Gönderim Tarihi: 06.01.2017, **Kabul Tarihi:** 15.03.2017

Tanım Uzayı Değişkeni İle Değişen Bazı Sıradan Doğrusal Sistemler İçin Analitik Çözüm Yöntemi

An Analytical Solution of Certain Classes of Ordinary Linear Domain Varying Systems

Veysi Gökhan[1], Hasan Güneyli[1], Arif Nacaroğlu[1]

[1]Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü
Mühendislik Fakültesi, Gaziantep Üniversitesi
veysi.gokhan@gmail.com, guneylihasan@hotmail.com, arif1@gantep.edu.tr

Özet

Bu çalışmada tanım uzayı (domeyn) değişkeni ile değişen sıradan doğrusal sistemlerin analitik olarak çözülebilir olması için yeni bir sınıflandırma tanımı yapılmıştır. Önerilen yeni dinamik sistem sınıfi için uygun dönüşümlerin elde edilmesi ve çözülmesi yöntemi açıklanmıştır. Her ne kadar zamanla değişen birinci derece sıradan doğrusal sistemlere ait denklemlerin çözülebilmesi görece olası olsa da ikinci ve daha üst dereceli sistemlerde matematiksel modelin ancak belli ve sınırlı özelliklere sahip olması durumunda çözümleri bulunabilir. Bu tür sistemlerin çözülebilir olması, uygun dönüşümler uygulanarak sistemlerin tanım uzayı değişkeni ile değişmeyen sabit katsayılı sistemlere dönüşebiliyor olması ile ilişkilidir. Bu güne kadar yapılan çalışmalarda özdeğerleri belli özellikler taşıyan sistemlerin çözülebilir olduğu gösterilmiştir.

Dinamik sıradan sistemin analitik olarak çözülebilir olduğunun belirlenmesi sistemin özdeğerlerinin yapısı ile doğrudan ilişkilidir. Bütün bu tanımlar sıradan diferansiyel denklemlere dönüşebilen parçalı diferansiyel denklemler için de geçerlidir. Bu çalışmada, özdeğerlerden yola çıkılarak yeni bir çözülebilir grup tanıtılmıştır.

Anahtar kelimeler: *tanım uzayı değişkeni ile değişen, zamanla değişen sistemler, sıradan doğrusal sistemler.*

Abstract

In this study, the new solvable class of ordinary linear domain varying system is presented. The transformation method for proposed class of domain varying systems into domain independent systems is given. Although the solution of the first order linear or nonlinear ordinary dynamic systems is possible if they have some specific features, second or higher order ordinary domain varying linear differential equations can be solved if they have only very specific characteristics and conditions. Solvability of the domain varying systems are dependent on if the possible transformation matrices can be found to transform such systems into domain invariant form or not. In litearature, only very limited form of the domain varying linear system solutions are presented. The solvability of ordinary dynamic systems depends on the eigenvalues of the systems. The method presented here is also valid for the solution of the partial differential systems which can be transformed into ordinary form using separation of variable method.

In this study, a new class of solvable dynamic systems is presented owing to the eigenvalues of the system.

Keywords: *domain varying systems, time varying systems, ordinary linear systems*

1. Giriş

Tanım kümesi değişkeni ile değişen veya değişmeyen n boyutlu sıradan doğrusal sistemler, giriş-çıkış ilişkisini veren n dereceli bir sıradan doğrusal diferansiyel denklem ile modellenmektedir. Diferansiyel modelin katsayılarının ve dolayısıyla özdeğerlerinin bazı özelliklere sahip olması, matematiksel modelin analitik olarak çözülebilir olması ile doğrudan ilişkilidir. Katsayıların sabit (tanım kümesinden bağımsız) olması sistemin belirli aralıkta çözülebilir olmasını (Laplace gibi yöntemlerle) sağlar. Ancak katsayıların tanım kümesi değişkenine bağlı olması, sistemin analitik çözümünün bulunabilir olmasının bazı ön şartlara bağlı olmasına sebep olur.

Sistem modellemesinde giriş-çıkış ilişkisini veren n dereceli sıradan doğrusal denklem yerine, bazı durum değişkenleri üretilerek, birinci dereceli ve birbiri ile ilişkili n tane sıradan diferansiyel denklem tanımlanması sistem kullanımını çeşitlendirdiği için tercih edilmektedir. Bu tür sistemlerde çözüm her bir durum değişkeni için elde edilebildiğinden çıkış değerinin değişik durum değişkeni uçlarından alınmasıyla kullanım çeşitliliği sağlanabilmektedir. Bu nedenle, tanım kümesi değişkeni ile değişen (bu çalışmada bundan sonra tanım kümesi olarak zaman) n boyutlu birinci dereceli sıradan doğrusal sistemler

