

KESİRLİ BİR ZAMAN-FREKANS ANALİZ YÖNTEMİ

Erol ÖNEN

Aydın AKAN

İstanbul Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Avcılar, 34850 İstanbul
e-posta: {eeerol,akan}@istanbul.edu.tr

Anahtar Kelimeler: Zaman-frekans analizi, kesirli Fourier dönüşümü, Gabor açılımı.

ABSTRACT

We generalize the classical sinusoidal Short Time Fourier Transform (STFT) and the Spectrogram and present a Fractional STFT. The kernel function of this time frequency (TF) method is obtained using the discrete Fractional Fourier Transform (FRFT). The traditional STFT is calculated as the simultaneous Fourier transforms of signal segments generated by a sliding window. Here we address the application of fractional Fourier methods to the TF signal analysis, especially the fractional spectrogram.

$$\begin{aligned} X(n, k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) w(n-m) e^{-j \frac{2\pi k}{N} m} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_n(m) e^{-j \frac{2\pi k}{N} m} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada $x_n(m)$ pencerelemiş yani kısa zamanlı işareti göstermekte olup $w(n)$ sinyali yerel olarak incelemek amacıyla kullanılan penceredir. $x(n)$ işaretinin spektrogramı ise

$$S_{KZFD}(n, k) = \frac{1}{N} |X(n, k)|^2 \quad (2)$$

olarak hesaplanır.

KZFD'nün kullandığı, sabit bir analiz penceresinin zamanda düzgün ötelenmesi ve sinusoidal Fourier kernelinin bir sonucu olarak, dikdörtgen örnekleme kafesi elde edilmiş olur. Böyle bir ZF örnekleme geometrisi Şekil 1'de gösterilmektedir. Burada zamanda 1 örnek ve frekansta $2\pi/N$ aralıklarla yapılan analiz sonucunda bir örnekleme kafesi elde edilmiştir. Pratikte karşımıza çıkan birçok sinyal (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen frekans özellikleri gösterir ve böyle sabit band genişliği ile analiz edilmeye uygun değildir. Analiz edilmekte olan sinyalin zamanda bölütlenmesi sonucunda, sinyalin spektrum özellikleri pencerenin özellikleri ile harmanlanmış olacaktır. Zamanda yüksek bir analiz çözünürlüğü için dar bir pencere (ki frekansta yayılma sonucunu doğurur), aynı zamanda frekansta yüksek bir çözünürlük için geniş bir pencere (ki bu da zamanda yayılma demektir) kullanılmalıdır. Görüldüğü gibi genel olarak bu çözümsüz bir problemdir; KZFD'nün aynı anda hem zaman, hem de frekans çözünürlüğü yüksek yapılamaz [1].

Önceki çalışmalarda KZFD'nün ZF yerelleşmesini arttırmak amacıyla pencere çarpı ile modüle edilmekte, veya sinyalin zamanla değişen frekans karakteristiğine uyumlu yapılmaktadır [4, 5]. Bu yöntemlerin bir çoğu sinyali en iyi temsil eden analiz parametrelerini bulabilmek için çok sayıda deneme yapmaktadır. Dolayısı ile çok uzun ve zaman alıcı hesaplamalar gerekmektedir.

