilerek Stokes teoremi yardımiyle

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{F} = \int_F \vec{J} \cdot d\vec{F} + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{F} \qquad (104)$$

bulunur. Birinci terim yüzeyden geçen iletken akımını ve ikinci terim eğri ile zincirlenen deplasman akısının zaman türevini gösterir. İletken akımı sıfır olsa bile bir magnetik alanın kaynağı olan bu terime deplasman akımı denilir. Deplasman akımı yoğunluğu ise

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (105)$$

dir. Boşlukta $\vec{P} = 0$ olduğundan deplasman akımı yoğunluğu $\varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ olacaktır ve her hangi bir yük hareketi ile ilgisi yoktur. Dielektrik içinde ikinci terim polarizasyon yüklerinin hareketine tekabül eder ve polarizasyon akımı yoğunluğu adını alır.

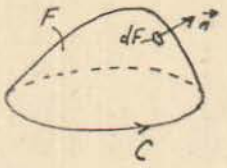
$\partial/\partial t \neq 0$ olmasına rağmen deplasman akımı ihmal edilebiliyorsa magnetik alana quasistasyoner adı verilir. Quasistasyoner alanda $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ dır. Quasistasyoner alanı stasyoner alan gibi incelemek kabildir. Meselâ çok uzun bir iletkenden $i(t)$ akımı geçiyorsa alan şiddeti $H_\phi(t) = i(t)/2\pi\rho$ olacaktır. Her hangi bir anda iletkenin her noktasından aynı akım geçer. Bir alanın quasistasyoner kabul edilebilmesi için sistemin boyutları değişimin frekansına tekabül eden dalga boyundan küçük olmak zorundadır. Ancak bu şart yerine geldiği vakit radyasyonu ihmal ederek olayı quasistasyoner saymak kabil olur. Boşluktaki dalga boyu $\lambda_0 = c/f$ (c = ışık hızı) olduğundan meselâ 100 kHz için $\lambda_0 = 3$ km ve 60 Hz için $\lambda_0 = 6000$ km bulunur. Böylece pratikte rastlanan boyutlar (meselâ hatların uzunluğu, sargıların boyutları) için şartın ekseriya sağlandığı söylenebilir. Ancak çok yüksek frekanslarda sistemin boyutu önemli bir rol oynamaga başlayacaktır.

43. Elektromagnetik endüksiyon kanunu.

Her hangi bir C eğrisi ile zincirlenen magnetik akı zamanla değişecek olursa bir $\vec{E}$ alanı endüklenir ve

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (106)$$

dır, şek. 142. Faraday tarafından 1831 de deneysel olarak gösterilen olaya elektromagnetik endüksiyon adı verilir. Endüklenen alan konservatif olmadığından alan çizgileri kapalı eğrilerdir ve $\vec{B}$— çizgileri ile zincirlenirler. C eğrisi yerine bir iletken alınırsa çevreden bir endüksiyon akımı geçer ve denklemdeki negatif işaret bu akımın, ϕ akısındaki değişikliği önliyecek şekilde yöneldiğini belirtir (Lenz kaidesi).



Şek. 142

(106) denkleminde

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

integrali kapalı çevre gerilimini gösterir. Bu gerilime endüksiyon emk'i adı verilir.

$e = -d\phi/dt$ denklemi bir sarım içindir. Bütün sarımları ile ayni ϕ akısı zincirlenen w sarımlı bir sargı için $e = -wd\phi/dt = -d(w\phi)/dt$ olacağından

$$\psi = w\phi$$

koyarak

$$e = -\frac{d\psi}{dt} \qquad (107)$$

yazılabilir. ϕ ye sarım akısı ve ψ ye zincir akısı (sargı akısı, toplam akı) adı verilir. Zincir akısı için genel olarak

$$\psi = \sum_k w_k \phi_k \qquad (108)$$

yazılabilir. w_k, ϕ_k sarım akısı ile zincirlenen sarım sayısıdır.

Şayet endiksiyon yalnız $\vec{B}$ nin değişmesinden meydana geliyorsa d/dt integral içine sokulabileceğinden

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{F} \qquad (109)$$

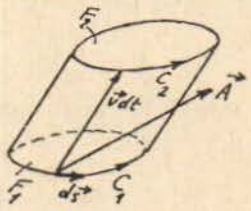
bulunur. Buradan Stokes teoremi yadımiyle

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{110}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem hareket etmiyen ortamlar için elektromagnetik alanın ikinci temel denklemidir ve 2. Maxwell veya Maxwell — Faraday denklemi adını alır.

Her hangi bir $\vec{A}$ vektör alanında akının zaman türevini hesaplarken integrasyon bölgesindeki değişikliği de hesaba katmak gerekir. Zira

$$\int_F \vec{A} \cdot d\vec{F}$$



Şek. 143

akısı $\vec{A}$ nın veya F yüzeyinin değişmesiyle bir değişiklığe uğrar. Şek. 143 de F yüzeyinin v hızı ile kaydığı farzedilmiştir. Şekilde t ve $t+dt$ anlarındaki durumlar görülmektedir. Akının zaman türevi için

$$\frac{d}{dt}\int_F \vec{A} \cdot d\vec{F} = \frac{\int_{F_2} \vec{A}(t+dt) \cdot d\vec{F}_2 - \int_{F_1} \vec{A}(t) \cdot d\vec{F}_1}{dt}$$

bulunur. Sağdaki birinci integral için Taylor teoremi yardımiyle

$$\int_{F_2} \vec{A}(t+dt) \cdot d\vec{F}_2 = \int_{F_2} \vec{A}(t) \cdot d\vec{F}_2 + dt \int_{F_2} \frac{\partial \vec{A}}{dt} \cdot d\vec{F}_2$$

yazılabilir. Diverjans teoremini t anı için F_1, F_2 yüzeyleri ile yüzey elemanı $d\vec{s} \times \vec{v}\,dt$ olan yan yüzey tarafından sınırlanan bölgeye uygulayarak ve normal yönlerinin t anında içeri ve $t+dt$ anında dışarı doğru olduğunu gözönüne alarak ikinci integral için

$$\int_{F_1} \vec{A}(t) \cdot d\vec{F}_1 = \int_{F_2} \vec{A}(t) \cdot d\vec{F}_2 + dt \oint_C \vec{A}(t) \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) - \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

bulunur. Böylece $dV = \vec{v} \cdot d\vec{F}\, dt$ olduğunu gözönüne alarak Stokes teoremi yardımiyle

$$\frac{d}{dt} \int_F \vec{A} \cdot d\vec{F} = - \int_F \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{A}) \right] \cdot d\vec{F} \qquad (111)$$

elde edilir. $\vec{A}$ yerine $\vec{B}$ koyarak ve $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ olduğunu gözönüne alarak

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{F} + \int_F \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{F} \qquad (112)$$

bulunur. Bu denklem, hareket eden ortamlarda endüksiyon kanununun alacağı şekildir. Stokes teoremi yardımiyle

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (113)$$

diferansiyel şekli elde edilir. Bu ifadelerde birinci terimler hareketsiz endüksiyona (transformasyon endüksiyonu) ve ikinci terimler ise hareket endüksiyonuna tekabül ederler. Stasyoner magnetik alan içinde yalnız hareket endüksiyonu olabilir. Her iki endüksiyen şekli için (106) genel bağıntısı caridir. Transformasyon ve hareket terimleri e_t ve e_h ile gösterilirse (emk'ler)

$$e_t = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{F}\,, \quad e_h = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \qquad (114)$$

yazılabilir. $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} dt$, d selemanı tarafından dt zamanı zarfında süpürülen akıyı gösterir. Bu sebeple endüksiyon olayında alan çizgilerinin kesilmesinden bahsedilir.

Maxwell — Faraday denklemi vektör potansiyel cinsinden

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}, \quad (115)$$

$$\text{rot}\,(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (116)$$

şekline girer. Son denkleme göre

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi + \vec{v} \times \vec{B} \quad (117)$$

yazılabilir. Transformasyon endiksiyonu için

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi \quad (118)$$

olacaktır. $\vec{E}$ alanının genel olarak iki bileşeni vardır. Magnetik alandaki değişme sonucu meydana gelen $-\partial\vec{A}/\partial t$ terimi dinamik alan bileşenini ve kaynağı elektrik yükleri olan konservatif $-\text{grad}\,\varphi$ terimi statik alan bileşenini gösterir.

Şayet ortamdu $\vec{E}_0$ kaynakları varsa endüksiyon alanını $\vec{E}_i$ ile ve bileşke alanı $\vec{E}$ ile göstererek $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_0$ yazılabileceğinden ikinci Maxwell denklemi

$$\text{rot}\,(\vec{E} - \vec{E}_0) = -\frac{\partial \vec{B}}{dt} \quad (119)$$

şeklini alır ($\vec{v} = 0$). $\vec{J} = \varkappa \vec{E}$ de $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \text{grad}\,\varphi + \vec{E}_0$ koyarak

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{J}}{\varkappa} + \text{grad}\,\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{dt}$$

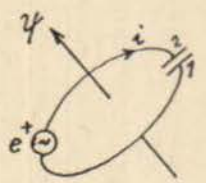
bulunur. Bu denklem yardımiyle devre denklemleri ile alan denklemleri arasındaki bağıntı kolayca incelenebilır. Meselâ bu denklemi bir çizgisel devre üzerinden integre ederek

$$e = \oint_C \vec{E_0} \cdot \vec{ds} = \oint_C \frac{\vec{J}}{\varkappa} \cdot \vec{ds} + \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{ds} = Ri + \frac{d\psi}{dt}$$

gerilim denklemi bulunur. e, sınırlı bir bölgede (lokalize) bulunan $\vec{E_0}$ kaynağının emk'ini ve ψ ise çevre ile zincirlenen akıyı gösterir. R, çevrenin toplam direncidir. Şayet çevrede bir kondansatör varsa dielektrik içinde $\vec{J}/\varkappa$ belirsiz olacağından denklemi kondansatörün uçları arasında integre ederek

$$e = Ri + \frac{d\psi}{dt} - \int_1^2 \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{ds} = Ri + \frac{d\psi}{dt} - u_{12}$$

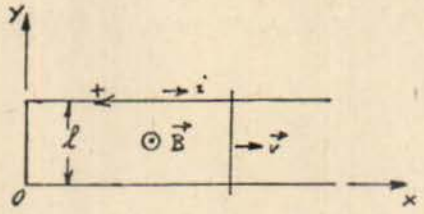
bulunur, şek. 144.



Şek. 144

44. Örnekler.

1 — Şek. 145 deki çubuk üniform $\vec{B} = \vec{k} B_0 =$ sab. alanı içinde $\vec{v} = \vec{i} v_0 =$ sab. üniform hızı ile kaydığına göre e_h bulunacaktır.



Şek. 145

Her hangi bir anda çevre ile $\phi = B_0 l x$ akısı zincirlendiğinden $e_h = -d\phi/dt$ yardımiyle

$$e_h = -B_0 l \frac{dx}{dt} = -B_0 l v_0 = \text{sab.}$$

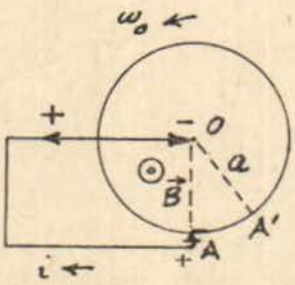
bulunur. (114) yardımiyle de ayni sonuç bulunur. $e_h<0$ olduğundan yönü pozitif çevre yönünü tersidir. e_h nın yönü pratikte sağ el kaidesi yardımiyle bulunur. Sağ el, $\vec{B}$— çizgileri avuç içine girecek ve baş parmak hareket yönünün gösterecek şekilde tutulursa açık parmaklar e_h nın yönünü gösterir.

2 — Şek. 146 da görülen disk (Faraday diski) $\vec{B} = \vec{k} B_0$ üniform alanı içinde $\omega_0 =$ sab. açısal hızı ile döndüğüne göre endüksiyon emk'i bulunacaktır.

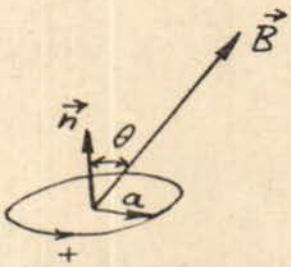
$\vec{v}_0 = \vec{u}_\phi \omega_0 \rho$ ve $\vec{ds} = -\vec{u}_\rho d\rho$ koyarak

$$e_h = \omega_0 B_0 \int_0^a \rho d\rho = \frac{\omega_0 B_0 a^2}{2} = \text{sab.}$$

bulunur. Şayet $e = -d\phi/dt$ denklemi kullanılırsa bir zorlukla karşılaşılır. Zira OA parçasının sabit kaldığı farzedilirse çevre ile zincirlenen akı değişmiyecektir. Bununla beraber OA nın diskle birlikte döndüğü gözönüne alınacak olursa disk $d\alpha = \omega_0 dt$ kadar dönünce akı $d\phi = a^2 B_0 d\alpha/2$ kadar artacağından $e = -d\phi/dt$ yardımiyle ayni sonuç bulunur. Bu denklemi uygularken integrasyon yolunun bir kısmının iletkenle birlikte hareket ettiğini gözönüne almak gerekir. Buna dikkat edilmezse yanlış sonuçlara varılır. Faraday diski ünipoler endüksiyon için bir örnektir. Kolektörsüz doğru akım makinelerinde bu tip bir endüksiyon elde edilir. O ve A arasına daima yeni radyal parçalar geldiğinden gerçekte Faraday diski sonsuz sayıda dilimi olan bir kolektör gibi çalışmaktadır.



Şek. 146



Şek. 147

3 — $B = B_0 \cos \omega t$ üniform alanı içinde bir dairesl çevrede endüklenen emk bulunacaktır, şek. 147.

$\phi = \pi a^2 B_0 \cos \omega t$ olduğundan

$$e_t = \omega \pi a^2 B_0 \cos \theta \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$

bulunur. $\theta = 0$ için $E_m = \omega \pi a^2 B_0$ ve $\theta = \pi/2$ için $e_t = 0$ olacaktır. Ayni sonuç

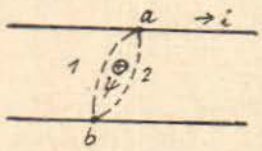
$$e_t = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dF}$$

yardımiyle de bulunur.

4 — Şek. 148 de tellerden dogru ve alternatif akım geçtiğine göte a ve b arasındaki gerilim incelenecektir.

$i =$ sab. için $u_1 = u_2$ olacaktır. Buna karşılık $i \neq$ sab. için

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = u_1 - u_2 = - \frac{d\psi}{dt}$$



Şek. 148

olacağından $u_1 \neq u_2$ dir. Bununla beraber pratikte bu farkı ekseriya ihmal etmek kabildir.

45. Öz ve ortak endüksiyon.

Bir çevreden geçen akım değişince bu çevre ile zincirlenen magnetik alan da değişeceğinden bir emk endüklenir. Zincir akısı için

$$\psi = L i \qquad (120)$$

yazarak öz (self-) endüksiyon emk'i için

$$e_s = - L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt} \qquad (121)$$

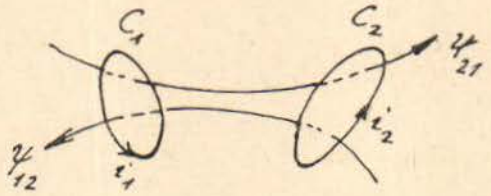
bulunur. L ye özendüktans adı verilir ve MKSC- birimi $\Omega s = H$ dir. $L =$ sab. için $e_s = - L di/dt$ olacaktır. Denklemdeki negatif işaret akım artarken e_s nin ters yönde ve azalırken ayni yönde bulunduğunu belirtmektedir.

Şek. 149 da C_1 çevresinden geçen akım değişince bu çevrede öz endüksiyon ve C_2 çevresinde ortak endüksiyon meydana gelir. Ayni

şey C_2 den geçen akım için de söylenebilir. i_1 akımı tarafından meydana getirilen ve C_2 ile zincirlenen akı için

$$\psi_{21} = M_{21} i_1 \tag{122}$$

yazılırsa C_2 deki ortak endüksiyon emk'i için



Şek. 149

$$e_{21} = - M_{21} \frac{di_1}{dt} - i_1 \frac{dM_{21}}{dt} \tag{123}$$

bulunur. M_{21} e ortak endüktans adı verilir ve birimi L gibi H dir. M_{21} = sab. için $e_{21} = - M_{21}\, di_1/dt$ olacaktır. Ayni şekilde C_2 çevresi için

$$\psi_{12} = M_{12} i_2 \quad , \quad e_{12} = - M_{12} \frac{di_2}{dt} - i_2 \frac{dM_{12}}{dt}$$

elde edilir.

İki çevreden akım geçerken zincir akıları

$$\psi_1 = L_{11} i_1 + M_{12} i_2 = \psi_{11} + \psi_{12} ,$$
$$\psi_2 = L_{22} i_2 + M_{21} i_2 = \psi_{22} + \psi_{21}$$

olacaktır. Genel olarak n çevreli sistemde endüktans katsayıları için $M_{ik} = L_{ik}$ koyarak

$$L_{kk} = \frac{\psi_{kk}}{i_k} \quad , \quad L_{ik} = \frac{\psi_{ik}}{i_k} \tag{124}$$

ve zincir akıları için

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{n} \psi_{ik} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} i_k \tag{125}$$

yazılabilir. L_{kk} katsayısı $i_k=1$ A ve diğer akımlar sıfırken C_k ile zincirlenen akıyı ve L_{ik} ise ayni durumda C_i çevresi ile zincirlenen akıyı gösterir. Aşağıda μ = sab. için

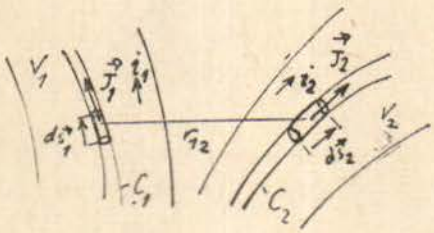
$$L_{ik} = L_{ki} \tag{126}$$

olacağı görülecektir (simetri bağıntısı).

46. Endüktansların hesabı, Neumann formülü.

Endüktans katsayıları akılar yardımiyle veya ileride görüleceği gibi magnetik enerji yardımiyle hesaplanabilir. ψ_{kk} akıları ile i_k akımlarının pozitif yönleri uygun (sağ sistem) olduğundan L_{kk} lar daima pozitiftir. Buna karşılık L_{ik} katsayıları ($i \neq k$) pozitif veya negatif olabilir. Şayet ψ_{ik} akısının pozitif yönu ile i_i akımının pozitif yonü uygun ise ortak endüktans pozitif ve aksi takdirde negatif olur. Şek. 149 da katsayılar pozitiftir. Negatif işaret katsayılar yerine akımlara da verilebilir.