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad A(t)\begin{bmatrix} {}^{2} \\ \vdots \end{bmatrix} + B(t)\begin{bmatrix} {}^{2} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{1}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Burada durum değişkenlerini, durum değişkeninin zamana göre türevini, nxn boyutlu A(t) ve nxm boyutlu B(t) katsayı vektörlerini ifade etmektedir. A(t) ve B(t) vektörlerinin elemanları devre elemanları ile doğrudan ilişkilidir ve devre elemanlarının uç ilişkilerinin zamana bağlı olup olmamaları tüm sistemin zamana bağlı olup olmaması sonucunu ortaya çıkartır. Zamanla değişen kapasite, direnç, bobin, kazanç gibi değerler zamanla değişen sistem modelleri ile sonuçlanır. Zamanla değişmeyen (sabit katsayılı) sistemlerin kolay ve genel bir çözümü mevcuttur ve sisteme giriş uygulanmadığı (u(t)=0 iken), yani homojen zamanla değişmeyen sistemler için A(t)=A olduğundan çözüm

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) \tag{2}$$

olarak tanımlanır [1]. Ancak A matrisinin zamanla değişiyor olması durumunda eşitlik (2)'de verilen çözüm geçerli değildir. Bu durumda analitik çözümün var olması, sistemin zamanla değişmeyen sabit katsayılı sisteme dönüştürülebiliyor olması ile olasıdır. Zamanla değişen sistemlerin zamanla değişmeyen sistemlere dönüşümünü sağlayan genel bir dönüşüm yöntemi bu güne kadar ispatlanamamıştır ve yalnızca bazı özel durumlar için dönüşüm matrisleri tanımlanabilmektedir [2].

Eğer sistem matrisi A(t) sabit elemanlı olmamakla birlikte sabit özdeğerli bir matris ise zamanla değişen sistem sınıfı olarak tanımlanır ve

$$A_1A(t) - A(t)A_1 = dA(t)/dt \tag{3}$$

ilişkisini sağlayan matrisi [3] ile oluşan

$$T(t) = e^{A_1 t} \tag{4}$$

dönüşüm matrisi

$$x(t) = T(t)z(t) \tag{5}$$

bağıntısı ile zamanla değişen $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sistemini zamanla değişmeyen

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) \tag{6}$$

sistemine dönüştürür ve dönüştürülmüş sistemin çözümü

$$z(t) = L^{-1}[sI - \bar{A}\,]^{-1} \;\; z(t_0) = e^{\bar{A}(t-t_0)}z(t_0) \tag{7}$$

olduğundan [4], bulunan $z(t)$ çözümü aynı dönüşüm matrisi (T(t)) ile $x(t)$ sistemine geri dönüştürülür ve

$$x(t) = T(t)z(t) = e^{A_1t}e^{\bar{A}t}e^{A_1t_0}\,x(t_0) \tag{8}$$

olarak elde edilir.

Eğer $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sisteminin özdeğerleri sabit değil ise, özdeğerler arasında bulunabilecek başka ilişkiler dönüşüm matrisinin bulunmasına yardımcı olabilir. Örneğin, eğer $A(t)$ matrisinin özdeğerleri herhangi bir sürekli zaman fonksiyonunun sabit katları ise bu tip sistemler için $(A_h sınıfı)$

$$A_1A(t) - A(t)A_1 = \frac{\dot{A}(t)}{h(t)} - \frac{\dot{h}(t)A(t)}{h^2(t)} \tag{9}$$

ilişkisini sağlayan sabit elemanlı matrisi bulmak mümkündür [2,3]. Bu ilişkide $h(t)$ özdeğerlerin taban fonksiyonudur ve öz değerler $\mu_1 = c_1h(t) \ldots .\mu_n = c_nh(t)$ şeklindedir. Bu sınıfa giren sistemlerin dönüşüm matrisi

$$T(t) = e^{A_1\int_{t_0}^{t} h(k)dk} \tag{10}$$

olarak tanımlanır. $x(t) = T(t)z(t)$ dönüşümü sistemi zamanla değişmeyen sisteme dönüştüreceğinden çözüm A_1 sınıfı sistemlerde olduğu gibi elde edilir.

Eğer zamanla değişen doğrusal sistemin özdeğerleri bu iki özelliği de (sabit veya bir fonksiyonun katı) taşımıyorsa, o sistemin çözümünü sağlayacak dönüşüm matrisinin bulunmasını sağlayan genel bir yöntem olmadığından, en iyimser yaklaşımla, şanslı bir deneme yanılma girişiminin

$$\bar{A} = T^{-1}(t)A(t)T(t) - T^{-1}(t)\,\dot{T}(t) \tag{11}$$

denklemini sağlaması beklenir [2].