1. GİRİŞ

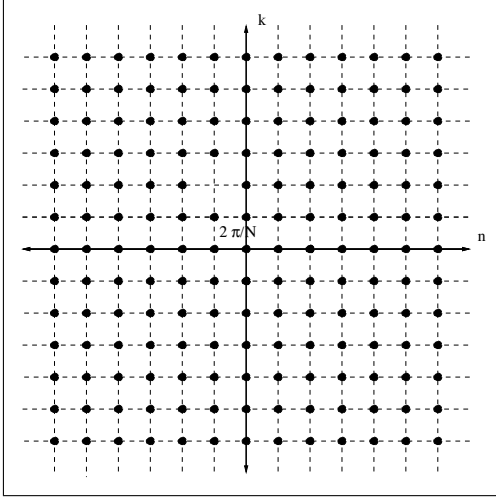
Zaman-Frekans (ZF) analizi durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen frekans bileşenlerini incelemek veya güç dağılımını kestirmekte kullanılan bir yöntemdir [1]. ZF analizinde bazı temel hedefler, sinyal enerjisinin birleşik ZF düzlemine dağılımını yüksek çözünürlük ile, girişim terimleri (cross-terms) ve negatif değerler olmaksızın ve kenar (marginal) yoğunlukları sağlayarak elde etmektir. Ancak analiz yöntemlerinin getirdiği bazı kısıtlamalar sonucu bunların tamamını aynı yöntemde elde etmek genel olarak mümkün değildir [2]. Bu amaçla çok sayıda ZF analiz yöntemi önerilmiştir: bunlardan bazıları kısa zamanlı Fourier dönüşümü, Cohen sınıfı ZF dağılımları (ZFD), Cohen-Posch sınıfı pozitif ZFD, Gabor ZF açılımları, dalgacık dönüşümleri, evrimsel izge analizi olarak sayılabilir [1, 3].

Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KZFD) zamanda kayan bir pencere yardımıyla bölütlenen sinyalin Fourier dönüşümü alınarak elde edilmektedir. İncelenen sinyalin, pencere ile bölütlenen kısmının durağan kaldığı varsayılarak spektrum kestirimi yapılmaktadır. Ayrık zamanlı bir $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ sinyalinin KZFD şu şekilde verilmektedir [1]:

¹Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No.: UDP-12/21062002 and BYP-6/05062002.

Son yıllarda kesirli Fourier dönüşümü (KFD) [6], kesirli Fourier serisi [7], KFD'nin sayısal olarak hesaplanması ve uygulamaları [8, 9] ve ayrık zamanlı KFD [10, 11] tanımı üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmada ise, kesirli Fourier dönüşümü zamanla değişen hale genişletilerek kesirli bir ZF analizi sunulmaktadır. Dolayısı ile ayrık zamanlı sinyallerin zamanla değişen frekans bileşenlerinin yüksek çözünürlük ile gösterilebilmesi için dikdörtgen olmayan bir örnekleme kafesi üzerinde, kesirli bir KZFD verilmektedir.



Şekil 1. Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümünde kullanılan ZF örnekleme kafesi.

2. KESİRLİ FOURIER ANALİZİ

Klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş hali olan Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), bir sinyali zaman domaini ile frekans domaini arasında bir u domaininde temsil eder. u domaini t - ω düzleminin α açısı kadar dönmesi ile elde edilebilmektedir. Öyle ki bu açı $\alpha = \pi/2$ olması durumunda u , frekans domaini ile ve $\alpha = 0$ olması durumunda da zaman domaini ile çakışmaktadır.

Sürekli zamanlı Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş hali olup şu şekilde tanımlanabilir [6]:

$$X_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot u^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \csc \alpha \cdot u \cdot t^2} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot t^2} x(t) dt$$

olarak verilir. Yukarıdaki eşitlikte $\sqrt{1-j \cot \alpha}$ faz terimi $(-\pi/4 - \pi/4)$ aralığında sınırlıdır. (3) eşitliği $\alpha = \pi/2$ için klasik Fourier dönüşümüne indirgenmektedir. KFD çeşitli sinyal işleme problemlerine uygulanmış ve ayrık zamanlı KFD üzerinde çeşitli çalışmalar [10, 11] yapılmış ve birçok yöntem önerilmiştir.