Şek. 150 de iki akım dağılışı görülmektedir. $\vec{J}_1$ dağılışının vektör



Şek. 150

potansiyeli $\vec{A}_1$ ile gösterilirse C_2 akım tübü ile zincirlenen akı için

$$\phi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

bulunur. Bu akı $di_2 = \vec{J}_2 \cdot d\vec{F}_2$ akımı ile zincirlendiğinden bütün iletkenle zincirlenen ψ_{21} zincir akısındaki payı

$$d\psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \frac{1}{i_2} \oint_{C_2} (\vec{J}_2 \cdot d\vec{F}_2)(\vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2)$$

olacaktır. Diğer taraftan $\vec{J}_2$ ile $d\vec{s}_2$ ayni yönde olduklarından integral içindeki ifade $(d\vec{s}_2 \cdot d\vec{F}_2)(\vec{A}_1 \cdot \vec{J}_2) = \vec{A}_1 \cdot \vec{J}_2\, dV_2$ şekline sokulabileceğinden F_2 üzerinden integre ederek

$$\psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_1\, dV_2$$

bulunur. Zincir akısının, akım tübleri ile zincirlenen akıların ortalamasına eşit olduğu görülmektedir. Bu ifadede

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{J}_1\, dV_1}{r_{12}}$$

koyarak

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi i_1 i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2\, dV_1\, dV_2}{r_{12}} \qquad (127)$$

bulunur. Bu denkleme Neumann formülü denilir. Ayni hesaplar yapılarak μ = sab. için $M_{12} = M_{21}$ olduğu görülür. $\vec{J}_1$ ve $\vec{J}_2$ dağılışları için farklı magnetik geçirgenlikler bahis konusu olduğu takdirde bu sonuç yazılamaz. Lineer olmayan ortamlarda (ferromagnetik maddeler içinde) durum böyledir.

Neumann formülünde $i_1 = i_2 = i$, $V_1 = V_2 = V$ ve $dV_1 = dV$, $dV_2 = dV'$ koyarak öz endüktans için

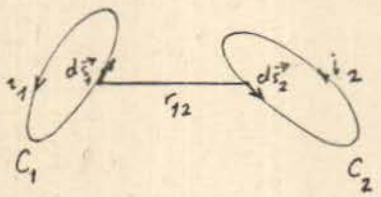
$$L = \frac{\mu}{4\pi i^2} \int_{V} \int_{V} \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}'\, dV\, dV'}{r} \qquad (128)$$

bulunur. dV ve dV', iletken içindeki iki akım tübünün elemanlarıdır ve aradaki uzaklık r dir.

Yukarıdaki denklemler kolayca n dağılış için genelleştirilebilir.

Şek. 151 de iki çizgisel devre görülmektedir. i_1 akımı $d\vec{s}_2$ nin bulunduğu noktada

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1}{r_{12}}$$



Şek. 151

vektör potansiyelini meydana getireceğinden

$$\psi_{21} = \phi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

yardımiyle

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}} \qquad (129)$$

Neumann formülü bulunur. μ = sab. için $M_{12} = M_{21}$ olacaktır.

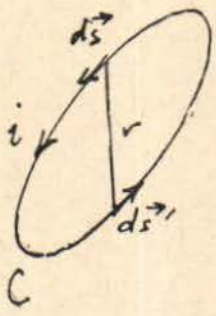
Yukarıdaki denklemlerin incelenmesinden endüktans katsayılarının yalnız sistemin geometrik yapısına ve ortama bağlı olduğu anlaşılır. $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$ ve $d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2$ nin işaretleri pozitif çevre yönlerine bağlı olduğundan yönlerden biri değişirse ortak endüktansların işareti de değişir.

Bir çizgisel çevrenin özendüktansı için

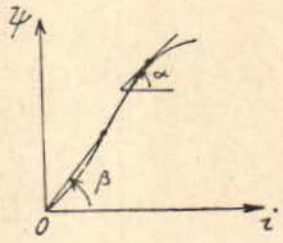
$$L = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C} \oint_{C} \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{s}'}{r}$$

yazılabilir, şek. 152. İntegrasyon bölgesinde $r = 0$ olabileceğinden integral sonsuza gider. Bu sonuç iletkenin sonsuz ince kabul edilmesinden ileri gelmektedir. Sonsuz ince kesit yerine sınırlı kesit almak ve zincir akısından faydalanmak suretiyle bu matematik güçlük yenilir.

ψ ile i arasındaki bağıntı lineer olmadığı vakit endüktans katsayıları akımın fonksiyonu olacaklardır. Her akım için $L=\psi/i$, $M_{12}=\psi_{12}/i_2$, vs. şeklinde târif edilen endüktanslara statik endüktans adı verilir. Statik endüktans $\operatorname{tg}\alpha$ ile orantılıdır, şek. 153. Buna karşılık dinamik



Şek. 152



Şek. 153

endüktans $L = d\psi/di$ şeklinde târif edilir ve $\operatorname{tg}\beta$ ile orantılıdır. (125) yardımiyle genel olarak

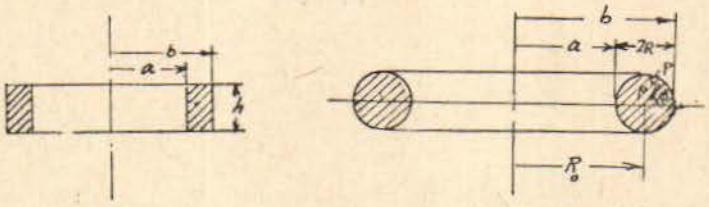
$$L_{ik}=\frac{\partial\psi_i}{\partial i_k} \tag{130}$$

bulunur.

Statik endüktansları magnetik dirençler cinsinden ifade edebiliriz. Bu konu aşağıda görülecektir.

47. Örnekler.

1 — Dikdörtgen ve dairesel kesitli toroidin özendüktansı hesaplanacaktır, şek. 154.



Şek. 154

Dikdörtgen için sarım akısı

$$\phi = \frac{\mu w i h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

olduğundan

$$L = \frac{w\phi}{i} = \frac{\mu w^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

bulunur. $L = w\phi/i$ de $\phi = wi/R_m = wiG_m$ koyarak $L = w^2/R_m = w^2 G_m$ yazılabilir. R_m ve G_m, halkanın magnetik direnci ve magnetik iletkenliğidir.

Dairesel kesitin P noktasında

$$H_\phi = \frac{wi}{2\pi(R_0 + \rho \cos \phi)}$$

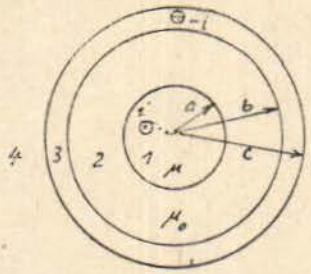
olacağından

$$\psi = \frac{\mu w^2 i}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\phi}{R_0 + \rho \cos \phi} = \mu w^2 i (R_0 - \sqrt{R_0^2 - R^2})$$

ve buradan

$$L = \mu w^2 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - R^2}) = \frac{\mu w^2}{2} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

bulunur. $R_0 \gg R$ için $L \approx \mu w^2 F/l_0$ yazılabilir ($F = \pi R^2$, $l_0 = 2\pi R_0$).



Şek. 155

2 — Bir damarlı kablonun endüktansı bulunacaktır, şek. 155.

Dış silindirin çok ince olduğunu farzederek hesap dışı bırakalım. İki silindir arasındaki akı l uzunluğu için

$$\psi_0 = \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

dır. İçteki silindirde kesiti $ld\rho$ olan akı tübü yalnız $i_\rho = i\pi\rho^2/\pi a^2 = \rho^2 i/a^2$ akımı ile zincirlenir. Bütün iletkene bir tek sarım gözüyle bakılırsa i_ρ/i

oranı akı tübünün zincirlediği sarımı gösterir. Akı tübünün akısı $d\phi_i$ ile gösterilirse bu akının zincir akısındaki payı

$$d\psi_i = \frac{i_\rho}{i}\, d\phi_i$$

olacaktır. Bu ifadede $i_\rho/i = \rho^2/a^2$ ve $d\phi_i = \mu i \rho l d\rho/2\pi a^2$ koyarak ve integre ederek

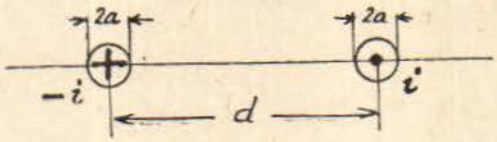
$$\psi_i = \frac{\mu_0 l i}{8\pi}$$

bulunur. Endüktans

$$L = \frac{1}{i}(\psi_0 + \psi_i) = L_0 + L_i = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu}{4}\right)$$

dir. $L_0 = \psi_0/i$ dış endüktansı ve $L_i = \psi_i/i$ ise iç endüktansı gösterir. İç endüktans yarıçapa bağlı değildir.

3 — İki paralel telin endüktansı bulunacaktır, şek. 156.



Şek. 156

Dış akı

$$\psi_0 = \phi_0 = \frac{\mu_0 l i}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

olacağından dış endüktans

$$L_0 = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

dır. Buna iki telin iç endüktanslarını ekleyerek $\mu = \mu_0$ için

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a}\right)$$

ve $d \gg a$ için

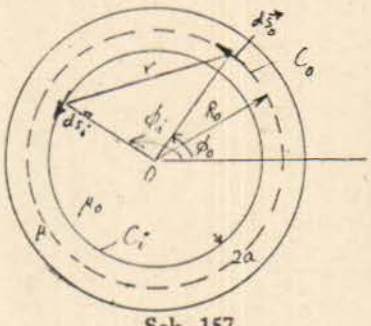
$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a}\right)$$

bulunur. d küçüldükçe L de küçülür. Bu özellikten endüktanssız dirençler yapmak için faydalanılır (bifilar sargı).

Yukarıdaki hesaplarda bir telin diğer telin içinden geçireceği akı hesaba katılmamıştır. Bu da hesaba katılırsa yaklaşık formülün tam değeri verdiği görülür.

4 — Şek. 157 deki halkanın endüktansı bulunacaktır.

Sonsuz uzun silindirin iç endüktansı birim uzunluk için $\mu/8\pi$ dir. Eğer bir iletkenin uzunluğu kesit boyutlarından çok büyükse iç endüktansı ayni şekilde hesaplanabilir. Ortalama uzunluk l_0 ile gösterilirse $L_i = \mu l_0/8\pi = \mu R_0/4$ olacaktır.



Şek. 157

Dış endüktansı hesaplayabilmek için iç çevre (C_i) ile zincirlenen zincir akısını bilmek gerekir. Şayet halka akımının ortalama akım çizgisi (C_0) boyunca aktığı farzedilirse problem C_0 ve C_i çevreleri arasındaki ortak endüktansını hesabı problemine çevrilir ve böylece $r = 0$ değeri ile karşılaşılmaz. Neumann integralinde $ds = ds_0 = R_0 d\phi_0$, $ds' = ds_i = (R_0 - a)d\phi_i \approx R_0 d\phi_i$ koyarak ve $\vec{ds_0}$ ile $\vec{ds_i}$ arasındaki açının $\phi_i - \phi_0$ olduğunu gözönüne alarak

$$L_0 = \frac{\mu_0 R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi - \phi_i)d\phi_i\, d\phi_0}{\sqrt{a^2 + 2R_0(R_0 - a) - 2R_0(R_0 - a)\cos(\phi_i - \phi_0)}}$$

$$= \mu_0 R_0 \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

bulunur. Eliptik integrallerin modülü

$$k = 2\frac{\sqrt{R_0(R_0 - a)}}{2R_0 - a}$$

dır. $R_0 \gg a$ için $k \approx 1$ olacağından $K \approx \ln 8R_0/a$ ve $E \approx 1$ yaklaşık değerleri yardımiyle

$$L_0 = \mu_0 R_0 \left(\ln \frac{8R_0}{a} - 2 \right)$$

yazılabilir. Toplam endüktans

$$L = \mu_0 R_0 \left(\ln \frac{8 R_0}{a} - 2 \right) + \frac{\mu R_0}{4}$$

olacaktır. $\mu = \mu_0$ için

$$L = \mu_0 R_0 \left(\ln \frac{8 R_0}{a} - 1{,}75 \right)$$

elde edilir.

Yüksek frekanslarda cidar olayından dolayı iç endüktans ihmal edilebilir.

Hesapları dairesel akımın vektör potansiyeli yardımiyle de yapabiliriz. C_0 ile zincirlenen akı

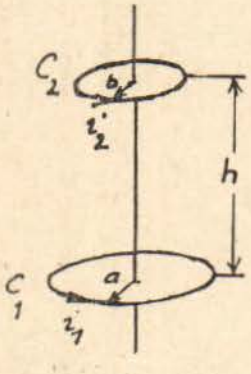
$$\psi_0 = \oint_{C_0} \vec{A}_i \cdot d\vec{s}_0$$

olacaktır. $\vec{A}_i$, C_i çevresinin C_0 boyunca meydana getirdiği vektör potansiyeldir. $\vec{A}_i = \vec{u}_\phi A_{i\phi}(R_0 - a, 0)$ ve $d\vec{s}_0 = \vec{u}_\phi (R_0 - a)\, d\phi_0$ koyarak

$$\psi_0 = 2\pi (R_0 - a)\, A_{i\phi}(R_0 - a\,,\, 0)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$A_{i\phi}(\rho\,,\, z) = \frac{\mu_0 i}{k\pi} \sqrt{\frac{R_0}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right], \quad k = 2 \sqrt{\frac{R_0 \rho}{(R_0 + \rho)^2 + z^2}}$$



Şek. 158

olduğundan $\rho = R_0 - a$, $z = 0$ koyarak yukarıdaki sonuç elde edilir.

5 — Paralel daireler arasındaki ortak endüktans bulunacaktır, şek. 158.

i_1 akımı C_2 çevresi boyunca

$$A_{1\phi}(b\,,\, h) = \frac{\mu_0 i_1}{k\pi} \sqrt{\frac{a}{b}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right]$$

vektör potansiyelini meydana getirir ve modül

$$k = 2 \sqrt{\frac{ab}{(a + b)^2 + h^2}}$$

dir. Zincir akısı

$$\psi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot \vec{ds}_2 = 2\pi b A_{1\phi}(b, h)$$

olacağından

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{2\mu_0}{k}\sqrt{ab}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K - E\right]$$

bulunur. Ayni sonuç Neumann integralı yardımiyle de bulunabilir.

6 — Kısa ve uzun solenoidlerin özendüktansı bulunacaktır.

Kısa solenoidin tel yarıçapı a ile, ortalama yarıçapı R ile ve iki sarım arasındaki uzaklık h ile gösterilirse her hangi bir sarımın zincir akısı için

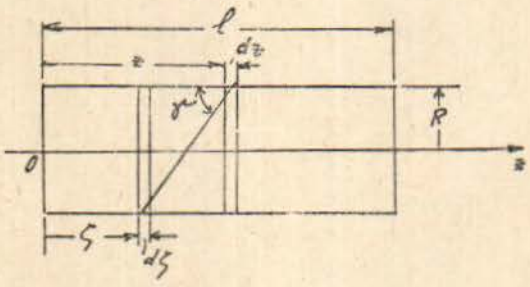
$$\psi_k = \mu_0 Ri\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right) + \mu_0 Ri\left[\sum_{m=k-1}^{1}\left(\ln\frac{8R}{mh} - 2\right) + \sum_{m=1}^{w-k}\left(\ln\frac{8R}{mh} - 2\right)\right]$$

yazılabilir. Birinci terim sarımın kendi akısını ve diğer terimler ise başka sarımların zincir akısındaki paylarını göstermektedir. w, kısa solenoidin sarım sayısıdır. Bu ifade yardımiyle

$$L = \mu_0 R\left\{w\left(\ln\frac{8R}{a} - 2\right) - w(w-1)\left(\ln\frac{8R}{h} - 2\right) - 2\ln[1!\,2!\ldots(w-1)!]\right\}$$

bulunur.

Şek. 159 da uzun solenoid görülmektedir. Birim uzunluktaki sarım sayısı w/l=sab. dir. dz genişliğindeki solenoid elemanının ζ noktasın-



Şek. 159

daki sarım boyunca meydana getireceği vektör potansiyel dA_ϕ olduğu-

na göre bu sarımın akısı için $d\phi_\zeta = 2\pi R\, dA_\phi$ yazılabilir. Dairesel akımın vektör potansiyeli

$$dA_\phi = \frac{\mu_0 R}{\pi}\,\frac{wi}{l}\,dz\,\frac{1}{\sqrt{4R^2+(z-\zeta)^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\beta-1)d\beta}{\sqrt{1-\frac{4R^2}{4R^2+(z-\zeta)^2}\sin^2\beta}}$$

olacağından

$$d\phi_\zeta = \frac{2\mu_0 R^2 w\, i\, dz}{l\sqrt{4R^2+(z-\zeta)^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\beta-1)d\beta}{\sqrt{1-\frac{4R^2}{4R^2+(z-\zeta)^2}\sin^2\beta}}$$

bulunur. Bu ifade şek. 159 da görülen γ açısından faydalanarak

$$d\phi_\zeta = \frac{\mu_0 R\, w\, i\, dz}{l}\sin\gamma\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\beta-1)\,d\beta}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\beta}}$$

şekline sokulabilir. γ açısı için

$$\sin\gamma = \frac{2R}{\sqrt{4R^2+(z-\zeta)^2}},\quad \cos\gamma = \frac{z-\zeta}{\sqrt{4R^2+(z-\zeta)^2}},\quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{z-\zeta}{2R}$$

dir. İntegral hesaplanırsa

$$d\phi_\zeta = \frac{\mu_0 R\, w\, i dz}{l}\sin\gamma\,[2D(\sin\gamma) - K(\sin\gamma)]$$

bnlunur. $D(\sin\gamma)$,

$$D(\sin\gamma) = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\beta\, d\beta}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\beta}}$$

eliptik integralini göstermektedir. $d\phi_\zeta$ yi $z=0$ ile $z=l$ arasında integre ederek

$$\phi_\zeta = \frac{\mu_0 R\, w\, i}{l}\int_0^{l}\sin\gamma\,(2D-K)\,dz$$

bulunur. Şayet $\xi = \operatorname{ctg} \gamma = (z - \zeta)/2R$ değişken transformasyonu yapılırsa $\zeta = \text{sab.}$ için $dz = 2R\, d\xi$ olacaktır ve eliptik integrallerin yeni modülü $1/\sqrt{1+\xi^2}$ dir. Yeni integral sınırlarının $\xi_1 = -\zeta/2R$, $\xi_2 = (l-\zeta)/2R$ olduğunu gözönüne alarak

$$\phi_\zeta = \frac{2\mu_0 R^2 wi}{l} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{2D - K}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi$$

$$= \frac{2\mu_0 R^2 wi}{l} \left[\frac{\xi_2 D\left(\frac{1}{\sqrt{1+\xi_2^2}}\right)}{\sqrt{1+\xi_2^2}} - \frac{\xi_1 D\left(\frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}}\right)}{\sqrt{1+\xi_1^2}} \right]$$

bulunur. $d\zeta$ genişliğindeki solenoid elemanının zincir akısı

$$d\psi = \frac{w}{l}\, d\zeta \phi_\zeta$$

olacağından

$$\psi = \frac{2\mu_0 R^2 w^2 i}{l^2} \int_0^l \left(\frac{\xi_2 D}{\sqrt{1+\xi_2^2}} - \frac{\xi_1 D}{\sqrt{1+\xi_1^2}} \right) d\zeta$$

elde edilir. Hesaplar yapılırsa

$$\psi = \frac{2\mu_0 R w^2 i}{3} \left[\frac{K(\sin \gamma_s) - (1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_s)\, E(\sin \gamma_s)}{\sin \gamma_s} - \operatorname{tg}^2 \gamma_s \right]$$

bulunacağından ($\operatorname{ctg} \gamma_s = l/2R = $ solenoid açısı)

$$L = \frac{2\mu_0 R w^2}{3} \left[\frac{K - (1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_s) E}{\sin \gamma_s} - \operatorname{tg}^2 \gamma_s \right]$$

elde edilir. Eğer $\lambda = 2R/l$ konursa

$$L = \frac{4\mu_0 R^2 w^2}{3l} \left\{ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2} [K(k) + (\lambda^2 - 1) E/k)] - \lambda \right\}$$

yazılabilir. $k = \sin \gamma_s = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$, $\operatorname{ctg} \gamma_s = 1/\lambda$ dır.