2. Yeni Bir Çözülebilirlik Şartı

Zamanla değişen sistemlerin modellenmesinde kullanılan yaklaşım $A(t)$ matrisinin yapısını değiştirebilir ancak sistemin özdeğerlerini değiştirmez. $A(t)$'nin yapısını değiştiren kanonik gerçekleştirme yöntemleri ile aynı özdeğerler için $A(t)$ değişik şekillerde yazılabilir [5,6].

Sistemimizin özdeğerleri A_1 ve A_h sınıfları için gereken özellikleri taşımıyor ancak

$$\mu_1 = t^{k-1} - 1 \text{ ve } \mu_2 = t^{k-1} + 1 \tag{12}$$

şeklinde ise bu özdeğerlere sahip ikinci derece sistemin durum-uzay denklemi

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t^{k-1} - t & 1\\ -t^2 + 1 & t^{k-1} + t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemdeki $A(t)$ matrisinin girdileri k'nıncı dereceden polinomlar içermektedir. Ancak öz değerleri (12) denklemini sağlar. Bu sistemi (5)'te verilen dönüşüm ile zamanla değişmeyen sisteme dönüştüren dönüşüm matrisi

$$T(t) = e^{t^k/k} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

olarak önerilmektedir. Bu dönüşüm ile tanımlanan zamanla değişen sistemin her hangi bir k için (k=1,2,…) $\bar{A}$ zamanla değişmeyen sisteme dönüştürmektedir ve her k için

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilmektedir. Bu dönüşüm uygulanarak elde edilen $\dot{z}(t) = \bar{A}z(t)$ sisteminin çözümü ters dönüşüm uygulanarak, zamanla değişen sistemin çözümü

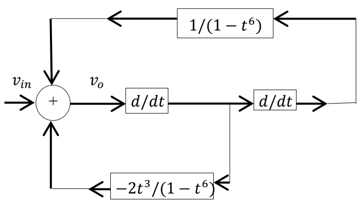
$$x(t) = T(t)e^{\bar{A}(t-t_0)}T^{-1}(t_0)x(t_0) \tag{15}$$

olarak elde edilir.

Gönderim Tarihi: 06.01.2017, **Kabul Tarihi:** 15.03.2017

3. Örnek

İkinci derece zamanla değişen doğrusal sistemin işaret akış diyagramı Şekil.1'de gösterildiği şekilde ise,



Şekil 1: İkinci dereceden zamanla değişen sistem

sistemin giriş-çıkış ilişkisini veren ikinci derece diferansiyel denklem

$$\ddot{v}_o(t) - 2t^3\dot{v}_o(t) + (t^6-1)v_o = (t^6-1)v_{in} \quad (16)$$

şeklinde olur. Sistemin durum-uzay tanımının tek yapılı (homojen) karşılığı ise

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3-t & 1\\ -t^2+1 & -t^2+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \quad (17)$$

şeklinde yazılır. Sistemin özdeğerleri ve $\mu_1 = t^3 - 1$ ve $\mu_2 = t^3 + 1$'dir ve (12)'de verilen şartı sağlamaktadır. Zamanla değişen örnek sistemin sabit katsayılı sisteme dönüştürülmesi için

$$T(t) = e^{t^4/4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}$$

dönüşüm matrisi kullanılır ve dönüşen sistemin matematiksel modeli

$$\dot{z}(t) = \bar{A}\,z(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}z(t)$$

ve $z(t)$ için çözüm $e^{\bar{A}(t-t_o)}z(t_0)$ olur. Bu çözüme ters dönüşüm uygulandığında, başlangıç anı $t_0 = 0$ ve başlangıç değeri $x(t_0) = x_o$ alındığında

$$x(t) = \varphi(t,0)x_0 = T(t)e^{\bar{A}(t-0)}T(0)^{-1}x_0$$

$$= \begin{bmatrix}1 & t\\ t & t^2+1\end{bmatrix} x_0$$

sonucu elde edilmektedir.

Sistemin girişi de hesaba katıldığında giriş ile çıkış arasındaki genel çözümü veren denklem

$$v_o(t) = C(t)\varphi(t,0)x_0 + C(t)\int_0^t \varphi(t,\tau)B(\tau)v_{in}(\tau)d\tau + D(t)$$

şeklinde elde edilir. Burada C ve D, sırasıyla durum değişkenlerini ve girdiyi çıkış ile ilişkilendiren matrislerdir.

4. Sonuç

Tanım kümesi değişkeni ile değişmeyen sıradan doğrusal sistemlerin tümü için analitik çözüm yöntemi mevcuttur. Ancak tanım kümesi değişkeni ile (genellikle zaman) değişen sıradan doğrusal sistemlerin tümü için geçerli olan genel bir analitik çözüm henüz tanımlanamamıştır. Bu nedenle, matematiksel modeli, oluşturulan her zamanla değişen sıradan doğrusal sistemler için farklı ve o sisteme özel dönüşüm matrisinin bulunması zorunluluğu vardır. Bulunan dönüşüm matrisi sistemi zamanla değişmeyen bir sisteme dönüştürebileceği gibi, analitik çözümü bilinen bir sınıfa da dönüştürebilir. Ancak ideal olan bu dönüşüm ile sistemin kolay çözülebilen sabit katsayılı bir sisteme dönüştürülebilmesidir.