Ayrık zamanlı kesirli Fourier dönüşümü (AKFD) için çok farklı tanımlar verilmesinin sebebi önerilen yöntemlerin, KFD'nin sahip olduğu üniterlik, tersinirlik,

açısal toplanabilirlik, ve dönüşüm çekirdeğinin dik olması gibi önemli özelliklerden bir kısmının tam olarak sağlayamamasıdır [11]. S.C. Pei ve J.J. Ding tarafından [11]'de AKFD için "kapalı form" bir tanım önerilmiş ve bu şekilde verilen dönüşümün dik bir dönüşüm çekirdeğine sahip olduğu, üniterlik ve tersinirlik özelliklerini taşıdığı gösterilmiştir. Önerilen yöntem, sürekli zamanlı kesirli Fourier dönüşüm çekirdeğinin ve dönüşümü alınacak işaretin birbirine bağımlı şekilde örneklenmesine dayanmaktadır. $-N \leq n \leq N$ ve $-M \leq m \leq M$ olmak üzere, $x(t)$ giriş işareti ve $X_\alpha(u)$ dönüşüm işlevi, sırası ile Δt ve Δu örnekleme adımları ile

$$y(n) = x(n\Delta t) \text{ ve } Y_\alpha(m) = X_\alpha(m\Delta u)$$

şeklinde örneklenecek, (3)'deki KFD eşitliği

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \Delta t e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{-j \csc \alpha \cdot nm \Delta t \Delta u} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n)$$

Yukarıdaki eşitlik, dönüşüm matrisi $F_\alpha(m, n)$

$$F_\alpha(m, n) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \Delta t e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times e^{-j \csc \alpha \cdot nm \Delta t \Delta u} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} \quad (3)$$

olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Y_\alpha(m) = \sum_{n=-N}^N F_\alpha(m, n) y(n) \quad (4)$$

Benzer şekilde AKFD kullanılarak zaman işareti

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M F_\alpha^*(m, n) Y_\alpha(m), \quad M \geq N \quad (5)$$

Yukarıdaki eşitlikte $y(n)$ 'in elde geri edilebilmesi koşulundan örnekleme parametreleri arasında $|S|$, $2M+1$ 'e göre asal bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta u \Delta t = \frac{S 2\pi \sin \alpha}{2M+1} \quad (6)$$

ilişkisi elde edilir [11]. Bu koşulu (3) eşitliğinde kullanarak ve $S = \text{sgn}(\sin \alpha) = \pm 1$ olarak seçilerek, $\sin \alpha < 0$ ve $\sin \alpha > 0$ durumları için iki farklı AKFD bağıntısı elde edilmiş olur:

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{-j \frac{2\pi nm}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n) \quad (7)$$

$\sin \alpha > 0$ ise ve

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{-\sin \alpha + j \cos \alpha}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi nm}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n) \quad (8)$$

$\sin \alpha < 0$. Burada, $\Delta u \Delta t = S2\pi \sin \alpha / (2M + 1)$ ve $M \geq N$ koşulları sağlanmalıdır. Ayrıca $\alpha = k\pi$, k tamsayı olması halinde uygun örnekleme parametreleri bulunması mümkün değildir. Bu durumda KFD tanımından

$$Y_\alpha(m) = \begin{cases} y(m), & \alpha = 2k\pi; \\ y(-m), & \alpha = (2k + 1)\pi. \end{cases} \quad (9)$$

Böylece AKFD'nin tam tanımı (7), (8) ve (9) eşitlikleri ile verilmiş olur. Bu çalışmada KZFD'de kullanılan klasik DFT yerine AKFD kullanılarak ayrık, kesirli kısa zamanlı bir zaman-frekans yöntemi önerilmektedir.

3. KESİRLİ KISA ZAMANLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Frekans içeriği özellikle doğrusal biçimde değişen işaretler (çırıplar) birçok pratik uygulamada karşımıza çıkmaktadır. Bu işaretlerin zaman frekans analizinde uygun bir yaklaşım kesirli Fourier analizi olacaktır. Dolayısı ile bu çalışmada kolay gerçekleştirilebilir bir ZF yöntemi olan KZFD'nün ayrık zamanlı işaretler için kesirli hali ortaya konmaktadır. Bu anlamda ayrık zamanlı bir $y(n)$ işaretinin ya da sürekli zamanlı $x(t)$ işareti Δt örnekleme periyodu ile örneklenecek elde edilmiş $x(n\Delta t)$ işareti için Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KKZFD) şu şekilde tanımlanabilir:

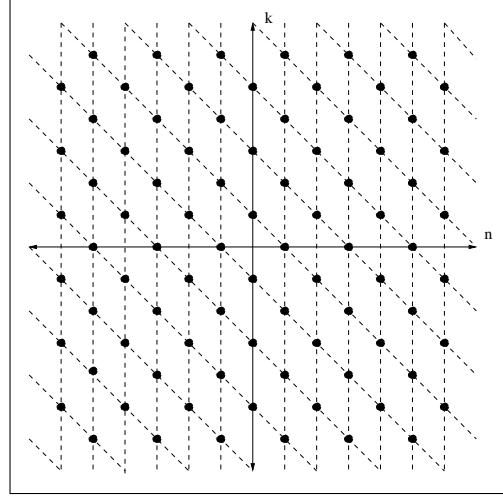
$$Y_\alpha(n, m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times \sum_{k=-N}^N e^{-j \frac{2\pi km}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot k^2 \Delta t^2} y(k) w(n - k) \quad (10)$$

$\sin \alpha > 0$ ise ve

$$Y_\alpha(n, m) = \sqrt{\frac{-\sin \alpha + j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \times \sum_{k=-N}^N e^{j \frac{2\pi km}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot k^2 \Delta t^2} y(k) w(n - k) \quad (11)$$

$\sin \alpha < 0$. Burada $y(k)w(n - k)$ pencerelenmiş işareti göstermekte olup, $w(k)$ penceresi de $x(\cdot)$ giriş işareti ile aynı örnekleme adımı kullanılarak $w(k) = w(k\Delta t)$ şeklinde sürekli zamanlı $w(t)$ penceresinden elde edilmiştir. $\alpha = \pi/2$ olması durumunda bu KKZFD, klasik KZFD'ye dönüşmektedir. Önerilen bu kesirli analiz yöntemi ZF düzleminde dikdörtgen olmayan bir örnekleme kafesi oluşturacaktır. Böyle bir örnekleme kafesi Şekil 2'de gösterilmektedir. Paralelkenarlar şeklindeki bu ZF analizinde, doğrusal çırp biçimindeki işaretlerin gösteriminde sinüsoidal analize göre çok daha yüksek yerleşme sağlayacaktır. Sonuç olarak kesirli spektrogram ise KKZFD'nin genlik karesi olarak tanımlanabilir: $S_\alpha(n, m) = |Y_\alpha(n, m)|^2$. 4. bölümde bazı işaretlerin kesirli spektrogramı elde edilmiş ve gösterilmiştir.

4. BENZETİM SONUÇLARI



Şekil 2. Önerilen Ayrık Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümünde kullanılan ZF örnekleme kafesi.

Frekansı $0.3\pi - \pi$ arasında değişen (zaman eksenine $\pi/4$ rad. açı yapan) bir doğrusal çırp işareti $\alpha = \pi/2$, $N = 128$, $M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ ile analiz edilmiş ve sinüsoidal spektrogram $S_{KZFD}(n, k)$ Şekil 3'de verilmiştir. Aynı işaret $\alpha = \pi/4$, $N = 128$, $M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ ile kesirli analiz edilmiş ve $S_\alpha(n, m)$ Şekil 4'de gösterilmiştir. Bu durumda işaretin spektrogramının kesirli düzlemde α açısı ile dönmüş olarak ortaya çıkmaktadır.