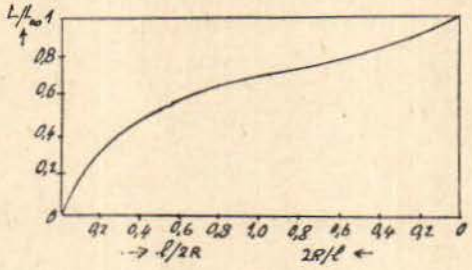
Çok uzun solenoidin içindeki magnetik alanı üniform kabul ederek endüktans için

$$L_\infty = \frac{\mu w^2 \pi R^2}{l} = \frac{\mu w^2 \pi R}{2} \operatorname{tg} \gamma_s$$

bulunacağından

$$\frac{L}{L_\infty} = k = \frac{4}{3\pi}\left[\operatorname{ctg}\gamma_s \frac{K(\sin\gamma_s) - (1-\operatorname{tg}^2\gamma_s)E(\sin\gamma_s)}{\sin\gamma_s} - \operatorname{tg}\gamma_s\right]$$

olacağı anlaşılır. Şek. 160 da k nın değişimi görülmektedir. Uzun solenoidin endüktansı daima ideal solenoidinkinden küçüktür.



Şek. 160

7 — Dikdörtgen çerçevenin endüktansı bulunacaktır, şek. 161.

Dış akı

$$\phi_0 = \int_{x=-(a-r_0)}^{a-r_0} \int_{y=-(b-r_0)}^{b-r_0} B_z(x, y, 0)\, dxdy$$

yardımiyle bulunur. Hesaplar yapılarak ve iç endüktansın

$$L_i = \frac{\mu_0}{2\pi}(a+b)$$

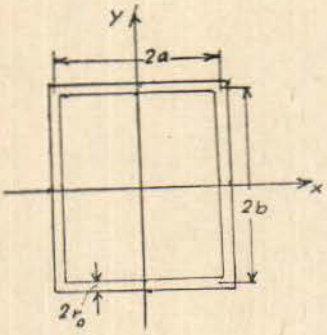
olacağını hesaba katarak

$$L = \frac{2\mu_0}{\pi}\left\{2\sqrt{a^2+b^2} + a\ln\left(\frac{4a}{r_0}\right) + b\ln\left(\frac{4b}{r_0}\right)\right.$$

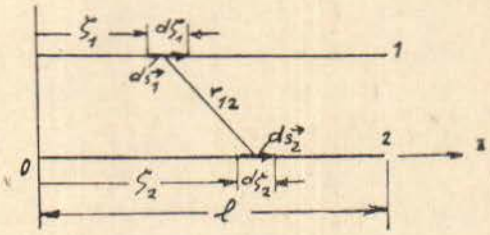
$$\left. -1{,}75(a+b) - a\ln\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right] - b\ln\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]\right\}$$

bulunur.

8— İki ince paralel tel arasındaki ortak endüktans hesaplanacaktır, şek. 162.



Şek. 161



Şek. 162

Akımlar ayni yönde ise $\vec{ds_1} \cdot \vec{ds_2} = d\zeta_1\, d\zeta_2$ ve ters yönde ise $\vec{ds_1} \cdot \vec{ds_2} = -d\zeta_1\, d\zeta_2$ olacağından Neumann formülü yardımiyle

$$M = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{d\zeta_1\, d\zeta_2}{\sqrt{d^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}} = \pm \frac{\mu_0 d}{2\pi} \left[\frac{l}{d} \operatorname{Sh}^{-1} \frac{l}{d} - \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d}\right)^2} + 1 \right]$$

$$= \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} - \frac{\sqrt{l^2 + d^2} - d}{l} \right)$$

bulunur. $l \gg d$ için yaklaşık olarak

$$M \approx \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right)$$

yazılabilir.

Yukarıdaki formül vektör potansiyel yardımiyle de çıkarılabilir. 1 iletkeni ζ_2 noktasında

$$A_z(\zeta_2) = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_0^l \frac{d\zeta_1}{\sqrt{d^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}} = i_1 f(\zeta_2)$$

vektör potansiyelini meydana getirir. Diğer taraftan ζ_2 noktasında en-

düklenen alan $E_z = -\partial A_z/\partial t = -f(\zeta_2)di_1/dt$ olacağından

$$\int_0^l E_z\, d\zeta_2 = -M\,\frac{di_1}{dt}$$

yardımiyle ayni sonuç bulunur.

Ortak endüktans formülü iki çizgisel akım içindir. Bununla beraber tellerin yarıçapı aralarındaki uzaklıktan küçük oldukça formül yine kullanılabilir.

Son yaklaşık formülden dairesel kesitli bir telin dış endüktansını heeaplamak için faydalanılabilir. 1 telinin silindir eksenine ve 2 nin $\rho = a$ (yarıçap) çizgisine intibak ettiği farzedilirse $d = a$ olacağını gözönüne alarak $a \ll l$ için

$$L_0 = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{a} - 1\right)$$

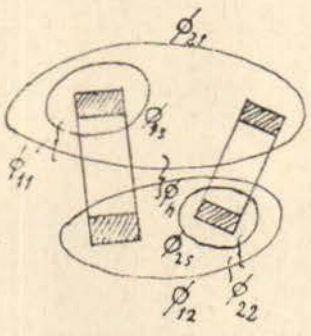
bulunur. Akımlar ayni yönde olduğundan pozitif işaret alınmıştır.

Bu formüller yardımiyle iki iletkenli hattın endüktansını da bulabiliriz. Seri bağlı sargıların eşdeğer endüktansı $L = L_1 + L_2 \pm 2|M|$ şeklinde hesaplanır. Gidiş ve dönüş tellerindeki akımların yönlerine göre uygun işareti alarak yarıçapları a ve b olan iki telin dış endüktansı için

$$L_0 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{\sqrt{ab}}$$

bulunur.

9 — İki sargı sisteminin endüktans katsayıları incelenecektir, şek. 163.



Şek. 163

1 ve 2 sargılarının sarım akıları ϕ_1 ve ϕ_2 ile gösterilirse

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_{1s} + \phi_{21} + \phi_{12} = \phi_{1s} + \phi_h = \phi_{11} + \phi_{12}\ ,\\ \phi_2 &= \phi_{2s} + \phi_{12} + \phi_{21} = \phi_{2s} + \phi_h = \phi_{22} + \phi_{21}\end{aligned}\right\} \tag{131}$$

yazılabilir. ϕ_{1s} ve ϕ_{2s}, kaçak akılarıdır. Her iki sargı ile ortak olan $\phi_h = \phi_{21} + \phi_{12}$ akısına ortak akı veya faydalı akı adı verilir. Kaçak endüktansları ve faydalı endüktanslar

$$\left.\begin{aligned}L_{1s} &= \frac{w_1\,\phi_{1s}}{i_1}\ ,\quad L_{2s} = \frac{w_2\,\phi_{2s}}{i_2}\ ,\\ L_{1h} &= \frac{w_1\,\phi_{21}}{i_1}\ ,\quad L_{2h} = \frac{w_2\,\phi_{12}}{i_2}\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

şeklinde târif edilir. Diğer taraftan

$$L_{11} = L_1 = \frac{w_1\,\phi_{11}}{i_1} = w_1^2\,G_{11}\ ,\quad L_{22} = L_2 = \frac{w_2\,\phi_{22}}{i_2} = w_2^2\,G_{22}\ ,$$

$$M = \frac{w_1\,\phi_{12}}{i_2} = \frac{w_2\,\phi_{21}}{i_1} = w_1\,w_2\,G_{12} = w_1\,w_2\,G_{21}$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned}L_{1h} &= \frac{w_1}{w_2}\,M\ ,\quad L_{2h} = \frac{w_2}{w_1}\,M\ ,\quad L_{1s} = L_1 - L_{1h} = L_1 - \frac{w_1}{w_2}\,M\ ,\\ L_{2s} &= L_2 - L_{2h} = L_2 - \frac{w_2}{w_1}\,M\ ,\quad M^2 = L_{1h}\,L_{2h}\ ,\quad L_{1h}/L_{2h} = (w_1/w_2)^2\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

bulunur (G_{11} , G_{22} , G_{12} , G_{21} magnetik iletkenlikler). Kaçak yoksa $L_{1s} = L_{2s} = 0$ ve $L_{1h} = L_1$, $L_{2h} = L_2$ olacağından

$$M = \pm\sqrt{L_1\,L_2} \tag{134}$$

elde edilir. Bu M nin alabileceği maksimum değerdir ve

$$k = \frac{|M|}{L_1\,L_2} = \sqrt{\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}\,\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}} \tag{135}$$

ye sargıların kuplaj katsayısı denilir. $|k| \leqq 1$ dir.

M nin en küçük değeri sıfırdır ($k=0$). Bu durumda iki sargı arasında hiç bir magnetik kuplaj yoktur.

Kaçak katsayısı

$$\sigma=1-k^2=1-\frac{M^2}{L_1L_2} \tag{136}$$

şeklinde târif edilir.

(133) ifadelerine göre kaçak endüktansları ve akıları negatif olabilir. Meselâ $L_1/w_1<M/w_2$ için $L_{1s}<0$ olacaktır. Bu ise $\phi_{11}<\phi_{21}$ olduğunu gösterdiğinden 1 sargısının sarım akısı 2 ile zincirlediği sarım akısından küçüktür.

İki sargı seri bağlanırsa $i_1=i_2=i$ olacağından

$$u=(L_1+L_2+M)\frac{di}{dt}$$

dır. Buradan eşdeğer endüktans için

$$L=L_1+L_2+2M \tag{137}$$

bulunur. Sargılar paralel bağlanırsa

$$i=i_1+i_2\ .\quad u=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}=L\frac{di_2}{di}+M\frac{di_1}{dt}$$

denklemleri yardımiyle

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

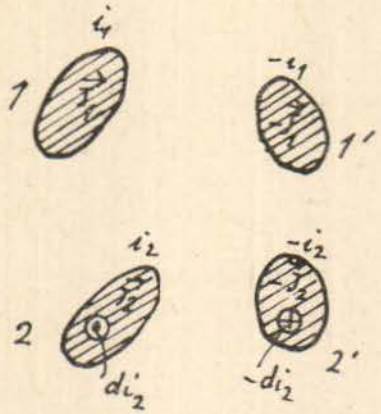
bulunur.

10 — İtetken sisteminin endüktans katsayıları hesaplanacaktır.

Şek. 164 de sonsuz uzun iki paralel hat görülmektedir. Alan iki boyutludur. 1—1′ hattından i_1 akımı geçerken 2—2′ hattında di_2, $-di_2$ akım tüblerinin meydana getirdiği çizgisel hat ile l uzunluğu boyunca

$$\phi_{21}=\oint_C \vec{A}\cdot\vec{ds}=A_{1z}(2)\,l-A_{1z}(2')\,l$$

akısı zincirlenir. C, iki kenarı tüblere intibak eden bir dikdörtgendir.



Şek. 164

$A_{1z}(2)$ ve $A_{1z}(2')$, 1—1′ hattının akım tübleri boyunca meydana getirdiği vektör potansiyellerdir. A_{1z} vektör potansiyeli

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi F_1}\int_{F_1} \ln r\, dF_1 + \frac{\mu_0 i_1}{2\pi F'_1}\int_{F'_1} \ln r\, dF'_1$$

yardımiyle hesaplanır. ϕ_{21} akısı i_2 nin yalnız di_2/i_2 parçası ile zincirlendiğinden toplam zincir akısındaki payı

$$d\psi_{21} = \frac{di_2}{i_2}\,\phi_{21}$$

olacaktır. $di_2/i_2 = dF_2/F_2 = dF'_2/F'_2$ olduğunu gözönüne alarak

$$\psi_{21} = \frac{l}{F_2}\int_{F_2} A_{1z}(2)\, dF_2 - \frac{l}{F'_2}\int_{F'_2} A_{1z}(2')\, dF'_2$$

$$= \frac{\mu_0 l i_1}{2\pi}\left(-\frac{1}{F_1 F_2}\int_{F_1}\int_{F_2} \ln r\, dF_1\, dF_2 + \frac{1}{F'_1 F_2}\int_{F'_1}\int_{F_2} \ln r\, dF'_1\, dF_2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{F_1 F'_2}\int_{F_1}\int_{F'_2} \ln r\, dF_1\, dF'_2 - \frac{1}{F'_1 F'_2}\int_{F'_1}\int_{F'_2} \ln r\, dF'_1\, dF'_2\right)$$

bulunur. Buradan $M_{21} = \psi_{21}/i_1$ yardımiyle ortak endüktans elde edilir. Bu ifadede

$$\frac{1}{F_1 F_2} \int_{F_1} \int_{F_2} \ln r \, dF_1 \, dF_2 = \ln g_{12}$$

vs. koyarak

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{g'_{12} \, g_{12}}{g_{12} \, g'_{12}}$$

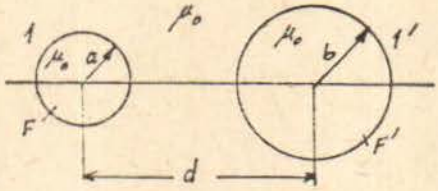
yazılabilir. g ler, kesitler arasındaki ortalama geometrik uzaklığı gösterir. Dairesel kesitler için ortalama uzaklıklar eksenler arasındaki uzaklığa eşit olduğundan

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d'_{12} \, d_{12}}{d_{12} \, d'_{12}}$$

bulunur. Bu formül yardımiyle iki paralel hattın ortak endüktansını hesaplayabiliriz. Ortak endüktans yarıçaplara bağlı değildir. Bu sonuçtan bir hattın özendüktansını hesaplamak için de faydalanılabilir. İki hattın idantik olduğunu kabul ederek 2—2′ hattının 1—1′ hattına intibak ettiği farzedilirse $F_2 \to F_1$, $F_2' \to F_1'$ ve $M \to L$ olacağından

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{g^2_{11'}}{g_{11} \, g_{1'1'}}$$

bulunur. Şek. 165 de görülen hat için $g_{11'} = d$ dir. $\ln g_{11}$ ve $\ln g_{1'1'}$



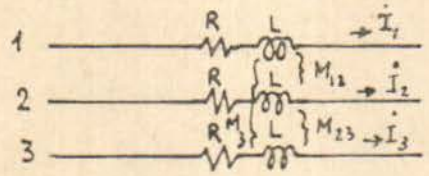
Şek. 165

hesaplanırsa $\ln g_{11} = \ln a - 0{,}25$, $\ln g_{1'1'} = \ln b - 0{,}25$ bulunacağından

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{\sqrt{ab}} \right)$$

elde edilir. Birinci terim iç endüktansı ve ikinci terim dış endüktansı gösterir.

11 — Üç fazlı hattın endüktans katsayıları incelenecektir, şek. 166.



Şek. 166

Akımlar simetrik olduğu takdirde gerilim düşümü fazörleri için

$$\dot{U}_1 = [R + j\omega(L + a^2M_{12} + aM_{31})]\,\dot{I}_1\,,$$

$$\dot{U}_2 = [R + j\omega(L + a^2M_{23} + aM_{12})]\,\dot{I}_2\,,$$

$$\dot{U}_3 = [R + j\omega(L + a^2M_{31} + aM_{23})]\,\dot{I}_3$$

bulunur ($a = e^{j2\pi/3}$). Simetrik hat için $M_{12} = M_{23} = M_{31} = M$ olacağından yuvarlak parantez içindeki ifadeler

$$L_s = L - M$$

şekline girer. Buna hattın bahis konusu işletme şekli için işletme endüktansı (servis endüktansı) adı verilir. L ve M için

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{a} - 1\right), \quad M = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{d} - 1\right)$$

koyarak

$$L_s = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{d}{a} + \frac{1}{4}\right)$$

bulunur.

II. GİRDAP AKIMLARI

48. Genel bilgi.

İletken ortamlar içinde meydana gelen endüksiyon akımlarına girdap akımı adı verilir. Çizgisel iletkenlerde akım yolu belli olduğu halde iletken cisimlerde akım yollarının hesabı oldukça güçtür. Girdap akımları değişen alan içindeki iletkenlerde ve stasyoner alan içinde hareket eden iletkenlerde meydana gelir. Bir iletkenden geçen alternatif akım da girdap akımlarının doğmasına sebep olur. Bu akım esas akıma eklenerek yüzey olayı denilen ve akımın esas itibariyle yüzeyden geçmesi şeklinde ortaya çıkan olayla karşılaşılır. Yüzey olayından dolayı iletkenin direnci artar. Girdap akımları iletken içinde kayıplara sebep olurlar. Bu akımlardan teknikte frenleme maksadiyle ve endüksiyon fırınlarında faydalanılmaktadır.

Bir az sonra görüleceği gibi girdap akımı problemlerini quasistasyoner olarak incelemek kabildir. Böylece homogen, izotrop ve lineer bir ortamda temel denklemler

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu\,\vec{J}, \quad \text{rot}\,\vec{J} = -\varkappa\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

şeklinde yazılabilir. İkinci denklem vektör potansiyel cinsinden $\vec{J} = -\varkappa \partial \vec{A}/\partial t$ şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemler yardımiyle meselâ $\vec{J}$ için

$$\Delta \vec{J} = \varkappa \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \tag{138}$$

diferansiyel denklemi bulunur. Diğer büyüklükler için de ayni denklem elde edilir. Girdap akımları bu diferansiyel denklemlerin, problemin sınır şartlarına uyan, çözümleri yardımiyle hesaplanır.

Büyüklükler zamanla harmonik olarak değiştikleri takdirde sembolik metoddan faydalanılır. Bu maksadla vektör fazör kavramını açıklaya-

lım. Her hangi bir vektörün anî değeri $\vec{a}$ ile gösterilirse bileşenlerin anî değerleri için harmonik değişme halinde

$$a_u = \sqrt{2}\, A_u \cos(\omega t - \varphi_u),\quad a_v = \sqrt{2}\, A_v \cos(\omega t - \varphi_v),\quad a_w = \sqrt{2}\, A_w \cos(\omega t - \varphi_w)$$

yazılabilir ($\vec{a} = \vec{u}_u a_u + \vec{u}_v a_v + \vec{u}_w a_w$). Bu ifadelerde A lar, bileşenlerin efikas değerlerini ve φ ler ise sıfır faz açılarını göstermektedir. Gerek A lar ve gerekse φ ler yalnız uzay koordinatlarının fonksiyonudurlar. Harmonik değişimin dairesel frekansı $\omega = 2\pi f$ dir. Kompleks notasyondan faydalanarak

$$\vec{a} = Re\{\sqrt{2}\,(\vec{u}_u \dot{A}_u + \vec{u}_v \dot{A}_v + \vec{u}_w \dot{A}_w)\, e^{j\omega t}\} = Re\{\sqrt{2}\ \bar{A}\ e^{j\omega t}\}$$

yazılabilir. Burada $\dot{A}$ lar

$$\dot{A}_u = A_u e^{j\varphi_u}\ .\ \dot{A}_v = e^{j\varphi_v}\ ,\ \dot{A}_w = A_w e^{j\varphi_w}$$

şeklindeki efikas deger fazörlerini ve

$$\bar{A} = \vec{u}_u \dot{A}_u + \vec{u}_v \dot{A}_v + \vec{u}_w \dot{A}_w$$

ise vektör fazörü göstermektedir. Şayet yukarıdaki ifadelerde $\sqrt{2}$ kaldırılırsa genlik fazörleri elde edilir. Genlik fazörlerini ve genlik vektör fazörünü $\dot{A}_{u0}$, vs. ve $\bar{A}_0$ şeklinde göstereceğiz ($\bar{A}_0 = \sqrt{2}\,\bar{A}$, $\bar{A}_{u0} = \sqrt{2}\,\dot{A}_u$, vs.).