Bu çalışmada özdeğerleri (12) numaralı denklemde verilen şekilde olan sistemler için uygun bir dönüşüm matrisi ve analitik bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Dönüşüm matrisi, sistemi, zamanla değişmeyen doğrusal bir sisteme dönüştürmektedir ve çözüm bilinen yöntemlerle kolaylıkla elde edilmektedir.

5. Kaynaklar

[1] B. Kolman, D. R. Hill, *Elemantary Linear Algebra*, Pearson Prentice Hall, (2004) 213-225.

[2] M. Y. Wu, *Solution of certain classes of linear time varying systems*, Int. Journal of Control, 31(1) (1980)11-20.

[3] M. Y. Wu, *Solution of certain classes of linear time varying systems*, Int. Journal of Control, 31(5) (1980) 937-945.

[4] C. R. Wylie, L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, Mc Graw Hill, (1995) 857-914.

[5] H. Güneyli, *A new solvable class linear time varying system*, M. Sc. Thesis, Gaziantep University, 2011.

[6] İ. Dal, *Development of a solvable class of linear time varying systems,* M. Sc. Thesis, Gaziantep University, 2014.

Veysi Gökhan

1990 yılında Ağrı'da doğdu. Gaziantep Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği (İngilizce) Bölümü'nden 2014 tarihinde mezun oldu.

Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Devreler ve Sistemler Anabilim Dalı'nda "Görüntü İşleme Uygulamalarında Hızlı Gauss Filtre Tasarımı (Desing of the Fast Gaussian Filters for Image Processing Aplications)" konusunda yüksek lisans çalışmalarına devam ediyor. Eksim Holding bünyesinde faaliyet gösteren Dicle Elektrik Dağıtım Şirketi'nde Endeks Okuma Birimi bölge sorumlu mühendisi olarak çalışıyor. Ailenin en büyük çocuğudur ve bekardır. Şu anki ilgi alanları arasında Görüntü İşleme, Enerji Sistemleri, Programlama, Telekominikasyon ve Elektrik Dağıtım alanları vardır. Elektrik Mühendisleri Odası Elektrik İç Tesisat Hazırlama, Elektrik Tesislerinde Topraklama, C# ve Matlab eğitimlerini katılımda bulunmuştur.

Hasan Güneyli

1981 yılında Diyarbakır'da doğdu. Gaziantep Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği (İngilizce) Bölümü'nden 2008 tarihinde mezun oldu.

Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Devreler ve Sistemler Anabilim Dalında "Zamanla Değişen Doğrusal Sistemlerde Çözülebilir Yeni Bir Sınıf (A New Solvable Class Linear Time Varying System)" konusunda yüksek lisans çalışmasını 2011 yılında tamamladı. Teknik Terimler Sözlüğü (Kürtçe-Türkçe-İngilizce), Matematîk (Kürtçe, Orta öğretime yönelik) ve Fizîk (Kürtçe, Liseye yönetlik) kitaplarının yazarıdır. Eksim Holding bünyesinde faaliyet gösteren Dicle Elektrik Dağıtım AŞ'de Denetçi olarak çalışıyor. Ailenin 11 çocuğundan ortanca çocuğudur. Evli ve bir çocuk babasıdır. Elektrik Mühendisleri Odasında çeşitli görevler yürütmüştür.

Arif Nacaroğlu

1958 yılında İstanbul Fatih'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1981 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Gaziantep Mühendislik Fakültesi'nden Elektrik Mühendisi unvanı ile mezun oldu. Sırasıyla 1983 yılında yüksek lisans, 1989 yılında doktora çalışmalarını Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde bitirdi. Devreler ve Sistemler Anabilim Dalı'nda 1993 yılında doçent ve 1999 yılında profesör unvanlarını aldı. Halen çalışmalarını analog ve sayısal devre analizi ve tasarımı, sinyal işleme, doğrusal, doğrusal olmayan, zamanla değişen sistemler, süzgeç tasarımları gibi konularda sürdürmektedir.

Halen Gaziantep Üniversitesi'nde öğretim üyesi olarak yaşamını sürdürmekte olan Arif Nacaroğlu iki dönem EMO Gaziantep Şube Başkanlığı görevinde bulundu. Nacaroğlu güncel görüşlerini Evrensel Gazetesi'nde haftalık yazılarıyla okuyucularla paylaşmaktadır.