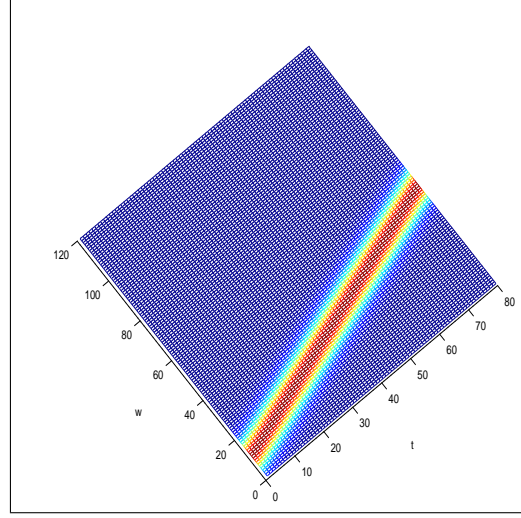
5. SONUÇ VE YORUMLAR

Bu çalışmada, ayrık zamanlı sinyaller için bir kesirli kısa zamanlı Fourier dönüşümü verilmektedir. Bu dönüşüm özellikle frekans içeriği doğrusal olarak değişen işaretlerin zaman-frekans analizinde ve yüksek çözünürlüklü güç izgesi elde etmek amacıyla kullanılacaktır. Benzetim sonuçları dönüşümün ZF düzleminde zaman ve frekans eksenlerinin dönmeleri ile yeni bir eksen takımı tanımlandığını göstermektedir.

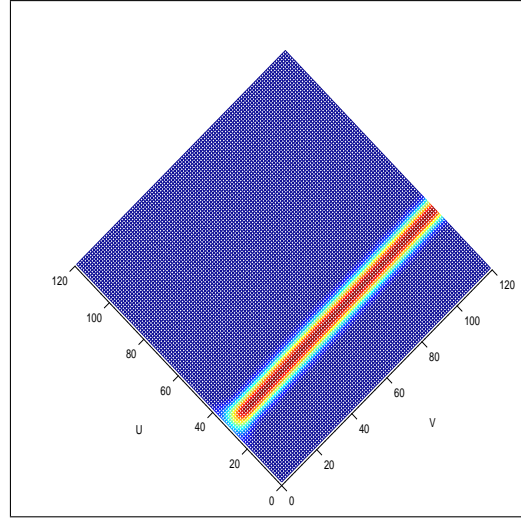
KAYNAKLAR

- [1] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [2] Baraniuk, R.G., ve Jones, D.L., "Shear Madness: New Orthonormal Bases and Frames Using Chirp Functions," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 41, No. 12, ps. 3543-3549, Aralık. 1993.
- [3] Akan, A., and Chaparro, L.F., "Multi-window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis," *Signal Processing*, Vol. 63, pp. 249-262, Dec. 1997.
- [4] Akan, A., ve Chaparro, L.F., "Evolutionary Chirp Representation of Non-stationary Signals via Gabor Transform," *Signal Processing*, Cilt. 81, No. 11, sf. 2429-2436, Kasım. 2001.

- [5] Bultan A., "A Four-Parameter Atomic Decomposition of Chirplets," *IEEE Tans. on Signal Proc.*, Cilt. 47 sf. 731-745, 1999.
- [6] Almeida, L.B., "The Fractional Fourier Transform and Time-Frequency Representations," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 42, Cilt. 11, sf. 3084-3091, Kasım. 1994.
- [7] Pei, S.C., Yeh, M.H., ve Luo, T.L., "Fractional Fourier Series Expansion for Finite Signals and Dual Extension to Discrete-Time Fractional Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 47, No. 10, sf. 2883-2888, Ekim. 1999.
- [8] Özaktaş, H.M., Arıkan, O., Kutay, M.A., and Bozdağı, G., "Digital Computation of the Fractional Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 44, no. 9, pp. 2141-2150, Sep. 1996.
- [9] Kutay, M.A., Özaktaş, H.M., Arıkan, O., and Onural, L., "Optimal Filtering in Fractional Fourier Domains," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 45, no. 5, pp. 1129-1142, May 1997.
- [10] Candan Ç., Kutay, M.A., ve Özaktaş, H.M., "The Discrete Fractional Fourier Transform," *Trans. on Signal Proc.*, sf. 1329-1337, Mayıs 2000.
- [11] Pei, S.C., ve Ding, J.J., "Closed-Form Discrete Fractional and Affine Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 48, no. 5, sf. 1338-1353, Mayıs 2000.



Şekil 3. $\pi/4$ rad. açılı çırp işaretinin klasik spektrogramı.



Şekil 4. Aynı çırp işaretinin $\alpha = \pi/4$ ile kesirli spektrogramı.