Vektör fazörler yardımiyle quasistasyoner alanın temel denklemleri

$$\text{rot}\ \bar{H} = \bar{J}\ ,\ \text{rot}\ \bar{J} = -j\omega\varkappa\bar{B}$$

şekline girer. (138) diferansiyel denklemi ise

$$\Delta \bar{J} = j\omega\varkappa\mu\bar{J} \qquad (139)$$

şeklini alacaktır. Bir problemde her hangi bir büyüklük bulunduktan sonra diğer büyüklükleri Maxwell denklemleri yardımiyle bulmak kabil olur. Meselâ $\bar{J}$ bilindiği takdirde $\bar{H}$

$$\bar{H} = \frac{j}{\omega\varkappa\mu}\,\text{rot}\,\bar{J} \qquad (140)$$

yardımiyle hesaplanabilir.

Girdap akımlarının quasistasyoner olarak incelenebileceğini şöylece görebiliriz. Harmonik değişme için

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E} = \bar{J} + \bar{J}_D$$

yazılabilir. $\bar{J}/\bar{J}_D$ oranı $\varkappa/j\omega\varepsilon$ olacaktır. Madenlerde dielektrik sabitini tam olarak tâyin etmek güç olmakla beraber $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m alınabileceğinden meselâ bakır için $\varkappa = 5{,}6.10^7$ S/m koyarak

$$\frac{|\bar{J}|}{|\bar{J}_D|} = \frac{\varkappa}{\omega\varepsilon} \approx \frac{10^{18}}{f}$$

bulunur. Böylece çok yüksek frekanslara kadar deplasman akımının iletken akımından çok küçük olacağı anlaşılır. Madenlerin çoğunda $\varkappa > 10^6$ S/m olduğunu gözönüne alarak girdap akımlarının quasistasyoner olarak incelenebileceğini söyleyebiliriz.

Girdap akımı kayıpları şöylece hesaplanabilir:

rot $\bar{H} = \bar{J}$ denkleminin eşleniği

$$\text{rot}\,\bar{H}_k = \bar{J}_k$$

dır. Bu denklemi $\bar{E}$ ile ve rot $\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}$ denklemini de $\bar{H}_k$ ile skaler olarak çarptıktan sonra iki denklemi yekdiğerinden çıkararak

$$-\text{div}\,(\bar{E}\times\bar{H}_k) = \bar{E}.\bar{J}_k + j\omega\mu\bar{H}.\bar{H}_k = \frac{J^2}{\varkappa} + j\omega\mu H^2$$

bulunur. Bu ifadede

$$\bar{E}\times\bar{H}_k = \bar{S}\,,\quad \bar{p} = \frac{J^2}{\varkappa}\,,\quad \bar{w}_m = \frac{\mu H^2}{2}$$

koyarak

$$-\text{div}\,\bar{S} = \bar{p} + 2j\omega\bar{w}_m \qquad (141)$$

yazılabilir. $\bar{p}$, ortalama ısı gücü yoğunluğunu ve $\bar{w}_m$ ise ortalama magnetik enerji yoğunluğunu gösterir. $\bar{S}$ ye kompleks Poynting vektörü adı verilir. Diferansiyel denklemi V bölgesi üzerinden integre ederek diverjans teoremi yardımiyle ve normal yönünü içeri doğru alarak

$$\oint_F \bar{S}.d\vec{F} = \int_V \bar{p}\,dV + 2j\omega\int_V \bar{w}_m\,dV = \bar{P} + 2j\omega\bar{W}_m \qquad (142)$$

bulunur. Böylece kompleks Poynting vektörünün V bölgesini sınırlayan yüzeyden giren akısı hesaplanırsa reel kısmın bölgedeki ortalama ısı gücüne ve imajiner kısmın ise ortalama magnetik enerjinin iki katına eşit olacağı anlaşılır. Böylece ortalama ısı gücü için

$$\overline{P} = Re\left\{\oint_F \overline{S}\,.\,d\vec{F} = \frac{1}{\varkappa}\int_V J^2 dV = \frac{1}{2\varkappa}\int_V J_0^2 dV\right. \qquad (143)$$

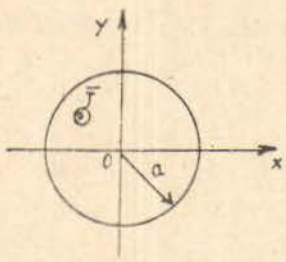
yazılabilir. J ve J_0, efikas değeri ve genligi göstermektedir. Metod esas itibariyle alternatif akımda kompleks gücün hesabı için faydalanılan metodun aynidir. Bilindiği gibi $\dot{N} = \dot{U}\dot{I}_k = P + jQ$ ifadesinde reel kısım aktif güce ve imajiner kısım ise reaktif güce eşittir.

49. Örnekler.

1 — Dairesel kesitli çok uzun iletkenden sinüzoidal akım geçtiğine göre yüzey olayı incelenecektir, şek. 167.

Silindirik simetriden dolayı $\vec{J} = \vec{k}\,J_z(\rho,t)$ ve $\vec{H} = \vec{u}_\phi H_\phi(\rho,t)$ olacaktır. Vektör fazörler

$$\overline{J} = \vec{k}\,\dot{J}_z(\rho)\,, \qquad \overline{H} = \vec{u}_\phi \dot{H}_\phi(\rho)$$



Şek. 167

dır. Böylece (139) yardımiyle $\dot{J}_z$ için sıfırıncı basamaktan

$$\frac{d^2\dot{J}_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\dot{J}_z}{d\rho} + k^2\dot{J}_z = 0 \quad (k^2 = -j\omega\varkappa\mu)$$

Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. (140) denklemine göre $\dot{H}_\phi(\rho)$

$$\dot{H}_\phi(\rho) = -\frac{1}{k}\frac{d\dot{J}_z}{d\rho}$$

olacaktır. Diferansiyel denklemin çözümü

$$\dot{J}_z(\rho) = \dot{C}\,J_0(k\rho) + \dot{D}\,N_0(k\rho)$$

dır. J_0 ve N_0, sıfırıncı basamaklan birinci ve ikinci nevi silindirik fonk-

siyonlardır. N_0 fonksiyonu (Neumann fonksiyonu) $\rho = 0$ için sonsuz olduğundan akım yoğunluğunun sınırlı değerde kalabilmesi için $\dot{D} = 0$ almak gerekir. Şayet içi boş bir silindir problemi bahis konusu olursa bu sabit sıfır olmayacaktır. Zira $\rho = 0$ çözüm bölgesine girmez. Böylece

$$\dot{J}_z(\rho) = \dot{C} J_0(k\rho)$$

yazılabilir. $\dot{C}$ sabiti sınır şartı yardımiyle bulunur. Telden geçen akımın fazörü $\dot{I}$ ile gösterilirse

$$i(t) = Re\{\sqrt{2}\,\dot{I}\, e^{j\omega t}\}$$

olacaktır. Amper kanununu $\rho = a$ yarıçaplı daireye uygulayarak $2\pi a \dot{H}_\phi(a) = \dot{I}$ yazılabileceğinden

$$\dot{H}_\phi(\rho) = \frac{\dot{C}}{k} J_1(k\rho)$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\dot{C} = \frac{k\dot{I}}{2\pi a} \frac{1}{J_1(ka)}$$

bulunur. Böylece $\dot{J}_z$, $\dot{E}_z$, $\dot{H}_\phi$ fazörleri için

$$\dot{J}_z(\rho) = \frac{k\dot{I}}{2\pi a} \frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)},$$

$$\dot{E}_z(\rho) = \frac{k\dot{I}}{2\pi\varkappa a} \frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)},$$

$$\dot{H}_\phi(\rho) = \frac{\dot{I}}{2\pi a} \frac{J_1(k\rho)}{J_1(ka)}$$

ifadeleri bulunur.

k sabiti kompleks olduğundan silindirik fonksiyonlar da komplekstir. Bu ise genliklerin ve fazların ρ ile değiştiğini gösterir. k için

$$k = \sqrt{-j\omega\varkappa\mu} = \sqrt{-j}\,|k| = (1-j)\frac{|k|}{2} \quad (|k| = \sqrt{\omega\varkappa\mu})$$

yazılabilir.

Bessel fonksiyonları

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + - \ldots ,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \ldots\right] = -\frac{dJ_0}{dx}$$

serilerine açılabillr. $J_0(k\rho)$ ve $J_0(ka)$ serilerini bölerek

$$j_z(\rho) = \frac{I}{\pi a^2}\left[1 + \frac{(ka)^2}{8}\left(1 - \frac{2\rho^2}{a^2}\right) + \frac{ka^4}{192}\left(2 - \frac{6\rho^2}{a^2} + \frac{3\rho^4}{a^4}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{(ka)^6}{64.144}\left(7 - \frac{24\rho^2}{a^2} + \frac{18\rho^4}{a^4} - \frac{4\rho^6}{a^6}\right) + \ldots\right]$$

veya

$$ka = \sqrt{-j}\,|k|\,a = 2\sqrt{2}\,y\sqrt{-j}\quad (y = |k|\,a/2\sqrt{2})$$

koyarak

$$j_z(\rho) = \frac{I}{\pi a^2}\left\{1 - \frac{y^4}{3}\left(2 - \frac{6\rho^2}{a^2} + \frac{3\rho^4}{a^4}\right) \ldots\right.$$

$$\left. + j\left[-y^2\left(1 - \frac{2\rho^2}{a^2}\right) + \frac{y^6}{18}\left(7 - \frac{24\rho^2}{a^2} + \frac{18\rho^4}{a^4} - \frac{4\rho^6}{a^6}\right) \ldots\right]\right\}$$

bulunur.

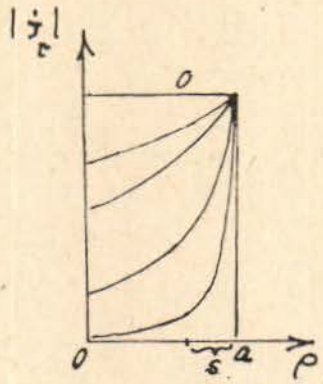
Çok alçak frekanslarda $|k|$ ve y çok küçük olacağından $j_z = I/\pi a^2$ = sab. bulunur. Böylece alçak frekanslarda akımın, tıpkı doğru akım gibi, kesite düzgün olarak dağılacağı anlaşılır.

Çok yüksek frekanslarda $|k|$ çok büyük olacağından Bessel fonksiyonlarının asemptotik ifadelelerinden faydalanarak akım yoğunluğunun modülü için

$$|j_z(\rho)| = \frac{|I|}{2\pi a}\,|k|\sqrt{\frac{a}{\rho}}\,e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}(a-\rho)}$$

yazılabilir. Bu ifadede $a - \rho = s$, yüzeyden olan uzaklığı göstermektedir. k değeri çok büyük olduğundan yoğunluğun değişiminde esas rolü üstel faktör oynar. Böylece yoğunluğun iletkenin içine doğru üstel olarak alçalacağı ve akımın pratik bakımdan yüzeydeki ince bir tabakadan geçeceği anlaşılır (yüzey olayı), şek. 168.

İletkenin alternatif akım direnci (aktif direnç) ve alternatif akım iç endüktansı



Şek. 168

$$\bar{P} = R_{\sim} I^2, \quad \bar{W}_m = \frac{1}{2} L_{i\sim} I^2$$

yardımiyle bulunur. Yüzeydeki kompleks Poynting vektörü

$$\bar{S} = \bar{E}(a) \times \bar{H}_k(a) = -\vec{u^0}\, \dot{E}_z(a)\, \dot{H}_{\phi k}(a)$$

olacağından l uzunluğu boyunca integre ederek

$$\oint_F \bar{S}.d\vec{F} = \frac{klI^2}{2\pi \varkappa a} \frac{J_0(ka)}{J_0(ka)} = \bar{P} + 2j\omega \bar{W}_m = (R_{\sim} + j\omega L_{i\sim}) I^2$$

bulunur. $R_0 = l/\pi \varkappa a^2$ (doğru akım direnci) koyarak

$$\frac{R_{\sim}}{R_0} = Re\left\{\frac{ka}{2} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}\right\},$$

$$\frac{\omega L_{i\sim}}{R_0} = Im\left\{\frac{ka}{2} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}\right\}$$

yazılabilir. Bu sonuç l uzunluğundaki gerilim düşümü için yazılabilecek olan

$$\dot{E}_z(a)\, l = (R_{\sim} + j\omega L_{i\sim})\, \dot{I}$$

denklemi yardımiyle de bulunabilir. $J_0(x)/J_1(x)$ için

$$\frac{J_0(x)}{J_1(x)} = \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{64 \cdot 48} - \cdots\right)$$

bulunacağından $x = ka = 2\sqrt{2}\, y \sqrt{-j}$ koyarak

$$\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} = \frac{2}{ka}\left[1 - \frac{(ka)^2}{8} - \frac{(ka)^4}{192} - \frac{(ka)^6}{64 \cdot 48} - \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{ka}\left[1 + \frac{y^4}{3} \cdots + j\left(y^2 - \frac{y^6}{6} \cdots\right)\right]$$

yardımiyle $y < 1$ için

$$\frac{R_\sim}{R_0} = 1 + \frac{y^4}{3} ,$$

$$\frac{\omega L_{i\sim}}{R_0} = y^2\left(1 - \frac{y^4}{3}\right)$$

veya

$$\frac{R_\sim}{R_0} = 1 + \frac{\pi^2}{48} \varkappa^2 \mu^2 f^2 a^4 ,$$

$$L_{i\sim} = \frac{\mu l}{8\pi}\left(1 - \frac{a^4}{384} \varkappa^2 \mu^2 \omega^2\right)$$

yazılabilir. $f = 0$ için (dogru akım) $R_\sim = R_0$, $L_{i\sim} = \mu l/8\pi$ olacaktır. Yüzey olayından dolayı aktif direnç yükselmekte ve iç endüktans alçalmaktadır.

Büyük $|k|a$ değerleri ($y > 1$) için

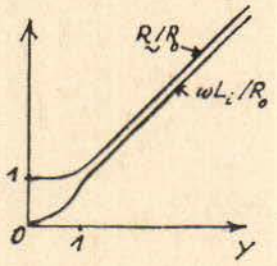
$$\frac{ka}{2} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \approx y + j y$$

yazılabileceğinden

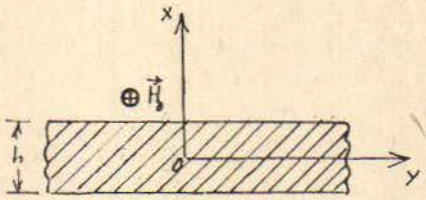
$$\frac{R_\sim}{R_0} = \frac{a}{2}\sqrt{\pi f \varkappa \mu} , \quad \frac{L_{i\sim}}{R_0} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\varkappa \mu}{\pi f}}$$

bulunur. Frekans yükseldikçe aktif direnç sınırsız olarak artarken iç

endüktans sıfıra yaklaşır. Akım yüzeydeki ince bir tabakadan geçer ve içteki bölge elektrik ve magnetik bakımdan ölü bölge haline gelir. Şek. 169 da aktif direncin ve reaktansın y ile değişimleri görülmektedir.



Şek. 169



Şek. 170

2 — Kalınlığı, genişliği ve uzunluğu yanında cok küçük olan levha üniform alternatif magnetik alan içine sokuluyor, şek. 170. Yüzey olayı incelenecektir.

Üniform alanın levhaya teğet olduğunu farzedelim. $\vec{H}_0 = \vec{k}\, H_0(t)$ ve $\overline{H}_0 = \vec{k}\,\overline{H}_0$ dır. Levha içindeki magnetik alan esas itibariyle orijinal alanın yönünde olacağından $\vec{H} = \vec{k}\, H_z(x,t)$ ve $\overline{H} = \vec{k}\,\dot{H}_z(x)$ olacaktır. Akım yoğunluğunun ise esas itibariyle yalnız y—bileşeni vardır ve $\vec{J} = \vec{j}\, J_y(x,t)$, $\overline{J} = \vec{j}\,\dot{J}_y(x)$ yazılabilir. Levha çok geniş ve ince olduğundan bütün büyüklükler yanlız x ve t ye bağlı olurlar. Böylece

$$\dot{J}_y(x) = -\frac{d\dot{H}_z}{dx} \quad (a)\,,$$

$$\frac{d^2\dot{H}_z}{dx^2} = j\,\omega\varkappa\mu\ \dot{H}_z \quad (b)$$

denklemleri bulunur. $k^2 = j\omega\varkappa\mu$ koyarak (b) yardımiyle

$$\dot{H}_z(x) = \dot{C}\,\mathrm{Ch}\,kx + \dot{D}\,\mathrm{Sh}\,kx$$

çözümü elde edilir. Problemin sınır şartları $\dot{H}_z(\pm h/2) = \dot{H}_0$ olacağından $\dot{D} = 0$ ve $\dot{C} = \dot{H}_0/\mathrm{Ch}\,(kh/2)$ bulunur. Böylece

$$\dot{H}_z(x) = \dot{H}_0 \frac{\operatorname{Ch} kx}{\operatorname{Ch} \frac{kh}{2}}$$

ve (a) yardımiyle

$$\dot{J}_y(x) = -\dot{H}_0 k \frac{\operatorname{Sh} kx}{\operatorname{Ch} \frac{kh}{2}}$$

bulunur. $\dot{E}_y(x) = \dot{J}_y(x)/\varkappa$ dır.

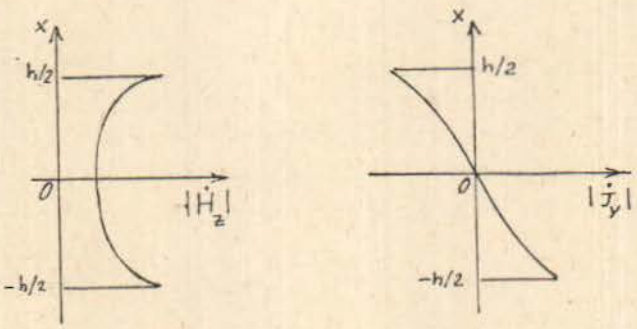
k kompleks olduğundan hiperbolik fonksiyonlar da komplekstir. k için

$$k = \sqrt{j\omega\varkappa\mu} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\varkappa\mu} = (1+j)\beta$$

yazarak ($\beta = |k|/\sqrt{2} = \sqrt{\omega\varkappa\mu/2}$) $\dot{J}_y(x)$ in modülü için

$$|\dot{J}_y(x)| = |\dot{H}_0|\,\beta\sqrt{2}\sqrt{\frac{\operatorname{Ch} 2\beta x - \cos 2\beta x}{\operatorname{Ch}\beta h + \cos\beta h}}$$

bulunur. $|\dot{H}_0|$, orijinal alanın efikas değeridir. Şek. 171 de modüllerin dağılışı görülmektedir.



Şek. 171

Büyük $|k|$ değerleri için

$$|\dot{J}_y(x)| = |\dot{H}_0|\,|k|\,e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{2}-x\right)}, \quad |\dot{H}_x(x)| = \frac{|\dot{J}_y(x)|}{|k|}$$

yazılabilir. Böylece yüksek frekanslarda akımın ve alanın yalnız alt ve üst yüzeylerdeki ince tabakalarda önemli değerler alacakları ve iç bölgenin elektrik ve magnetik bakımdan ölü bölge olacağı anlaşılır.

Birim hacimdeki ortalama ısı gücü

$$\overline{P} = \frac{1}{\varkappa h} \int_{-h/2}^{h/2} |\dot{j}_y(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\varkappa h^2} |\dot{H}_0|^2 F(\beta h)$$

olacaktır. $F(\beta h)$ fonksiyonu

$$F(\beta h) = 2\beta h \frac{\operatorname{Sh}\beta h - \sin\beta h}{\operatorname{Ch}\beta h + \cos\beta h} = \frac{(\beta h)^4}{3}\left[1 - \frac{17}{420}(\beta h)^4 + - \cdots\right]$$

şeklindedir. Böylece $\beta h < 1$ için

$$\overline{P} = \frac{1}{12} \varkappa \mu^2 h^2 \omega^2 |\dot{H}_0|^2$$

ve $\beta h \gg 1$ için $F(\beta h) \to 2\beta h$ olduğunu gözönüne alarak

$$\overline{P} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\varkappa}} |\dot{H}_0|^2$$

bulunur. Alçak frekanslarda ortalama kayıp gücünün kalınlığın ve frekansın karesi ile orantılı olarak artmasına karşılık yüksek frekanslarda frekansın kare kökü ile orantılı olduğu görülmektedir. Böylece alçak frekanslarda saç kalınlığını küçülterek kayıpları azaltmak kabil olur. Keza levhanın öziletkenliğini küçülterek kayıpların azalması sağlanabilir (silisyumlu levha).

3 -- Üniform magnetik alan içine sokulan yarı sonsuz iletkendeki yüzey olayı incelenecektir, şek. 172.

Üniform alan $\overline{H}_0 = \vec{j}\,\dot{H}_0$ dır. Levha içinde $\overline{H} = \vec{j}\,\dot{H}_y(z)$ ve $\overline{J} = \vec{i}\,\dot{J}_x(z)$ olacağından

$$\frac{d^2 \dot{J}_x}{dz^2} = j\omega\varkappa\mu \dot{J}_x$$

denklemini çözerek

$$\dot{J}_x(z) = \dot{C}\, e^{kz} + \dot{D}\, e^{-kz}$$

bulunur ($k^2 = j\varkappa\chi\mu$). $z \to \infty$ için $\dot{J}_x$ sınırlı kalacağından $\dot{C} = 0$ alarak

$$\dot{J}_x(z) = \dot{D}\, e^{-kz}$$

yazılabilir. (140) yardımiyle

$$\dot{H}_y(z) = \frac{\dot{D}}{k} e^{-kz}$$

bulunacağından $z = 0$ için $\dot{H}_y(0) = \dot{H}_0$ olacağını gözönüne alarak $\dot{D} = k\dot{H}_0$ ve buradan

$$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_0 e^{-kz}\,, \quad \dot{J}_x(z) = k\dot{H}_0 e^{-kz}\,, \quad \dot{E}_x(z) = \frac{\dot{J}_x(z)}{\chi}$$

bulunur. k için $k = (1+j)\beta$ koyarak ($\beta = \sqrt{\omega\chi\mu/2}$) yüzeydeki kompleks Poynting vektörü için

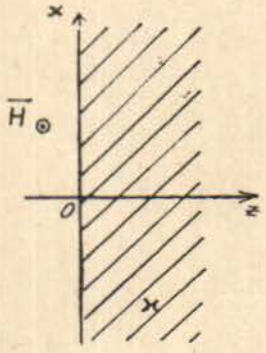
$$\bar{S} = \vec{k}\, \frac{(1+j)\beta}{\chi} |\dot{H}_0|^2$$

bulunur. Böylece birim yüzeye tekabül eden ortalama ısı gücü ve magnetik enerji için

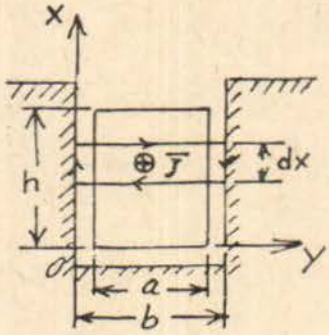
$$\overline{P} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\chi}} |\dot{H}_0|^2\,, \qquad \overline{W}_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2\omega\chi}} |\dot{H}_0|^2$$

elde edilir. $\overline{P}/\overline{W}_m = 2\omega$ dır.

4 — Elektrik makinalarının oluklarına yerleştirilen iletkenlerdeki yüzey olayı incelenecektir, şek. 173.



Şek. 172



Şek. 173

Akım yoğunluğu $\overline{J} = \vec{k}\, j_z(x)$ olacaktır. Demirin magnetik geçirgenliği çok büyük olduğundan alan çizgileri esas itibariyle oluk kenarlarına dik olurlar. Demirin çok küçük olan magnetik direnci ihmal edilebilir ve yalnız oluktaki magnetik gerilim hesaba katılır. Oluktaki alan çizgileri paralel doğrulardır. Böylece $\overline{H} = \vec{j}\, \dot{H}_y(x)$ yazılabilir. rot $\overline{E} = -j\omega\mu\, \overline{H}$ yardımiyle

$$\frac{d\dot{E}_z}{dx} = j\omega\mu\, \dot{H}_y \qquad (a)$$

bulunur. Amper kanunu şek. 173 de belirtilen dikdörtgen çevreye uygulanırsa

$$b\,[\dot{H}_y(x+dx) - \dot{H}_y(x)] = \frac{a}{b}\; j_z = \frac{a}{b}\,\varkappa\,\dot{E}_z$$

ve buradan

$$\frac{d\dot{H}_y}{dx} = \frac{a}{b}\, j_z = \frac{a}{b}\,\varkappa\,\dot{E}_z \qquad (b)$$

bulunur. (a) ve (b) arasında $\dot{E}_z$ yi yokederek

$$\frac{d^2\dot{H}_y}{dx^2} = j\,\frac{a}{b}\,\omega\,\varkappa\,\mu\,\dot{H}_y$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Çözüm daha önce görüldüğü gibi

$$\dot{H}_y(x) = \dot{C}\,\mathrm{Ch}\,kx + \dot{D}\,\mathrm{Sh}\,kx$$

dir. Ancak burada

$$k^2 = j\,\frac{a}{b}\,\omega\,\varkappa\,\mu$$

olacaktır. Sınır şartları $x = 0$ için $\dot{H}_y(0) = 0$ ve $x = h$ için $b\,\dot{H}_y(h) = \dot{I}$ şeklindedir. $\dot{I}$, iletkenden geçen aıternatif akımın fazörüdür. Buradan $\dot{D} = 0$ ve

$$\dot{C} = \frac{\dot{I}}{b\,\mathrm{Ch}\,kh}$$

bulunacağından

$$\dot{H}_y(x) = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\mathrm{Ch}\, kx}{\mathrm{Ch}\, kh}$$

elde edilir. (b) yardımiyle $\dot{J}_z(x)$ için

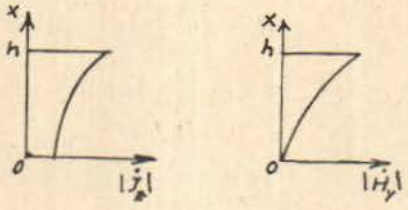
$$\dot{J}_z(x) = \frac{\dot{I}}{ah} kh \frac{\mathrm{Sh}\, kx}{\mathrm{Ch}\, kh}$$

bulunur. Efikas değerler

$$|\dot{J}_z(x)| = \frac{|\dot{I}|}{ah} \beta h \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\, 2\beta x + \cos 2\beta x}{\mathrm{Ch}\, 2\beta h - \cos 2\beta h}},$$

$$|\dot{H}_y(x)| = \frac{|\dot{I}|}{b\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\, 2\beta x - \cos 2\beta x}{\mathrm{Ch}\, 2\beta h - \cos 2\beta h}}$$

olacaktır $\left(\beta = |k|/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu}{2}}\right)$. Şek. 174 de modüllerin değişimleri görülmektedir. Eğrilerin incelenmesinden akımın ve alanın üst



Şek. 174

yüzeye doğru arttıkları anlaşılır. Büyük βh değerleri için akım iletkenin üst kenarındaki ince bir tabakadan geçer (yüzey olayı).

Birim uzunluktaki ortalama güç kaybı için

$$\overline{P} = \frac{1}{\varkappa} \int_0^a |\dot{J}_z(x)|^2 a\, dx$$

yardımiyle

$$\overline{P} = |\dot{I}|^2 \frac{1}{\varkappa ah} G(\beta h)$$

bulunur. Burada

$$G(\beta h) = \beta h \frac{\text{Sh } 2\beta h + \sin 2\beta h}{\text{Ch } 2\beta h - \cos 2\beta h}$$

dır. İletkenden efikas değere eşit bir doğru akım geçerse birim uzunluktaki güç kaybı

$$P_0 = \frac{1}{\varkappa ah} |\dot{I}|^2$$

olur. $G(\beta h)$ fonksiyonu $\beta h < 1$ için

$$G(\beta h) = 1 + \frac{4}{45} (\beta h)^4 - + \ldots$$

serisine açılabilir ve $\beta h \to \infty$ için $G(\beta h) \to \beta h$ olur. Böylece $\beta h < 1$ için

$$\overline{P} = P_0 \left[1 + \frac{4}{45} (\beta h)^4\right]$$

ve $\beta h \to \infty$ için

$$\overline{P} = \beta h P_0$$

yazılabilir. Güç kaybı doğru akımdakinden büyüktür ve $\beta h < 1$ için ω^2 ile ve $\beta h \to \infty$ için $\sqrt{\omega}$ ile orantılı olarak artar.

Olukta birden fazla iletkenin bulunması hali de benzer şekilde incelenir.

III. MAGNETİK ALANIN ENERJİSİ

50. Çizgisel devreler sisteminin magnetik enerjisi.

Bir çizgisel devrenin gerilim denklemi

$$e = Ri + \frac{d\psi}{dt}$$

dir. e, enerji kaynağının emk'ini ve ψ ise devre ile zincirlenen akıyı göstermektedir. R, devrenin toplam direncidir. İki tarafı idt ile çarparak

$$eidt = Ri^2 dt + id\psi = Ri^2 dt + dW$$

enerji denklemi bulunur. Bu denkleme göre dt zamanı zarfında kaynağın verdiği $eidt$ enerjisinin bir kısmı R direncinde ısı şeklinde ve geri kalan kısmı ise zincir akısının $d\psi$ kadar değişmesi için harcanmaktadır. Sistemde mekanik iş görülmüyorsa ve Joule kaybından başka her hangi bir kayıp yoksa $dW = id\psi$ enerjisi tamamen magnetik alandaki enerjinin artışı için harcanır ve bu değişimi dW_m ile göstererek

$$dW_m = id\psi$$

yazılabilir. Zincir akısının sıfırdan bir ψ değerine çıkması halinde magnetik alanda

$$W_m = \int_0^{\psi} id\psi \qquad (144)$$

enerjisi depo edilecektir. ψ akısı i ile orantılı olduğu takdirde (μ = sab.)

$$W_m = \frac{1}{2} i\psi = \frac{1}{2} Li^2 \qquad (145)$$

olacaktır. Şayet karakteristik lineer değilse integral grafik yardımiyle bulunur.

Bir devreler sisteminde

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\psi_k} i_k \, d\psi_k \tag{146}$$

ve μ = sab. için

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \psi_k \tag{147}$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{n} L_{ki} i_i$$

yazılabileceğinden

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{ik} i_i i_k \tag{148}$$

bulunur ($L_{ik} = L_{ki}$). Magnetik enerji akımların homogen karesel fonksiyonudur. $n = 2$ için $L_{11} = L_1$, $L_{22} = L_2$ ve $M_{12} = M_{21} = M$ koyarak

$$W_m = \frac{1}{2} (i_1\psi_1 + i_2\psi_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

bulunur. Bu ifadeden faydalanarak ortak endüktansın maksimum değeri kolayca bulunabilir. $M<0$ olsa bile $W_m>0$ olmak zorundadır. i_1=sab. için

$$\frac{\partial W_m}{\partial i_2} = L_2 i_2 + M i_1 = 0$$

olduğu vakit W_m minimum veya maksimum olur. $\partial^2 W_m/\partial i_2^2 = L_2 > 0$ olduğundan $i_2 = -M i_1/L_2$ için enerji minimum olarak

$$W_m = \frac{1}{2} i_1^2 \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

değerini alır. Buradan $W_m > 0$ şartı yardımiyle $M^2<L_1 L_2$ bulunur. Aynı sonuca i_2 = sab. için de varılabilir.

Enerjiden giderek μ=sab. için $M_{12}=M_{21}$ olacağını da gösterebiliriz. $i_2=0$ iken i_1 akımı sıfırdan i_1 değerine çıkarılırsa sistemde $L_1 i_1^2/2$ enerjisi toplanır. i_1 akımı geçerken i_2 akımı sıfırdan i_2 değerine çıkarılırsa sistemin enerjisi

$$\frac{1}{2} L_2 i_2^2 + i_1 \int_0^{\psi_{12}} d\psi_{12} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 \int_0^{i_2} di_2$$

$$= \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2$$

kadar artarak

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2$$

olur. İşlemin sırası değiştirilirse

$$W''_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{21} i_1 i_2$$

bulunur. İşlemin sırası enerjiyi değiştiremiyeceğinden $W'_m = W''_m$ ve buradan $M_{12} = M_{21}$ bulunur.

51. Magnetik enerji yoğunluğu.

Magnetik enerji alan büyüklükleri yardımiyle de ifade edilebilir. k. çevrenin zincir akısı için

$$\psi_k = \oint_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{s_k}$$

yazılabileceğinden

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \oint_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{s_k}$$

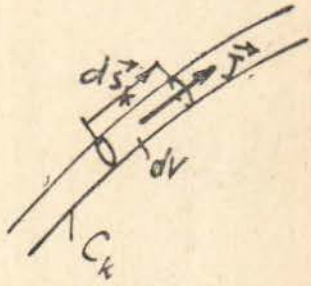
bulunur. Akım geçen bölge ince akım tüblerine ayrılırsa bunlara çizgisel akım gözüyle bakılabileceğinden $i_k d\vec{s_k} = \vec{J} dV$ koyarak ve toplam yerine integral alarak

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A}\, dV \quad (\mu = \text{sab.}) \tag{149}$$

bulunur, şek. 175. Bu denklemde $\vec{J} = \text{rot}\, \vec{H}$ koyarak diverjans teoremi yardımiyle

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B}\, dV - \frac{1}{2} \oint_F (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{F}$$

yazılabilir. İntegrasyon sonsuz uzay üzerinden yapıldığına göre ikinci terim sıfır olacağından



Şek. 175

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B}\, dV \qquad (\mu = \text{sab.}) \tag{150}$$

bulunur. (139) ve (150) denklemleri statik alandaki

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi\, dV\,, \qquad W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D}\, dV$$

denklemlerinin yerini almaktadır.

(150) den magnetik alanın enerji yoğunluğu için

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \quad (\mu = \text{sab.}) \tag{151}$$

bulunur. Bu da $w = \vec{E} \cdot \vec{D}/2$ nin yerine geçer.

(149) integrali yalnız $\vec{J} \neq 0$ olan bölgeler (iletkenler) üzerinden ve (150) integrali ise bütün alanı içine alan sonsuz uzay üzerinden hesaplanır.

$\vec{J}_1$ ve $\vec{J}_2$ dağılışları için $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ ve $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ koyarak ve $\mu = \text{sab.}$ için $\vec{H}_2 \cdot \vec{B}_1 = \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_2$ olacağını gözönüne alarak

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_1\, dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{H}_2 \cdot \vec{B}_2\, dV + \int_V \vec{H}_2 \cdot \vec{B}_1\, dV = W_1 + W_2 + 2W_{12}$$

bulunur. Keza $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ koyarak ve μ = sab. için

$$\int_{V_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A}_2\, dV_1 = \int_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_1\, dV_2 = \int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2\, dV_1 dV_2}{r_{12}}$$

olacağını gözönüne alarak

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A}_1\, dV_1 + \frac{1}{2}\int_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_2\, dV_2 + \int_{V_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A}_2\, dV_1 = W_1 + W_2 + 2W_{12}$$

yazılabilir. Bu ifadelerde ilk iki terim $\vec{J}_1$ ve $\vec{J}_2$ dağılışlarının öz enerjilerini ve üçüncü terim ise ortak enerjiyi gösterir. Bu sonuçlar kolayca genelleştirilebilir.

Magnetik alandaki enerjiyi Maxwell denklemleri yardımiyle de bulabiliriz. Ohm kanununa göre

$$\vec{J} = \varkappa (\vec{E} + \vec{E}_0)$$

dır. Bu denklemi $\vec{J}$ ile skaler olarak çarparak

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{J} = \frac{J^2}{\varkappa} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}$$

yazılabilir. Bu denklem

$$e\, i = R\, i^2 + \frac{dW_m}{dt}$$

şeklindeki makroskopik güç denkleminin diferansiyel ifadesidir.

Denklemi sonsuz uzay üzerinden integre ederek diverjans teoremi yardımiyle

$$\int_V \vec{E}_0 \cdot \vec{j}\, dV = \int_V \frac{J^2}{\varkappa}\, dV + \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \oint_F (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{F}$$

bulunur. Yüzey integrali sıfır olacağından

$$\int_V \vec{E}_0 \cdot \vec{j}\, dV = \int_V \frac{J^2}{\varkappa}\, dV + \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, dV$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{dW_m}{dt} = \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, dV$$

ve dolayısiyle

$$dW_m = \int_V \vec{H} \cdot d\vec{B}\, dV$$

bulunur. Bu denklemi 0 ile B arasında integre ederek

$$W_m = \int_0^B \int_V \vec{H} \cdot d\vec{B}\, dV = \int_V \left(\int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV$$

yazılabileceğinden enerji yoğunluğu için

$$w_m = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \qquad (152)$$

integrali elde edilir. Bu integral $\mu \neq$ sab. ve $\mu =$ sab. için caridir. $\mu =$ sab. için $\vec{B} = \mu \vec{H}$ koyarak $w_m = \vec{H} \cdot \vec{B}/2$ bulunur.

Tersine olarak $\mu =$ sab. için cari olan (150) denkleminden çizgisel devreler sisteminin enerji denklemine kolayca geçilebilir. (150) de $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$ koyarak

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\,dV + \frac{1}{2}\oint_F (\vec{H}\times\vec{A})\cdot d\vec{F}$$

yazılabileceğinden ikinci terimin sıfır olacağını gözönüne alarak (149) denklemi ve $\vec{J}\,dV = i\,d\vec{s}$ koyarak

$$W_m = \frac{1}{2}\,i\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\,i\,\psi$$

ve n çevreli sistem için (147) denklemi bulunur.

Yukarıda enerji için bulunan ifadeler yardımiyle

$$L_1 = \frac{2W_1}{i_1^2}\,,\; L_2 = \frac{2W_2}{i_2^2}\,,\; M = \frac{2W_{12}}{i_1 i_2} \tag{153}$$

yazılabilir. Bir akım dağılışı için

$$L = \frac{2W_m}{i^2} \tag{154}$$

olacaktır. İntegrasyon bölgesi iletkenin içinde ve dışında olmak üzere ikiye ayrılırsa iç ve dış endüktanslar için

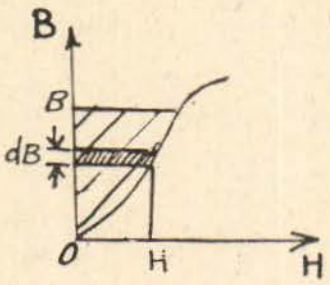
$$\left.\begin{aligned} L_i &= \frac{2W_i}{i^2} = \frac{\mu}{i^2}\int_{V_i} H_i^2\,dV_i = \frac{1}{\mu i^2}\int_{V_i} B_i^2\,dV_i\,, \\ L_0 &= \frac{2W_0}{i^2} = \frac{\mu}{i^2}\int_{V_0} H_0^2\,dV_0 = \frac{1}{\mu i^2}\int_{V_0} B_0^2\,dV_0 \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

yazılabilir. Bazı hallerde endüktansların enerji yardımiyle hesabı akı metodundan daha elverişlidir.

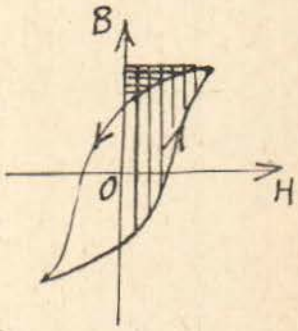
52. Histerezis kaybı.

Ferromagnetik malzemelerde B ile H arasındaki analitik bağıntı bilinmediğinden (152) integrali grafik yardımiyle hesaplanır. Şek. 176 dan görüleceği gibi enerji yoğunluğu taranan yüzeyle orantılıdır ve orantı katsayısı eksenlerin ölçeklerine bağlıdır.

Tam bir miknatıslanma periyodu için harcanan ve enerji kay-



Şek. 176



Şek. 177

nağı tarafından karşılanan enerji (birim hacim için) histerezis büklümünün yüzeyi ile orantılıdır, şek. 177. Zira $0 \rightarrow H_{max}$ miknatıslanmasında harcanan enerji düşey taranan yüzeyle orantılı olduğu gibi $H_{max} \rightarrow 0$ değişimi esnasında $dB < 0$ olduğundan yatay olarak taranan enerji kaynağa geri verilecektir. Ayni şeyler $0 \rightarrow -H_{max} \rightarrow 0$ yarım periyodu için de söylenebileceğinden tam miknatıslanmada birim hacim için harcanan enerjinin histerezis büklümünün yüzeyi ile orantılı olacağı anlaşılır. Bu enerji ısıya değişir ve dolayısiyle bir kayıptır.

Pratikte histerezis kaybını hesaplamak için yaklaşık formüller kullanılmaktadır. Steinmetz formülü

$$w_m = \eta B_m^n \tag{156}$$

şeklindedir. η ile n, malzemeye bağlı olan değerlerdir ve B_m = maksimum endüksiyondur. Richter formülü ise

$$w_m = a B_m + b B^2_m \tag{157}$$

şeklindedir. Enerji yoğunluğunu f frekansı ve V hacmi ile çarparak alternatif akımdaki

$$P_h = w_m f V \tag{158}$$

histerezis gücü bulunur.

53. Örnekler.

1 — Sonsuz uzun silindirin iç endüktansı bulunacaktır.

Silindir içinde

$$H_i = \frac{i}{2\pi a^2}\rho$$

olduğundan $dV = 2\pi\rho\, l d\rho$ koyarak

$$W_i = \frac{\mu l i^2}{4\pi a^4}\int_0^a \rho^3\, d\rho = \frac{\mu l i^2}{16\pi}$$

ve buradan

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi}$$

bulunur.

2 — Bir damarlı kablonun endüktansı hesaplanacaktır, şek. 155.

Şek. 155 de görülen bölgelerdeki magnetik endüksiyonlar

$$B_1 = \frac{\mu_1 i}{2\pi a^2}\rho \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \quad , \quad B_3 = \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho}\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2} \quad , \quad B_4 = 0$$

olacağından bu bölgelerdeki enerjiler için

$$W_1 = \frac{\mu_1 l i^2}{16\pi}$$

$$W_2 = \frac{1}{2\mu_0}\int_{V_2} B_2^2\, dV_2 = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \ ,$$

$$W_3 = \frac{1}{2\mu_2}\int_{V_3} B_3^2\, dV_3 = \frac{\mu_2 l i^2}{4\pi}\int_b^c \left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)^2 \frac{d\rho}{\rho} =$$

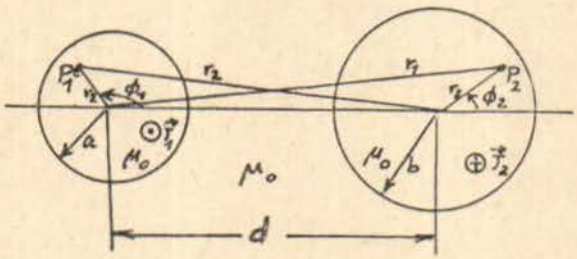
$$= \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi(c^2-b^2)}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2-b^2}{4}\right)$$

ve $W_4 = 0$ bulunur. Böylece

$$L = \frac{2}{i^2}(W_1 + W_2 + W_3) = \frac{l}{2\pi}\left[\frac{\mu_1}{4} + \mu_0 \ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_2}{c^2-b^2}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2-b^2}{4}\right)\right]$$

elde edilir.

3 — İki iletkenli hattın endüktansı hesaplanacaktır, şek. 178.



Şek. 178

Sistemin toplam enerjisi

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A}\, dV_1 + \frac{1}{2}\int_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}\, dV_2$$

dir ve iletkenlerin içindeki vektör potansiyeller için

$$A_{1z} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(1 - \frac{r_1^2}{a^2} + 2\ln\frac{r_2}{a}\right) + k$$

$$A_{2z} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(1 - \frac{r_2^2}{b^2} + 2\ln\frac{r_1}{b}\right) + k$$

bulunur (k=sab.). Birinci integralde $\vec{A} = \vec{k}\, A_{1z}$, $\vec{J}_1 = \vec{k} i/\pi a^2$, $dV_1 = l r_1 dr_1 d\phi_1$ koyarak

$$\int_{V_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{A}\, dV_1 = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{a}\right) + k\, l\, i$$

ve ikinci integralde $\vec{A} = \vec{k}\, A_{2z}$, $\vec{J}_2 = -\vec{k}\, i/\pi b^2$, $dV_2 = l r_2\, dr_2\, d\phi_2$ koyarak

$$\int_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}\, dV_2 = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{b}\right) - k l i$$

bulunacağından

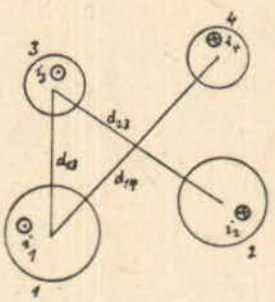
$$W_m = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{\sqrt{ab}}\right)$$

ve buradan

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{\sqrt{ab}}\right)$$

elde edilir.

4 — iki paralel hattın ortak endüktansı hesaplanacaktır, şek. 179. $i_2 = -i_1$ ve $i_4 = -i_3$ dür.



Şek. 179

Ortak endüktans

$$M = \frac{1}{i_1 i_3}\left(\int_{V_3} \vec{J}_3 \cdot \vec{A}\, dV_3 + \int_{V_4} \vec{J}_4 \cdot \vec{A}\, dV_4\right)$$

yardımiyle hesaplanabilir. $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ koyarak ve

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln r_1 + k_1 ,$$

$$A_{2z} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln r_2 + k_2$$

olduğunu gözönüne alarak hesaplar yapılırsa

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d_{14}\, d_{23}}{d_{13}\, d_{24}}$$

bulunur.

IV. MAGNETİK ALANDAKİ KUVVETLER

54. Elektrodinamik kuvvetler.

Magnetik alan bir kuvvet alanıdır ve akım taşıyan iletkenlere ve magnetik cisimlere yaptığı kuvvet tesiriyle varlığını belli eder. Alanın kaynağı akım taşıyan iletkenler veya magnetik cisimler olabilir. İletkenler arasındaki kuvvetlere literatürde elektrodinamik kuvvet adı verilmektedir.

n çevreli sistemde her hangi bir iletken alan kuvvetinin tesiriyle $\vec{ds}$ kadar kayarsa bu sırada $dA = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ mekanik işi görülür. Diğer çevrelerin sabit kaldıkları ve ısı kaybından başka bir enerji kaybının bulunmadığı farzedilirse çevreler sisteminin enerji denklemi

$$\sum_k e_k i_k dt = \sum_k R_k i^2_k dt + \sum_k i_k d\psi_k$$

şeklinde olacaktır. Sistemde mekanik iş görüldüğünden ikinci terim için

$$\sum_k i_k d\psi_k = dW_m + dA$$

yazmak kabildir. Böylece enerji kaynaklarının ısı kaybını, magnetik enerjideki dW_m artışını ve dA mekanik işini karşıladıkları anlaşılır.

İki özel halden faydalanarak $\vec{F}$ kuvveti kolayca bulunur. İlk önce ψ_k = sab. olduğunu farzedelim. $d\psi_k = 0$ olacağından

$$\sum_k i_k d\psi_k = 0$$

ve dolayısiyle

$$\sum_k e_k i_k dt = \sum_k R_k i^2_k dt$$

olacaktır. Buradan $\psi_k = \text{sab.}$ için enerji kaynaklarının yalnız ısı kaybını karşılayacakları görülür. Diğer taraftan

$$dW_m + dA = 0$$

olacağından $dA = -dW_m$ ve dolayısiyle

$$\vec{F} = -(\text{grad } W_m)_{\psi_k = \text{sab.}} \tag{159}$$

bulunur. $dA > 0$ olduğundan $dW_m < 0$ dır. Mekanik iş alanın enerjisi tarafından karşılanır ve bu sırada alanın enerjisi azalır. Kartezyen koordinatlarda kuvvetin bileşenleri için

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\psi_k = \text{sab.}}, \\ F_y &= -\left(\frac{\partial W_m}{\partial y}\right)_{\psi_k = \text{sab.}}, \\ F_z &= -\left(\frac{\partial W_m}{\partial z}\right)_{\psi_k = \text{sab.}} \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

olacaktır. Şayet uzunluklar yerine açılar (dönme hareketi) alınırsa kuvvet bileşenleri yerine moment bileşenleri gelecektir. Enerji fonksiyonu bilindiği takdirde yukarıdaki denklemler yardımiyle kuvvetleri ve momentleri hesaplamak kabil olur.

İkinci özel hal olarak $i_k = \text{sab.}$ tutulduğunu farzedelim. Bu durumda

$$\sum_k i_k \, d\psi_k \neq 0$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k i_k \, \psi_k$$

yardımiyle $i_k = \text{sab.}$ için

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_k i_k \, d\psi_k$$

bulunur. Bunu

$$\sum_k i_k \, d\psi_k = dW_m + dA$$

ile karşılaştırarak $dA = dW_m$ bulunacağından

$$\vec{F} = + (\text{grad } W_m)_{i_k = \text{sab.}} \tag{161}$$

elde edilir. Meselâ F_x bileşeni için

$$F_x = + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i_k = \text{sab.}}$$

bulunur.

Sistemde mekanik iş görülünce magnetik enerji ayni miktar kadar artacağından enerji kaynakları ısı enerjisinden başka yarısı mekanik iş için ve diğer yarısı da alanın enerjisini arttırmak için harcanan enerjiyi karşılamak zorundadırlar. Mekanikte iş görüldüğü vakit potansiyel enerji azalacağından negatif magnetik enerjinin potansiyel enerji rolünü oynadığı anlaşılır.

Her iki formülle ayni sonuç bulunacağından

$$\vec{F} = - (\text{grad } W_m)_{\psi_k = \text{sab.}} = + (\text{grad } W_m)_{i_k = \text{sab.}} \tag{162}$$

olacaktır.

$n = 1$ için (bir çevre)

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\psi^2}{2L}$$

yazılabilir. Buradan $i = \text{sab.}$ için

$$\vec{F} = \frac{i^2}{2} \text{ grad } L$$

ve bileşenler için

$$F_x = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \tag{163}$$

vs. bulunur. $\psi = \text{sab.}$ için

$$\vec{F} = - \frac{\psi^2}{2} \text{ grad} \left(\frac{1}{L}\right)$$

ve

$$F_x = \frac{\psi^2}{2L^2} \frac{\partial L}{\partial x} \tag{164}$$

vs. olacaktır. $\psi = Li$ yardımiyle bulunan sonuçların ayni olduğu kolayca görülebilir. Meselâ i = sab. için

$$dA = \frac{i^2}{2}\, dL = \frac{i}{2}\, d\psi$$

yazılabilir. Buradan $dL>0$ ve $d\psi>0$ olacağı ve dolayısiyle elektrodinamik kuvvetin çevrenin endüktansını ve zincir akısını arttıracak yönde tesir edeceği anlaşılır. Çevre, endüktansı artacak tarzda şekil almağa zorlanır.

$n = 2$ için (iki çevre)

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

olduğundan L = sab. farzederek meselâ i = sab. için

$$\vec{F} = i_1 i_2 \operatorname{grad} M$$

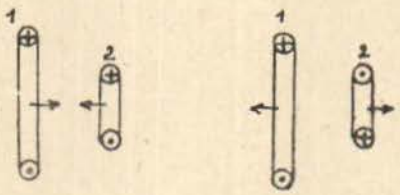
ve bileşenler için

$$F_x = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x} \tag{165}$$

vs. bulunur. dA için

$$dA = i_1 d\psi_{12} = i_2 d\psi_{21}$$

yazılabilir. Şek. 180 de görülen paralel çevreler için $M=M(x)$ olacağın-



Şek. 180

dan kuvvetin yalnız F_x bileşeni vardır. $i_1>0$ için $d\psi_{12}>0$ ve $i_1<0$ için $d\psi_{12}<0$ olmak zorundadır. Ayni şeyler $i_2>0$ ve $i_2<0$ için $d\psi_{21}$ için de söylenebilir. Buradan, elektrodinamik kuvvetin akım yönlerine pozitif

olarak bağlı olan (sağ sistem) ortak akıları arttıracak yönde tesir ettiği anlaşılır. Soldaki akım yönlerine göre bir çekme kuvveti ve sağdaki yönlere göre ise bir itme kuvveti bahis konusu olacaktır. Çevrelerin öz akıları da gözönüne alınırsa kuvvetin bu akıları arttıracak şekilde tesir ettiği söylenebilir. Zira ikinci halde negatif ortak akının azalması çevre ile pozitif zincirlenen akının artmasına sebep olacaktır. Şayet çevreler kayma yerine dönme hareketi yapıyorlarsa ayni şeyler cari olur. Çevreler ile zincirlenen akılar maksimum olunca sistem kararlı denge durumuna ulaşır.

Yukarıdaki sonuçlar kolayca genelleştirilebilir. n çevreli sistemde

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} i_i i_k$$

koyarak meselâ F_x için

$$F_x = + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \right)_{i = \text{sab.}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k i_i i_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x} \tag{166}$$

yazılabilir. Sistemde yalnız j çevresinin hareket edebildiği ve diğerlerinin sabit kaldığı farzedilirse bu sırada yalnız L_{jk} ve L_{kj} katsayıları değişeceğinden bu çevreye tesir eden elektrodinamik kuvvetin F_{jx} bileşeni için

$$F_{jx} = i_j \sum_k i_k \frac{\partial L_{jk}}{\partial x_j} \tag{167}$$

bulunur. Bu ifadede

$$\psi_j = \sum_k L_{jk} i_k$$

koyarak

$$F_{jx} = i_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} \tag{168}$$

yazılabilir. Buradan, endisi kullanmayarak

$$dA = i \, d\psi \tag{169}$$

bulunur. Alan kuvveti dA işini görünce zincir akısı $d\psi$ kadar artar. Şayet çevrede enerji kaynağı yoksa akı değişince

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\psi}{dt}$$

endüksiyon akımı akar. Sonsuz küçük dt zamanı zarfında akımın sabit kaldığı kabul edilebileceğinden

$$dA = -\frac{dt}{R}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

bulunur. $dA<0$ olduğundan endüksiyon akımının harekete karşı koyan kuvvetlerin ortaya çıkmasına sebep olduğu anlaşılır. Bu ise, Lenz kaidesine uyan bir sonuçtur.

$\vec{B}$ alanının içinde bulunan bir çevre alan kuvvetinin tesiriyle $\vec{dr}$ kadar kayınca $\vec{ds}$ uzunluk elemanı $\vec{dr}\times\vec{ds}$ yüzeyini süpüreceğinden zincir akısı

$$d\psi = \vec{B}\cdot(\vec{dr}\cdot\vec{ds}) = \vec{dr}\cdot(\vec{ds}\times\vec{B})$$

kadar artar. Bu sırada i = sab. kaldığı farzedilirse alan kuvveti

$$dA = \vec{dF}\cdot\vec{dr} = i\,d\psi = i\,\vec{dr}\cdot(\vec{ds}\times\vec{B})$$

işini görür. Buradan $\vec{ds}$ elemanına tesir eden kuvvet için

$$\vec{dF} = i(\vec{ds}\times\vec{B})$$

bulunur. Bütün çevreye tesir eden bileşke kuvvet

$$\vec{F} = i\oint_C \vec{ds}\times\vec{B} \qquad (170)$$

integrali yardımiyle hesaplanır. Şayet magnetik alan üniformsa

$$\oint_C \vec{ds} = 0$$

olduğunu gözönüne alarak $\vec{F} = 0$ bulunur. Üniform alan içinde kapalı çevreye tesir eden bileşke kuvvet sıfırdır.

$\vec{J}$ dağılışı için $i\,\vec{ds} = \vec{J}\,dV$ koyarak

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}\, dV \tag{171}$$

bulunur.

$\vec{B}$ alanı içinde $\vec{v}$ hızı ile hareket eden q yüküne

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{172}$$

kuvveti tesir eder. Ortamda $\vec{E}$ alanı da varsa

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{173}$$

olacaktır (Lorentz kuvveti).

$\vec{ds}$ elemanına tesir eden $d\vec{F}$ kuvvetinin 0 noktasına göre momenti $d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F}$ olacağından integre ederek

$$\vec{M} = i \oint_C \vec{r} \times (\vec{ds} \times \vec{B}) \tag{174}$$

bulunur, şek. 181. Bu ifade

$$\vec{M} = i \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{B})\, \vec{ds} - i \oint_C \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{ds})$$

şeklinde yazılırsa üniform alanda ikinci terimin sıfır olacağını gözönüne alarak $\vec{B}$ = sab. için

$$\vec{M} = i \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{B})\, \vec{ds} \tag{175}$$

bulunur. Üniform alanda bileşke kuvvet sıfır olmakla beraber bileşke moment sıfırdan farklıdır. Diğer taraftan

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{B})\, d\vec{s} = \oint_F d\vec{F} \times \text{grad}\, (\vec{r} \cdot \vec{B})$$

yazılabileceğinden

$$\vec{M} = i \int_F d\vec{F} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{176}$$

bulunur. Burada $\vec{m}$,

$$\vec{m} = i \int_F d\vec{F}$$

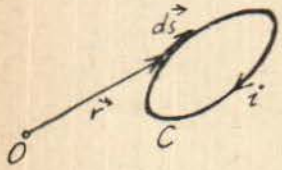
dir ve çevrenin magnetik momentini gösterir.

$\vec{J}$ dağılışı için moment

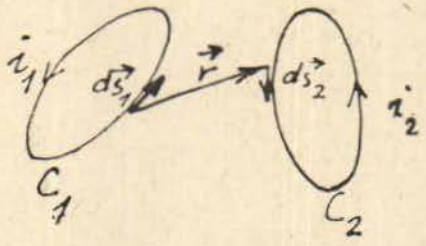
$$\vec{M} = \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B})\, dV \tag{177}$$

olacaktır.

Şek. 182 de $i_1 d\vec{s}_1$ akım elemanı $i_2 d\vec{s}_2$ elemanı üstüne



Şek. 181



Şek. 182

$$i_2 (d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_1) = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \vec{r})}{r^3}$$

kuvvet tesirini yapar. $i_2 d\vec{s}_2$ nin $i_1 d\vec{s}_1$ üstüne tesiri ise

$$i_1 (\vec{ds_1} \times \vec{dB_2}) = -\frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \frac{\vec{ds_1} \times (\vec{ds_2} \times \vec{r})}{r^3}$$

olacaktır. Stasyoner ve quasistasyoner magnetik alanda div $\vec{J} = 0$ olduğundan elemanlar için bulunan bu diferansiyel kuvvetlerin fiziksel anlamı yoktur. Zira akımlar daima kapalıdır. Diferansiyel kuvvetler genel olarak eşit değildir. Bu ise ilk bakışta mekanikteki üçüncü Newton prensibine aykırı düşmektedir. Bununla beraber çevrelere tesir eden integral kuvvetleri hesaplanırsa prensibin yerine geldiği görülür. Bu bakımdan da elemanlar arası kuvvetlerin fiziksel anlamı olmadığını söyliyebiliriz.

Çevrelere tesir eden bileşke kuvvetler için integrasyonla

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{ds_1} \times (\vec{ds_2} \times \vec{r})}{r^3}, \\ \vec{F}_2 &= \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{ds_2} \times (\vec{ds_1} \times \vec{r})}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad (178)$$

bulunur. İkili vektörel çarpımları transforme ederek ve $\vec{r}/r^3 = -\text{grad}\,(1/r)$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\vec{ds_1} \cdot \vec{ds_2})\vec{r}}{r^3} = -\vec{F}_2 \quad (179)$$

elde edilir. Böylece Newton prensibinin sağlandığı anlaşılır.

Çevreler arasındaki elektrodinamik kuvvetler enerji yardımiyle de bulunabilir. Meselâ C_2 çevresine tesir eden kuvvet için

$$\vec{F}_2 = \text{grad}_2\, W_m = i_1 i_2\, \text{grad}_2\, M$$

yazılabileceğinden Neumann formülü yardımiyle yukarıdaki sonuç bulunur.

55. Demirli sistemlerdeki mekanik kuvvetler.

Şek. 183 de görülen elektromiknatısın kutupları arasındaki çekme kuvvetini $\mu = \text{sab.}$ farzederek meselâ

$$F = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\psi = \text{sab.}}$$

yardımiyle hesaplayalım. $\psi = \text{sab.}$ için $B = \text{sab.}$ olacaktır. Sistemin toplam magnetik enerjisi için

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\frac{Sl}{\mu_r} + 2Sx\right)$$

yazılabileceğinden $(l = l_1 + l_2)$ $\mu_r = \text{sab.}$ için

$$F = -\frac{B^2}{2\mu_0} S = -\frac{BH}{2} S = -\frac{\mu_0 H^2}{2} S$$

bulunur. Bu beher kutup başına isabet eden kuvvetdir. Negatif işareti kuvvetin, kutuplar arasındaki uzaklığı küçültecek yönde tesir ettiğini gösterir. Ayni sonucu $i = \text{sab.}$ için

$$F = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx}$$

yardımiyle de bulabiliriz. Sistemin endüktansı

$$L = L(x) = \frac{w^2}{l/\mu S + 2x/\mu_0 S}$$

olduğundan türevi hesaplayarak

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{2w^2}{\mu_0 S}\frac{1}{(l/\mu S + 2x/\mu_0 S)^2}$$

ve buradan

$$F = -\frac{\phi^2}{2\mu_0 S} = -\frac{B^2}{2\mu_0} S$$

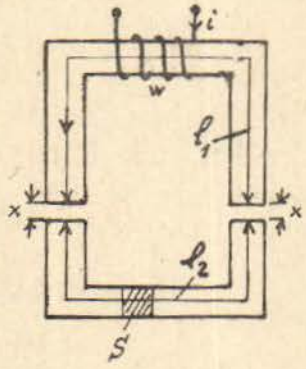
bulunur.

Kutupların birim yüzeyine tesir eden kuvvet

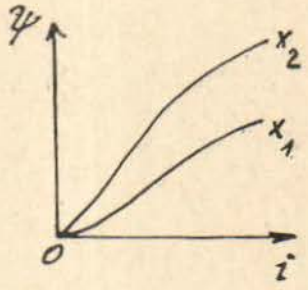
$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

olacaktır. Bu ise hava aralığındaki enerji yoğunluğudur. Bu sonuçlar sürekli miknatıslar için de caridir.

$\mu \neq$ sab. için yukarıdaki hesaplar uygulanamaz. Kutuplar arasındaki uzaklığın her hangi bir değeri için magnetik enerji $\psi = \psi(i)$ karakteristiği yardımiyle bulunur. Hava aralığı küçüldükçe relüktans küçüleceğinden karakteristik yukarı doğru kayacaktır, şek. 184. Hava aralığının x_1, x_2 değerlerine tekabül eden akılar ψ_1, ψ_2 ile gösterilirse bu durumlardaki enerjiler



Şek. 183



Şek. 184

$$W_1 = \int_0^{\psi_1} id\psi \quad , \quad W_2 = \int_0^{\psi_2} id\psi$$

olacaktır. Diğer taraftan $dA = id\psi - dW_m$ olduğundan x_1, ψ_1 durumundan x_2, ψ_2 durumuna geçiş sırasında görülen mekanik iş için

$$A = \int_{x_1}^{x_2} id\psi - \int_{x_1}^{x_2} dW_m = \int_{x_1}^{x_2} id\psi - (W_2 - W_1)$$

bulunur.

ψ = sab. için $dA = -dW_m$ ve

$$A = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2$$

olacaktır. $\vec{F} = -(\text{grad } W_m)_{\psi = \text{sab.}}$ olduğundan μ = sab. için bulunan sonucun aynidir. Şek. 185 de görüldüğü gibi bu çalışma şeklinde mekanik iş taranan yüzeyle orantılıdır. Daha önce de görüldüğü gibi enerji kaynağı yalnız sargıdaki ısı kaybını karşılar ve mekanik iş alan enerjisi tarafından karşılanır. Taranan yüzeyi ölçerek $F\Delta x = A$ yardımiyle kuvvet hesaplanabilir.

i = sab. için

$$\int_{x_1}^{x_2} id\psi = i \int_{x_1}^{x_2} d\psi = i(\psi_2 - \psi_1)$$

olacağından

$$A = i(\psi_2 - \psi_1) - (W_2 - W_1) = (i\psi_2 - W_2) - (i\psi_1 - W_1)$$

bulunur. Şayet

$$W_c = i\psi - W_m$$

şeklinde yeni bir W_c fonksiyonu târif edilirse

$$A = W_{c2} - W_{c1}$$

yazılabilir. W_c nin diferansiyeli $dW_c = d\psi - dW_m$ dir. Diğer taraftan

$$dW_m = d\int_0^{\psi} id\psi = d\left(i\psi - \int_0^{i} \psi di\right) = id\psi - d\int_0^{i} \psi di$$

yazılabileceğinden

$$W_c = \int_0^{i} \psi di \qquad (180)$$

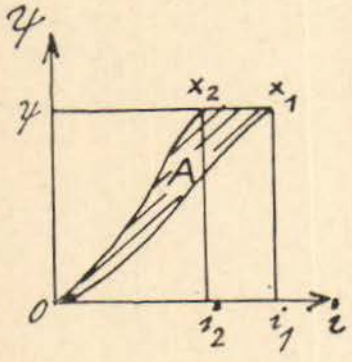
bulunur. $dA = id\psi - dW_m$ olduğunu gözönüne alarak $dA = +dW_c$ ve buradan

$$\vec{F} = +(\text{grad } W_c)_{i = \text{sab.}} \qquad (181)$$

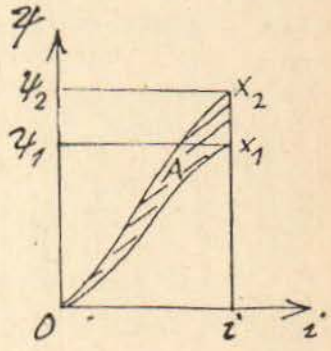
elde edilir. Meselâ F_x bileşeni

$$F_x = + \left(\frac{\partial W_c}{\partial x} \right)_{i = \text{sab.}}$$

olacaktır. $\mu \neq$ sab. için bulunan bu sonuç $\mu =$ sab. için bulunandan farklıdır. Şek. 186 yardımiyle yukarıda yapılan açıklamalar kolayca görülebilir.



Şek. 185



Şek. 186

W_c enerjisi karakteristikle yatay eksen arasında kalan yüzeyle orantılıdır. $A = W_{c2} - W_{c1}$ denklemine göre mekanik iş taranan yüzeyle orantılı olacaktır. Bu yüzeyi ölçerek $F\Delta x = A$ yardımiyle kuvvet hesaplanabilir. W_c ye magnetik koenerji denilmektedir.

$\mu =$ sab. için karakteristik lineer olduğundan $W_c = W_m = i\psi/2$ olacaktır.

$L(x)$ değişimi bilindiği vakit de kuvvet grafik yardımiyle bulunabilir. Bu eğri deneysel olarak elde edilir ve

$$F = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}$$

olacaktır. Her hangi bir x uzaklığına tekabül eden kuvvet bu formül ve eğri yardımiyle hesaplanır.

56. Magnetik alanın iç kuvvetleri.

Magnetik alan içine sokulan bir cisme tesir eden kuvvetin

$$\vec{F} = \oint_S \left[\vec{B} (\vec{n} \cdot \vec{H}) - \frac{1}{2} \vec{n} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \right] dS \qquad (182)$$

integrali yardımiyle hesaplanabileceği aşağıda görülecektir, şek. 187. İntegral içindeki

$$\vec{p} = \vec{B}\,(\vec{n} \cdot \vec{H}) - \frac{1}{2}\,\vec{n}\,(\vec{H} \cdot \vec{B}) \tag{183}$$

ifadesi birim yüzeye düşen kuvveti gösterir. Böylece

$$\vec{F} = \oint_S \vec{p}\, dS \tag{184}$$

yazılabilir.

(183) denklemi kolayca

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\,\vec{B}\,(\vec{n} \cdot \vec{H}) + \frac{1}{2}\,\vec{H} \times (\vec{B} \times \vec{n}) \tag{185}$$

şekline sokulabilir. Bu denkleme göre $\vec{p}$ vektörünün bileşenlerinden biri $\vec{B}$ yönünde ve diğeri ise $\vec{B}$ ye dik yöndedir. Birinci bileşen bir gerilmeye ve ikinci ise bir basınca tekabül eder. Statik alanda görüldüğü gibi $\vec{n}$, $\vec{B}$, $\vec{p}$ vektörleri ayni düzlem içindedir ve $\vec{n}$ ile $\vec{p}$ arasındaki açı $\vec{B}$ tarafından iki eşit parçaya (α) bölünür. $\vec{p}$ nin mutlak değeri hesaplanırsa

$$p = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2} \tag{186}$$

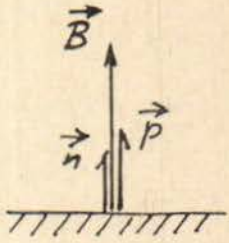
bulunur. Birim yüzeye düşen kuvvet magnetik enerji yoğunluğuna eşittir. Şayet $\alpha = 0$ ise $\vec{B} \times \vec{n} = 0$ olacağından

$$\vec{p} = \vec{n}\frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \vec{n}\, w_m \tag{187}$$

yazılabilir. Her üç vektör yüzeye diktir, şek. 188. $\vec{B}$ vektörü dışarıya veya içeriye doğru yönelebilirse de $\vec{p}$ nin yönü daima dışarı doğrudur. Bu özel hale ferromağnetik cisimlerle hava arasındaki sınır yüzeyinde

rastlanır. Pratikte rastlanan p değerleri oldukça yüksektir. Meselâ $B = 1$ Wb/m² için $p = B^2/2\mu_0 \approx 4.10^5$ N/m² olacaktır.

Şek. 187



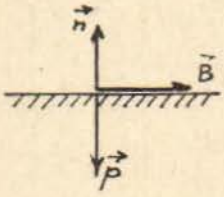
Şek. 188

$\alpha = 90°$ için $\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$ olacağından (183) yardımiyle

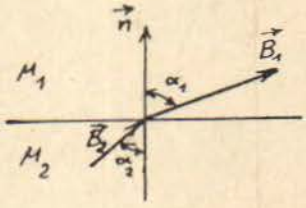
$$\vec{p} = -\vec{n}\, w_m \tag{188}$$

bulunur. $\vec{p}$ kuvveti değerce yukarıdaki gibi olmakla beraber yönü terstir ve bir basınç kuvvetidir, şek. 189.

Şek. 190 da sınır yüzeyinin iki tarafındaki endüksiyonların normal ve teğetsel bileşenlerine tekabül eden gerilme ve basınç kuvvetleri için



Şek. 189



Şek 190

$$\vec{p'}_1 = \vec{n}\frac{B^2_{1n}}{2\mu_1}\,,\quad \vec{p''}_1 = -\vec{n}\frac{B^2_{1t}}{2\mu_1}\,,\quad \vec{p'}_2 = -\vec{n}\frac{B^2_{2n}}{2\mu_2}\,,\quad \vec{p''}_2 = \vec{n}\frac{B^2_{2t}}{2\mu_2}$$

yazılabileceğinden, $B_{1n} = B_{2n}$ ve $H_{1t} = H_{2t}$ olduğunu gözönüne alarak bileşke için

$$\vec{p} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\left(H^2_{1t} + \frac{\mu_1}{\mu_2}H^2_{1n}\right)\vec{n} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1}\left(\frac{B^2_{1t}}{\mu_1} + \frac{B^2_{1n}}{\mu_2}\right)\vec{n} \tag{189}$$

bulunur. Bileşke daima sınır yüzeyine diktir ve $\mu_2 > \mu_1$ için yukarı doğru ve $\mu_2 < \mu_1$ için aşağı doğru yönelir. Böylece geçirgenliği büyük olan ortamın küçük geçirgenlikli ortam içine doğru çekileceği anlaşılır. Cisimler alanın zayıf olduğu tarafa doğru çekilirler.

$\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 = H_{1t} H_{2t} + H_{1n} H_{2n}$ olduğunu gözönüne alarak $\vec{p}$ için

$$\vec{p} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} (\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) \vec{n} \tag{190}$$

yazılabilir.

$\mu_1 = \mu_0$ ve $\mu_2 = \mu_r \mu_0$ koyarak ferromagnetik cisimle hava (veya sıvı) arasındaki sınır yüzeyi için

$$\vec{p} = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r \mu_0} (B^2_{1n} + \mu_r B^2_{1t}) \vec{n} \tag{191}$$

bulunur. $\mu_r > 1$ olduğundan ferromagnetik cisim hava (sıvı) içine doğru çekilecektir Bu formülden faydalanarak elektromiknatısların veya sürekli miknatısların çekme kuvvetini daha doğru olarak hesaplamak kabil olur. Ancak bunun için alan şeklini bilmek gerekir. $B_{1n} \approx B_1$ alınabileceğini gözönüne alarak

$$p = \frac{\mu_r - 1}{2\mu} B^2_1 \approx \frac{B^2_1}{2\mu_0}$$

yazılabilir.

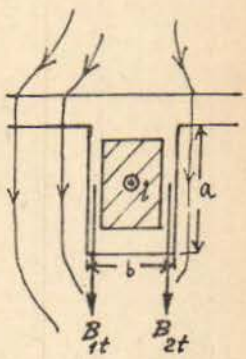
Teğetsel ve normal bileşenlere tekabül eden kuvvetler arasındaki oran $\mu_2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 / \mu_1$ olacağından teğetsel bileşenlere ait kuvvetlerin daha küçük olacağı anlaşılır.

Magnetik alan içindeki akım taşıyan iletkenlere tesir eden kuvvetler de iç kuvvetler yardımiyle hesaplanabilir. İletkenin alanı esas alanı bir tarafta zayıflatıp diğer tarafta kuvvetlendireceğinden iletken alanın zayıfladığı tarafa doğru çekilecektir.

Şek. 191 de elektrik makinalarındaki bir rotor oluğu görülmektedir. Kutupların meydana getirdiği uyarma alanının B— çizgileri yaklaşık olarak diş kenarlarına paraleldir. Dişler içindeki magnetik endüksiyon B_0 ile gösterilirse $H_t = \text{sab.}$ olduğunu gözönüne alarak oluktaki endüksiyon için $B = B_0/\mu_r$ bulunur. Buradan uzunlugu l olan iletkene tesir eden kuvvet için

$$F_1 = \frac{1}{\mu_r} B_0 li$$

bulunur. Kuvvet demirin magnetik geçirgenliği ile ters orantılıdır. Dişlere tesir eden kuvvetler bundan çok büyüktür ve rotorun dönme momentinde en önemli rolü oynarlar. Bu kuvvetleri hesaplayabilmek için uyarma alanından başka iletkenin alanını da hesaba katmak gerekecektir. İki sınır hali yardımiyle şonuçlar kolayca bulunur. Birinci sınır halinde oluğun a derinliği b genişliğinden küçüktür (dar oluk) ve ikinci sınır halinde ise durum tersinedir (geniş oluk). Birinci sınır halinde Amper kanununu oluk çevresine uygulayarak



Şek. 191

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{ds} = (H_{1t} - H_{2t})\, a = i \;, \quad B_{1t} - B_{2t} = \frac{\mu_0 i}{a}$$

yazılabilir. Zira oluğun üst ve alt kenarlarının eğrisel integraldeki payları ihmal edilebilir. Böylece diş kenarlarındaki endüksiyonlar için

$$B_{1t} = \frac{B_0}{\mu_r} + \frac{\mu_0 i}{2a} \;, \quad B_{2t} = \frac{B_0}{\mu_r} - \frac{\mu_0 i}{2a}$$

bulunur. Diş kenarlarına tesir eden kuvvetler zıt yönde olacaklarından l uzunluğu boyunca tesir eden bileşke kuvvet için (191) yardımiyle $(B_{1n} = 0)$

$$F_2 = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_0} (B^2_{1t} - B^2_{2t})\, al = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} B_0 li$$

elde edilir. Buradan rotor demirine tesir eden kuvvetin oluktaki iletkene tesir eden kuvvetden $\mu_r - 1$ defa buyük olduğu anlaşılır. İki kuvvetin toplamı

$$F = B_0 li$$

olacaktır. Bu ise B_0 üniform alanı içinde iletkene tesir edecek olan kuvvettir.

Geniş oluk halinde alt ve üst kenarların payları ihmal edilemiyeceğinden $H_{1t} - H_{2t} = i/a$ yazılamaz. Bununla beraber sonuç olarak yine

$F = B_0 li$ bulunacaktır. İletkenler ister oluklara isterse düz rotor üstüne yerleştirilsin kuvvet ayni kalır. Ancak iletkenlerin oluklara yerleştirilmesi hava aralığının daha küçük yapılabilmesini sağladığı için elverişlidir.

(183) denklemini şöylece çıkarabiliriz:

$\vec{J}$ dağılışı için kuvvet

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B}\, dV = \int_V \text{rot}\, \vec{H} \times \vec{B}\, dV$$

hacimsel integrali yardımiyle bulunur ve kuvvet yoğunluğu

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \tag{192}$$

dir. Bu integral bir yüzey integraline çevrilerek

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}\, dV = \oint_S \vec{p}\, dS$$

yazılabilir. Burada $\vec{p}$

$$\vec{p} = \vec{B}(\vec{n} \cdot \vec{H}) - \frac{1}{2}\vec{n}(\vec{H} \cdot \vec{B})$$

dir.

Maxwell gerilme tansörü

$$T = \mu \begin{pmatrix} H_x^2 - \frac{H^2}{2} & H_x H_y & H_x H_z \\ H_x H_y & H_y^2 - \frac{H^2}{2} & H_y H_z \\ H_x H_z & H_y H_z & H_z^2 - \frac{H^2}{2} \end{pmatrix} \tag{193}$$

şeklindedir ve simetriktir. Maxwell gerilmelerinin fiziksel anlamları statik alande yapıldığı gibi açıklanabilir.

57. Magnetik ve elektriksel kuvvetlerin karşılaştırılması.

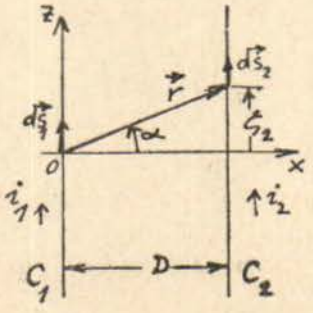
Statik alanda, magnetik alandakine eşit bir kuvvet tesiri elde edebilmek için çok yüksek alan şiddetlerine ihtiyaç vardır. Boyutları ayni olan paralel levhalar ve magnetik kutuplar arasındaki kuvvetlerin ancak $E/B = 3.10^8$m/s olduğu vakit (boşlukta veya havada) eşit olacakları kolayca görülebilir. Elektrik makinalarında endüksiyon 1T ve daha yüksek olduğundan, statik alan makinalarında alanın 3.10^8V/m mertebesinde alınması gerekecektir. Bu gibi yüksek alan şiddetleri izolasyon zorlukları doguracağı gibi stator ve rotor arasında ideal bir boşluk sağlansa bile elektron emisyonu önlenemez.

Bu güçlükleri yenmek için elektriksel sistemin yüzeyini arttırmak düşünülebilir. Magnetik sistemde yüzeyle birlikte devrenin boyutları da büyüyeceğinden, bu bakımdan elektriksel sistem magnetik sistemden daha üstün görünmektedir. Bununla beraber sağlanabilen alan şiddetleri yine de yüksek olmaktadır.

$\vec{B}$ alanı içinde $\vec{v}$ hızı ile hareket eden q yüküne tesir eden kuvveti veren $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ bağıntısına göre magnetik alan hızın yalnız yönünü değiştirebilir ve değerine tesir edemez. Kuvvet yönü daima hareket yönüne dik olduğundan alanın enerjide bir payı olmayacaktır.

58. Örnekler.

1 — Sonsuz uzun iki paralel iletken arasındaki elektrodinamik kuvvet hesaplanacaktır. şek. 192.



Şek. 192

(179) denkleminde $d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 = d\zeta_1\, d\zeta_2$ olacağından $\mu = \mu_0$ koyarak

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{r}}{r^3} d\zeta_2$$

yazılabilir. $\vec{r} = \vec{i}\, D + \vec{k}\zeta_2$, $D/r = \cos\alpha$ ve $\zeta_2 = D \operatorname{tg}\alpha$ olduğunu gözönüne alarak

$$\vec{F}_1 = \vec{i}\, \frac{\mu^0 i_1 i_2}{2\pi D} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_1$$

bulunur. Bileşke sonsuz olmakla beraber birim uzunluk için

$$\vec{f}_1 = \vec{i}\, \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi D}$$

elde edilir. $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$ olacaktır. $i_1 = -i_2 = i$ koyarak iki iletkenli hat için

$$\vec{f}_1 = -\vec{i}\, \frac{\mu_0 i^2}{2\pi D} = -\vec{f}_2$$

bulunur. Ayni yöndeki akımlar çekme tesiri ve zıt yöndeki akımlar ise itme tesiri doğururlar.

Kuvveti

$$\vec{F}_1 = i_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2$$

yardımiyle de hesaplayabiliriz. $d\vec{s}_1 = \vec{k}\, d\zeta_1$ ve $\vec{B}_2 = \vec{u}_\phi \mu_0 i_2/2\pi D$ dir.

Hattın birim uzunluk için endüktansı

$$\bar{L} = \frac{1}{\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{D}{a} + \frac{\mu}{4}\right)$$

olduğundan $\bar{L} = \bar{L}(D)$ dir. Böylece

$$f_2 = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dD} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi D}$$

bulunur. $f_2>0$ olduğundan kuvvet iletkenler arasındaki uzaklığı büyütmeye ve dolayısiyle endüktansı arttırmağa çalışır.

C_2 nin ortak zincir akısı

$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\int_D^\infty \frac{dx}{x}$$

dir. Bu integral ile sınırlı bir değer bulunamazsa da alt sınıra göre türev alarak

$$f_2 = i_2\frac{d\psi_{21}}{dD} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi D}$$

bulunur.

2 — Sonsuz uzun iletkenle ayni düzlemdeki dikdörtgen çevre arasındaki elektrodinamik kuvvet hesaplanacaktır, şek. 193.

ψ_{21} akısı

$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi}\int_D^{a+D}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi}\ln\frac{a+D}{D}$$

olduğundan

$$M = -\frac{\psi_{21}}{i_1} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+D}{D}$$

dir. Bu akı i_2 ile negatif zincirlendiğinden $M<0$ dır. C_2 çevresine tesir eden kuvvet

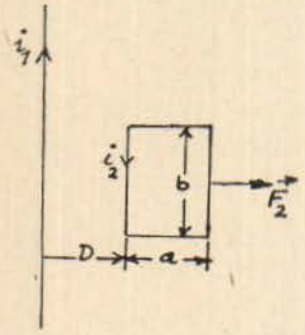
$$F_2 = i_1 i_2\frac{dM}{dD} = \frac{\mu_0 ab}{2\pi D(a+D)}$$

olacaktır. Ayni sonuç

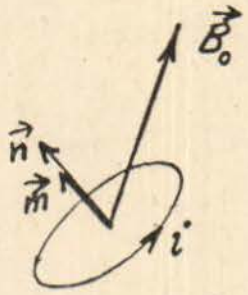
$$F_2 = -i_2\frac{d\psi_{21}}{dD}$$

yardımiyle de bulunabilir. Akım yönlerinden biri değişirse kuvvet yönü de değişir.

3 — $\vec{B}_0$ üniform alanı içinde düzlemsel çevreye tesir eden dönme momenti hesaplanacaktır, şek. 194.



Şek. 193



Şek. 194

Çevre ile zincirlenen akı $\psi = B_0 S \cos\alpha$ olduğundan $\alpha = (\vec{B}_0$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı)

$$M_\alpha = i\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -B_0 Si \sin\alpha = -m B_0 \sin\alpha$$

bulunur. m, çevrenin magnetik momentidir.

4 — İki paralel daire arasındaki elektrodinamik kuvvet hesaplanacaktır, şek, 158.

i_1 akımının C_2 dairesi boyunca meydana getirdiği magnetik endüksiyonun $B_{1\rho}$ bileşeni

$$B_{1\rho}(b, h) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\frac{h}{b\sqrt{(a+b)^2+h^2}}\left[-K + \frac{a^2+b^2+h^2}{(a-b)^2+h^2}E\right]$$

dir. Bu bileşene tekabül eden elektrodinamik kuvvet

$$\vec{F}_2 = i_2(\vec{ds}_2 \times \vec{B}_1)$$

olacağından $\vec{ds}_2 = \vec{u}_\phi b d\phi$ ve $\vec{B}_1 = \vec{u}_\rho B_{1\rho}(b, h)$ koyarak

$$F_{2z} = -i_2 B_{1\rho}(b, h)\int_0^{2\pi} b d\phi = -2\pi b i_2 B_{1\rho}(b, h)$$

bulunur. Eliptik integrallerin modülü

$$k = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b)^2+h^2}}$$

dir. B_{2z} bileşeni için $\vec{u}_\phi \times \vec{k} = \vec{u}_\rho$ olacağından simetriden dolayı bu bileşenin elektrodinamik kuvvetde payı yoktur.

Şayet $b \ll a$ ise küçük daire üzerinde endüksiyonun üniform olduğu kabul edilebilir. Bu üniform endüksiyon ise büyük dairenin ekseni üstündeki değerdir. Böylece

$$M = \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi a^2 b^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}$$

bulunacağından

$$f_z = i_1 i_2 \frac{dM}{dh} = -\frac{3\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2 h i_1 i_2}{(a^2+h^2)^{5/2}}$$

elde edilir. Negatif işaret çekme tesirini belirtmektedir.

İki yassı solenoid arasındaki kuvvet de bu formül yardımiyle hesaplanabilir. Ancak bu durumda formülü $w_1 w_2$ ile çarpmak gerekir.

Kuvveti Legendre serisi yardımiyle de ifade edebiliriz. i_2 akımı tarafından C_1 çevresi boyunca meydana getirilen magnetik endüksiyonun B_{2r} ve $B_{2\theta}$ bileşenleri daha önce görülen serilerde $r = a$, $\theta = \pi/2$ koyarak bulunacaktır, şek. 75, ve $\sin \alpha = b/\sqrt{b^2+h^2}$ dır. $\vec{B}_2 = \vec{u}_r B_{2r} + \vec{u}_\theta B_{2\theta}$ ve $\vec{ds}_1 = \vec{u}_\phi \, a d\phi$ koyarak $i_1 \vec{ds}_1$ elemanına tesir eden kuvvet için

$$d\vec{F}_1 = -i_1 (\vec{u}_\theta B_{2r} - \vec{u}_r B_{2\theta}) \, a d\phi$$

bulunacağından, ikinci terimin elektrodinamik kuvvetde payı olmayacağını gözönüne alarak $(\vec{u}_\theta = -\vec{k})$

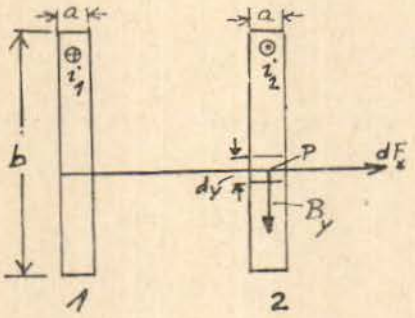
$$F_{1z} = -i_1 B_{2r}(a, \pi/2) \int_0^{2\pi} a d\phi = -2\pi a \, i_1 B_{2r}(a, \pi/2)$$

bulunur. Böylece meselâ $a^2 < b^2 + h^2$ için

$$F_{1x} = -\pi\mu_0 i_1 i_2 \sin\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{b^2+h^2}\right)^{n/2} P^1{}_n(\cos\alpha)\, P_n(0)$$

serisi bulunur.

5 — Dikdörtgen kesitli çok uzun iki paralel çubuk arasındaki elektrodinamik kuvvet hesaplanacaktır, şek. 195.



Şek. 195

i_1 akımı P noktasında $\vec{B}_1 = \vec{i}\, B_{1x} + \vec{j}\, B_{1y}$ endüksiyonunu meydana getirir. B_{1x} bileşeni yalnız düşey doğrultuda bir kuvvet bileşeni vereceğinden çubuklar arasındaki itme kuvvetinde bir payı yoktur. Diğer taraftan

$$B_{1y} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi b}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-y}{d} + \operatorname{arctg}\frac{y}{d}\right)$$

dir. $i_2\, dy/b$ akım elemanına birim uzunluk boyunca tesir eden elektrodinamik kuvvet

$$d\bar{F}_x = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi b^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-y}{d} + \operatorname{arctg}\frac{y}{d}\right) dy$$

olacağından integre ederek

$$\bar{F}_x = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi b^2}\left(2b \operatorname{arctg}\frac{b}{d} - d \ln\frac{d^2+b^2}{d^2}\right)$$

bulunur. Bu formül, çubukların genişliği aralarındaki uzaklık yanında çok küçük olduğu vakit kullanılabilir.

6 — Şalter kolunu açmağa çalışan elektrodinamik kuvvet hesaplanacaktır, şek. 196.

$P(x, 0)$ noktasındaki endüksiyon öne doğru ve

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

olduğundan şalter kolunun dx elemanına

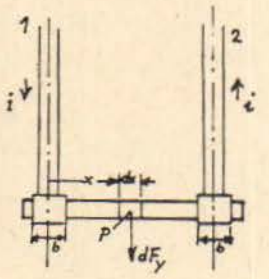
$$dF_y = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$

kuvveti tesir eder. Kontakların genişliği b ile gösterilirse integre ederek

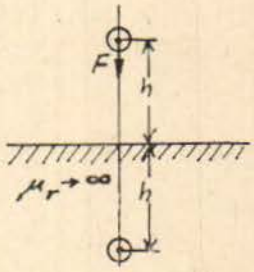
$$F_y = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\int_{b/2}^{d-b/2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\frac{2d-b}{b}$$

bulunur.

7 — Demir yüzeyine paralel olarak yerleştirilen sonsuz uzun iletkene tesir eden kuvvet bulunacaktır, şek. 197.



Şek. 196



Şek. 197

Demir yerine iletkenin demir yüzeyine göre imajı alınarak problem içlerinden ayni yönde ve değerde akımlar geçen iki paralel iletken problemine çevrilir. Böylece iletkenin birim uzunluğuna tesir eden çekme kuvveti için

$$\bar{F} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi h}$$

bulunur.

Yanlış-Doğru Cetveli

Sahife	Satır	Yanlış	Doğru
2	16	Diverans	Diverjans
8	12	$\vec{J}$	$\vec{J}_k$
11	14	div $\vec{D}$	div $\vec{J}$
21	Şek. 20	———	Kenarlar paralel olacak
23	Şek. 22	ρ	ϕ
26	22	$4\pi\pi$	$4\pi\varkappa$
27	15	$2h$	$1/2h$
30	1	a	α
30	13	$\int^{\alpha}$	$\int_0^{\alpha}$
35	18	$x=$	$x=a$
43	Şek. 46	D	P'
50	20	Γ	F
57	6	dV	dV kalkacak
64	2	$h_u A_{2v}$	$h_u A_{2u}$
65	10	ΔA	$\Delta \vec{A}$
69	21	A_z	ΔA_z
73	12	$\cos \alpha_i / r_i$	$I_i \cos \alpha_i / r_i$
79	2	$2\pi\rho$	2π
80	2, 3, 6	$A_n \; B_n$	$a_n \; b_n$
80	6	$n-1$	$n=1$
80	11	$N_n(1)$	$N_n(1) = \frac{2}{2n+1} \; \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
87	2	$-\vec{B}$	$=\vec{B}$
89	5	$+\vec{j}\,\eta$	$-\vec{j}\,\eta$

Sahife	Satır	Yanlış	Doğru
93	1	$n\,0,=$	$n = 0,\ 1,$
94	23	$\partial A_z/\partial x$	$\partial A_z/\partial y$
94	23	$\partial A_z/\partial y$	$\partial A_z/\partial x$
96	20	$k\vec{J}_z$	$\vec{k}J_z$
96	21	J_s	J_z
98	8	$2nk$	$2\pi k$
109	16	$\mp$	$\pm$
119	Şek. 108	$\vec{f}'$	$\vec{f}$
131	16	n	$\vec{n}$
140	1	μ_0	μ
144	11	μ^2	μ_2
154	16	$\partial\vec{A}/dt$	$\partial\vec{A}/\partial t$
157	Şek. 144	———	ψ yönü ters
160	15	ψ_{1k}	ψ_{ik}
163	1	$\mu/4\pi$	$\mu i_1/4\pi$
164	4	tg α	tg β
164	5	tg β	tg α
173	Şek. 162	———	1 ve 2 arasındaki uzaklık d
183	3	İki	2ω
185	4	$J_0(ka)$	$J_1(ka)$
186	7	$J_0(ka)/J_0(ka)$	$J_0(ka)/J_1(ka)$
191	1	$j \varkappa \varkappa \mu$	$j \omega \varkappa \mu$

INDEKS

Akım alanı 1
Akım çizgileri 1
Akım yoğunluğu 1
Amper kanunu 49

Biot-Savart formülü 57

Curie sabiti 120
Diyamagnetik maddeler 116
Diyamagnetik özellik 119

Elektrodinamik kuvvetler 206
Elektrolitik metod 17
Elektrod sistemleri 13

Ferromagnetik maddeler 116
Ferromagnetik özellik 120
Ferrimagnetik özellik 122

Gauss teoremi 50
Girdap akımları 180
Grafik metod 149

Hareket endüksiyonu 155
Histerezis büklümü 117
Histerezis kaybı 201

İletken akımı 7

Joule kanunu 5

Kirşof kanunları 2
Koersitif kuvvet 117
Konveksiyon akımı 7

Langevin fonksiyonu 120

Magnetik akı 50
Magnetik alanın enerjisi 195
Magnetik alan şiddeti 48
Magnetik alanın iç kuvvetleri 218
Magnetik devre 122
Magnetik dipol 82
Magnetik endüksiyon 48
Magnetik enerji yoğunluğu 197
Magnetik geçirgenlik 48
Magnetik karakteristikler 116
Magnetik koenerji 218
Magnetik polarizasyon 115
Maxwell gerilme tansörü 223
Miknatıslanma 112
Miknatıslanmanın yokedilmesi 125

Neumann formülü 161

Ohm kanunu 1
Ortak endüksiyon 159
Ortak endüktans 160

Özdirenç 2
Öz endüksiyon 159
Özendüktans 159
Öziletkenlik 2

Paramagnetik maddeler 116
Paramagnetik özellik 120
Poynting vektörü (kompleks) 182

Quasistasyoner alan 151

Remanens endüksiyonu 117
Rölaksasyon müddeti 3

Sargı akısı 153
Sarım akısı 153
Sınır değeri problemleri 127
Sınır şartları 9, 61
Skaler potansiyel 58
Solenoid 87
Sürekli miknatıslar 123
Süreklilik denklemi 2
Stasyoner elektrik alanı 1

Teklik teoremleri 65
Topraklamalar 18
Transformasyon endüksiyonu 155

Vektör fazör 180
Vektör potansiyel 51

Weiss domeni 120

Yüzeysel akımlar 8
Yüzey olayı 180

Zincir akısı 153